

# Lumière polarisée

## Dans la représentation de Jones

S.Ayrinhac (2012)  
simon.ayrinhac@upmc.fr

- I. Représentation de Jones**
- II. Éléments d'optique
- III. Interférométrie

## Cas d'une lumière monochromatique purement polarisée

- champ électrique  $\vec{E}(z, t)$
- longueur d'onde  $\lambda$ , fréquence  $\nu$ , pulsation  $\omega=2\pi\nu$
- varie dans le temps comme  $\exp(-i\omega t)$
- se propage suivant l'axe  $z$
- polarisation dans le plan  $(x, y)$

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(kz - \omega t + \varphi)}$$

$$\vec{E} = (E_{0x} \vec{u}_x + E_{0y} \vec{u}_y) e^{i(kz - \omega t + \varphi)}$$

$$\vec{E} = (E_{0x} e^{i\varphi_x} \vec{u}_x + E_{0y} e^{i\varphi_y} \vec{u}_y) e^{i(kz - \omega t)} \quad \text{le terme } e^{i(kz - \omega t)} \text{ est appelé } \textit{propagateur}$$

## Champ électrique et vecteur de Jones (noté J)

$$\vec{E}_0 = \begin{pmatrix} E_{0x} e^{i\varphi_x} \\ E_{0y} e^{i\varphi_y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_{0x} \\ E_{0y} e^{i(\varphi_y - \varphi_x)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_p \\ E_s \end{pmatrix} = J$$

p : parallèle au plan d'incidence, dans le plan de la table optique

s : perpendiculaire (du mot allemand *senkrecht*), perpendiculaire au plan de la table

- Linéaire (ou rectiligne) : si  $\varphi_y - \varphi_x = k\pi$  avec  $k \in \mathbb{N}$ , si  $E_x = 0$  ou  $E_y = 0$

$$L_H = \begin{pmatrix} E_{0x} e^{i\alpha_x} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$L_V = \begin{pmatrix} 0 \\ E_{0y} e^{i\alpha_y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$L_{45^\circ} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$L_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}$$

- elliptique

$$E = \frac{1}{\sqrt{E_x^2 + E_y^2}} \begin{pmatrix} E_0 \cos \theta e^{i\alpha_x} \\ E_0 \sin \theta e^{i\alpha_y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \exp(i\Delta) \end{pmatrix}$$

- circulaire droit (*right-handed RH*),  $\varphi_y - \varphi_x = \pi/2$

$$RH = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \rightarrow \text{réel par convention}$$

- circulaire gauche (*left-handed LH*),  $\varphi_y - \varphi_x = -\pi/2$

$$LH = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$$

- Quel est l'état de polarisation du vecteur  $J$  suivant ?  $J = \begin{pmatrix} 1+i \\ 1-i \end{pmatrix}$

$$J = \begin{pmatrix} 1+i \\ 1-i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\pi/4} \\ e^{-i\pi/4} \end{pmatrix} = e^{i\pi/4} \begin{pmatrix} 1 \\ e^{-i\pi/2} \end{pmatrix} = e^{i\pi/4} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} = RH$$

## Superposition

- les équations de Maxwell sont linéaires, les champs peuvent donc être superposés (sommés)

$$H + V = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = L_{45^\circ}$$

$$RH + LH = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = \frac{2}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = H$$

- attention à ce cas particulier :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{cache le phénomène d'interférences de 2 ondes en opposition de phase}$$

## Le formalisme de Jones

- cas de la lumière purement polarisée uniquement
- si lumière non purement polarisée : formalisme de Stokes ou de Mueller
- adapté au cas où les faisceaux sont interdépendants : cas d'un interféromètre, propagation à travers plusieurs composants
- un élément d'optique est caractérisé par sa matrice  $M$
- le produit matriciel se fait en sens inverse des éléments (notés 1 à  $n$ )

$$M^{(n)} = M_n M_{n-1} \dots M_2 M_1 \qquad J_f = M^{(n)} J_i$$

- exemple simple : un faisceau polarisé H traverse une lame demi-onde puis un polariseur

