S.Ayrinhac (UPMC)

Acoustique non-linéaire
exercices corrigés

Exercice I. Dérivées partielles

1. Que vaut $\frac{\partial z(x,y)}{\partial x}$ dans les cas suivants ?

$$z = 2x + y \tag{1}$$

$$z = x^2 y \tag{2}$$

2. Quelle est la solution de l'équation suivante ?

$$\frac{\partial}{\partial x} z(x,y) = 0 \tag{3}$$

Rappels : pour la plupart des fonctions rencontrées en physique, on peut permuter l'ordre des dérivées partielles (théorème de Shwartz). Une dérivée partielle est la dérivée d'une fonction de plusieurs variables par rapport à une variable en maintenant toutes les autres variables constantes.

1. équation 1 : $\partial z/\partial x = 2 + y$
2. équation 2 : $\partial z/\partial x = 2xy$
3. équation 3 : $z = z(y)$, z ne dépend que de la variable y.

Exercice II. Équations aux dérivées partielles (EDP)

Soit ψ une fonction de x et de t. Quel est l'ordre des équations suivantes ? Sont-elles linéaires ? A quel problème pouvez-vous les attribuer ? Sauf indication contraire, c est une constante homogène à une vitesse, α et β sont des constantes.

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + c\,\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \tag{4}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + c(\psi)\,\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \tag{5}$$

$$\frac{1}{c^2}\,\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = 0 \tag{6}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \beta\psi \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \tag{7}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \alpha\psi \frac{\partial \psi}{\partial x} + \beta \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3} = 0 \tag{8}$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + \alpha\psi + \beta\psi^3 = 0 \tag{9}$$

Rappels : l'ordre d'une EDP est donné par la dérivée partielle du plus haut ordre. L'opérateur (les dérivées partielles sont considérées comme des opérateurs) est linéaire si $L(au + bv) = aL(u) + bL(v)$ (additivité et commutativité). Si $f(x) = 0$, l'équation est homogène.

1. équation 4 : EDP du premier ordre, linéaire, appelée « équation de propagation », dont la solution est $\psi = f(x - ct)$.
2. équation 5 : EDP du premier ordre, non-linéaire, appelée « équation de propagation non-linéaire sous la forme la plus simple », dont la solution est $\psi = f[x - c(\psi)t]$, entraîne l'apparition d'ondes de choc.
3. équation 6 : EDP du second ordre, linéaire, appelée « équation des ondes », dont la solution est $\psi = f(x - ct) + g(x + ct)$.
4. équation 7 : EDP du premier ordre, non-linéaire, appelée « équation de Burgers ».
5. équation 8 : EDP du troisème ordre, non-linéaire, appelée « équation de Korteweg-de Vries (KdV) ».
6. équation 9 : EDP du second ordre, non-linéaire, appelée « équation de Duffing » qui intervient dans le pendule non-linéaire. En effet, le développement limité du $\sin(\theta)$ intervenant dans l'EDP du pendule (où θ est l'angle du fil par rapport à la verticale) * peut être prolongé à l'ordre 3 pour obtenir un terme en θ^3.

Exercice III. La trompette

Il est possible de visualiser les ondes de choc à la sortie du pavillon d'une trompette. Un bel exemple est montré dans la Figure 4 de l'article de Pandya *et al* JASA 1**14** 3363 (2003). On suppose que l'écart entre deux fronts d'onde est de 50 cm.

1. Quelle est la fréquence du son ?
2. Quelle est la note jouée ?

1. L'écart entre les ondes de choc donne la longueur d'onde λ. Or $\lambda = c/f$ donc f=698 Hz avec c=345 m/s et T=296 K.
2. Cette fréquence correspond à un Fa octave 4 (G5).

Exercice IV. Réponse non-linéaire

Soient deux fonctions quelconques $y(t)$ et $x(t)$ dépendantes du temps.

