TD1

Exercice I. Calculs tensoriels

1. a) Réécrire la formule suivante en utilisant la convention d'Einstein :
$$E = \sum_{i=1}^{3} a_i \sum_{k=1}^{3} b_{ik} c_{kj}.$$
De quel(s) indice(s) dépend E ?
b) Donner dans la formule suivante le (ou les) indices muet(s) et libre(s) : $Q_{ij} = P_{ki}P_{kj}$. Réécrire cette suite d'égalités sans la convention de sommation d'Einstein, c'est-à-dire en explicitant les sommes cachées.
2. Calculer a) δ_{ii} b) $\delta_{ij}\delta_{ij}$ où δ est le symbole de Kronecker.
3. Quel est l'ordre des tenseurs suivants ?
a) a_{iklmn} b) $a_{ijklmn}Z_m$ c)$a_{ijklmn}V_jX_kY_lZ_m$ d) $P_{li}P_{mj}P_{nk}T_{lmn}$
4. Dans la mesure du possible, développer ou simplifier les expressions suivantes (on prendra n=3) :
a) $A_{ii}x_j$ b) $A_{jk}y_j$ c) A_{ii} d) $x_k + y_k$ e) $A_{ij}x_iy_j$ f) $a_{ij}x_iy_j$ avec $x_i = C_{ij}y_j$
g) $\delta_{ij}y_iy_j$

---

1. a) $E = a_ib_{ik}c_{kj}$. E dépend de l'indice j.
b) L'indice k est un indice muet, les indices i et j sont des indices libres.
$$\delta_{ij} = \sum_{k=1}^{3} P_{ki}P_{kj}.$$
2. On se place dans un espace tridimensionnel, donc les indices vont de 1 à 3. a) $\delta_{ii} = 3$
b) $\delta_{ij}\delta_{ij} = 3$

3. a) Le tenseur a est un tenseur d'ordre 5 (car il comporte 5 indices).
b) $a_{ijklmn}Z_m = b_{ijkln}$, le tenseur b est un tenseur d'ordre 5. L'indice m étant répété, on fait une sommation implicite (convention de l'indice muet).
c) $a_{ijklmn}V_jX_kY_lZ_m = b_{in}$, le tenseur c est un tenseur d'ordre 2.
d) $P_{li}P_{mj}P_{nk}T_{lmn} = Q_{ijk}$, le tenseur Q est un tenseur d'ordre 3.

4. a) $A_{ii}x_j = A_{11}x_j + A_{22}x_j + ...A_{nn}x_j$
   b) L'expression $A_{jk}y_j$ doit être développée.
   c) $A_{ii} = Tr(\bar{\bar{A}}) = A_{11} + A_{22} + ...A_{nn}$
   d) z_k (vecteur $\vec{z}$)
   e) $A_{11}x_1y_1 + ...$
   f) (substitution) $A = a_{ij}C_{ik}y_ky_j$. Il faut changer l'indice j.
   g) y_iy_i

Exercice II. Contraintes et plans principaux

Soit un état de contraintes dont les composantes sont, dans les axes choisis : $\sigma_{11} = 15$ MPa, $\sigma_{12} = -5$ MPa, $\sigma_{13} = 0$ MPa, $\sigma_{22} = 15$ MPa, $\sigma_{23} = 0$ MPa, $\sigma_{33} = 3$ MPa.

1. Écrivez sous forme matricielle le tenseur des contraintes correspondant.
2. Calculez le vecteur contrainte $\vec{\sigma}$ qui s'exerce sur une facette orientée telle que $\vec{n} = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$.
3. Décomposez ce tenseur en deux termes, tels que $\sigma_{ij} = a\delta_{ij} + t_{ij}$ avec $a = \frac{1}{3}\,\mathrm{Tr}(\bar{\bar{\sigma}})$ et $t_{ij} = \sigma_{ij} - a\delta_{ij}$, appelés respectivement *sphérique* et *déviateur*.
4. Que vaut $\mathrm{Tr}(\bar{\bar{t}})$? Quelle est la signification de la partie sphérique du tenseur ?
5. Calculez les contraintes principales et les directions principales. En déduire les vecteurs normaux aux plans principaux.

1. Le tenseur des contraintes $\bar{\bar{\sigma}}$ est symétrique (la matrice est égale à sa transposée $\bar{\bar{\sigma}} =^T \bar{\bar{\sigma}}$, ou en notation indicielle $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$), à cause de l'équilibre rotationnel. On écrira donc, avec les données de l'énoncé,

$$\sigma = \begin{pmatrix} 15 & -5 & 0 \\ -5 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{MPa}.$$

   Une illustration graphique est donnée dans les figures 1 et 3.
2. On utilise la relation de Cauchy $\vec{\sigma} = \bar{\bar{\sigma}}\vec{n}$ et on trouve : $\vec{\sigma} = \frac{1}{\sqrt{3}}(10, 10, 3)$ MPa.
3. Déviateur :

$$t = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 0 \\ -5 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix} \text{MPa}.$$