$$res = POL \cdot HWP \cdot H$$

## Calcul de l'intensité I

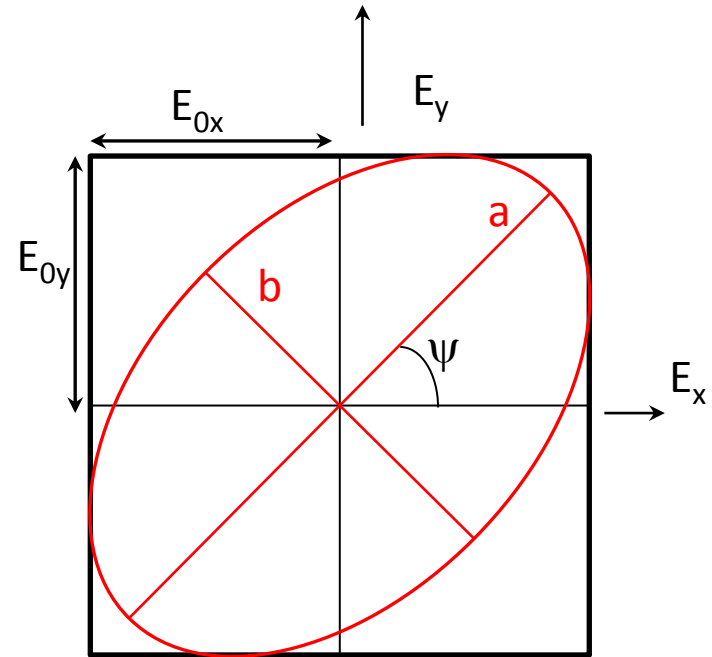
- quantité mesurée par un détecteur (photodiode par exemple)
- le symbole \* note le complexe conjugué

$$I = E_x E_x^* + E_y E_y^* = 1$$

condition de normalisation

## Formules pour l'ellipse

angle auxiliaire  $\alpha$   
demi grand-axe  $a$   
demi petit-axe  $b$   
angle de rotation  $\psi$   
angle d'ellipticité  $\chi$



$$\alpha = \arctan(E_{0y} / E_{0x})$$

$$a = \sqrt{E_{0x}^2 \cos^2 \psi + E_{0y}^2 \sin^2 \psi + 2E_{0x}E_{0y} \cos \psi \sin \psi \cos \delta}$$

$$b = \sqrt{E_{0x}^2 \cos^2 \psi + E_{0y}^2 \sin^2 \psi - 2E_{0x}E_{0y} \cos \psi \sin \psi \cos \delta}$$

$$\psi = \arctan(\tan 2\alpha \cos \delta)$$

$$\chi = b / a$$



## Polarisation orthogonale $\vec{e}_\perp$

$\vec{e}_\perp$  est le vecteur de Jones support

$$\vec{e}_\perp = \vec{u}_z \wedge \vec{e}_\perp^*$$

complexe conjugué  
produit vectoriel

$$\vec{e}_\perp^T \vec{e}_\perp^* = 0$$

transposée

## Rappels sur les complexes conjugués (notés avec une \*)

- symétrique de  $z$  par rapport à l'axe des réels

$$\text{forme cartésienne} \begin{cases} z = a + ib \\ z^* = a - ib \end{cases}$$

$$\text{forme polaire} \begin{cases} z = re^{i\theta} \\ z^* = re^{-i\theta} \end{cases}$$

## Rappels sur le produit vectoriel (noté avec $\wedge$ )

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 z_2 - z_1 y_2 \\ z_1 x_2 - x_1 z_2 \\ x_1 y_2 - y_1 x_2 \end{pmatrix}$$

## Exemple : calcul de la polarisation orthogonale de LH

$$\vec{e}_{\perp} = \vec{u}_z \wedge LH^*$$

$$\vec{e}_{\perp} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{i}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1/i \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{i}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix} = RH$$

Conclusion : RH et LH sont orthogonaux ! Il en est de même pour :

- H et V

$$- \begin{pmatrix} 1+i \\ 1-i \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 1-i \\ 1+i \end{pmatrix}$$

## Opération de rotation sur une matrice de Jones M

$$rot_{\theta} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad \text{matrice de rotation d'un angle } \theta$$

