

LP300 : Acoustique dans les fluides



Acoustique non-linéaire - fondements

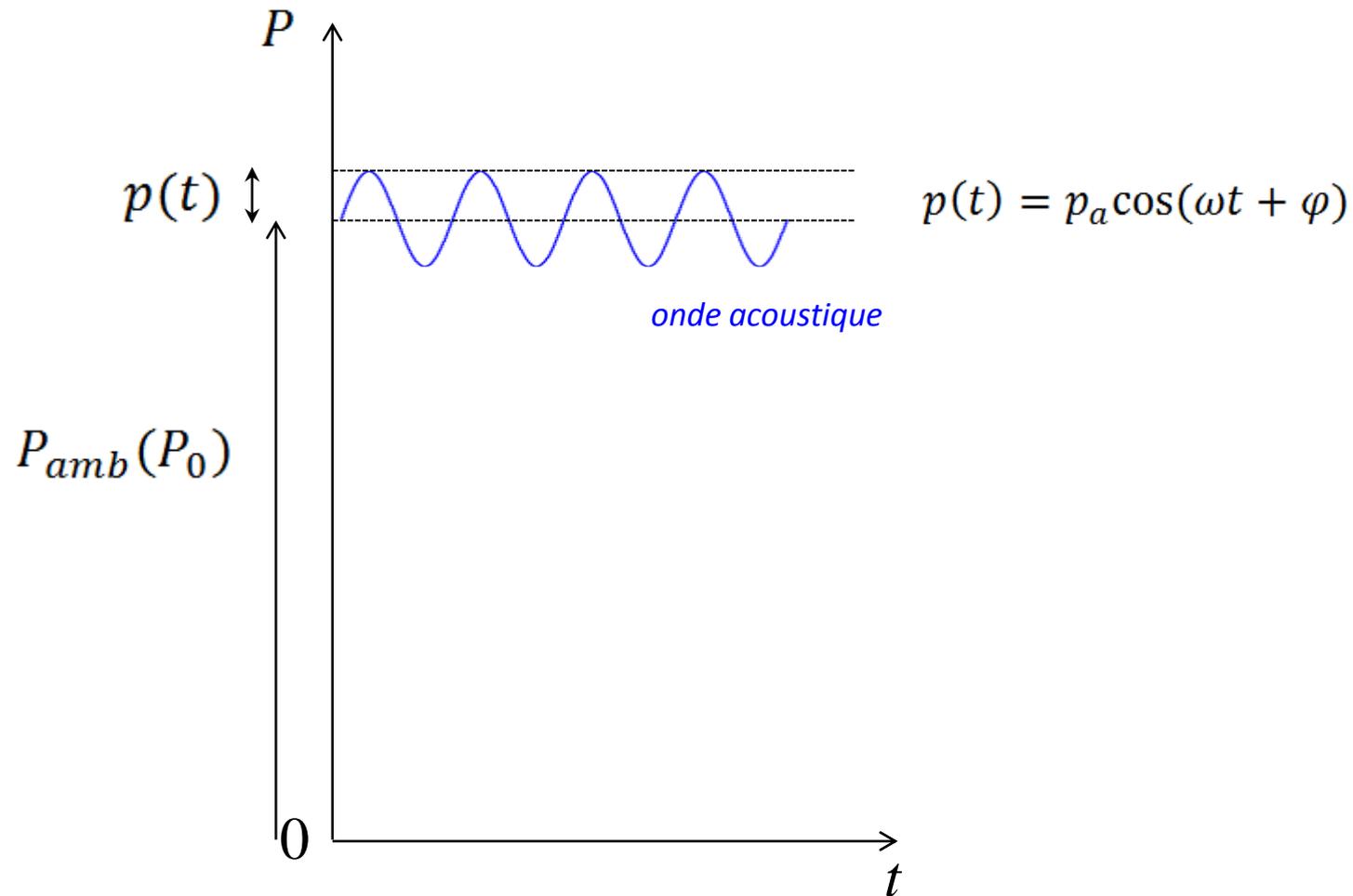
Simon AYRINHAC
simon.ayrinhac@sorbonne-universite.fr

Acoustique faiblement non-linéaire

- **Problématique :**

Que se passe-t-il lorsque l'amplitude de pression p_a de l'onde acoustique augmente ?

Autrement dit, que se passe-t-il lorsque l'hypothèse $p_a \ll P_0$ n'est plus vérifiée ?



Acoustique faiblement non-linéaire

- **Problématique :**

Que se passe-t-il lorsque l'amplitude de pression p_a de l'onde acoustique augmente ?
Autrement dit, que se passe-t-il lorsque l'hypothèse $p_a \ll P_0$ n'est plus vérifiée ?

- Lorsque la surpression p_a augmente :

En extrapolant la théorie linéaire, entre 160 et 180 dB on peut constater que :

La vitesse particulière $v \sim 10$ m/s devient du même ordre de grandeur que la vitesse du son ($v \sim 300$ m/s dans l'air)

- dans l'air : $p_a = \pm P_0 = \pm 1$ atm \rightarrow au-delà l'onde n'est plus sinusoïdale (écrêtage)



- dans l'eau : $p_a = \pm P_0$: formation de bulles, **cavitation**

- lorsque $p_a = 1\% - 10\% P_0$: on sort de l'acoustique linéaire

(voir livre Chaigne & Kergomard p.360)

On entre dans le domaine de l'acoustique NL lorsque l'amplitude de l'onde n'est plus considérée comme infinitésimale

On appelle ces ondes des ondes **d'amplitude finie** (*finite waves*).

- D'où vient la non-linéarité ?

Les variations de pression acoustique entraînent des variations de T , or la vitesse du son locale dépend de T et donc de la vitesse acoustique.

→ Analogie avec la tension de la corde : la tension dépend de l'allongement, or cette longueur change avec la vibration de la corde.

- Un certain nombre de phénomènes sont à prendre en compte :

- convection (ou advection)
- certains termes du 2e ordre ne sont plus négligeables dans les équations
- non linéarité de l'équation d'état

- Conséquences

- l'onde se déforme au cours de la propagation → création **d'ondes de choc**
- le principe de superposition n'est plus valable → **interaction** entre les ondes

- Nous allons travailler dans un cas simple :

- ondes planes
- non dissipatives
- dans un fluide parfait (non visqueux)
- acoustique faiblement non-linéaire : effets localement négligeables mais cumulatifs

$M=v/c_0 \ll 1$ (nombre de Mach acoustique). En acoustique fortement non-linéaire : $M \sim 1$ (équations de Rankine-Hugoniot).