   Le déviateur possède une trace nulle, $Tr\left(\bar{\bar{t}}\right) = 0$.
   Sphérique :

$$\begin{pmatrix} 11 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 11 \end{pmatrix} \text{MPa}.$$

4. La trace du déviateur est nulle. La partie sphérique correspond à une contrainte de compression uniforme moyenne, analogue à une pression hydrostatique.
5. Les **contraintes principales** sont les valeurs propres $\lambda^{(n)}$: $\sigma_I = 20$ MPa, $\sigma_{II} = 10$ MPa, $\sigma_{III} = 3$ MPa. Par convention $\sigma_I > \sigma_{II} > \sigma_{III}$. Les directions principales sont les vecteurs propres associés :

$$\vec{v_1} = (-1{,}1{,}0),$$

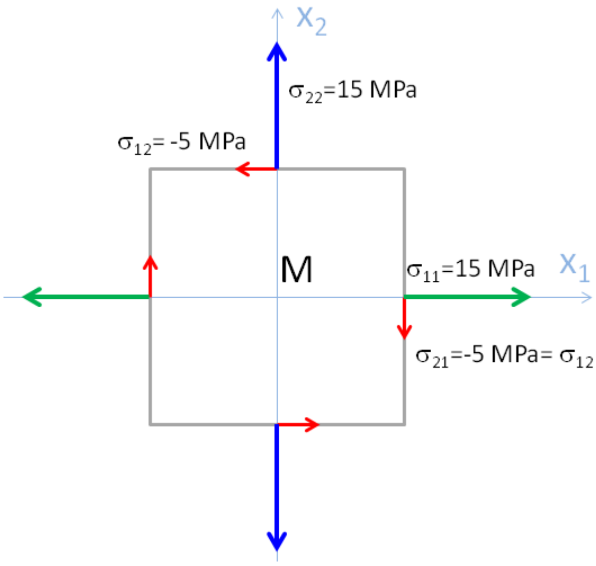

Figure 1 – Cube des contraintes dans le plan Ox_1x_2. Représentation des composantes de $\bar{\bar{\sigma}}$. Les couleurs identiques signalent les composantes dépendantes entre elles. Les vecteurs rouges illustrent la condition d'équilibre rotationnel (ici $\sigma_{12} = \sigma_{21}$) aussi appelé *réciprocité des contraintes tangentielles*.

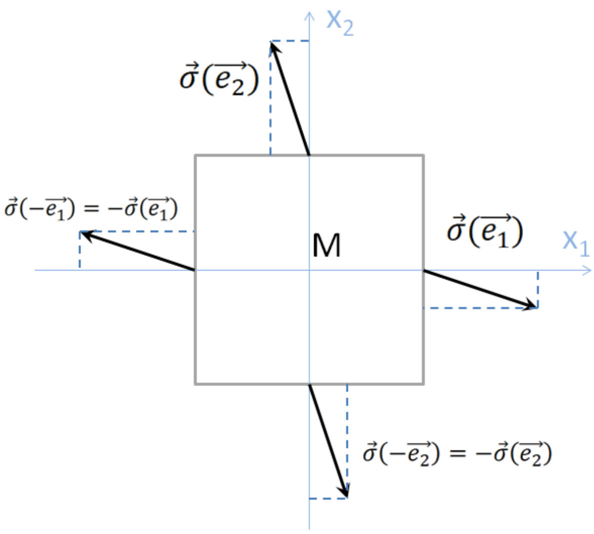

Figure 2 – Cube des contraintes dans le plan Ox_1x_2. Illustration de la forme locale du théorème des actions réciproques (troisième loi de Newton) $\vec{\sigma}(-\vec{n}) = -\vec{\sigma}(\vec{n})$.

$$\overrightarrow{v_2} = (1,1,0),$$

$$\overrightarrow{v_3} = (0,0,1).$$

Les vecteurs normaux aux plans principaux sont les directions principales de normes unitaires :

$$\overrightarrow{v_1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0),$$

$$\overrightarrow{v_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0),$$

$$\overrightarrow{v_3} = (0,0,1).$$

Interprétation physique : un vecteur propre est transformé en un vecteur qui lui est colinéaire. La contrainte dans une direction principale est colinéaire à cette direction ; autrement dit un élément de surface perpendiculaire à une direction principale ne subit pas de contrainte de cisaillement (voir figure 3).