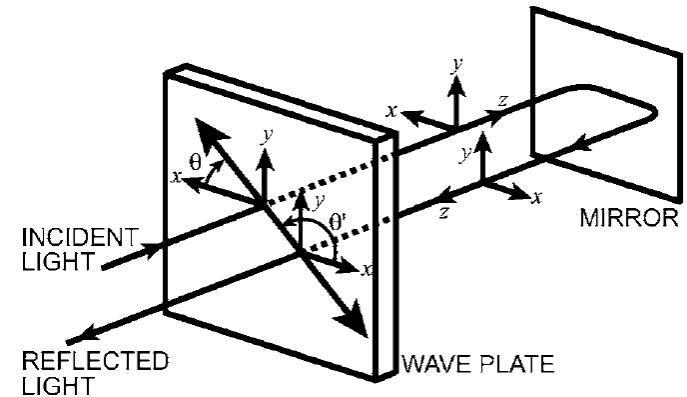
$$M_{\theta} = rot_{-\theta} \cdot M \cdot rot_{\theta}$$

- I. Représentation de Jones
- II. Éléments d'optique**
- III. Interférométrie

## Miroir R de réflectance $r$ (ou miroir parfait $m$ )

- en incidence normale ( $\theta_i=0$ )
- à la réflexion,  $z$  change de direction et  $x$  devient  $-x$
- une onde polarisée RH devient LH, et inversement

$$m = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad R = \begin{pmatrix} -r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix}$$



- les miroirs dépolarisent légèrement la lumière polarisée
- les miroirs d'argent servent pour le rouge et l'infrarouge, l'aluminium sert pour le bleu et l'ultraviolet (jusqu'à une certaine limite)

## Miroir vibrant

- utile en interférométrie
- miroir monté sur une platine piézoélectrique
- compense les changements de chemin optique via un asservissement dynamique

$$M_{\delta} = \begin{pmatrix} -e^{i\delta} & 0 \\ 0 & e^{i\delta} \end{pmatrix}$$

**Miroir R, en incidence quelconque  $\theta_i$ , taillé dans un matériau d'indice n**

$$R = \begin{pmatrix} -r_p & 0 \\ 0 & r_s \end{pmatrix}$$

$r_p$  et  $r_s$  sont les coefficients de Fresnel

$$r_p = \frac{\cos \theta_t - n \cos \theta_i}{\cos \theta_t + n \cos \theta_i} \quad \text{dans le plan d'incidence}$$

$$r_s = \frac{\cos \theta_i - n \cos \theta_t}{\cos \theta_i + n \cos \theta_t} \quad \text{parallèle au plan de la surface réfléchissante}$$

où  $\theta_t$  est donné par la loi de Snell-Descartes :  $\sin \theta_i = n \sin \theta_t$

Exemple : performance des miroirs Thorlabs en argent (*protected silver*), à  $\theta_i=45^\circ$  d'angle d'incidence, pour une longueur d'onde de 800 nm

$$R_{\text{moy}} = 98.333 \%$$

$$R_p = 98.70 \%$$

$$R_s = 97.65 \%$$

$$R_p = |r_p|^2$$

## Polariseur

- appelé aussi *film polaroïd*
  - formé d'une grille (ou de polymères étirés) suivant un certain axe, seule la composante perpendiculaire à cet axe est transmise
  - obtenu naturellement avec un cristal dichroïque (ex.: tourmaline)
  - transforme une lumière naturelle (non polarisée) en lumière polarisée
  - aussi appelé *analyseur* juste après un autre polariseur
  - la rotation du polariseur n'affecte pas l'intensité dans le cas d'une pola. circulaire incidente
- 
- les écrans plats ou de téléphone émettent une lumière polarisée
  - certaines lunettes 3D ont des verres avec une polar. différente pour chaque œil

$$POL_H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad POL_{45^\circ} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

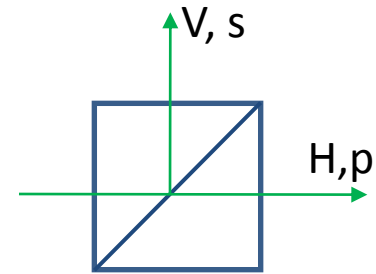
$$POL_V = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad POL_{135^\circ} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$POL_\theta = \begin{pmatrix} \cos^2 \theta & \cos \theta \sin \theta \\ \cos \theta \sin \theta & \sin^2 \theta \end{pmatrix}$$

