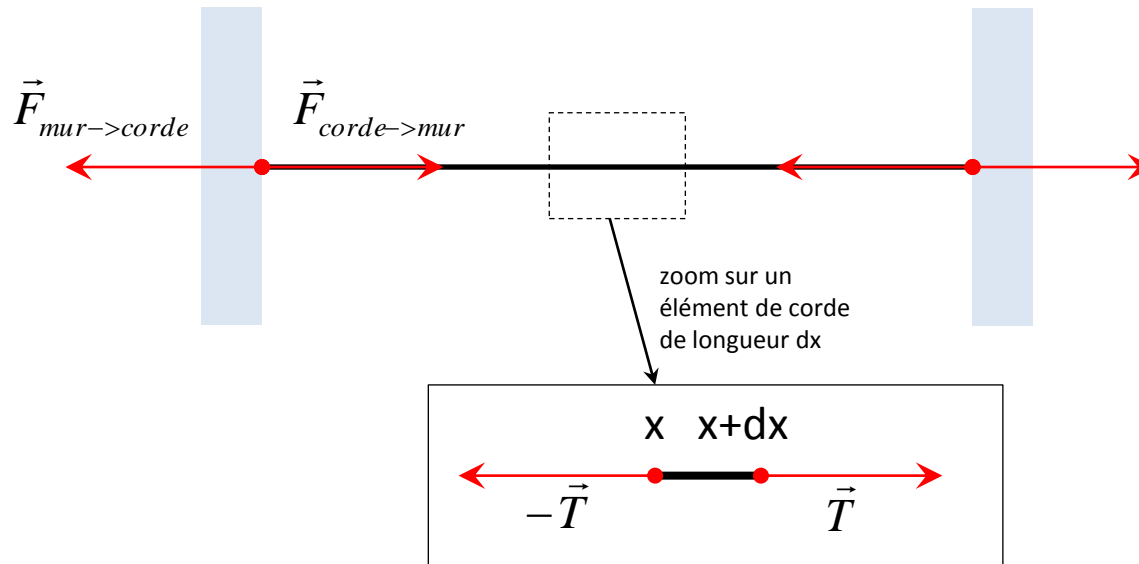


La corde vibrante

S. Ayrinhac (2013)
simon.ayrinhac@upmc.fr

Bilan des forces pour une corde à l'équilibre



$$\sum_i \vec{F}_i = \vec{0} \quad (\text{équilibre des forces})$$

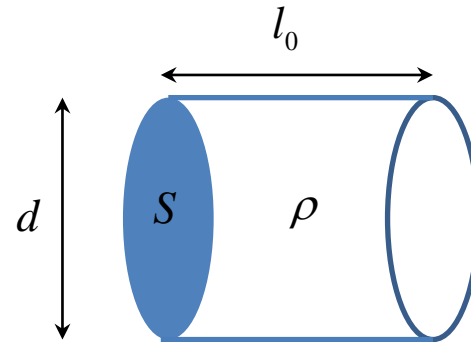
$$\vec{F}_{\text{corde} \rightarrow \text{mur}} = -\vec{F}_{\text{mur} \rightarrow \text{corde}} = \vec{T}$$

- T est la tension (la corde est forcément en extension)
- le poids est négligeable

Géométrie de la corde

La corde est assimilée à **un cylindre**

- de longueur l_0 (m)
- de diamètre d (m)
- de section S (m²)
- de masse m (kg)
- de densité uniforme ρ (kg/m³)



On définit **la masse linéique** μ (kg/m)

$$\mu = \rho S$$

$$S = \pi(d/2)^2$$

Corde de piano, valeurs typiques

$$l_0 = 0.341 \text{ m}$$

$$T = 703 \text{ N}$$

$$\mu = 0.0058 \text{ kg/m}$$

Tension T d'une corde

- force exprimée en N
- appelée aussi « précontrainte axiale appliquée » (Chaîne p.142)
- provoquée par l'élongation de la corde
- en-dessous de la limite élastique (*yield strength*), c'est-à-dire du point de rupture

$$\sigma = E\varepsilon_{\parallel} \quad \boxed{\frac{T}{S} = E \frac{l-l_0}{l_0}} \quad \varepsilon_{\parallel} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

- σ est la contrainte (*stress*, en Pa)
- ε est la déformation (*strain*, sans unité)
- E est le module d'Young E (*Young modulus*, en GPa)

- le diamètre d (et donc la section S) de la corde varie

définition du coefficient de Poisson η

$$\boxed{\eta = -\frac{\varepsilon_{\perp}}{\varepsilon_{\parallel}}}$$

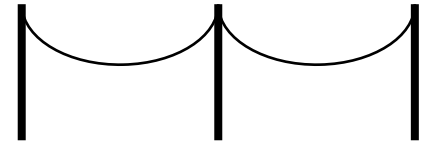
$$\boxed{\frac{d-d_0}{d_0} = -\eta \frac{l-l_0}{l_0}}$$

