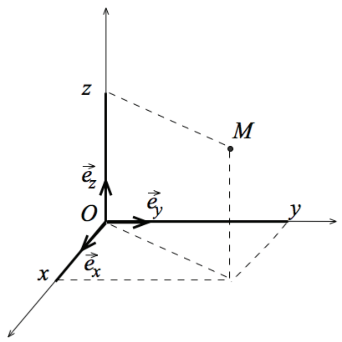
Formulaire mathématique

I. Systèmes de coordonnées

Coordonnées cartésiennes

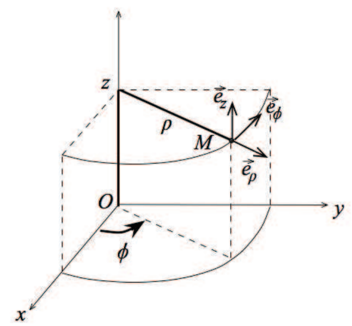


$$\overrightarrow{OM} = x\,\vec{e}_x + y\,\vec{e}_y + z\,\vec{e}_z. \tag{1}$$

$$\mathrm{d}\vec{\ell} = \mathrm{d}x\,\vec{e}_x + \mathrm{d}y\,\vec{e}_y + \mathrm{d}z\,\vec{e}_z. \tag{2}$$

$$\mathrm{d}\tau = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z. \tag{3}$$

Coordonnées cylindriques

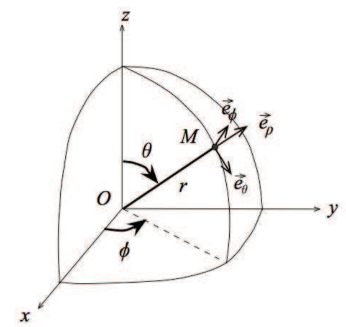


$$\overrightarrow{OM} = \rho\,\vec{e}_\rho + z\,\vec{e}_z. \tag{4}$$

$$\mathrm{d}\vec{\ell} = \mathrm{d}\rho\,\vec{e}_\rho + \rho\,\mathrm{d}\phi\,\vec{e}_\phi + \mathrm{d}z\,\vec{e}_z. \tag{5}$$

$$\mathrm{d}\tau = \rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}z. \tag{6}$$

Coordonnées sphériques



$$\overrightarrow{OM} = r\,\vec{e}_r. \tag{7}$$

$$\mathrm{d}\vec{\ell} = \mathrm{d}r\,\vec{e}_r + r\,\mathrm{d}\theta\,\vec{e}_\theta + r\sin\theta\,\mathrm{d}\phi\,\vec{e}_\phi. \tag{8}$$

$$\mathrm{d}\tau = r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi. \tag{9}$$

II. Gradient d'un champ scalaire $f(M)$

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,f = \frac{\partial f}{\partial x}\,\vec{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\,\vec{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\,\vec{e}_z \qquad \text{(coord. cartésiennes).} \tag{10}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,f = \frac{\partial f}{\partial \rho}\,\vec{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\,\frac{\partial f}{\partial \phi}\,\vec{e}_\phi + \frac{\partial f}{\partial z}\,\vec{e}_z \qquad \text{(coord. cylindriques).} \tag{11}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,f = \frac{\partial f}{\partial r}\,\vec{e}_r + \frac{1}{r}\,\frac{\partial f}{\partial \theta}\,\vec{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\,\frac{\partial f}{\partial \phi}\,\vec{e}_\phi \qquad \text{(coord. sphériques).} \tag{12}$$

III. Divergence d'un champ vectoriel $\vec{A}(M)$

$$\mathrm{div}\,\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \qquad \text{(coord. cartésiennes).} \tag{13}$$

$$\mathrm{div}\,\vec{A} = \frac{1}{\rho}\,\frac{\partial(\rho\,A_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\,\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \qquad \text{(coord. cylindriques).} \tag{14}$$

$$\mathrm{div}\,\vec{A} = \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial(r^2\,A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\,\frac{\partial(A_\theta\sin\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\,\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} \qquad \text{(coord. sphériques).} \tag{15}$$

IV. Rotationnel d'un champ vectoriel $\vec{A}(M)$

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\vec{e}_x + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\vec{e}_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\vec{e}_z \qquad \text{(coord. cartésiennes).} \tag{16}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A} = \left(\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z}\right)\vec{e}_\rho + \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho}\right)\vec{e}_\phi + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial[\rho\, A_\phi]}{\partial \rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial \phi}\right)\vec{e}_z \qquad \text{(coord. cylindriques).} \tag{17}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A} = \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial[A_\phi \sin\theta]}{\partial\theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial\phi}\right)\vec{e}_r + \frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\,\frac{\partial A_r}{\partial\phi} - \frac{\partial[r\,A_\phi]}{\partial r}\right)\vec{e}_\theta + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial[r\,A_\theta]}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right)\vec{e}_\phi \qquad \text{(coord. sphériques).} \tag{18}$$