- conditions isentropiques (adiabatiques)
- pas de chocs

Rappels et notations (1/2)

En présence d'une onde : fluctuation autour de l'équilibre d'une grandeur physique

$$P(t) = P_0 + p(t) \quad p_a \ll P_0$$

$$\rho(t) = \rho_0 + \rho(t)$$

$$v(t) = v_0 + v(t) \quad (v \text{ vitesse particulaire, } v_0 \text{ vitesse d'entraînement du fluide)}$$

- état d'équilibre = valeur moyenne de la grandeur fluctuante

$$P_0 = 1 \text{ atm}, \rho_0 = 1.2 \text{ kg/m}^3, T_0 = 300 \text{ K}, v_0 = 0 \text{ m/s}$$

il n'y a pas de **vitesse d'entraînement** v_0 (fluide **au repos**)

- une vitesse d'entraînement non nulle change la vitesse de propagation de l'onde

Hypothèse fondamentale de l'acoustique linéaire : les variations autour de l'état d'équilibre sont faibles

$$P = P_0 + \varepsilon p_a$$

$$\rho = \rho_0 + \varepsilon \rho_a$$

$$v = 0 + \varepsilon v_a$$

$$\varepsilon \ll 1$$

$$\varepsilon^2 = 0$$

on néglige les termes du 2e ordre

Rappels et notations (2/2)

Relations entre grandeurs et terminologie

c est la vitesse du son (adiabatique)

$$c^2 = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_s$$

relation pression-densité linéaire

$$c_0^2 = \frac{p_a}{\rho_a}$$

Pour une onde plane sinusoïdale
 Z impédance acoustique caractéristique

$$Z = \frac{p_a}{v_a} = \rho_0 c_0$$

$$\frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} = \frac{\rho_a}{\rho_0} = \frac{v_a}{c_0} = M_a$$

condensation

$$\frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} = \frac{\rho_a}{\rho_0}$$

Nombre de Mach acoustique

$$M_a = \frac{v_a}{c_0}$$

Origines de la non-linéarité

1) Équation d'Euler (PFD appliqué au fluide non-linéaire, conservation de la quantité de mouvement)

équation locale : $\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\overrightarrow{\text{grad}}p \rightarrow \rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho \vec{v} \text{div} \vec{v} = -\overrightarrow{\text{grad}}p$

D/Dt : dérivée particulaire

terme de convection

| | | | |
|------------------|---|---------------------------------------|--|
| Équation d'Euler | } | 1D, onde plane, linéaire : | $\rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x}$ |
| | | 1D, onde plane, non-linéaire : | $\rho v \frac{\partial v}{\partial x} + \rho \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x}$ |

- Convection : les ondes déplacent le milieu au cours de leur propagation $c = c_0 + v$

Question : pour quels types d'ondes n'y a-t-il pas de convection ?

Origines de la non-linéarité

1) Équation d'Euler (PFD appliqué au fluide non-linéaire, conservation de la quantité de mouvement)

équation locale : $\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\overrightarrow{\text{grad}}p \rightarrow \rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho \vec{v} \text{div} \vec{v} = -\overrightarrow{\text{grad}}p$

D/Dt : dérivée particulaire

terme de convection

| | | | |
|------------------|---|---------------------------------------|--|
| Équation d'Euler | } | 1D, onde plane, linéaire : | $\rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x}$ |
| | | 1D, onde plane, non-linéaire : | $\rho v \frac{\partial v}{\partial x} + \rho \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x}$ |

- Convection : les ondes déplacent le milieu au cours de leur propagation $c = c_0 + v$

Question : pour quels types d'ondes n'y a-t-il pas de convection ?

les ondes électromagnétiques

2) Equation de continuité

Principe de conservation de la masse

- La quantité de fluide se conserve
- il n'y a ni source (création) ni puits (disparition) de liquide
- ce qui rentre dans une surface fermée

débit massique entrant augmentation de la masse de fluide dans V

$$-\oint_S \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dS = + \frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho dV$$

Théorème de Green-Ostrogradsky

$$-\iiint_V \operatorname{div}(\rho \vec{v}) dV = + \iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV \quad \text{relation intégrale}$$

$$\operatorname{div}(\rho \vec{v}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad \text{relation locale (équation 3D, non-linéaire)}$$

surface S fermée :
emprisonne le volume V

| | | | |
|-------------------------------|---|---------------------------------------|---|
| Equation de continuité | { | 1D, onde plane, linéaire : | $\rho_0 \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ |
| | | 1D, onde plane, non-linéaire : | $\frac{\partial}{\partial x} (\rho v) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ |

3) L'équation d'état du fluide

- Pour un fluide ou un gaz, l'équation d'état renseigne sur l'état d'équilibre thermodynamique.
- Equation d'état : relation entre les grandeurs V (ou ρ), P et T
(en anglais *equation of state* - EoS)
- L'équation d'état peut s'exprimer en fonction de différentes variables, par exemple l'équation d'état isentropique : $\rho(P,S)$ où S est l'entropie (voir annexe 3)
- Cette équation d'état est intéressante car **la vitesse du son est isentropique** (voir annexe 1)
- C'est une relation à priori non-linéaire

Développement limité autour de l'état d'équilibre de l'EOS isentropique ρ en fonction de P avec S constant autour de ρ_0

$$P(\rho) = P(\rho_0) + (\rho - \rho_0)P'(\rho_0) + \frac{(\rho - \rho_0)^2}{2!} P''(\rho_0) + \frac{(\rho - \rho_0)^3}{3!} P'''(\rho_0) + \dots$$

$$P = P_0 + \rho_a P'(\rho_0) + \frac{\rho_a^2}{2!} P''(\rho_0) + \frac{\rho_a^3}{3!} P'''(\rho_0) + \dots$$

Rappel : développement de Taylor de la fonction $f(x)$ au point x_0

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0) \frac{f'(x_0)}{1!} + (x - x_0)^2 \frac{f''(x_0)}{2!} + (x - x_0)^3 \frac{f'''(x_0)}{3!} + \dots$$

Introduisons les coefficients A, B et C :

$$P - P_0 = p_a = \underbrace{\left[\frac{\rho_a}{\rho_0} \right] \rho_0 \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_{S, \rho_0}}_A + \frac{1}{2} \underbrace{\left[\frac{\rho_a}{\rho_0} \right]^2 \rho_0^2 \left(\frac{\partial^2 P}{\partial \rho^2} \right)_{S, \rho_0}}_B + \frac{1}{6} \underbrace{\left[\frac{\rho_a}{\rho_0} \right]^3 \rho_0^3 \left(\frac{\partial^3 P}{\partial \rho^3} \right)_{S, \rho_0}}_C + \dots$$

Ce sont des coefficients **constants**, uniques pour chaque couple (P_0, ρ_0) .

Ils dépendent donc des conditions extérieures.

Ce sont des **grandeurs thermodynamiques**, dérivées de l'équation d'état.

En écriture plus condensée :

$$p_a = A \frac{\rho_a}{\rho_0} + \frac{B}{2} \left[\frac{\rho_a}{\rho_0} \right]^2 + \frac{C}{6} \left[\frac{\rho_a}{\rho_0} \right]^3 + \dots$$

Exercice : montrons que A est l'inverse de la compressibilité adiabatique β_S

Introduisons les coefficients A, B et C :

$$P - P_0 = p_a = \underbrace{\left[\frac{\rho_a}{\rho_0} \right] \rho_0 \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_{S, \rho_0}}_A + \frac{1}{2} \underbrace{\left[\frac{\rho_a}{\rho_0} \right]^2 \rho_0^2 \left(\frac{\partial^2 P}{\partial \rho^2} \right)_{S, \rho_0}}_B + \frac{1}{6} \underbrace{\left[\frac{\rho_a}{\rho_0} \right]^3 \rho_0^3 \left(\frac{\partial^3 P}{\partial \rho^3} \right)_{S, \rho_0}}_C + \dots$$

Ce sont des coefficients **constants**, uniques pour chaque couple (P_0, ρ_0) .

Ils dépendent donc des conditions extérieures.

Ce sont des **grandeurs thermodynamiques**, dérivées de l'équation d'état.