Références :

<http://sculsnay.free.fr/tpe/cordes.html>

<http://cours.espci.fr/site.php?id=59&fileid=364>

Corde soumise à son propre poids : la chaînette (catenary)



Exemples :

- forme des câbles électriques entre 2 poteaux sur le bord des routes
- forme d'un pont suspendu

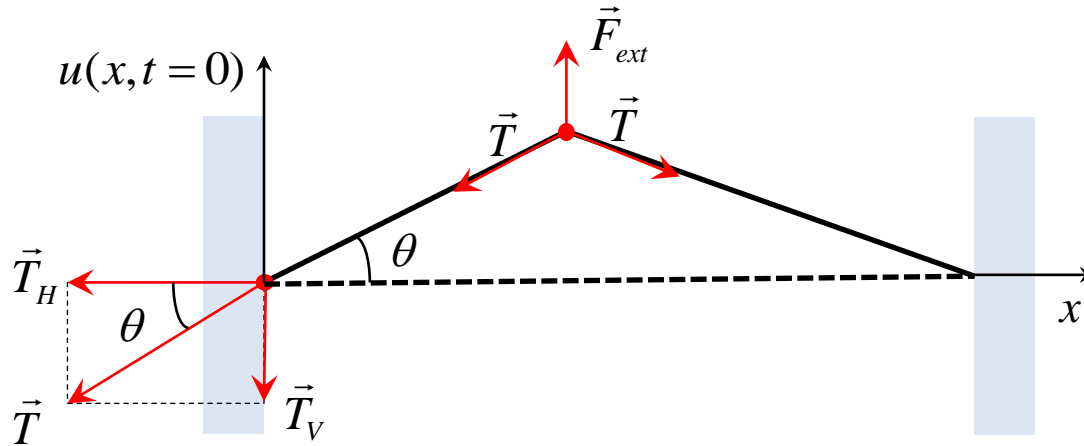
équation de la chaînette

$$y(x) = \frac{a}{2} \left(e^{x/a} + e^{-x/a} \right) = \frac{a}{2} \text{ch}(a) \text{ où } a = \frac{T_H}{\mu}$$

- T_H est la composante horizontale de la tension
- μ est la masse linéique

Référence : *A simple solution of the center loaded catenary*, H.S. Zapolsky, Am. J. Phys. **58**, 1110 (1990) ;
[doi: 10.1119/1.16283](https://doi.org/10.1119/1.16283)

- La corde est écartée de sa position d'équilibre initial par une force extérieure F_{ext}
- Sa longueur augmente, donc la tension T augmente
- La fonction $u(x,t)$ décrit la forme de la corde à tout instant t



A une extrémité ($x=0$ ou $x=L$)

$$T_H = -T \cos(\theta)$$

$$T_V = -T \sin(\theta) \approx -T\theta = -T \frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{pour un angle } \theta \text{ petit}$$

Pour une onde transverse

- Pour un élément de corde de longueur dx
- Les 2 ne se compensent pas exactement à cause de la courbure, due à la perturbation
- Apparition d'une force verticale qui produit un déplacement transverse
- Vitesse de la perturbation : c_T

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

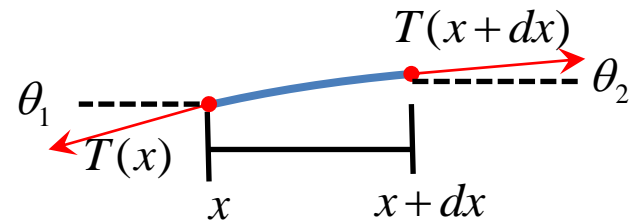
$$F = T(\theta_2 - \theta_1)$$

$$F = T[u'(x + dx) - u'(x)]$$

$$\rho S dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx$$

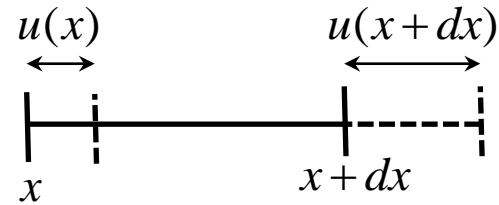
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{T}{\rho S} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

$$\boxed{c_T^2 = \frac{T}{\mu}}$$



Pour une onde longitudinale

- Pour un élément de corde de longueur dx (état non perturbé)
- Longueur dl avec la perturbation longitudinale
- Vitesse de la perturbation : c_L