1. Les deux signaux sont liés par la relation $y = f(x)$ où f représente, par exemple, la transformation opérée par un appareil de mesure (f est appelée *fonction de réponse*). Que doit-on écrire pour que la relation f soit linéaire ? Comment s'écrit une relation non-linéaire dans le cas général ?

2. On suppose maintenant que $x(t) = \cos(\omega t)$. Que vaut $y(t)$ dans le cas linéaire ? Dans le cas non-linéaire ? Dans ce cas, peut-on considérer que le signal $y(t)$ est sinusoïdal ? Quel lien peut-on faire avec les séries de Fourier ?
3. Montrer qu'en se limitant à l'ordre 2, y(t) contient de nouvelles fréquences :

$$2\nu_1, 2\nu_2, \nu_1 \pm \nu_2.$$

Montrer qu'en se limitant à l'ordre 3, y(t) contient de nouvelles fréquences :

$$3\nu_1, 3\nu_2, 2\nu_1 \pm \nu_2, 2\nu_2 \pm \nu_1.$$

Refaire les calculs en utilisant la notation complexe $x(t) = Re\left[e^{i\omega t}\right]$.

1. $y = \alpha x$ $y = \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3$
2. Dans le cas linéaire : $y(t) = \alpha \cos(\omega t)$, on constate que $y(t)$ et $x(t)$ ont la même fréquence. Dans le cas non-linéaire : $y(t) = \alpha \cos(\omega t) + \beta \cos^2(\omega t) + \gamma \cos^3(\omega t)$. Le signal y n'est plus sinusoïdal, il y a distorsion. Selon les séries de Fourier, cette distortion se traduit par l'apparition de nouvelles fréquences (appelées *harmoniques*) qui sont des multiples de la fréquence fondamentale.

Exercice V. Applications

Relier chaque application avec son principe physique essentiel, après une courte recherche bibliographique.

Applications : 1.sonar paramétrique, 2.auto-démodulation non-linéaire, 3.imagerie harmonique des tissus, 4.imagerie par agent de contraste, 5.lithotritie, 6. thermothérapie, 8. micro-manipulaton sans contact

Principe physique : A. force de pression de radiation, B. interaction non-linéaire, C,G.transfert d'énergie vers les harmoniques supérieurs, D. détection des harmoniques supérieures, E. non-linéarité du milieu, F. génération d'ondes de chocs

Exercice VI. Distance de formation d'un choc

Dans cet exercice, on souhaite déterminer la distance de formation d'un choc (appelée aussi distance de discontinuité) dans le cadre de l'acoustique faiblement non-linéaire ($\beta \frac{v}{c_0} \ll 1$) où β est le coefficient de non-linéarité du milieu , c_0 la vitesse du son et v est la vitesse particulaire . On rappelle que la solution de l'équation de propagation non-linéaire pour une onde plane, sans pertes, se propageant dans la direction + x, est

$$v = f\left(t - \frac{x}{c_0 + \beta v}\right). \tag{10}$$

Cette solution satisfait à la condition initiale $v(0,t) = f(t)$ en x=0. Pour calculer la distance de choc notée x_c, il faut trouver la distance pour laquelle le raidissement de l'onde devient si important que la tangente en ce point est verticale.

1. Calculer $\frac{\partial v}{\partial t}$ en fonction de f' (dérivée de f par rapport à son argument, qu'on notera τ) puis déterminer x_0 tel que $\frac{\partial v}{\partial t}$ devienne infini.
2. Sachant que x_c est la plus petite valeur de x_0, montrer que $x_c = \frac{c_0^2}{\beta f'_{max}}$.