En écriture plus condensée :

$$p_a = A \frac{\rho_a}{\rho_0} + \frac{B}{2} \left[\frac{\rho_a}{\rho_0} \right]^2 + \frac{C}{6} \left[\frac{\rho_a}{\rho_0} \right]^3 + \dots$$

Exercice : montrons que A est l'inverse de la compressibilité adiabatique β_S

$$A = \rho_0 \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_{S, \rho_0} = \rho_0 c_0^2$$

$$\frac{1}{A} = \frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial \rho}{\partial P} \right)_{S, \rho_0} = \beta_S$$

Relation entre p et ρ

$$\left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_s = c^2$$

$$P = P_0 + A \frac{\rho_a}{\rho_0} + \frac{B}{2} \left[\frac{\rho_a}{\rho_0}\right]^2 + \frac{C}{6} \left[\frac{\rho_a}{\rho_0}\right]^3 + \dots$$

$$\frac{\partial P}{\partial \rho} = \frac{A}{\rho_0} + B \frac{\rho_a}{\rho_0^2} + \frac{C}{2} \left[\frac{\rho_a^2}{\rho_0^3}\right] + \dots$$

$$\frac{\partial P}{\partial \rho} = c_0^2 + B \frac{\rho_a}{\rho_0^2} + \frac{C}{2} \left[\frac{\rho_a^2}{\rho_0^3}\right] + \dots$$

$$\frac{\partial P}{\partial \rho} = c_0^2 \left(1 + \frac{B\rho_a}{A\rho_0} + \dots\right)$$

$$c = \sqrt{\left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_{s,\rho_0}} = c_0 \left(1 + \frac{B\rho_a}{2A\rho_0} + \dots\right) = c_0 \left(1 + \frac{Bv_a}{2Ac_0} + \dots\right) = c_0 + \frac{Bv_a}{2A} + \dots$$

| | | | |
|----------------------------------|---|---------------------|---|
| Equation d'état du fluide | { | linéaire | $\left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_{\rho_0} = \frac{p_a}{\rho_a} = c_0^2$ |
| | | non-linéaire | $\frac{\partial P}{\partial \rho} = c^2$ avec $c = c_0 + \frac{Bv_a}{2A} + \dots$ |

Interprétation graphique :

- La pente de la fonction $P(\rho)$ n'est autre que c_0^2 , la vitesse au carré calculée à l'équilibre, c'est une **relation linéaire** (voir figure ci-dessous)
- C'est l'écart à cette loi linéaire qui est responsable de la **non-linéarité** de l'équation d'état

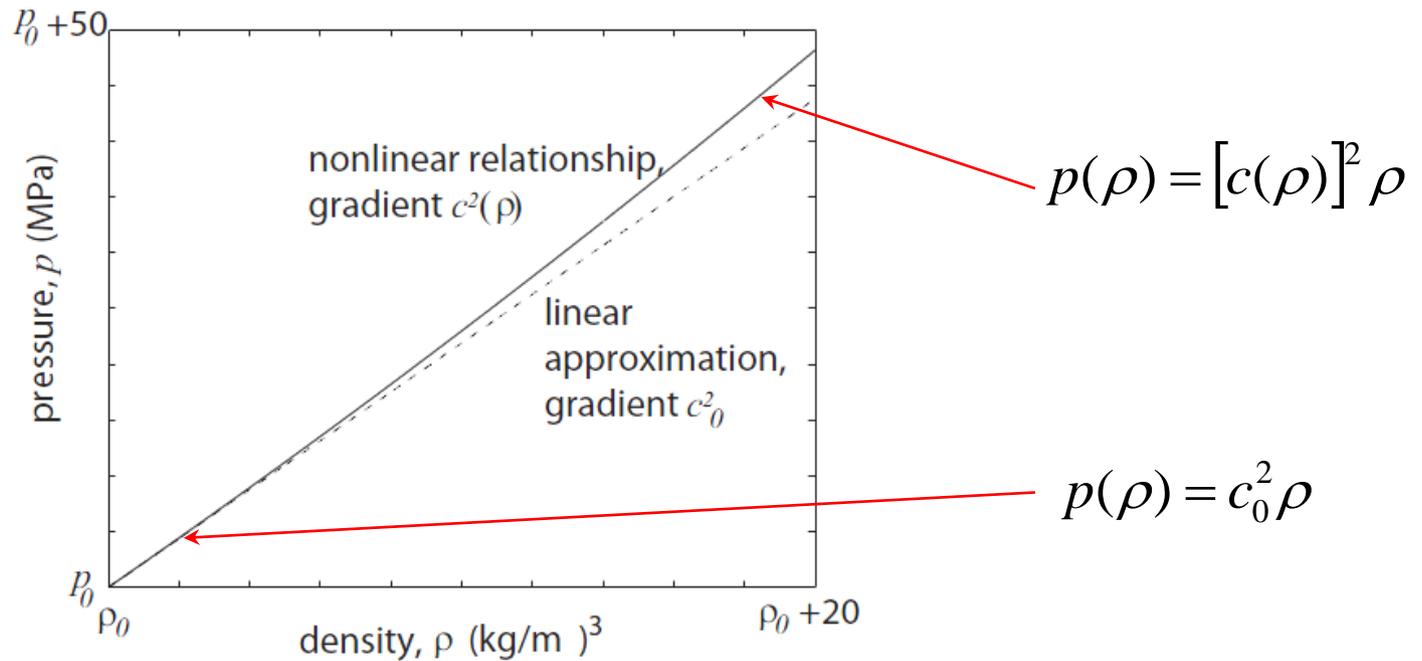


Figure 9: Pressure-density relation for water at 20°C, and the linear approximation.

Paramètre de non-linéarité B/A

$$\frac{B}{A} = \frac{\rho_0}{c_0^2} \left(\frac{\partial^2 P}{\partial \rho^2} \right)_{S, \rho_0}$$

- B/A est le **paramètre de non-linéarité** (appelé aussi paramètre de Beyer, sans unité)
- les termes C et supérieurs sont négligeables

$$A = \rho_0 \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_{S, \rho_0} \quad B = \rho_0^2 \left(\frac{\partial^2 P}{\partial \rho^2} \right)_{S, \rho_0} \quad C = \rho_0^3 \left(\frac{\partial^3 P}{\partial \rho^3} \right)_{S, \rho_0}$$

coefficient B/A dans quelques fluides

| milieu | B/A |
|--------------------------|-----------------|
| air | 0.4 |
| eau (20°C) | 5 |
| éthanol (20°C) | 10,5 |
| mercure (liquide) (30°C) | 7,8 |
| liquide avec bulles | 10 ³ |

Calcul de B/A pour un gaz parfait

- Transformation isentropique d'un gaz parfait : loi de Laplace (voir annexe 3) où γ est le coefficient adiabatique ($\gamma=C_p/C_v$)

$$P\left(\frac{1}{\rho}\right)^\gamma = P_0\left(\frac{1}{\rho_0}\right)^\gamma$$

$$\frac{P}{P_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^\gamma = \left(\frac{\rho_a + \rho_0}{\rho_0}\right)^\gamma = \left(1 + \frac{\rho_a}{\rho_0}\right)^\gamma$$

Formulations équivalentes de la loi de Laplace (les k_i sont des constantes)

$$PV^\gamma = k_1$$

$$P\rho^{-\gamma} = k_2$$

$$TV^{\gamma-1} = k_3$$

Rappel : série binomiale développée en $x_0=0$

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \dots$$

$$p_a = P - P_0 = P_0\gamma\left(\frac{\rho_a}{\rho_0}\right) + \frac{1}{2}P_0\gamma\left(\frac{\rho_a}{\rho_0}\right)^2 + \frac{1}{6}P_0\gamma(\gamma-1)\left(\frac{\rho_a}{\rho_0}\right)^3 + \dots$$

