TD3

Exercice I. Théorie de l'élasticité et dimensions

Donner les dimensions (en fonction des dimensions fondamentales M, L et T) et les unités des grandeurs caractéristiques de la théorie de l'élasticité : tenseur des contraintes, tenseur des déformations, le tenseur des constantes élastiques, coefficients de Lamé, module d'Young, coefficient de Poisson.

$$[\sigma_{ij}] = [C_{ijkl}] = [\lambda] = [\mu] = [E] = ML^{-1}T^{-2} = [pression]$$

$$[\nu] = 1$$

Exercice II. Élasticité statique

Un solide homogène et isotrope de coefficients de Lamé λ et μ est dans un état de déformation plane. Dans ce cas le vecteur déplacement en tout point du solide s'écrit $\overrightarrow{u} = u_1(x_1,x_2)\overrightarrow{e_1} + u_2(x_1,x_2)\overrightarrow{e_2}$ où $\overrightarrow{e_1}$ et $\overrightarrow{e_2}$ sont les deux vecteurs unitaires portés par les directions Ox_1 et Ox_2 du repère cartésien $Ox_1x_2x_3$.

1. Écrire le tenseur des déformations pour un tel déplacement. On explicitera chacune des composantes ϵ_{ij} en fonction des gradients de déplacements.
2. En déduire que le tenseur des contraintes est de la forme

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{pmatrix}.$$

   Expliciter σ_{11},σ_{12},σ_{22},σ_{33} en fonction de λ, μ et Δ la dilatation du solide. On rappelle que l'équation de Lamé est :

$$\sigma_{ij} = \lambda\epsilon_{nn}\delta_{ij} + 2\mu\epsilon_{ij}.$$

3. Soient E et ν le module d'Young et le coefficient de Poisson de ce solide. On rappelle que ces coefficients sont liés aux coefficients de Lamé par les relations: $\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}$ et $E = 2\mu(\nu + 1)$.
   a. En déduire que $\sigma_{33} = \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22})$.
   b. Expliciter ϵ_{11} et ϵ_{22} en fonction de $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \nu$ et E.

c. On donne $\nu = 0.4$, E=200 GPa, $\sigma_{11} = \sigma_{22}$=200 MPa. Calculer numériquement ϵ_{11} et ϵ_{22}.

1) Le tenseur des déformations est le suivant :

$$\epsilon = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right) & 0 \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right) & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2) On en déduit le tenseur des déformations :

$$\sigma_{11} = \lambda(\epsilon_{11} + \epsilon_{22}) + 2\mu\epsilon_{11} = \lambda\Delta + 2\mu\epsilon_{11}$$

$$\sigma_{22} = \lambda\Delta + 2\mu\epsilon_{22}$$

$$\sigma_{33} = \lambda\Delta$$

$$\sigma_{12} = 2\mu\epsilon_{12}$$

$$\sigma_{21} = 2\mu\epsilon_{21} = \sigma_{12}$$

3a) On somme σ_{11} et σ_{22} pour obtenir du Δ :

$$\sigma_{11} + \sigma_{22} = 2\Delta(\lambda + \mu)$$

$$\sigma_{33} = \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22})$$

3b)

$$\epsilon_{11} = \frac{1-\nu^2}{E}\sigma_{11} - \frac{\nu^2+\nu}{E}\sigma_{22}$$

$$\epsilon_{22} = -\frac{\nu^2+\nu}{E}\sigma_{11} - \frac{1-\nu^2}{E}\sigma_{22}$$

3c) Application numérique :

$$\nu = 0.3$$

$$E = 200 \text{ GPa}$$

$$\sigma_{11} = 200 \text{ MPa}$$

Exercice III. Compression uniforme d'un solide

On considère un solide élastique, homogène et isotrope, plongé dans un fluide au repos. Les forces volumiques sont négligeables. Dans cette situation, l'état des contraintes en tout point du solide est identique à celui qui existe dans le fluide dont on notera P le champ de pression.

1. Donner la forme du tenseur des contraintes au sein du solide.
2. À partir des équations de Lamé, donner la relation existant entre la pression et la dilatation Δ du solide. En déduire l'expression du module de rigidité à la compression $K = -P/\Delta$.
3. En déduire le tenseur des déformations correspondant, et le champ de déplacement $\vec{u}$ qui en découle.
4. Montrer que le champ de contraintes satisfait aux équations locales de l'équilibre.