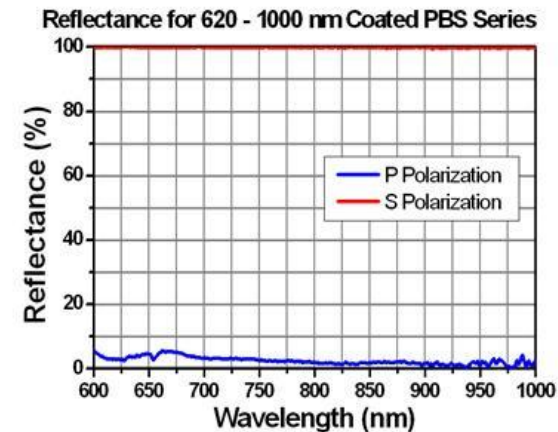
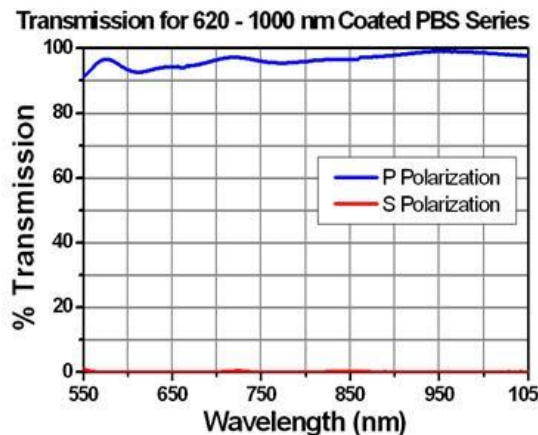
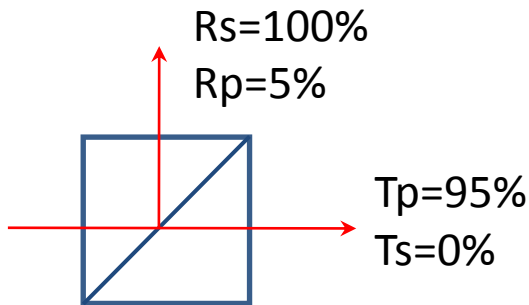
## Cube polarisant (*polarizing beam splitter, PBS*)

- travaille en réflexion (r) ou en transmission (t)
- réfléchit V à 90° ou transmet H

$$PBS_r = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad PBS_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$



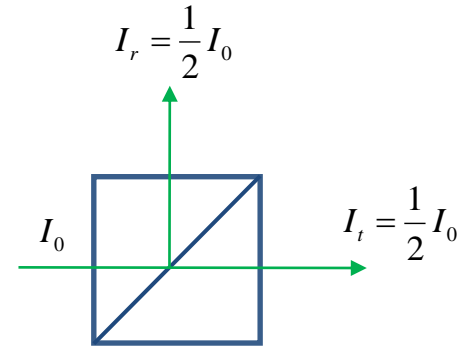
- le prisme de Glan-Taylor est le plus commun, il est fabriqué à base de calcite
- il existe des cubes en verre, c'est le traitement de séparation entre 2 demi-prismes qui polarise (exemple avec les cubes PBS de Thorlabs)
- les cubes ont généralement un Rp non nul (dans la gamme 600-1000 nm)



## Cube non polarisant (*nonpolarizing beam splitter NPBS*)

$$NPBS_r = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{équivalent à un miroir (avec } \theta_i = \pi/4 \text{)}$$

$$NPBS_t = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \longrightarrow \quad \text{matrice identité } I_2$$



## Filtre neutre (*neutral density filter ND*) de transmission **t**

- la densité optique (DO) est définie dans le facteur de transmission  $t = I/I_0 = 10^{-DO}$   
(exemple : un filtre de densité 1 atténue d'un facteur 10)

$$ND = t \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$



### Lame d'onde (*wave plate, WP*)

- ligne neutre tournée d'un angle  $\theta$  par rapport à l'axe x
- une lame d'épaisseur L introduit un retard  $\Delta = \varphi_y - \varphi_x = 2\pi L/\lambda$

$$WP_{\Delta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-i\Delta} \end{pmatrix}$$

$$WP_{\Delta, \theta} = rot_{-\theta} \cdot WP_{\Delta} \cdot rot_{\theta}$$

$$WP_{\Delta, \theta} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \exp(-i\Delta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