$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

$$T(x + dx) - T(x) = \rho S dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} dx = \rho S dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$ES dx \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} = \rho S dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$ES dx \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \rho S dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$\frac{E}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

$$c_L^2 = \frac{E}{\rho} = \frac{ES}{\mu}$$

$$dl = u(x + dx) - u(x) + dx$$

$$dl = \frac{\partial u}{\partial x} dx + dx$$

$$\varepsilon = \frac{dl - dx}{dx}$$

$$\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x} - 1$$

Mouvements vibratoires dans une corde

- Se propagent avec une vitesse (célérité) c
- les déformations induites par effet Poisson sont libres

Ondes transverses : T tension

- Équivaut aux ondes de flexion dans un solide
- onde de cisaillement
- absence de variation locale de volume au passage de l'onde (pas d'effet Poisson)

$$c_T^2 = \frac{T}{\mu}$$

Ondes longitudinales : E module d'Young

- équivaut aux ondes de pression dans un gaz
 - produites par élongation (*strain*)
 - variations locales de volume (extension-contraction) au passage de l'onde (coeff. de Poisson) -> *image* : un boa ayant avalé une famille de souris
- Note : dans un bloc les variations locales sont contrariées

$$c_L^2 = \frac{E}{\rho} = \frac{ES}{\mu}$$

plaque $c_L^2 = \frac{E}{\rho(1-\eta^2)}$

bloc $c_L^2 = \frac{E}{\rho} \frac{1-\eta}{(1+\eta)(1-2\eta)}$

Ondes de torsion

- Pour une corde homogène circulaire $K_T=I$

$$c_T^2 = \frac{GK_T}{\rho I}$$

Raideur (stiffness) de la corde : résistance à la flexion (*bending*)

- Produit par le moment des forces sur un élément de corde
- Ajout d'un terme supplémentaire à l'équation des ondes (E module d'Young, K rayon de courbure, S section, u masse linéique)
- conséquence : les modes de courte longueur d'onde ont une fréquence plus haute, apparition de dispersion par rapport à la corde idéale
- les modes ne sont plus harmoniques (ce ne sont plus des multiples du fondamental) : présence d'inharmonicité. Exemple : les cordes de piano

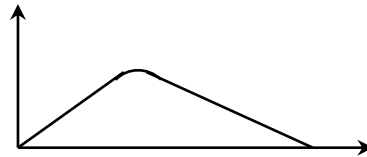
$$\frac{ESK^2}{\mu} \frac{\partial^4 y}{\partial x^4}$$

Corde idéale
pincée sans raideur



Rayon de courbure $K=0$

Corde pincée avec raideur



La corde s'arrondit à l'endroit du pincement : situation plus réaliste,

Rayon de courbure K fini

Effets non-linéaires

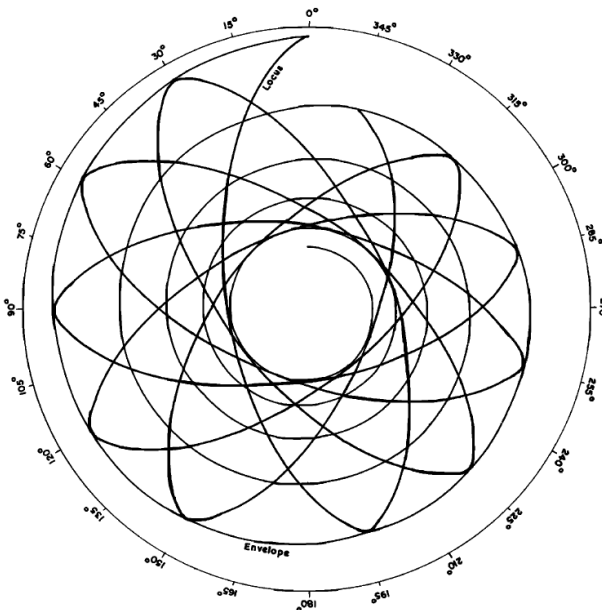
- il faut prendre en compte la variation de tension due aux variations de longueur

⇒ Effets non linéaires

⇒ une force appliquée dans le plan y peut provoquer un mouvement dans le plan z (pola. elliptique)

⇒ couplage T-L : génération d'un mode longi par un transverse

FIG. 1. Locus of the path traced by a point on the string executing free nonplanar vibration. The thick curve shows the locus and the thin curve the envelope.



Bibliographie

- (*eng*) David T. Blackstock, **Fundamentals of Physical Acoustics**
2000 Wiley&Sons ISB 0-471-31979-1

→ introduction très complète

→ accessible en ligne : books.google.fr/books?isbn=0471319791

- (*eng*) N.H. Fletcher, T.D.Rossing, **The physics of musical instruments 2ed**
1998 ISBN 0-387-98374-0 Springer-verlag

→ introduction très complète et accessible au niveau L2

- (*fr*) A. Chaigne, J. Kergomard, **Acoustique des instruments de musique**
Belin 2008 ISBN 9782-7011-3970-8

→ niveau M1, M2 et doctorat