On identifie les coefficients A et B

$$\frac{B}{A} = \frac{P_0\gamma(\gamma-1)}{P_0\gamma} \quad \boxed{\frac{B}{A} = \gamma - 1}$$

Application à l'air considéré comme un gaz parfait

- L'air est composé de molécules diatomiques (diazote N_2 , dioxygène O_2 , etc) donc $\gamma=1.4$
- Donc $B/A=0.4$

Vitesse du son

- **vitesse de propagation de la perturbation par rapport au mouvement du fluide**

$$c = c_0 + \frac{B}{2A} v_a + \dots \quad \text{terme correctif dû à la non-linéarité du fluide (gaz ou liquide)}$$

- **vitesse de propagation de la perturbation par rapport à un repère fixe**

$$c' = c + v_a \quad \text{terme supplémentaire dû à la convection}$$

$$c' = \frac{dx}{dt} \quad c' \text{ est la dérivée de la position de l'onde par rapport au temps}$$

Combinons les deux :

$$c' = \left(c_0 + \frac{B}{2A} v_a \right) + v_a$$

On introduit un nouveau coefficient β :

$$\boxed{c' = c_0 + \beta v_a}$$

Coefficient de non-linéarité β

$$\beta = 1 + \frac{B}{2A}$$

coefficient de non-linéarité β (sans unité)

- Pour un gaz : $\beta=1.2$
- Pour un liquide : $\beta \cong 6$

- Même si le milieu est linéaire ($B=0$), β n'est pas égal à 0 à cause du terme de convection
- Attention à la terminologie : B/A est le **paramètre** de NL alors que β est le **coefficient** de NL

$$c' = c_0 + \beta v_a$$

- rappelons que v_a est la vitesse instantanée (elle dépend du temps). L'onde se propage toujours en moyenne à c_0 , mais des portions locales se propagent à c' , donc plus vite pour les crêtes que pour les creux.

- v_a peut varier entre $-v_{\max}$ et v_{\max} , v_{\max} est l'amplitude de l'onde.

Conséquences :

- Il y a **déformation/distorsion** progressive de l'onde
- **raidissement** (*steepening*) du front d'onde

Bilan des équations

| | | | |
|-------------------------|---|-------------------------------------|--|
| Équation d'Euler | { | 1D, onde plane, linéaire | $\rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x}$ |
| | | 1D, onde plane, non-linéaire | $\rho v \frac{\partial v}{\partial x} + \rho \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x}$ |

| | | | |
|-------------------------------|---|---------------------------------------|---|
| Équation de continuité | { | 1D, onde plane, linéaire : | $\rho_0 \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ |
| | | 1D, onde plane, non-linéaire : | $\frac{\partial}{\partial x} (\rho v) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ |

| | | | |
|----------------------------------|---|---------------------|---|
| Équation d'état du fluide | { | linéaire | $\frac{\partial p}{\partial \rho} = c_0^2$ |
| | | non-linéaire | $\frac{\partial p}{\partial \rho} = c^2$ avec $c = c_0 + \frac{Bv_a}{2A} + \dots$ |

→ La combinaison de ces 3 équations nous permet d'établir l'équation de propagation d'une onde (linéaire ou non-linéaire).

Établissement de l'équation de propagation linéaire

Exercice : retrouver l'équation des ondes (linéaire) à partir de ces 3 équations

$$1) \rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} \quad 2) \rho_0 \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad 3) \frac{\partial p}{\partial \rho} = c_0^2$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0$$

Établissement de l'équation de propagation linéaire

Exercice : retrouver l'équation des ondes (linéaire) à partir de ces 3 équations

$$1) \rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} \quad 2) \rho_0 \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad 3) \frac{\partial p}{\partial \rho} = c_0^2$$

Solution :

$$\begin{cases} \rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \\ \rho_0 \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial p}{\partial t} = 0 \end{cases}$$

On applique les dérivées croisées pour faire apparaître un terme identique

$$\begin{cases} \rho_0 \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = 0 \\ \rho_0 \frac{\partial^2 v}{\partial t \partial x} + \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0 \end{cases}$$

On soustrait les 2 équations pour obtenir l'équation de propagation linéaire en P.

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0$$

Établissement de l'équation de propagation non-linéaire

On écrit les 3 équations utiles.

$$1) \rho v \frac{\partial v}{\partial x} + \rho \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} \quad 2) \frac{\partial}{\partial x}(\rho v) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad 3) \frac{\partial p}{\partial \rho} = c^2$$

La solution détaillée est donnée dans le livre de Chaigne & Kergomard, pages 344-369.

On donne ici le principe du calcul.

On écrit un système de 2 équations puis on le réécrit en fonction de $\partial p/\partial t$ et $\partial p/\partial x$.

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x}(\rho v) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \\ \rho v \frac{\partial v}{\partial x} + \rho \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial P} \left(\frac{\partial p}{\partial t} \right) + \frac{\partial}{\partial P} \rho v \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) = 0 \\ \rho \frac{\partial v}{\partial P} \left(\frac{\partial p}{\partial t} \right) + \left[\rho v \frac{\partial v}{\partial P} + 1 \right] \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) = 0 \end{cases}$$

Ce système admet une solution si le déterminant est nul, puis on déduit

$$\frac{\partial \rho}{\partial P} = \rho^2 \left(\frac{\partial v}{\partial P} \right)^2$$

On utilise la relation 3) pour écrire

$$\frac{\partial P}{\partial v} = \pm \rho c$$

On injecte dp/dv dans la première équation et on multiplie par c^2 pour trouver la solution. ²²

Équation de propagation non-linéaire

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (\pm c(v) + v) \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

- $c(v)$: vitesse de propagation de la perturbation / au mouvement du fluide
 - v : vitesse particulaire
 - $c'(v) = \pm c + v$: vitesse de propagation de la perturbation / à un repère fixe
 - c_0 : c' dans le cas linéaire (faibles amplitudes)
- on peut montrer que $c'(v) = c_0 + \beta v$ où $\beta = 1 + B/2A$
- β est appelé **le coefficient de NL**, il contient 2 termes issus de la NL du milieu et de la convection
- lorsque $\beta = 0$, on retrouve l'équation de propagation linéaire

Solutions de l'équation de propagation non-linéaire

Deux types de solution

- (1) $t = 0, v = g(x)$; $t > 0, v = g(x - c't)$
- (2) $x = 0, v = f(t)$; $x > 0, v = f\left(t - \frac{x}{c'}\right)$

- *Quelle forme est la plus facilement accessible expérimentalement ?*

- *Quelle est la forme de v pour une onde sinusoïdale simple ?*

- *On constate que la fonction v dépend d'elle-même : comment calculer ?*

- *La quantité v est-elle simple à mesurer ?*

Solutions de l'équation de propagation non-linéaire

Deux types de solution

- (1) $t = 0, v = g(x) ; t > 0, v = g(x - c't)$
- (2) $x = 0, v = f(t) ; x > 0, v = f\left(t - \frac{x}{c'}\right)$

- *Quelle forme est la plus facilement accessible expérimentalement ?*

C'est la forme (2). Il suffit d'éloigner un microphone de la source ($x > 0$) qui enregistre le signal en fonction du temps.