V. Laplacien d'un champ scalaire f

$$\Delta f \coloneqq \mathrm{div}(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f) \tag{19}$$

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \qquad \text{(coord. cartésiennes).} \tag{20}$$

$$\Delta f = \frac{1}{\rho}\,\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\,\frac{\partial f}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\,\frac{\partial^2 f}{\partial\Phi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \qquad \text{(coord. cylindriques).} \tag{21}$$

$$\Delta f = \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\,\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\sin\theta\,\frac{\partial f}{\partial\theta}\right] + \frac{1}{\sin\theta}\,\frac{\partial^2 f}{\partial\phi^2}\right) \qquad \text{(coord. sphériques).} \tag{22}$$

VI. Laplacien d'un champ vectoriel $\vec{A}(M)$

$$\Delta\vec{A} = \Delta A_x\,\vec{e}_x + \Delta A_y\,\vec{e}_y + \Delta A_z\,\vec{e}_z \qquad \text{(coord. cartésiennes).} \tag{23}$$

VII. Opérateur $(\vec{A}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}})\vec{B}$

$$(\vec{A}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}})\vec{B} = A_x\,\frac{\partial\vec{B}}{\partial x} + A_y\,\frac{\partial\vec{B}}{\partial y} + A_z\,\frac{\partial\vec{B}}{\partial z}\,. \tag{24}$$

VIII. Relations vectorielles

$$\vec{A}\times\vec{B} = -\vec{B}\times\vec{A}. \tag{25}$$

$$\vec{A}\times\vec{A} = \vec{0}. \tag{26}$$

$$\vec{A}\cdot(\vec{A}\times\vec{B}) = 0. \tag{27}$$

$$\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C}) = \vec{B}\cdot(\vec{C}\times\vec{A}) = \vec{C}\cdot(\vec{A}\times\vec{B}). \tag{28}$$

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) = (\vec{A}\cdot\vec{C})\,\vec{B} - (\vec{A}\cdot\vec{B})\,\vec{C}. \tag{29}$$

$$\mathrm{div}(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A}) = 0. \tag{30}$$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f) &= \vec{0}. && (31)\\
\mathrm{div}(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f) &= \Delta f. && (32)\\
\overrightarrow{\mathrm{grad}}(f\, g) &= f\, \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, g + g\, \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f. && (33)\\
\mathrm{div}(f \vec{A}) &= (\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f) \cdot \vec{A} + f\, \mathrm{div}\, \vec{A}. && (34)\\
\overrightarrow{\mathrm{rot}}(f \vec{A}) &= (\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f) \times \vec{A} + f\, \overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{A}. && (35)\\
\mathrm{div}(\vec{A} \times \vec{B}) &= \vec{B} \cdot \overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{A} - \vec{A} \cdot \overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{B}. && (36)\\
\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{A}) &= \overrightarrow{\mathrm{grad}}(\mathrm{div}\, \vec{A}) - \Delta \vec{A}. && (37)\\
\overrightarrow{\mathrm{grad}}(\vec{A} \cdot \vec{B}) &= \vec{A} \times \overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{B} + \vec{B} \times \overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{A} + (\vec{B} \cdot \overrightarrow{\mathrm{grad}})\vec{A} + (\vec{A} \cdot \overrightarrow{\mathrm{grad}})\vec{B}. && (38)\\
\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{A} \times \vec{B}) &= -\vec{B}\, \mathrm{div}\, \vec{A} + \vec{A}\, \mathrm{div}\, \vec{B} + (\vec{B} \cdot \overrightarrow{\mathrm{grad}})\vec{A} - (\vec{A} \cdot \overrightarrow{\mathrm{grad}})\vec{B}. && (39)\\
(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\mathrm{grad}})\vec{v} &= \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, \frac{v^2}{2} - \vec{v} \times \overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{v}. && (40)
\end{aligned}$$

IX. Opérateur nabla $\vec{\nabla}$

$\vec{\nabla}$ est un opérateur différentiel vectoriel défini en coordonnées cartésiennes par

$$\vec{\nabla} = \vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z}\,. \tag{41}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} f &= \vec{e}_x \frac{\partial f}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial f}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial f}{\partial z} &&= \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f, && (42)\\
\vec{\nabla} \cdot \vec{A} &= \vec{e}_x \cdot \frac{\partial \vec{A}}{\partial x} + \vec{e}_y \cdot \frac{\partial \vec{A}}{\partial y} + \vec{e}_z \cdot \frac{\partial \vec{A}}{\partial z} &&= \mathrm{div}\, \vec{A}, && (43)\\
\vec{\nabla} \times \vec{A} &= \vec{e}_x \times \frac{\partial \vec{A}}{\partial x} + \vec{e}_y \times \frac{\partial \vec{A}}{\partial y} + \vec{e}_z \times \frac{\partial \vec{A}}{\partial z} &&= \overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{A}. && (44)
\end{aligned}$$

L'opérateur $\vec{\nabla}$ n'est pas un vecteur et ne doit pas être considéré comme tel dans les calculs (il n'y a pas commutativité de la multiplication scalaire avec $\vec{\nabla}$ par exemple).