5. Donner l'équation de l'équilibre dans le cas d'un liquide pesant de densité ρ et retrouver le théorème fondamental de l'hydrostatique. On prendra l'axe Ox_3 vertical dirigé vers le haut.

---

1. Le tenseur des contraintes est de la forme :

$$\sigma = \begin{pmatrix} -P & 0 & 0 \\ 0 & -P & 0 \\ 0 & 0 & -P \end{pmatrix}.$$

   soit en écriture indicielle $\sigma_{ij} = -P\delta_{ij}$.
2. Équations de Lamé : $\sigma_{ij} = \lambda\Delta\delta_{ij} + 2\mu\epsilon_{ij}$

$$\Delta = \frac{-3P}{3\lambda + 2\mu}$$

$$K = \frac{3\lambda + 2\mu}{3}$$

3. En l'absence de forces de volume on peut écrire :

$$\epsilon = -\frac{1-2\nu}{E}P\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Le champ de déplacement $\vec{u}$ est de la forme (en l'absence de forces de volume) :

$$u_i = -\frac{1-2\nu}{E}Px_i$$

4. Il faut vérifier que $div\bar{\bar{\sigma}} = 0$, ce qui est le cas puisque les 3 éléments diagonaux sont constants.
5. Les équations de l'équilibre donnent :

$$-\frac{\partial P}{\partial x_1} = 0, \ -\frac{\partial P}{\partial x_2} = 0, \ -\frac{\partial P}{\partial x_3} - \rho g = 0$$

$$P - P_0 = -\rho g x_3$$

$$P + \rho g x_3 = k$$

Exercice IV. Torsion d'un cylindre

Soit un cylindre à base circulaire de hauteur L constitué par un matériau élastique isotrope qui subit une torsion d'angle proportionnelle à la distance de la base inférieure, on appelle le coefficient de proportionnalité α. Dans le repère orthonormé $Oxyz$ soit Oz l'axe du cylindre. Le vecteur déplacement en tout point $M(x,y,z)$ est alors $\overrightarrow{u}(x,y,z) = (-\alpha yz, \alpha xz, 0)$.

1. Calculer le tenseur des déformations. Y a-t-il une variation de volume durant la torsion ?
2. Calculer le tenseur des contraintes associé.
3. Déterminer l'expression du vecteur contrainte qui s'applique à la face supérieure du cylindre.
4. Dessiner schématiquement le champ de vecteurs contraintes sur la face supérieure du cylindre.

5. **(Question supplémentaire)** Reprendre toutes les questions de l'exercice en vous plaçant en coordonnées cylindriques.

1)

$$\epsilon = \frac{\alpha}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -y \\ 0 & 0 & x \\ -y & x & 0 \end{pmatrix}$$

2)

$$\sigma = \mu\alpha\begin{pmatrix} 0 & 0 & -y \\ 0 & 0 & x \\ -y & x & 0 \end{pmatrix}$$

3)

$$\vec{T} = \sigma e_z$$

$$\vec{T} = \mu\alpha(-y\overrightarrow{e_x} + x\overrightarrow{e_y})$$

4) Les flèches présentent une rotation, ce qui permet de visualiser la torsion sur la face supérieure.

5) **(Question supplémentaire)** En coordonnées cylindriques, l'expression du déplacement est plus simple :

$$\vec{u}(r,\theta,z) = r\alpha z\overrightarrow{u_\theta}$$

Par contre la déformation nécessite de connaitre le gradient du déplacement en coordonnées cylindriques, dont l'expression est moins évidente qu'en coordonnées cartésiennes※[1] :

$$\epsilon = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_r}{\partial r} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta}\right) & \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} & \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial z}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial z}\right) & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Tous les termes sont nuls sauf :

$$\epsilon_{\theta z} = \epsilon_{z\theta} = \frac{\alpha r}{2}$$

$$\sigma_{\theta z} = \mu\alpha r = G\alpha r$$

Car le module de rigidité G et le module de Lamé μ sont égaux.

$$\vec{T}(\overrightarrow{e_z}) = G\alpha r\overrightarrow{e_z}$$

1. La démonstration est donnée dans le Royer & Dieulesaint p.314.