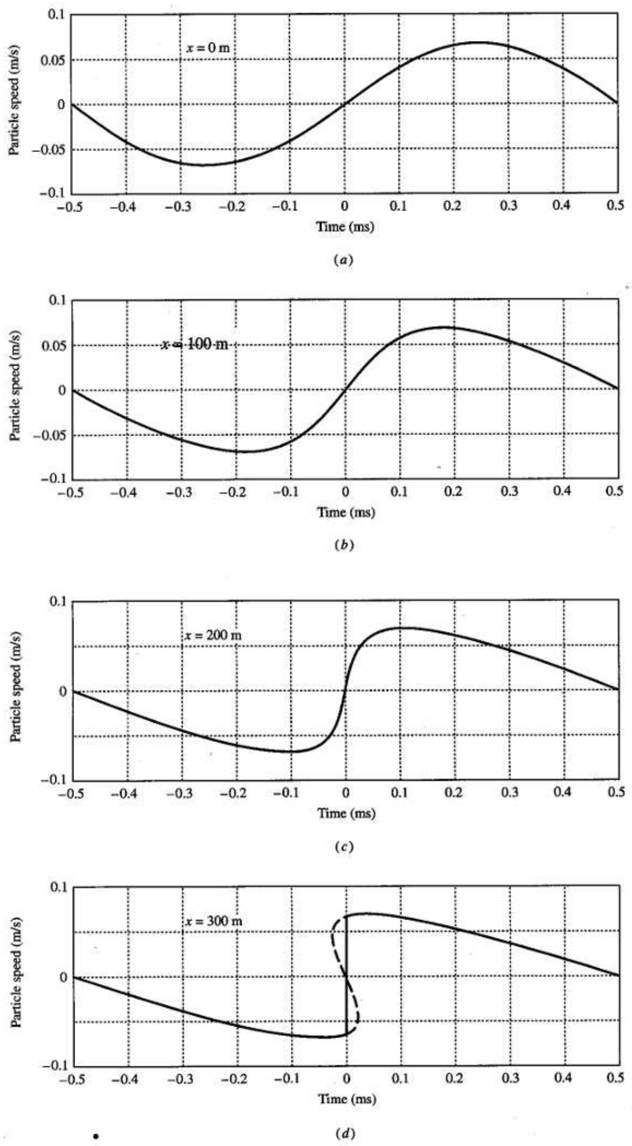

Figure 1 – Figure extraite du livre de L.E.Kinsler, page 481.

3. Lorsque la source de l'excitation est purement sinusoïdale $f = v_0 \sin(\omega\tau)$, quelles sont les valeurs de f'_{max} ?
4. Calculer f'_{max} en fonction de v_0 et ω, et montrer que $x_c = \frac{1}{\beta M k}$ où $M = \frac{v_0}{c_0}$ est le nombre de Mach acoustique et k est le nombre d'onde.
5. Quelle est la valeur de x_c dans l'air pour une source sinusoïdale de niveau sonore L=120 dB et de fréquence $\nu = 1$ kHz ? On donne pour l'air : c_0=340 m/s, $\rho_0 = 1{,}2$ kg/m^3 et $\beta = 1{,}2$. Le résultat du calcul est-il compatible avec la figure 1 ci-dessous ?

1. On peut écrire que $v = f(\tau)$ d'où

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial \tau}\,\frac{\partial \tau}{\partial t}$$

avec $\tau = t - \frac{x}{c_0+\beta v}$, et on pose $f' = \frac{\partial f}{\partial \tau}$ ce qui donne

$$\frac{\partial v}{\partial t} = f'\,\frac{\partial \tau}{\partial t}\,.$$

Il reste à calculer $\frac{\partial \tau}{\partial t}$, ce qui donne

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} = 1 + (\frac{x\beta \frac{\partial v}{\partial t}}{(c_0 + \beta v)^2})$$

d'où en factorisant par $\frac{\partial v}{\partial t}$ on trouve

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{f'}{1 - f'\beta x/(c_0 + \beta v)^2} .$$