- *Quelle est la forme de v pour une onde sinusoïdale simple ?*

Il suffit de prendre $v_a(t) = v_{\max} \sin[\omega(t - x/c)]$.

- *On constate que la fonction v dépend d'elle-même : comment calculer ?*

Il faut regarder les intersections entre la courbe $f_1 = v_a$ et $g_1 = f(v_a)$ pour chaque couple (x, t) . Lorsqu'il y a plusieurs intersections, cela signifie que la courbe u_a est multivaluée.

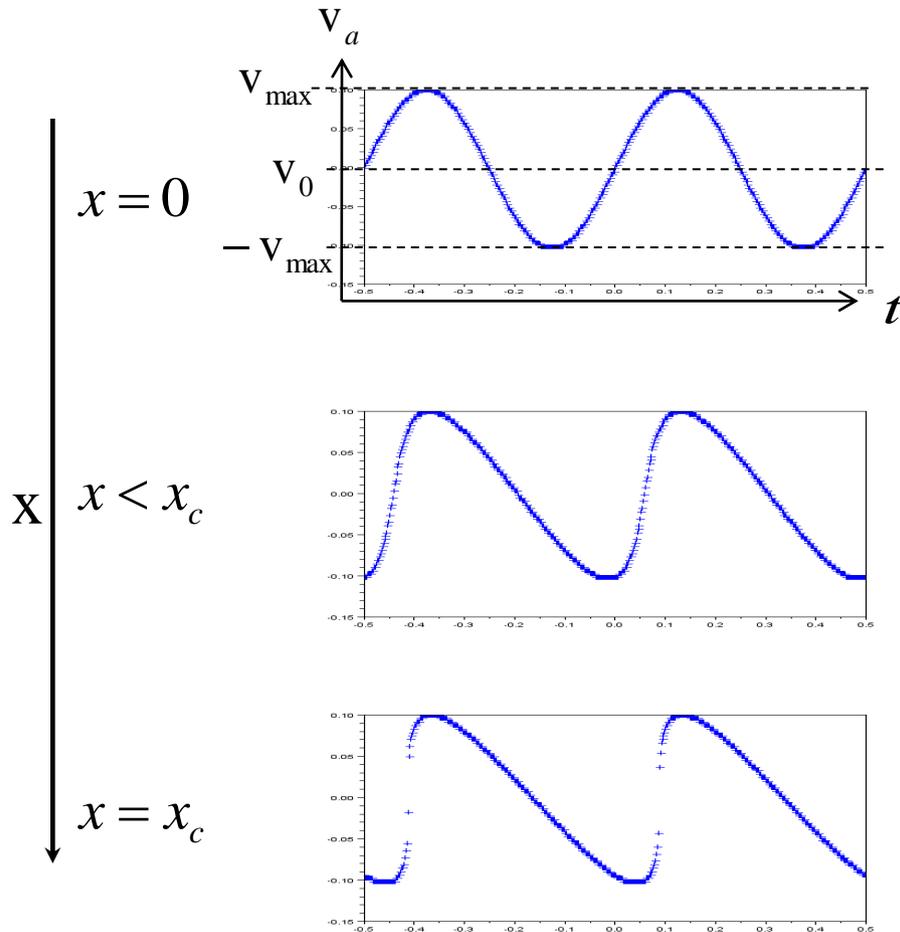
- *La quantité v est-elle simple à mesurer ?*

La pression est plus simple à mesurer. Dans le cas d'une onde plane, p_a et v_a sont proportionnels.

Formation d'un choc (1/2)

→ Source sinusoïdale de fréquence ω

On dessine les fluctuations de vitesse particulière en fonction du temps, pour plusieurs positions



→ La crête voyage plus vite que c_0 : elle rattrape progressivement le creux qui voyage moins vite que c_0

→ à noter : l'onde se « penche » dans la direction des t décroissants et se « penche » dans la direction des x croissants

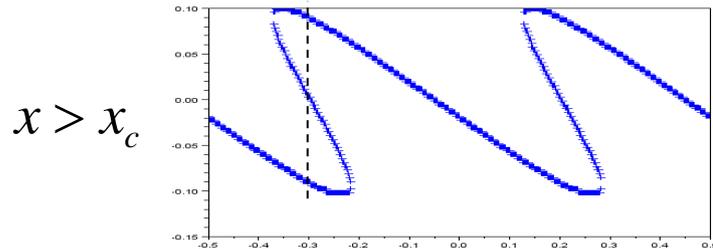
→ le front d'onde se « raidit », c'est-à-dire que la pente augmente

→ Apparition d'un choc lorsque l'onde présente un profil vertical à la distance $x=x_c$ (limite de validité de notre théorie)

Distance de formation d'un choc x_c :
(calcul complet dans l'annexe 2)

$$x_c = \frac{c_0^2}{\beta v_{\max} \omega}$$

Formation d'un choc (2/2)



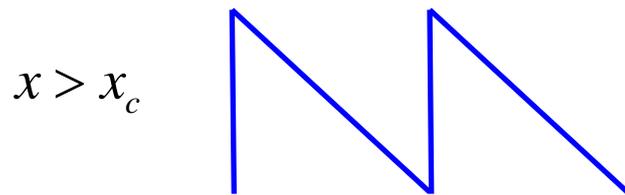
→ La grandeur v devient **multivaluée** (en un certain nombre de points) : à un temps donné, il existe plusieurs valeurs de la vitesse possibles ;

ce n'est pas physique !

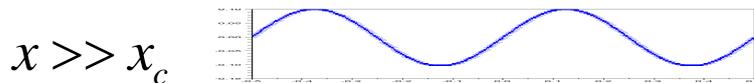
Pour trouver le profil "réel" de l'onde, il faut utiliser la **loi des aires égales**

- on entre dans la théorie des chocs, c-a-d le domaine de l'acoustique fortement non-linéaire
- dans les chocs se produisent des processus irréversibles : les processus ne sont plus adiabatiques

→ on trouve un profil typique **en dents de scie** (*sawtooth*)



La déformation très grande de la forme d'onde entraîne une diminution supplémentaire de l'amplitude : **extra-atténuation non linéaire**

