

## TD4

### Exercice I. Cylindre isotrope en traction

On considère une éprouvette cylindrique, élastiquement isotrope de coefficient de Poisson  $\nu$  et de module d'Young  $E$ . Elle est soumise à une sollicitation de traction pure dans la direction ( $Ox_1$ ), notée  $\sigma$ .

1. En utilisant les définitions du coefficient de Poisson  $\nu$  et du module d'Young  $E$ , en déduire la matrice des déformations en fonction de  $\nu$  et  $E$ .
2. Vérifier que la relation  $\epsilon_{ij} = \frac{\nu+1}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \sigma_{kk} \delta_{ij}$  donne le même résultat.
3. En déduire la dilatation  $\Delta$ .
4. On considère que la dilatation est positive. En déduire la valeur maximale prise par le coefficient de Poisson  $\nu$ .
5. À quelle situation physique correspond  $\nu = 1/2$  ?
6. a) En utilisant l'équation de Lamé, montrer que  $Tr(\bar{\sigma}) = (3\lambda + 2\mu)\Delta$ .  
b) En déduire  $E$  et  $\nu$  en fonction des coefficients de Lamé  $\lambda$  et  $\mu$ .
7. Écrire  $E$  et  $\nu$  en fonction de  $C_{11}$  et  $C_{12}$ .

- 
1. En utilisant les définitions du coefficient de Poisson  $\nu$  et du module d'Young  $E$

$$E = \sigma_{11}/\epsilon_{11},$$

$$\nu = -\epsilon_{22}/\epsilon_{11},$$

on en déduit la matrice des déformations en fonction de  $\nu$  et  $E$  :

$$\epsilon = \frac{\sigma}{E} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\nu & 0 \\ 0 & 0 & -\nu \end{pmatrix}.$$

Remarque : le tenseur des contraintes s'écrit de la manière suivante :

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bien que le tenseur des contraintes ne possède qu'une composante, le tenseur des déformations en possède 3.

2. On peut vérifier que la relation  $\epsilon_{ij} = \frac{\nu+1}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \sigma_{kk} \delta_{ij}$  donne le même résultat.
3. En déduire la dilatation :

$$\Delta = \frac{\sigma}{E} (1 - 2\nu)$$

4.

$$\Delta > 0$$

$$\nu < 1/2$$

5.  $\nu = 1/2$  correspond à un **liquide**. En effet, on sait que pour  $\nu = 1/2$  on a  $G = \frac{3K(1-2\nu)}{2(1+\nu)} = 0$  donc  $C_{44} = 0$  cela signifie que les ondes transverses ne peuvent pas se propager : s'il n'y a pas de force de rappel en cisaillement, on est en présence d'un liquide.
6. a) L'équation de Lamé est  $\sigma_{ij} = \lambda \Delta \delta_{ij} + 2\mu \epsilon_{ij}$ . Pour calculer la trace du tenseur des contraintes, on calcule  $\sigma_{ii}$ .

$$\sigma_{ii} = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = 3\lambda \Delta + 2\mu(\epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33}) = (3\lambda + 2\mu)\Delta.$$

b) Calcul de  $\nu$  en fonction des coefficients de Lamé  $\lambda$  et  $\mu$  :

$$\sigma_{22} = \lambda \Delta + 2\mu \epsilon_{22}$$

$$0 = \lambda \frac{\sigma_{11}}{E} (1 - 2\nu) + 2\mu(-\nu \frac{\sigma_{11}}{E})$$

$$0 = \frac{\sigma_{11}}{E} (\lambda - 2\nu\lambda - 2\mu\nu)$$

$$(\lambda - 2\nu\lambda - 2\mu\nu) = 0$$

$$\boxed{\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}}$$

Calcul de  $E$  en fonction des coefficients de Lamé  $\lambda$  et  $\mu$  :

$$\sigma_{11} = \lambda \frac{\sigma_{11}}{E} (1 - 2\nu) + 2\mu \frac{\sigma_{11}}{E}$$

$$E = \lambda - 2\nu\lambda + 2\mu$$

$$E = \lambda - 2\lambda \left( \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \right) + 2\mu$$

$$\boxed{E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}}$$

7. Écrire  $E$  et  $\nu$  en fonction de  $C_{11}$  et  $C_{12}$  :