La formation d'un choc a lieu lors du raidissement de $v(t)$. Lorsque la tangente à la courbe $v(t)$ est verticale, alors $\frac{\partial v}{\partial t}$ est infini : il y a formation d'un choc. Le dénominateur est égal à zéro, ce qui donne :

$$x_0 = \frac{(c_0 + \beta v)^2}{\beta f'}$$

2. Réécrivons x_0 pour faire apparaître βM

$$x_0 = \frac{c_0^2(1 + \frac{\beta v}{c_0})^2}{\beta f'}$$

On suppose que $\beta M = \frac{\beta v}{c_0} \ll 1$ et on trouve :

$$x_c = \frac{c_0^2}{\beta f'_{max}}$$

3. Lorsque la source est sinusoïdale, les f'_{max} arrivent lorsque $\omega t = 2\pi n$ (avec n=0, ±1,±2, ...).

$$f = v_0 \sin(\omega\tau)$$

4. Ce qui donne, dans une écriture condensée

$$x_c = \frac{1}{\beta \epsilon k} .$$

Plus l'amplitude est élevée, et plus vite le choc se forme. On pose $\sigma = x/x_c$, le choc se forme donc lorsque $\sigma = 1$. Les équations ne sont valables qu'en amont de l'onde de choc. La description d'un choc se fait dans la théorie de l'acoustique fortement non-linéaire.

5. Après calcul on trouve $x_c = 230$ m. Dans l'air, une onde de choc se forme donc à 230 m de la source, s'il n'y a pas d'atténuation (ce qui est physiquement irréaliste car il faut tenir compte de l'atténuation). Dans la figure 1, l'apparition d'un front vertical a lieue entre les images (c) (x=200 m) et (d) (x=300 m), ce qui est compatible avec notre calcul où nous avons trouvé x=230 m.

Exercice VII. Calcul du coefficient de non-linéarité β

Dans le cas d'un liquide

Soient la pression sonore $p' = P - P_0$ et la variation de densité $\rho' = \rho - \rho_0$, où (P_0, ρ_0) sont les valeurs de l'état non perturbé. La vitesse particulaire est notée v. On pose les grandeurs thermodynamiques suivantes :

$$A = \rho_0\left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_S ; B = \rho_0^2\left(\frac{\partial^2 P}{\partial \rho^2}\right)_S ; C = \rho_0^3\left(\frac{\partial^3 P}{\partial \rho^3}\right)_S . \tag{11}$$

1. Que représente l'indice S dans les coefficients A, B et C ?
2. Quel est le lien entre le coefficient de compressibilité adiabatique χ et A ? Montrer que $A = \rho_0 c_0^2$.
3. Développer $P(\rho)$ autour de son état d'équilibre à l'ordre 3 et l'exprimer en fonction des coefficients A, B et C.
4. Calculer $c^2 \equiv \partial P/\partial\rho$, puis en déduire c^2/c_0^2 en fonction de B/A, C/A, ρ et ρ'. Remarques : B/A est appelé le *paramètre* de non-linéarité (à ne pas confondre avec le *coefficient* de non-linéarité β). L'expérience a montré que les valeurs des constantes C et d'ordre supérieur sont négligeables, donc en pratique on peut arrêter le développement à l'ordre 2.
5. Sachant que le rapport B/A est petit, déterminer c/c_0.
6. Pour une onde plane progressive, on sait que $\rho'/\rho_0 = v/c_0$. La vitesse totale de l'onde c' doit prendre en compte le phénomène de convection , on écrit que $c' = c + v$. Montrer que $c' = c_0 + \beta v$, en déduire qu'au premier ordre

$$\beta = 1 + \frac{B}{2A}\,. \tag{12}$$

---

1. L'indice S signifie que ces quantités sont calculées à entropie constante (la fonction d'état *entropie* est notée S).
2. Le coefficient de compressibilité adiabatique est par définition

$$\chi = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_S = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial P}\right)_S = \frac{1}{A}\,.$$

Par définition, la vitesse $c_0^2 = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_S$ donc $A = \rho_0 c_0^2$.

