TD2

Exercice I. Déformations d'origine thermique

Dans un solide constitué d'un matériau de coefficient de dilatation linéaire α, rapporté à un repère orthonormé $(Ox_1x_2x_3)$, une variation de température homogène ΔT provoque un champ de déplacements donné par

$$\vec{u}(x_1,x_2,x_3) = \alpha\Delta T x_1 \overrightarrow{e_1} + \alpha\Delta T x_2 \overrightarrow{e_2} + \alpha\Delta T x_3 \overrightarrow{e_3}. \tag{1}$$

Par ailleurs, le coefficient de dilatation thermique isobare β est une grandeur thermodynamique définie par

$$\beta(T,P) = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P. \tag{2}$$

1. Calculer le tenseur des déformations associé à ce champ de déplacements.
2. Calculez la variation relative de volume associée.
3. Quel est le lien entre α et β ? Quelle est la signification de β ?
4. À basse température (40 K), on mesure pour la silice vitreuse $\alpha = -0.70 \times 10^{-6}$ K^{-1}. Quelle est l'interprétation physique du signe moins ? Est-ce un comportement normal ?

---

1. Le tenseur des déformations associé au champ de déplacement $\vec{u}$ est

$$\epsilon = \begin{pmatrix} \alpha\Delta T & 0 & 0 \\ 0 & \alpha\Delta T & 0 \\ 0 & 0 & \alpha\Delta T \end{pmatrix}.$$

2. La variation relative de volume associée est

$$\frac{\Delta V}{V} = \theta = Tr(\bar{\bar{\epsilon}}) = 3\alpha\Delta T.$$

3. On peut réécrire $\beta = \frac{\theta}{\Delta T}$, on a donc $\beta = 3\alpha$, ou encore le coefficient de dilatation volumique est égal à trois fois le coefficient de dilatation linéaire (il convient donc de savoir quelle valeur exactement est tabulée).
4. Le signe moins indique qu'il y a une contraction du matériau lorsque sa température augmente (le fait que la mesure soit faite à 40 K, c'est-à-dire à très basse température, n'est pas important en soi). On peut considérer ce comportement comme anormal, car la plupart des matériaux se dilate quand on les chauffe. Cette propriété est appelée *negative thermal expansion* (NTE).

Exercice II. Allongement d'une tige soumise à son propre poids

Une tige cylindrique de section $S_0 = 1$ cm^2, de longueur $L_0 = 10$ m, d'axe de révolution (Ox_2), est suspendue verticalement par son extrémité haute et soumise uniquement à son propre poids. La masse volumique du matériau qui la constitue est $\rho = 7.8$ g/cm^3. On prendra $g = 9.81$ m/s.

1) Calculez le poids total P de la tige.

2) Calculez l'expression de la contrainte $\sigma(x_2)$ exercée dans la section de la barre située à la cote x_2 par la partie de la tige située au-dessous de cette cote. On prendra l'origine de l'axe (Ox_2) au bas de la tige. Indication : l'équation d'équilibre s'écrit $\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + f_i = 0$ en présence de forces à distance f_i.

3) Quelle est la section de la tige la plus sollicitée ? Quelle est la valeur de la contrainte qui y règne ?

4) Cette tige et constituée d'un matériau à comportement élastique linéaire isotrope caractérisé par un module de Young $E = 210$ GPa et un coefficient de Poisson $\nu = 0.3$. Donnez l'expression de la déformation ϵ_{22} en fonction de σ_{22}. En déduire le déplacement $u_2(x_2)$ de la partie de la tige située en-dessous de la cote x_2.

5) Calculer l'allongement total de la tige ΔL sous l'effet de son propre poids. Comparer la valeur trouvée avec la longueur L initiale.