## Lame demi-onde (*half-wave plate, HWP*)

- épaisseur  $L = \lambda/2$ , retard  $\Delta = \pi$
- possède deux *lignes neutres* à  $90^\circ$  l'une de l'autre

$$HWP_{0^\circ} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$HWP_{45^\circ} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$HWP_{90^\circ} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

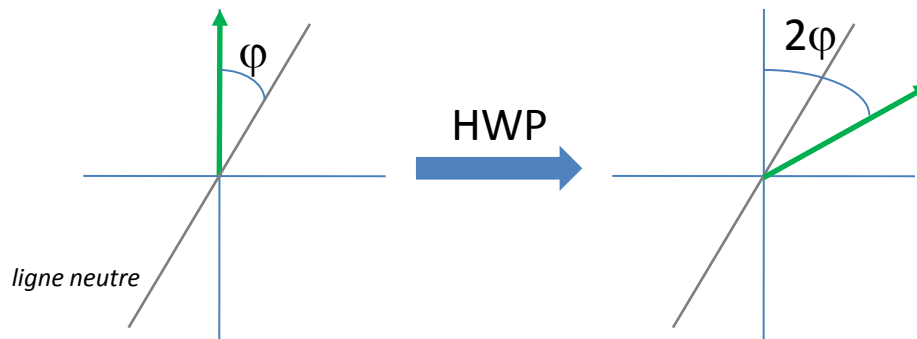
$$HWP_{22.5^\circ} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$HWP_{67.5^\circ} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$HWP_{45^\circ} \cdot H = V$$

$$HWP_{22.5^\circ} \cdot V = L_{45^\circ}$$

- transforme une pola. rect. incidente en son symétrique par rapport à la ligne neutre. Autrement dit : une pola. rect. tournée de  $\varphi$  par rapport aux lignes neutres tourne de  $2\varphi$ . Exemple : pour  $\varphi=45^\circ$  la pola. émergente est perpendiculaire à la pola. incidente



## Lame quart-d'onde (*quarter-wave plate QWP*)

- épaisseur  $L = \lambda/4$ , retard  $\Delta = \pi/2$
- possède 2 lignes neutres : un *axe lent* et un *axe rapide*
- l'axe lent déphase la composante associée à cet axe de  $\pi/2$
- transforme une pola. rectiligne en pola. elliptique dans le cas général.
- transforme une pola. rectiligne en pola. circulaire si  $\theta = 45^\circ$ .
- transforme une pola. circulaire incidente en pola. rectiligne à  $45^\circ$  des lignes neutres.
- une pola. linéaire tombant sur une ligne neutre reste inchangée

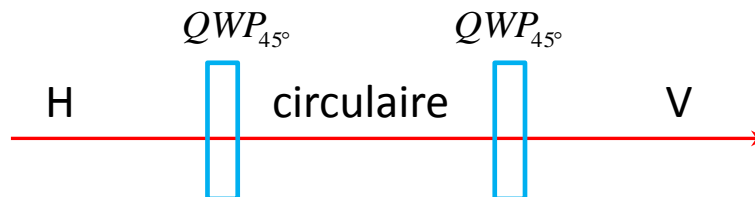
$$QWP_{0^\circ} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

$$QWP_{90^\circ} = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$QWP_{45^\circ} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1-i & 1+i \\ 1+i & 1-i \end{pmatrix}$$

$$QWP_{135^\circ} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1-i & -1-i \\ -1-i & 1-i \end{pmatrix}$$

- deux lames quart d'onde à  $45^\circ$  tournent la pola. de H en V (et inversement)



- I. Représentation de Jones
- II. Éléments d'optique
- III. Interférométrie**

## Interférences

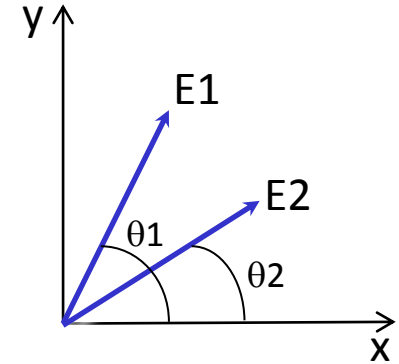
La formule essentielle est la suivante :

$$\vec{E} = E_1 e^{i\varphi_1} \vec{u}_1 + E_2 e^{i\varphi_2} \vec{u}_2$$

$$I = EE^* = |E_1|^2 + |E_2|^2 + 2|E_1||E_2| \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \vec{u}_1 \vec{u}_2$$