3. Développer $P(\rho)$ autour de son état d'équilibre (P_0,ρ_0) à l'ordre 3:

$$P(\rho) = P(\rho_0) + (\rho-\rho_0)\left(\frac{\partial P}{\partial\rho}\right)_0 + \frac{1}{2}(\rho-\rho_0)^2\left(\frac{\partial^2 P}{\partial\rho^2}\right)_0 + \frac{1}{6}(\rho-\rho_0)^3\left(\frac{\partial^3 P}{\partial\rho^3}\right)_0 + ...$$

$$P = P_0 + \frac{\rho'}{\rho_0}A + \frac{\rho'^2}{2\rho_0^2}B + \frac{\rho'^3}{6\rho_0^3}C + ...$$

4. Il faut réaliser que $c^2 = \partial P/\partial\rho = \partial P/\partial\rho'$.

$$c^2 = c_0^2 + B\,\frac{\rho'}{\rho^2} + C\,\frac{\rho'^2}{2\rho_0^3} + ...$$

$$\frac{c^2}{c_0^2} = \left[1 + \frac{\rho'}{\rho}\,\frac{B}{A} + C\,\frac{\rho'^2}{2\rho_0^2}\,\frac{C}{A} + ...\right]$$

5. Grâce à la formule de la série binômiale, on peut calculer c/c_0 :

$$\frac{c}{c_0} = 1 + \frac{\rho'}{\rho_0}\,\frac{B}{2A}$$

6. Pour une onde plane progressive, on sait que $\rho'/\rho_0 = v/c_0$ donc

$$c = c_0 + v\,\frac{B}{2A}$$

Sachant que $c' = c + v = c_0 + \beta v$ on a

$$c' = c_0 + v\,\frac{B}{2A} + v$$

$$c' = c_0 + v\left[1 + \frac{B}{2A}\right]$$

On en déduit que le coefficient de non-linéarité $\beta = 1 + \frac{B}{2A}$.

Dans le cas d'un gaz

Rappelons que l'équation d'état d'un gaz parfait soumis à un processus adiabatique réversible est $\frac{P}{P_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^\gamma$ où γ est le coefficient adiabatique tel que $\gamma = C_P/C_V$.

1. Montrer que $c^2 = \gamma \frac{P}{\rho}$. Que vaut c_0^2 ?
2. Démontrer que
$$\frac{c}{c_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{(\gamma-1)/2}$$
3. On peut montrer, en établissant l'équation de propagation non-linéaire , que $\frac{\partial P}{\partial v} = \pm\rho c$ d'où $v = \int_{\rho_0}^{\rho}(c/\rho)d\rho$. Montrer que $v = \frac{2}{\gamma-1}(c - c_0)$.
4. En déduire que
$$\beta = \frac{\gamma+1}{2}. \tag{13}$$
5. En développant en série de Taylor l'équation d'état du gaz, comparer les termes de la série avec ceux de l'expression obtenue pour les liquides, et montrer que $B/A = \gamma - 1$ et $C/A = (\gamma - 1)(\gamma - 2)$.
6. Donner la valeur numérique de B/A dans le cas de l'air (qui est composé essentiellement de gaz diatomiques, on supposera que le'air se comporte comme un gaz parfait).

---

1. Montrer que $c^2 = \gamma \frac{P}{\rho}$.
$$P = \frac{P_0}{\rho_0^\gamma}\rho^\gamma$$
$$\frac{\partial P}{\partial \rho} = \frac{P_0}{\rho_0^\gamma}\gamma\rho^{\gamma-1}$$
$$c^2 = \gamma\frac{P}{\rho}$$
$$c_0^2 = \gamma\frac{P_0}{\rho_0}$$
2. Pour démontrer que $\frac{c}{c_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{(\gamma-1)/2}$ on fait le rapport de c^2 et c_0^2 obtenus ci-dessus.
3. En utilisant la relation $v = \int_{\rho_0}^{\rho}(c/\rho)d\rho$, montrer que $v = \frac{2}{\gamma-1}(c - c_0)$.
$$v = \int_{\rho_0}^{\rho}(c/\rho)d\rho$$
$$v = \int_{\rho_0}^{\rho}(c_0\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{(\gamma-1)/2}/\rho)d\rho$$
$$v = \frac{2c_0}{(\gamma-1)\rho_0^(\gamma-1)/2[\rho^{(\gamma-1)/2}]_{\rho_0}^{\rho}}$$
v= $c_0\frac{2}{\gamma-1}\left(\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{(\gamma-1)/2} - 1\right)v = \frac{2}{\gamma-1}(c - c_0)c = c_0 + \frac{\gamma-1}{2}vOrc'$=c+v$doncc'$=$c_0 + v\frac{\gamma+1}{2}$, ce qui donne le coefficient de non-linéarité pour un gaz $\beta = \frac{\gamma+1}{2}$.