1. Poids total : $P = \rho S_0 L_0 g$. AN : $P = 76.5$ N.
2. La contrainte $\sigma_{22} = \frac{P(x_2)}{S_0} = \rho x_2 g$. On peut retrouver ce résultat en utilisant la condition d'équilibre $\frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} = -\rho g$ en utilisant le fait que la surface inférieure est libre de contrainte $\sigma_{22}(0) = 0$.
3. Section la plus sollicitée : section pour laquelle σ est maximale, la section la plus haute, soit $\sigma(L_0) = \rho L_0 g$. On trouve que cette contrainte vaut 0.765 MPa, ce qui représente sept fois la pression atmosphérique.
4. Loi de Hooke pour une barre sollicitée en traction : $\sigma_{22} = E\epsilon_{22} = E\,\frac{du_2}{dx_2}$.

$$du_2 = \frac{1}{E}\,\rho g x_2 dx_2$$

$$u_2 = \frac{1}{E}\,\rho g x_2^2$$

5. L'allongement total ΔL de la barre est la somme de toutes les petites déformations $\epsilon(x)$, soit

$$\Delta L = \int_0^{L_0} \epsilon_{22} dx_2,$$

$$\Delta L = \frac{\rho}{E}\int_0^{L_0} g x_2 dx_2,$$

$$\boxed{\Delta L = \frac{\rho g L_0^2}{2E}}.$$

On trouve $\Delta L = 18.2\ \mu$m, à comparer avec la longueur initiale de la barre qui vaut 10 m.

Exercice III. Tenseur des déformations et changement de repère

1. Écrire le tenseur des déformations (composantes ϵ_{ij}) lorsque le vecteur déplacement $\overrightarrow{u}(x_1,x_2,x_3)$ est donné par la relation:
   a. $\overrightarrow{u} = x_1\overrightarrow{e_1} + x_2\overrightarrow{e_2}$
   b. $\overrightarrow{u} = x_1\overrightarrow{e_1} - x_2\overrightarrow{e_2}$
   c. $\overrightarrow{u} = x_2\overrightarrow{e_1} + x_1\overrightarrow{e_2}$
2. On effectue dans le sens trigonométrique une rotation de 45°des axes de coordonnées autour de l'axe Ox_3. Soit $(Ox_1'x_2'x_3')$ le nouveau repère.
   a. Calculer dans ce nouveau repère le tenseur des déformations (composantes ϵ_{ij}) correspondant au déplacement $\overrightarrow{u} = x_2\overrightarrow{e_1} + x_1\overrightarrow{e_2}$. Rappel : dans un changement d'axes
   $$\bar{\bar{\epsilon}}' = \alpha\bar{\bar{\epsilon}}^T\alpha$$
   où α et ${}^T\alpha$ désignent respectivement la *matrice de rotation* et sa transposée.
   b. Calculer le vecteur déplacement $\overrightarrow{u}(x_1',x_2')$ dans le nouveau repère. En déduire le tenseur des déformations. Conclure.

---

1)
a) Soit $\overrightarrow{u}(x_1,x_2,x_3) = x_1\overrightarrow{e_1} + x_2\overrightarrow{e_2}$ alors
$$\epsilon = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
b) Soit $\overrightarrow{u}(x_1,x_2,x_3) = x_1\overrightarrow{e_1} - x_2\overrightarrow{e_2}$ alors
$$\epsilon = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
c) Soit $\overrightarrow{u}(x_1,x_2,x_3) = x_2\overrightarrow{e_1} + x_1\overrightarrow{e_2}$ alors
$$\epsilon = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
2a) La matrice de rotation (angle Φ quelconque) est :
$$\alpha = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
Si $\phi = 45^o$:
$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$
On trouve au final
$$\epsilon' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La rotation du repère de 45^o correspond en fait à trouver le repère des directions principales. On aurait pu arriver au même résultat par le calcul des valeurs propres et vecteurs propres.

2b) Vecteur déplacement dans le nouveau repère :

$$\vec{u} = x'_1\overrightarrow{e'_1} - x'_2\overrightarrow{e'_2}$$

On retrouve le résultat de la question précédente.