$$\sigma_{22} = 0 = C_{12}(\epsilon_{11} + \epsilon_{33}) + C_{11}\epsilon_{22}$$

$$\nu = \frac{C_{12}}{C_{11} + C_{12}}$$

$$E = C_{11} - 2C_{12}\nu = C_{11} - 2 \frac{C_{12}^2}{C_{11} + C_{12}}$$

## Exercice II. Équations d'État et module d'incompressibilité

En sciences des hautes pressions ou en géophysique, la connaissance du module d'incompressibilité  $B$  est importante. En effet,  $B$  est le principal paramètre gouvernant la variation de volume avec la pression. La relation  $V(P)$  (ou  $P(V)$ ) est appelée *équation d'état*. Rappelons la définition thermodynamique du module d'incompressibilité :

$$B_T = -V \left( \frac{\partial P}{\partial V} \right)_T. \quad (1)$$

1. Que signifie l'indice  $T$  dans la définition de  $B$  ?
2. Pour des petites déformations, on peut considérer que  $B$  est indépendant de  $P$ . En déduire une équation d'état  $V(P)$ . Donner une raison pour laquelle cette équation d'état n'est jamais utilisée en géophysique.
3. Supposons maintenant que  $B$  varie linéairement avec  $P$  tel que  $B = B_0 + kP$ , où le coefficient  $k$  peut aussi être noté  $B'_0 = \left( \frac{\partial B}{\partial P} \right)_{P=0}$ . Donner la nouvelle équation d'état (appelée équation de Murnaghan).

1. L'indice  $T$  dans la formule (1) signifie que  $P(V,T)$  est dérivé par rapport à  $V$ , à  $T$  constante (voir la définition des *dérivées partielles*).  $B_T$  est donc le module d'incompressibilité **isotherme**.
2. Si  $B$  est constant alors

$$V(P) = V_0 e^{-P/P_0}.$$

Cette équation est une approximation (valable sur une gamme restreinte de pression - quelques MPa), car  $B$  varie avec la pression ; de plus sous cette forme,  $V$  devient nul lorsque  $P$  tend vers l'infini (une quantité de matière non nulle ne peut pas occuper un volume nul).

3. Si  $B = B_0 + kP$  avec  $k = \left( \frac{\partial B}{\partial P} \right)_{P=0} = B'_0$  alors on obtient l'*équation de Murnaghan*<sup>\*1</sup> :

$$V = V_0 \left( 1 + \frac{B'_0}{B_0} P \right)^{-1/B_0}.$$

Ici aussi, cette équation est valable dans une gamme de pressions faibles (entre  $P_{amb}$  et  $P \simeq B_T$ ).

## Exercice III. Compressibilité d'un cristal

(Inspiré du livre de D.Royer, exercice 3.2, p. 148)

Calculer le coefficient de compressibilité  $\chi = \frac{1}{B} = -\frac{\Delta}{P}$  d'un cristal soumis à une pression hydrostatique  $P$ , où  $\Delta$  est la dilatation. Pour cela, utiliser le tenseur des flexibilités  $\bar{s}$  défini comme  $\epsilon_{ij} = s_{ijkl}\sigma_{kl}$  où  $\epsilon$  est le tenseur des déformations et  $\sigma$  le tenseur des contraintes.

**Réponse :**  $\chi = s_{11} + s_{22} + s_{33} + 2(s_{12} + s_{23} + s_{31})$ .

$$\sigma_{kl} = -P\delta_{kl}$$

$$\epsilon_{ij} = S_{ijkl}\sigma_{kl}$$

1. La publication de référence est : Francis D. MURNAGHAN, *The compressibility of media under extreme pressures*, Proceedings of the national academy of sciences of the United States of America, **30(9)**, 244 (1944).

$$\Delta = \epsilon_{ii} = -Ps_{iikk}$$

$$\chi = -\Delta/P = s_{iikk} = s_{11} + s_{22} + s_{33} + 2(s_{12} + s_{23} + s_{31})$$

La compressibilité, à une pression  $P$  élevée, est entièrement déterminée par la connaissance des constantes élastiques (ou des flexibilités). Il est ensuite facile de retrouver l'équation d'état  $V(P)$ .