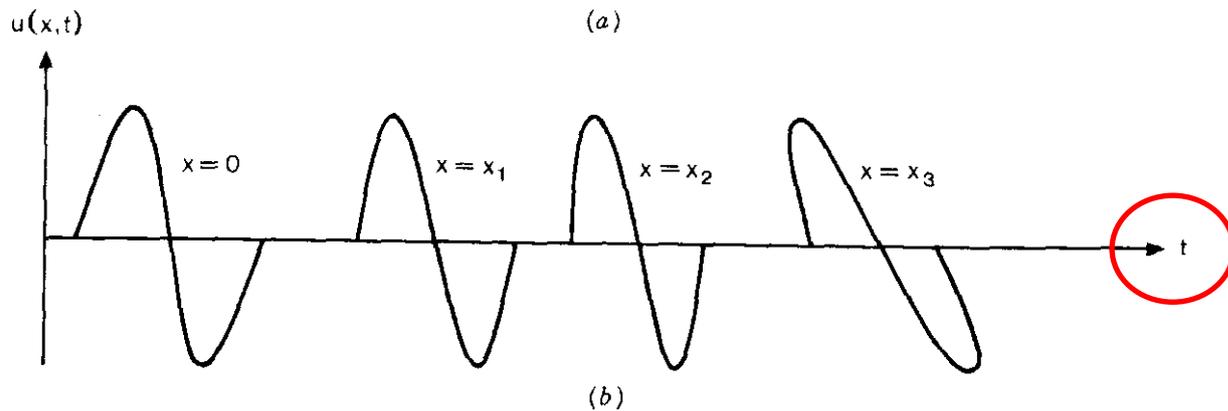
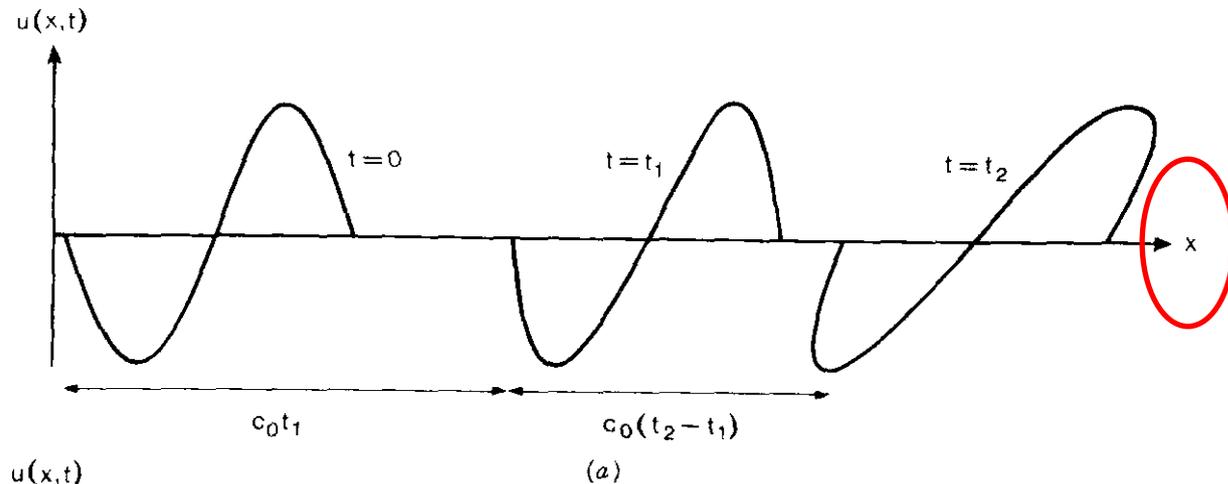


→ la dissipation va "arrondir les angles"

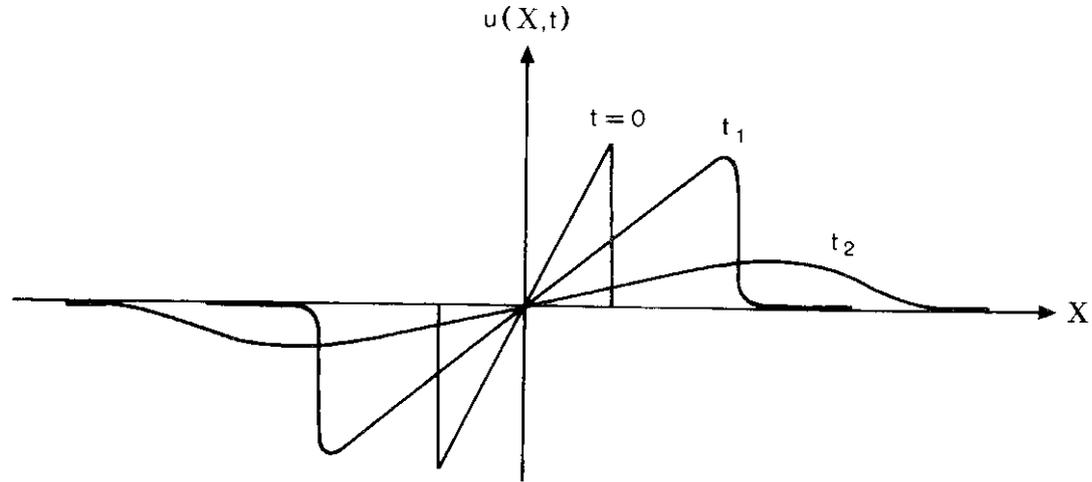
→ au final on retrouve une onde sinusoïdale de plus faible amplitude

Formation d'un choc (*addendum*)

Attention : l'onde se déforme de manière opposée lorsqu'on la regarde en position ou en temps.



Cas particulier : l'onde en N



→ L'onde en N **s'étale** au cours du temps, car la crête voyage plus rapidement que le creux.

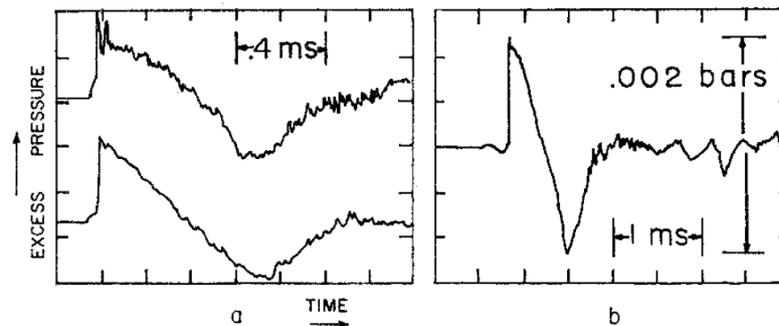
→ Dans le cas des ondes en dent de scie, ce phénomène d'étalement est contrarié par la périodicité du phénomène.

Deux exemples :

→ Ce type d'onde est rencontré dans le cas du **boom sonique** en aéronautique lorsqu'un avion atteint Mach 1.

→ Un ballon gonflable qui éclate produit une onde en N caractéristique

 [D.T.Deihl, *American Journal of Physics*, 36 441 \(1968\)](#)