4. En déduire que

$$\beta = \frac{\gamma+1}{2}\,. \tag{14}$$

5. En développant en série de Taylor l'équation d'état du gaz, comparer les termes de la série avec ceux de l'expression obtenue pour les liquides, et montrer que $B/A = \gamma - 1$ et $C/A = (\gamma-1)(\gamma-2)$.

$$\frac{P}{P_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma} = \left(1+\frac{\rho'}{\rho_0}\right)^{\gamma}$$

$$\frac{P}{P_0} = 1 + \gamma\left(\frac{\rho'}{\rho_0}\right) + \frac{\gamma}{2}(\gamma-1)\left(\frac{\rho'}{\rho_0}\right)^2 + \frac{\gamma}{6}(\gamma-1)(\gamma-2)\left(\frac{\rho'}{\rho_0}\right)^3$$

Par identification on trouve que

$$A = P_0\gamma,$$
$$B = P_0\gamma(\gamma-1),$$
$$C = P_0\gamma(\gamma-1)(\gamma-2)$$

et donc

$$B/A = \gamma - 1$$

et $C/A = (\gamma-1)(\gamma-2)$.

6. Calculer B/A dans le cas de l'air : dans le cas d'un gaz diatomique, $\gamma = 1.4$ donc $\beta = 0.4$.

Formules utiles

Développement en série de Taylor, en x_0 :

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + ...$$

Un cas particulier est la série binômiale en $x_0 = 0$:

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2 + ... + \frac{n(n-1)...(n-r+1)}{r!}x^r$$

Exercice VIII. Le pendule simple : non-linéarité et harmoniques

Il existe un ensemble de sytèmes physiques dont le comportement peut être décrit par la même équation $\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$, qui est l'équation d'un oscillateur simple . Cette équation admet la solution $x(t) = x_0 \sin\omega_0 t$. Les systèmes les plus connus (voir figure **??**) sont le système masse-ressort, le pendule , le résonateur électrique bobine-condensateur et le résonateur de Helmholtz (une cavité d'air possédant une ouverture). Dans le cas d'un pendule, cette équation résulte de la linéarisation de l'équation différentielle

$$\frac{d\theta}{dt} + \omega_0^2 \sin\theta = 0. \tag{15}$$

lorsque l'amplitude θ_0 des oscillations est petite.

Le but de cet exercice est de déterminer comment on doit corriger/compléter cette solution particulière lorsque l'amplitude est telle qu'on ne peut plus mener l'approximation $\sin\theta \simeq \theta$: la situation est celle du pendule anharmonique .

1. Ecrire le développement limité de $\sin\theta$ à l'ordre 3 en $\theta = 0$. L'incorporer dans l'équation 15, en ne conservant que les deux premiers termes. Le terme θ^3 est typique d'une équation de Duffing .
2. Essayer par substitution une solution du type $\theta(t) = \theta_0(\sin\omega t + \epsilon\sin 3\omega t)$ où $\epsilon \ll 1$ (méthode des perturbations).
3. Exprimer ω en fonction de θ_0 et ω_0.
4. En déduire que la période des oscillations est $T = T_0\left(1 + \frac{\theta_0^2}{16}\right)$.
5. Exprimer ϵ en fonction de θ_0. Ce coefficient exprime l'importance de l'harmonique de rang 2 (c'est-à-dire de pulsation 3ω) dans la construction de la série de Fourier décrivant le mouvement. Le mouvement est-il toujours harmonique ?