## Exercice IV. Compression statique

Une masse de 10 kg est posée sur la totalité de la face supérieure d'un cube d'acier de côté  $a=10$  cm, lui-même posé sur le sol. L'axe de symétrie du cube est l'axe vertical ( $Ox_3$ ), orienté vers le haut. La base du cube est à la cote  $x_3 = 0$ . On négligera la pression atmosphérique, et l'effet du champ de pesanteur sur le cube. Pour les applications numériques, prendre  $g = 10$  m·s<sup>-2</sup>.

1. Faire un schéma de la situation physique étudiée.
2.
  - a. Écrire le tenseur  $\sigma$  des contraintes qui règnent à l'intérieur du cube d'acier, en fonction de  $m$ ,  $g$  et  $a$ .
  - b. Application numérique : exprimer  $\sigma$  en MPa, et dessiner le « cube des contraintes » correspondant.
  - c. Énoncer l'équation locale de l'équilibre translationnel. Montrer que  $\sigma$  vérifie cette équation.
  - d. Donner le vecteur contrainte  $\vec{\sigma}$  qui s'exerce sur chacune des faces du cube où celui-ci est non nul. Rappel :  $\vec{\sigma}$  est fonction du point  $M$  et de la direction  $\vec{n}$ .
3. Une *loi de comportement* relie les tenseurs des contraintes et des déformations. Donner la relation (linéaire, purement élastique) pour un solide anisotrope quelconque. De manière générale, quel est l'ordre (ou le rang) du tenseur des constantes élastiques ? Quel est le nombre de composantes de ce tenseur ?
4. Dans la situation physique étudiée, les propriétés élastiques du cube d'acier peuvent être entièrement décrites par deux paramètres, appelés module d'Young  $E$  et coefficient de Poisson  $\nu$ . Pour l'acier, on prendra  $E = 200$  GPa et  $\nu=0.2$ .
  - a. Donner la définition de ces deux coefficients en fonction de  $\sigma$  et  $\epsilon$ , et en déduire le tenseur des déformations linéarisées  $\epsilon$ , en fonction de  $\nu$ ,  $E$ ,  $m$ ,  $g$  et  $a$ . Application numérique : calculer  $\epsilon$ .
  - b. Exprimer la variation relative de volume du cube d'acier  $\Delta$  en fonction de  $\nu$ ,  $E$ ,  $m$ ,  $g$  et  $a$ . Application numérique : calculer  $\Delta$ .
  - c. En déduire le champ de déplacements  $\vec{u}(x_1, x_2, x_3)$ . On prendra comme conditions aux limites : déplacement nul à la base du cube, et déplacement nul sur l'axe vertical ( $Ox_3$ ). Représenter ce champ dans les plans vertical ( $Ox_1x_3$ ) et horizontal ( $Ox_1x_2$ ) (à la cote  $x_3 = a/2$ ).
5. On donne l'*équation de Lamé inverse* :

$$\epsilon_{ij} = \frac{-\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} \delta_{ij}\sigma_{nn} + \frac{1}{2\mu} \sigma_{ij}, \quad (2)$$

où  $\lambda$  et  $\mu$  sont les coefficients de Lamé, et  $\delta$  le tenseur de Kronecker.

- a. Donner une signification physique simple du coefficient  $\mu$ .
- b. Exprimer le tenseur des déformations  $\epsilon$  en fonction de  $\lambda$  et  $\mu$ .
- c. En déduire  $E$  en fonction de  $\lambda$  et  $\mu$ , et  $\nu$  en fonction de  $\lambda$  et  $\mu$ .

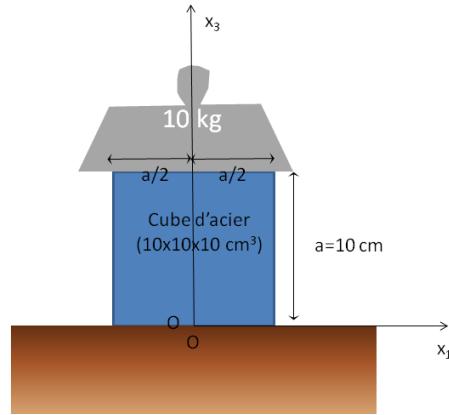


Figure 1 – Schéma de la situation physique étudiée.