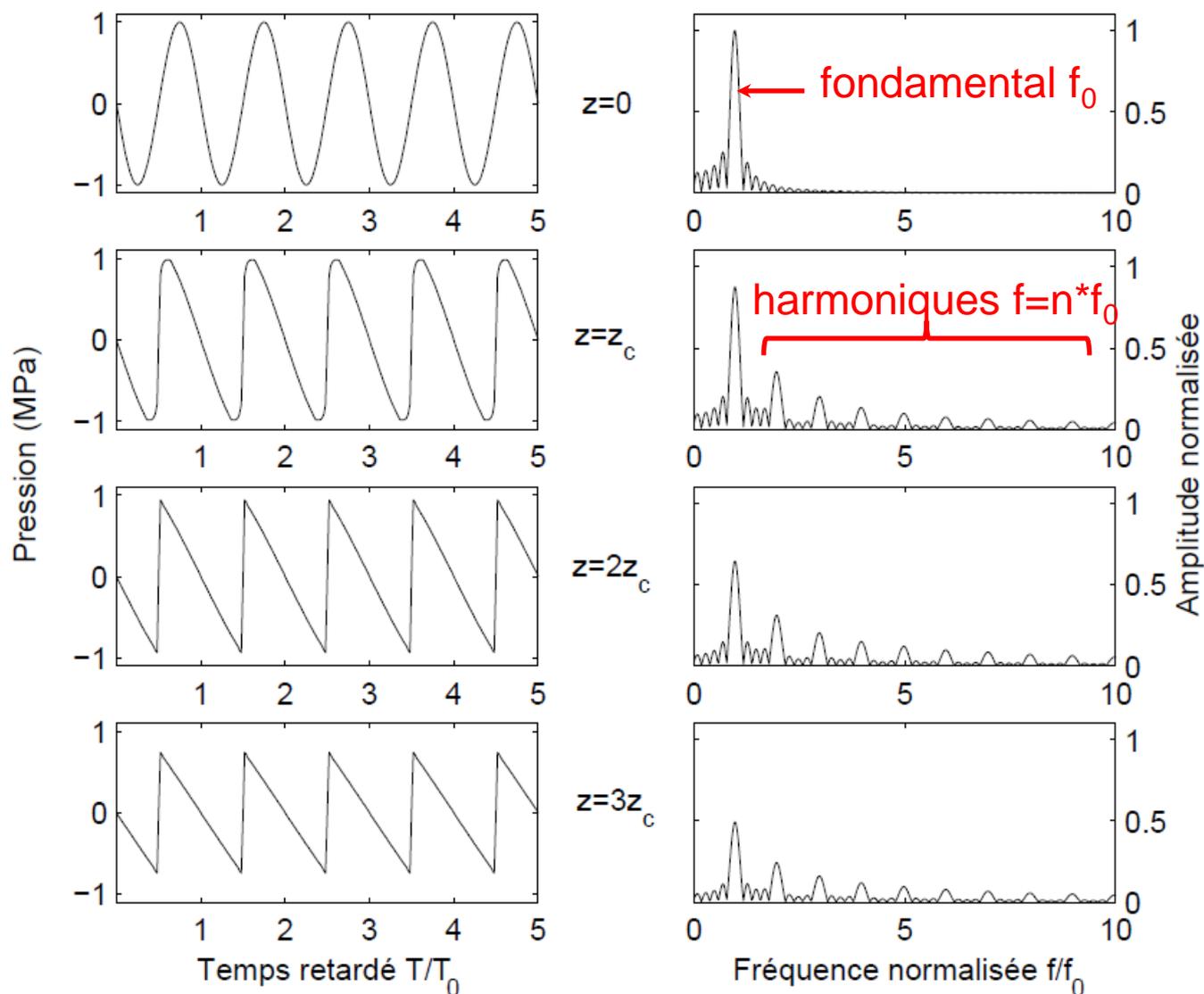


Génération d'harmoniques

Le spectre de l'onde qui se déforme n'est **pas quelconque** : il y a apparition d'harmoniques et diminution du fondamental.

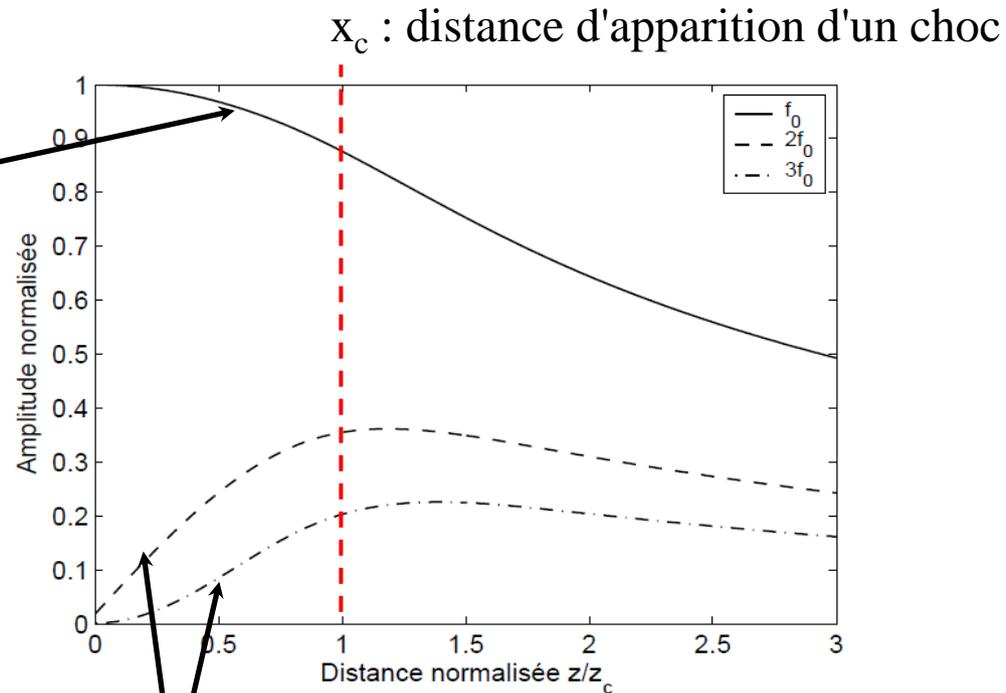
Ces harmoniques sont les **composantes d'une série de Fourier**.

Il y a transfert de l'énergie du fondamental vers les harmoniques. Or l'atténuation augmente lorsque la fréquence augmente donc l'onde va s'atténuer plus vite.



Variation de l'amplitude spectrale des composantes
en fonction de la distance normalisée x/x_c

Décroissance du
fondamental :
**extra-atténuation
non linéaire**



Apparition et
croissance des
harmoniques 1 et 2

Génération d'harmoniques

→ Le **principe de superposition** n'est plus valable : deux ondes qui s'additionnent ont une action mutuelle l'une sur l'autre.

Interaction à 2 ondes : l'interaction NL de 2 ondes de fréquences f_1 et f_2 crée des ondes aux fréquences somme et différence $f_1 \pm f_2$

Preuve :

- soit la somme de 2 ondes notées 1 et 2 :
fonction $h(t)$

$$f(t) = \alpha h(t)$$

$$h(t) = E_1 \cos(\omega_1 t) + E_2 \cos(\omega_2 t)$$

- soit le résultat de la transformation
fonction $f(t)$

$$f(t) = \alpha h(t) + \beta h^2(t) + \gamma h^3(t) + \dots$$

- transformation **linéaire** :
fréq. identique en sortie

$$\alpha h(t) \rightarrow \nu_1, \nu_2$$

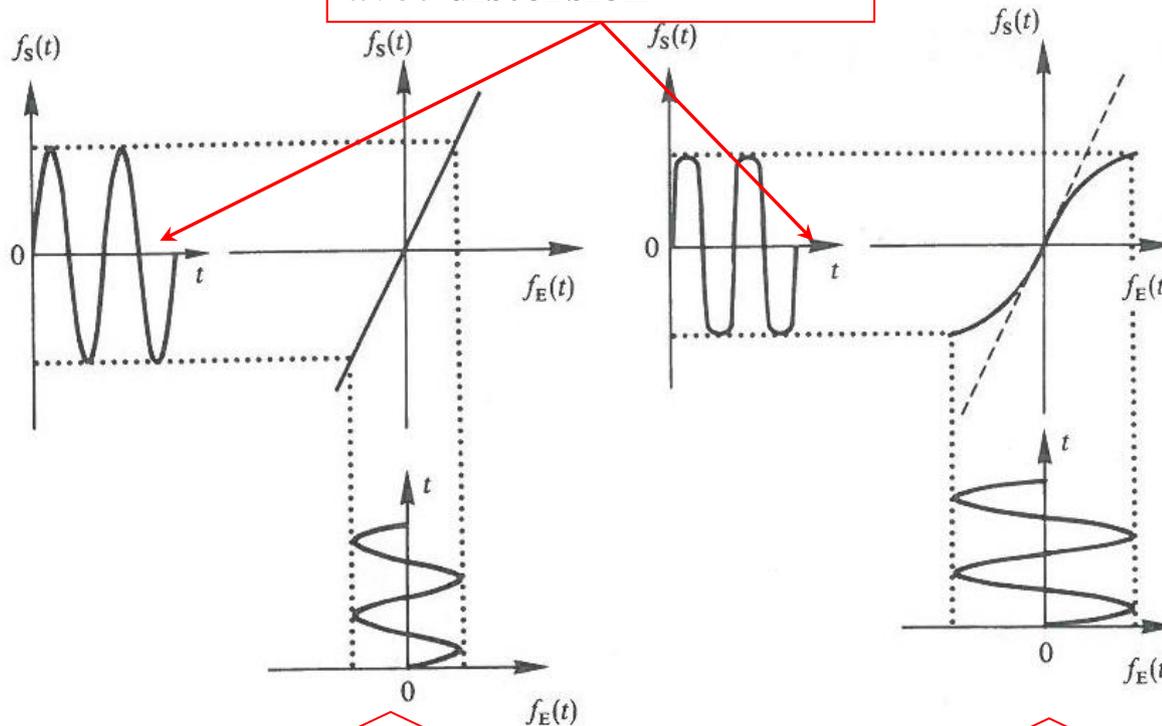
$$\beta h^2(t) \rightarrow 2\nu_1, 2\nu_2, (\nu_1 \pm \nu_2)$$