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \cos(\theta_2 - \theta_1)$$

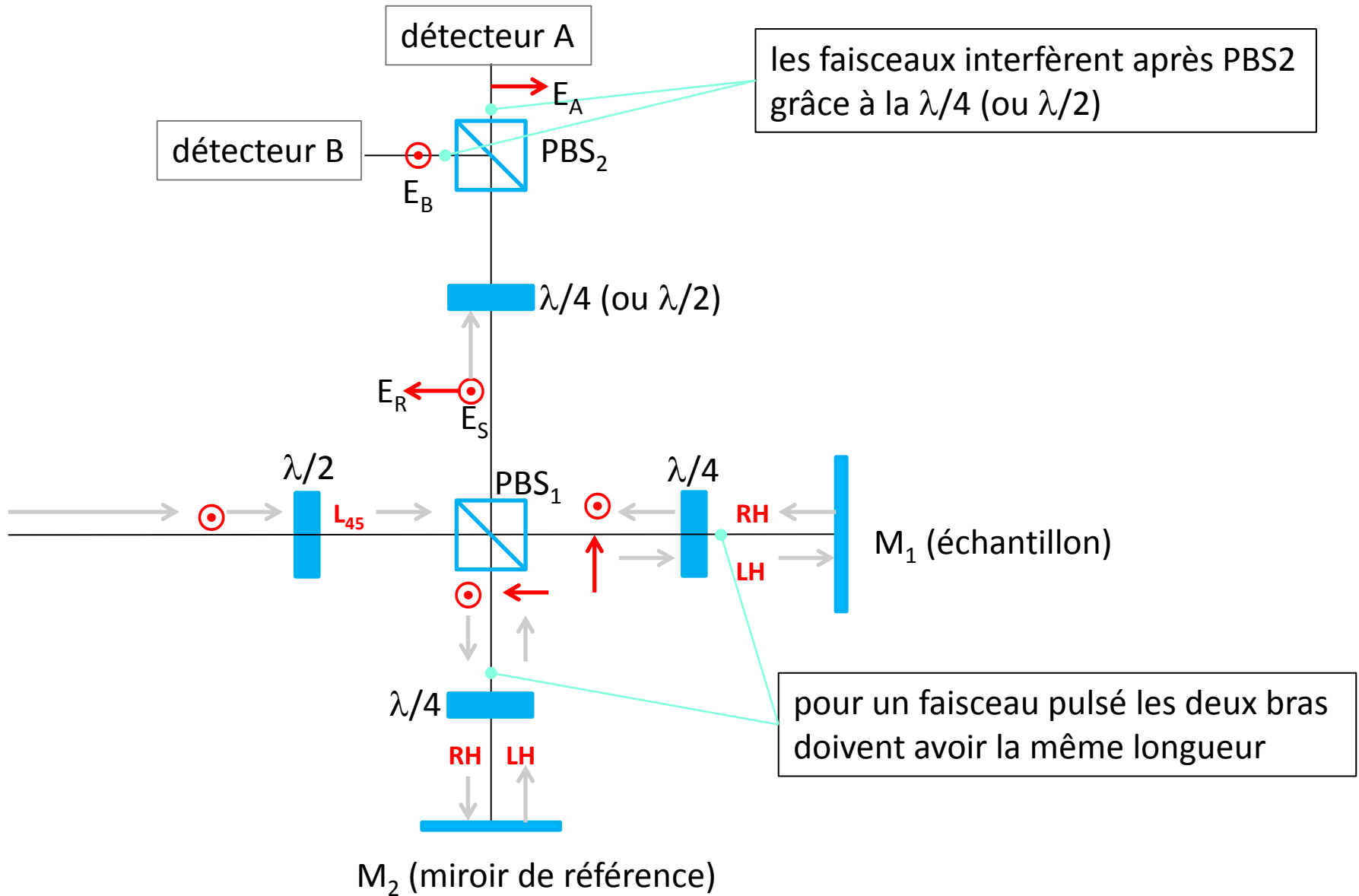
- 2 champs  $\perp$  n'interfèrent pas : H et V, RH et LH, etc.  $\vec{u}_1 \vec{u}_2 = 0$



### Les lois d'interférences de Fresnel et Arago (livre E.Collett p.255-277)

1. Deux ondes PL dans le même plan interfèrent.
2. Deux ondes PL avec des pola perpendiculaires n'interfèrent pas.
3. Deux ondes PL avec des pola. perp. , si elles dérivent des composantes d'une lumière non polarisée et sont amenées dans le même plan, n'interfèrent pas.
4. Deux ondes PL avec des pola. perp. , si elles dérivent des composantes d'une même onde PL et sont amenées dans le même plan, interfèrent.