2. a. Tenseur  $\sigma$  des contraintes qui règnent à l'intérieur du cube d'acier :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{mg}{a^2} \end{pmatrix}.$$

Le signe moins provient de la convention pour une compression.

- b. Application numérique :

$$\sigma = 10^4 Pa = 10^{-2} MPa$$

Cette contrainte est vraiment très faible ! L'ordre de grandeur est habituellement de 10-100 MPa.

Le tenseur des contraintes n'ayant qu'une seule composante non nulle et négative, le cube des contraintes ne devrait figurer que la flèche rouge :

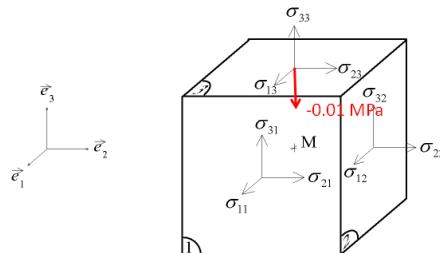


Figure 2 – Cube des contraintes en compression statique suivant l'axe ( $Ox_3$ ).

- c. L'équation locale de l'équilibre translationnel est:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0.$$

Seule la composante  $\sigma_{33}$  est non nulle donc

$$\frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} = 0.$$

L'équilibre est vérifié.

- d. Le théorème de Cauchy relie le vecteur contrainte  $\vec{\sigma}$  avec la direction d'observation  $\vec{n}$  :

$$\vec{\sigma} = \bar{\sigma} \vec{n}$$

où  $\vec{n}$  est le vecteur normal à la face considérée. Donc les vecteurs contraintes  $\vec{\sigma}$  sont non-nuls sur 2 faces seulement (la face supérieure et la face inférieure) :

$$\vec{\sigma}(facesup, \vec{e}_3) = -\frac{mg}{a^2} \vec{e}_3,$$

$$\vec{\sigma}(faceinf, -\vec{e}_3) = \frac{mg}{a^2} \vec{e}_3.$$

Remarquons que (principe des actions réciproques) :

$$\vec{\sigma}(facesup, \vec{e}_3) = -\vec{\sigma}(faceinf, -\vec{e}_3)$$

3. La *loi de comportement* pour un solide anisotrope quelconque est

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \epsilon_{kl},$$

où  $C_{ijkl}$  est un tenseur de rang 4, avec 81 composantes, qui se réduisent à 21 composantes pour des raisons de symétrie et énergétiques.

4. Dans la situation physique étudiée, les propriétés élastiques du cube d'acier peuvent être entièrement décrites par deux paramètres, appelés module d'Young  $E$  et coefficient de Poisson  $\nu$ . Pour l'acier, on prendra  $E = 200$  GPa et  $\nu=0.2$ .

- a. La définition du module d'Young  $E$  en fonction de  $\sigma$  et  $\epsilon$  est :

$$\sigma_{33} = E \epsilon_{33},$$

où les indices 33 signifient que la compression a lieu suivant l'axe ( $Ox_3$ ).

La définition du coefficient de Poisson  $\nu$  en fonction de  $\sigma$  et  $\epsilon$  est :

$$\epsilon_{11} = -\nu \epsilon_{33},$$

$$\epsilon_{22} = -\nu \epsilon_{33}.$$

Le tenseur des déformations linéarisées  $\epsilon$  s'écrit donc

$$\epsilon = \begin{pmatrix} \frac{vng}{a^2 E} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{vng}{a^2 E} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{mg}{a^2 E} \end{pmatrix} = \frac{vng}{a^2 E} \begin{pmatrix} \nu & 0 & 0 \\ 0 & \nu & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (3)$$

Application numérique :

$$\epsilon_{11} = 10^{-8}$$

$$\epsilon_{22} = 10^{-8}$$

$$\epsilon_{33} = -5.10^{-8}$$

soit sous forme matricielle

$$\epsilon = \begin{pmatrix} 10^{-8} & 0 & 0 \\ 0 & 10^{-8} & 0 \\ 0 & 0 & -5.10^{-8} \end{pmatrix}.$$