Ce TD est destiné à aborder le comportement non-linéaire d'un système bien connu, le pendule.

1. Ecrire le développement limité de $\sin\theta$ à l'ordre 3 en $\theta = 0$:

$$\sin(\theta) = \theta - \frac{\theta^3}{6}$$

   L'incorporer dans l'équation 15, en ne conservant que les deux premiers termes :

$$\theta'' + \omega_0^2\theta - \frac{\omega_0^2}{6}\,\theta^3 = 0$$

2. Essayer par substitution une solution du type $\theta(t) = \theta_0(\sin\omega t + \epsilon\sin 3\omega t)$ où $\epsilon \ll 1$ (méthode des perturbations).
3. Exprimer ω en fonction de θ_0 et ω_0 :

$$\omega^2 = \omega_0^2\left[1 - \frac{\theta_0^2}{8}\right]$$

   La fréquence dépend de l'amplitude de l'oscillation.
4.

$$T = T_0\left(1 + \frac{\theta_0^2}{16}\right)$$

   La période de l'oscillateur non-linéaire dépend de son amplitude initiale ; sa valeur minimale est la période propre T_0.
5. Exprimer ϵ en fonction de θ_0:

$$\epsilon = \frac{-\theta_0^2}{192}$$

   La solution est :

$$\theta(t) = \theta_0\sin(\omega t) - \epsilon\theta_0\sin(3\omega t)$$

$$\theta(t) = \theta_0\sin(\omega t) + \frac{\theta_0^3}{192}\,\theta_0\sin(3\omega t)$$

   Le mouvement n'est plus harmonique car une composante supplémentaire est apparue à une fréquence 3ω.

Exercice IX. Propagation du son dans un milieu en mouvement

Application de la dérivée particulaire : propagation du son dans un milieu en mouvement

On s'intéresse à la propagation du son dans un milieu en mouvement (dont le champ des vitesses $\vec{v}(\vec{r})$ est uniforme), par exemple la propagation du son dans une atmosphère avec vent. Les termes de convection ne peuvent plus être négligés et l'opérateur $\partial/\partial t$ est remplacé par l'opérateur *dérivée particulaire* $\partial/\partial t + \vec{v}\vec{\nabla}$.

1. Écrire l'équation de propagation pour des ondes planes se propageant à une vitesse c. On définit le nombre de Mach $M = v_x/c$.
2. Soit une source immobile de la forme $p(t,x) = Ae^{i(k_x x - \omega t)}$ située en $x = 0$. Trouver les valeurs de k_x en fonction de M, ω et c. Que représentent ces deux valeurs de k_x ? Que se passe-t-il lorsque $M = 1$?

Cet exercice est inspiré de l'article suivant : P.A.Franken JASA **28** 126-127 (1956).

1. Ondes planes signifie que le problème est unidimensionnel. L'équation de propagation devient :
$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} + (M^2 - 1)\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2\frac{M}{c}\frac{\partial^2}{\partial t \partial x}\right)p = 0$$
2. On obtient l'équation suivante :
$$-\frac{\omega^2}{c^2} + (-M^2 + 1)k_x^2 + 2\frac{M}{c}wk_x = 0$$
Qui est une équation polynomiale de degré 2 en k_x. Les solutions sont : $k_x^{\pm} = \frac{\omega}{c(M \pm 1)}$. Les deux valeurs de k_x correspondent à des ondes planes dans la direction positive ou négative. Lorsque $M = 1$, les ondes ne se propagent plus vers les $x < 0$. La vitesse de phase $v_\phi = \omega/k$ est $v_\phi = c(M \pm 1)$. Lorsque $v_x = c$, $M = 1$, k_x devient infini, ainsi que la fréquence ω.