# Etude de cas : interféromètre de Michelson



## Utilisation du formalisme de Jones

pour déterminer l'intensité reçue sur chaque photodiode

The diagram shows an optical setup with numbered components and arrows pointing to the corresponding equations:

- Component 1: Input source at the top.
- Component 2: A half-wave plate (HWP) with a 22.5-degree rotation, located in the reference path.
- Component 3: A beam splitter (PBS) that splits the light into two paths.
- Component 4: The signal path, which includes a PBS, a quarter-wave plate (QWP) with a 135-degree rotation, a mirror (M), another QWP with a 45-degree rotation, and a PBS.
- Component 5: Two photodiodes (PDs) that receive the light from the two paths.

$$\begin{aligned} (1) \quad E_S &= PBS_{1,r} \cdot QWP_{135} \cdot m \cdot QWP_{45} \cdot PBS_{1,t} \cdot HWP_{22.5} \cdot V \\ (2) \quad E_R &= PBS_{1,t} \cdot QWP_{45} \cdot M_\delta \cdot QWP_{135} \cdot PBS_{1,r} \cdot \underbrace{HWP_{22.5}}_2 \cdot V \\ (3) \quad E_A &= PBS_{2,t} \cdot QWP_{45} \cdot E_R + PBS_{2,t} \cdot QWP_{45} \cdot E_S \\ (4) \quad E_B &= PBS_{2,r} \cdot QWP_{45} \cdot E_R + PBS_{2,r} \cdot QWP_{45} \cdot E_S \\ (5) \quad I_A &= E_A E_A^* \\ (6) \quad I_B &= E_B E_B^* \end{aligned}$$

**Notes :** S pour signal, R pour référence,  $M_1$  est  $m$ ,  $M_2$  est  $M_\delta$

1)  $QWP_{45}$  et  $QWP_{135}$  sont permutable

2) le produit  $HWP_{22.5} V$  équivaut à  $L_{45}$

3) la lame demi-onde permet d'envoyer 50%/50% dans les 2 bras si  $M_1$  et  $M_2$  sont parfaits

4)  $E_R$  est rectiligne H,  $E_S$  est rectiligne V

5)  $HWP_{22.5}$  peut être remplacé par  $QWP_{45}$  (le réglage de la  $\lambda/2$  en rotation est plus sensible)

## Références

Formalisme de Jones :

- T. Tachizaki *et al*, Rev. Sci. Instrum. 043713 **77** (2006)
- E. Collett, Polarized light (Dekker, 1993) ISBN 0-8247-8729-3

- cours de F. Goudail et N. Westbrook de l'Institut d'Optique  
(sur les lumières partiellement et non polarisées)

<http://paristech.iota.u-psud.fr/site.php?id=18>

- cours de Kevin Hewitt (Dalhousie University, Halifax)

Lecture 34: Polarization: Jones matrices and vectors.

<http://fizz.phys.dal.ca/~hewitt/Web/PHYC3540/Lecture34.ppt>

- polarization with Interferometry (Michael Ireland)

Michelson Summer Workshop, July 27, 2006

<http://nexsci.caltech.edu/workshop/2006/talks/Ireland.pdf>

- Orthogonalité (Cantrell, 2004, University of Texas at Dallas)

<http://www.utdallas.edu/~cantrell/ee6334/polarization.pdf>

- Interféromètre de Michelson homodyne (optique pour l'ingénieur)

[http://www.optique-ingenieur.org/fr/cours/OPI\\_fr\\_M02\\_C07/co/Contenu\\_06.html](http://www.optique-ingenieur.org/fr/cours/OPI_fr_M02_C07/co/Contenu_06.html)