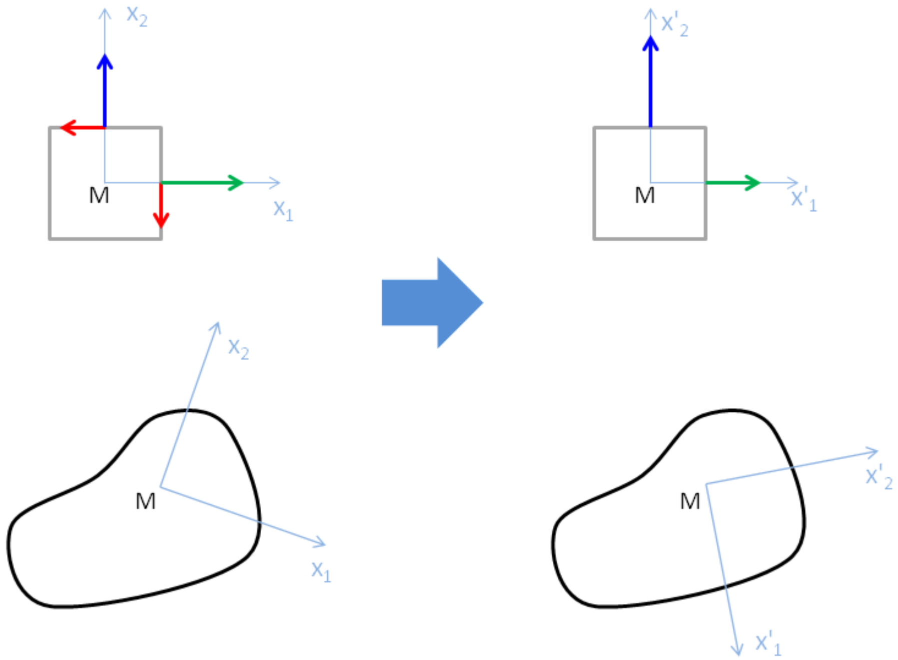

Figure 3 – Dans une base quelconque (à gauche), il peut y avoir des contraintes de cisaillement (représentées ici par les vecteurs rouges). Dans la base principale (à droite), il n'y plus de contrainte de cisaillement. Le « cube des contraintes » reste attaché à la base (en haut), mais la base a tournée par rapport au solide étudié (en bas).

Exercice III. Traction simple

On considère un cylindre plein homogène soumis à une sollicitation de traction pure. La section droite du cylindre est notée S, son axe est suivant axe Ox_3. Il est soumis à une force F suivant le même axe, uniformément répartie sur la section droite.

1. Écrire le tenseur des contraintes σ, en chaque point du cylindre.
2. Vérifier qu'un champ de contraintes uniaxial satisfait aux équations d'équilibre. On néglige les forces volumiques (pesanteur).
3. Expliciter les vecteurs contrainte $\vec{\sigma}(M,\overrightarrow{e_1})$, $\vec{\sigma}(M,\overrightarrow{e_2})$, $\vec{\sigma}(M,\overrightarrow{e_3})$ sur chacune des surfaces élémentaires de normales respectives $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$ et $\overrightarrow{e_3}$.
4. On considère une facette de normale unitaire $\vec{n}$ de composantes n_1, n_2 et n_3. Calculer le vecteur contrainte relatif à cette facette et exprimer les contraintes normales σ_n et tangentielles σ_t. Montrer qu'elles ne dépendent pas de n_1 et n_2. *(Aide :* $\sigma^2 = \sigma_t^2 + \sigma_n^2$, $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$*)*
5. Pour quelle valeur de n_3 la contrainte tangentielle est-elle maximale ? *(Aide : dans ce cas,* $d\sigma/dn_3 = 0$. Dans ce cas, quelle est la direction du vecteur $\vec{n}$?

1) C'est une traction uniaxiale suivant l'axe (Ox_3) donc on a

$$\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{F}{S} \end{pmatrix}.$$

2) Un champ de contraintes uniaxial est un champ de contraintes du type :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{pmatrix}.$$

On vérifie bien que ce champ de contraintes satisfait aux équations d'équilibre (en coordonnées cartésiennes) $\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0$.

3) Quelque soit M dans le cylindre, on peut écrire

$$\vec{\sigma}(M,\overrightarrow{e_1}) = \vec{0},$$

$$\vec{\sigma}(M,\overrightarrow{e_2}) = \vec{0},$$

$$\vec{\sigma}(M,\overrightarrow{e_3}) = \sigma\overrightarrow{e_3}.$$

4) Le vecteur contrainte relatif à la facette $\vec{n}$ est $\vec{\sigma} = \sigma n_3 \overrightarrow{e_3}$. La contrainte normale est $\sigma_n = \sigma n_3^2$. La contrainte tangentielle est $\sigma_t = \sigma n_3 \sqrt{1 - n_3^2}$. Elles ne dépendent que de n_3.

5) On veut trouver n_3 tel que $d\sigma/dn_3 = 0$ ce qui implique $n_3 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$. Par définition $\vec{n}$ est un vecteur unitaire, donc $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$, donc $n_1^2 + n_2^2 = 1/2$ ce qui correspond à l'équation cartésienne du cercle de rayon R : $x^2 + y^2 = R^2$. Le vecteur $\vec{n}$ est donc élément d'un double cône d'angle au sommet $\pi/4$, ce qui correspond à des facettes orientées à 45° de l'axe Ox_3.

Commentaire : cet exemple montre qu'à l'intérieur d'un barreau soumis à une traction purement uniaxiale, il existe des contraintes de cisaillement (qui dépendent de l'orientation de la facette). Le graphique du cercle de Mohr permet de déterminer rapidement la valeur maximale de la contrainte de cisaillement, paramètre clef dans la rupture d'un matériau.