- transformation **non-linéaire** :
apparition de fréq. nouvelles

$$\gamma h^3(t) \rightarrow 3\nu_1, 3\nu_2, (2\nu_1 \pm \nu_2), (2\nu_2 \pm \nu_1)$$

Non-linéarité d'un système entrée-sortie

Signal de sortie, sans et avec **distorsion**



20. (gauche) Un appareil est linéaire si le signal de sortie $f_s(t)$ est proportionnel à celui d'entrée $f_E(t)$. Si l'appareil n'est pas parfait, le coefficient de proportionnalité dépend de la fréquence (fonction de réponse).

21. (droite) Un appareil non linéaire déforme un signal d'entrée $f_E(t)$ sinusoïdal. Le signal de sortie $f_s(t)$ n'est plus sinusoïdal et sa décomposition en série de Fourier fait apparaître d'autres fréquences que celle de départ.

Signal d'entrée de faible amplitude

Signal d'entrée de forte amplitude

La transformation proportionnelle (à gauche) n'est que l'approximation linéaire sur un faible domaine de variation de la transformation plus générale (à droite)

Bibliographie

Français

- *Acoustique : propagation dans un fluide*

D. Royer et E. Dieulesaint

Techniques de l'ingénieur AF3812

- *Acoustique des instruments de musique*

A. Chaigne et J. Kergomard

ISBN 978-2-7011-3970-8

chapitre 8. Non-linéarités, pages 344-369

- Frédéric Elie, mai 2009 : http://fred.elie.free.fr/acoustique_nonlineaire.htm

- Cours généraliste sur les non-linéarités en physique:

<http://lpc2e.cnrs-orleans.fr/~ddwit/enseignement/cours-nonl.pdf>

Anglais

- *Springer handbook of acoustics*

ISBN : 978-0-387-30446-5

chapitre 8. Nonlinear Acoustics in Fluids

pages 257-297

- *Nonlinear Acoustics: Theory and Applications*

Mark F. Hamilton et David T. Blackstock

Annexe 1 : vitesse du son adiabatique

La propagation du son est un processus adiabatique (ou isentropique, on note cette vitesse v_s). Cela signifie que la chaleur ne se propage pas des parties de l'onde où la T est la plus haute vers les parties de l'onde où la T est la plus basse, au cours de la propagation de l'onde.

Newton, qui avait supposé un processus isotherme, s'est trompé du facteur γ en calculant la vitesse du son dans l'air ($v=280\text{m/s}$). Laplace a trouvé la bonne valeur en considérant une propagation adiabatique ($v=332\text{ m/s}$).

Fletcher [1] montre que la fréquence f de l'onde se propageant à une vitesse c doit être très inférieure à valeur limite f_{lim} pour que la propagation puisse être considérée comme adiabatique (κ est la conductivité thermique) :

$$f_{\text{lim}} = \frac{c^2 \rho_0 C_V}{2\pi\kappa}$$

Une autre démonstration, plus compliquée, a été proposée par Coppens *et al* [2].

[1] N.H.Fletcher, American Journal of Physics, **42** 487 (1974)

[2] Coppens, Beyer, Ballou, JASA **41** 1443 (1966)

Annexe 2 : distance de formation d'un choc

→ on veut trouver la distance x pour laquelle le front est raide, c-a-d la dérivée est infinie : $\frac{\partial v}{\partial t} = \pm\infty$

$$v = f\left(t - \frac{x}{c_0 + \beta v}\right)$$

Calcul de la dérivée :

$$\frac{\partial v}{\partial t} = f' \left[1 + \frac{\beta x}{(c_0 + \beta v)} \frac{\partial v}{\partial t} \right]$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{f'}{1 - f' \beta x / (c_0 + \beta v)^2}$$

La dérivée est infinie lorsque le dénominateur est égal à 0.
Dans ce cas $x=x_c$ où x_c est la distance de formation d'un choc.

$$x_c = \frac{(c_0 + \beta v)^2}{\beta f'}$$

- on suppose ici $v \ll c_0$ (acoustique faiblement non-linéaire)
- x_c est minimal lorsque f' est maximal

Lorsque la source est sinusoïdale, on remplace la fonction f par un sinus :

$$f = v_{\max} \sin \left[\omega \left(t - \frac{x}{c_0 + \beta v} \right) \right] = v_{\max} \sin(\omega \tau)$$

$$f' = \frac{\partial f}{\partial \tau} = v_{\max} \omega \cos(\omega \tau)$$

$$f'_{\max} = v_{\max} \omega$$

$$x_c = \frac{c_0^2}{\beta v_{\max} \omega} = \frac{1}{\beta \varepsilon k} \quad \varepsilon = \frac{v_0}{c_0} = M \quad k = \frac{\omega}{c_0}$$

- $x_c=1$ signifie formation d'un choc
- les équations d'acoustique faiblement non-linéaire ne sont plus valables au-delà de x_c

Conclusion

L'apparition d'ondes de choc est favorisée lorsque x_c diminue, c'est-à-dire lorsque :

- la distance entre la source et l'émetteur augmente (le raidissement est cumulatif)
- l'amplitude v_{\max} de l'onde (ou la surpression) est grande (prévisible !)
- le coefficient de non-linéarité est grand (prévisible aussi !)
- la fréquence de l'onde est grande

Annexe 3 : rappels de thermodynamique

Toute l'information thermodynamique d'un fluide est contenue dans la **fonction caractéristique** qui peut prendre plusieurs formes : $S(U,V)$, $F(T,V)$, $G(T,P)$ ou $H(S,P)$ (S:entropie, F:énergie libre, G:enthalpie libre, H:enthalpie).

De cette fonction on déduit **l'équation d'état** $V(P,T)$ [ou $V(P,S)$], ainsi que les coefficients calorimétriques (C_p , C_v) et les coefficients thermoélastiques (α , χ_T).

Exemples d'équations d'état du gaz parfait :

$$V(P,T) \quad PV = nRT$$

$$V(P,S) \quad PV^\gamma = e^{S/C_v}$$

- Pour une transformation **isotherme**, $dT=0$, donc $PV=\text{constante}$.
- Pour une transformation **adiabatique** et **réversible** (donc **isentropique**), $dS=0$ et on retrouve **la loi de Laplace** $PV^\gamma=\text{constante}$.

Référence : *Thermodynamique PC-PSI*
Nicolas Choimet