X. Variation d'un champ $\vec{A}(\vec{r})$ sur un déplacement infinitésimal d$\vec{r}$

$$\mathrm{d}\vec{A} = (\mathrm{d}\vec{r} \cdot \overrightarrow{\mathrm{grad}})\vec{A} \qquad \left(\text{ou } \mathrm{d}\vec{A} = (\mathrm{d}\vec{r} \cdot \overrightarrow{\mathrm{grad}})\vec{A} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\, \mathrm{d}t \text{ si } \vec{A} \text{ dépend aussi de } t\right). \tag{45}$$

Rappel : pour un champ scalaire $f(\vec{r})$,

$$\mathrm{d}f = \mathrm{d}\vec{r} \cdot \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f \qquad \left(\text{ou } \mathrm{d}f = \mathrm{d}\vec{r} \cdot \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f + \frac{\partial f}{\partial t}\, \mathrm{d}t \text{ si } f \text{ dépend aussi de } t\right). \tag{46}$$

Si $\vec{r}$ est le rayon-vecteur en un point quelconque et $\vec{A}$ est un champ constant,

$$\operatorname{div}\vec{r} = 3, \tag{47}$$

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{r} = \vec{0}, \tag{48}$$

$$\overrightarrow{\operatorname{grad}}\,r = \frac{\vec{r}}{r} = \vec{e}_r, \tag{49}$$

$$\operatorname{div}\frac{\vec{r}}{r^3} = -\Delta\left(\frac{1}{r}\right) = 0, \tag{50}$$

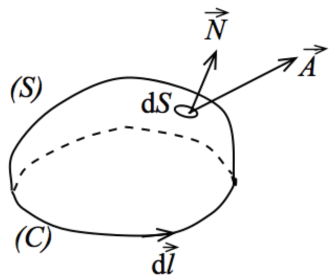
$$\overrightarrow{\operatorname{grad}}\,\frac{1}{r} = -\frac{\vec{r}}{r^3}, \tag{51}$$

$$\operatorname{div}\left(\frac{\vec{A}}{r}\right) = \vec{A}\cdot\overrightarrow{\operatorname{grad}}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{\vec{A}\cdot\vec{r}}{r^3}, \tag{52}$$

$$\Delta\left(\frac{\vec{A}}{r}\right) = \vec{0}. \tag{53}$$

XI. Relations intégrales

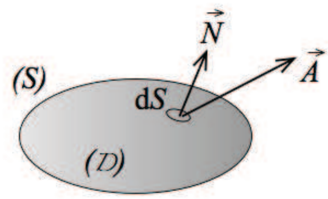
- Soient (C) un chemin fermé, $\mathrm{d}\vec{\ell}$ un déplacement élémentaire sur la courbe (C) et (S) une surface quelconque (non fermée), s'appuyant sur (C), dont la normale unitaire $\vec{N}$ est orientée en concordance avec $\mathrm{d}\vec{\ell}$ (suivant la règle du tire-bouchon de Maxwell, par exemple). Alors,



$$\oint_{(C)} \vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{\ell} = \iint_{(S)} (\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{A})\cdot\vec{N}\,\mathrm{d}S \qquad \text{(théorème de Stokes),} \tag{54}$$

$$\oint_{(C)} f\,\mathrm{d}\vec{\ell} = \iint_{(S)} (\vec{N}\,\mathrm{d}S \times \overrightarrow{\operatorname{grad}}\,f). \tag{55}$$

- Soit (S) une surface fermée quelconque délimitant un domaine (D) et dont la normale unitaire $\vec{N}$ est orientée vers l'extérieur. Alors,



$$\oiint_{(S)} \vec{A}\cdot\vec{N}\,\mathrm{d}S = \iiint_{(D)} \operatorname{div}\vec{A}\,\mathrm{d}\tau \qquad \text{(th. de Green-Ostrogradski),} \tag{56}$$

$$\oiint_{(S)} f\,\vec{N}\,\mathrm{d}S = \iiint_{(D)} \overrightarrow{\operatorname{grad}}\,f\,\mathrm{d}\tau, \tag{57}$$

$$\oiint_{(S)} \vec{N}\,\mathrm{d}S \times \vec{A} = \iiint_{(D)} \overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{A}\,\mathrm{d}\tau. \tag{58}$$