- b. La variation relative de volume du cube d'acier  $\Delta$  est

$$\Delta = \frac{V - V_0}{V_0} = Tr(\bar{\epsilon}) = \epsilon_{ii} = \epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33}.$$

Application numérique :

$$\Delta = -3.10^{-8}.$$

c. Le lien entre déformation et déplacement est donné par :

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

Les seuls termes non nuls sont les termes diagonaux donc :

$$\epsilon_{ii} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i}$$

où la notation  $\epsilon_{ii}$  signifie qu'on ne somme pas sur l'indice  $i$ .

$$u_i = \int \epsilon_{ii} dx_i$$

$$u_1 = \frac{v m g}{a^2 E} x_1 + k_1,$$

$$u_2 = \frac{v m g}{a^2 E} x_2 + k_2,$$

et  $k_1 = k_2 = 0$  car  $u_1(x_1 = 0) = 0$  et  $u_2(x_2 = 0) = 0$ .

$$u_3 = \frac{v m g}{a^2 E} x_3 + k_3$$

et  $k_3 = 0$  car  $u_3(x_3 = 0) = 0$  (le déplacement est nul à la base du cube en  $x_3 = 0$ ).

Le champ de déplacement en tout point du cube est donc :

$$\vec{u}(\vec{r}) = \frac{m g}{a^2 E} (v x_1 \vec{e}_1 + v x_2 \vec{e}_2 - x_3 \vec{e}_3).$$

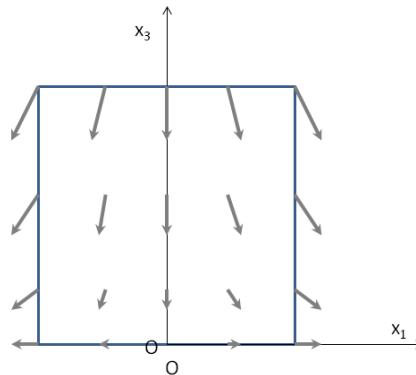


Figure 3 – Champ de déplacement  $\vec{u}$  dans le plan vertical. Le champ représenté est de la forme  $\vec{u} = k_1 x_1 \vec{e}_1 - k_2 x_3 \vec{e}_3$ , où  $k_1 < k_2$ .

5. On donne l'équation de Lamé inverse :

$$\epsilon_{ij} = \frac{-\lambda}{2\mu(3\lambda+2\mu)} \delta_{ij} \sigma_{nn} + \frac{1}{2\mu} \sigma_{ij}, \quad (4)$$

où  $\lambda$  et  $\mu$  sont les coefficients de Lamé, et  $\delta$  le tenseur de Kronecker.

- Le coefficient de Lamé  $\mu$  est égal au module de cisaillement  $G$  (dimension d'une pression et unité le pascal).
- À partir de l'équation 4 on déduit

$$\epsilon_{11} = \epsilon_{22} = \frac{\lambda}{2\mu(3\lambda+2\mu)} \frac{mg}{a^2}$$

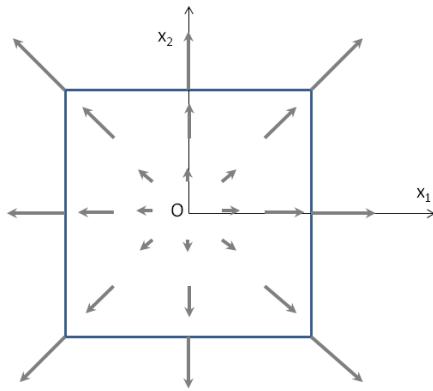


Figure 4 – Champ de déplacement  $\vec{u}$  dans le plan horizontal, situé à la cote  $x_3 = a/2$ . Le champ représenté est de la forme  $\vec{u} = kx_1\vec{e}_1 + kx_2\vec{e}_2$ .

$$\epsilon_{33} = -\frac{\lambda + \mu}{\mu(3\lambda + 2\mu)} \frac{mg}{a^2}$$

$$\epsilon = \frac{mg}{\mu(3\lambda + 2\mu)a^2} \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -(\lambda + \mu) \end{pmatrix} \quad (5)$$

c. Par identification entre les tenseurs 3 et 5 on trouve

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu},$$

$$\nu = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}.$$