TD5

Exercice I. Propagation du son dans un solide anisotrope

A) Cas du quartz

On s'intéresse à la propagation du son dans le quartz, qui est un cristal transparent anisotrope composé de dioxyde de silicium de formule SiO_2 (classe cristalline : trigonal, classe de symétrie : 32).

1. Quel est le nombre de constantes élastiques indépendantes ? Écrire le tenseur C correspondant.
2. Donner l'équation de propagation pour un milieu continu dans le cas d'un déplacement quelconque noté $\vec{u}(\vec{x},t)$.
3. On cherche maintenant les solutions de cette équation sous la forme d'ondes planes progressives qui se propagent dans la direction $\vec{n}$ telles que
$$u_i = u'_i F\left(t - \frac{\vec{n}\cdot\vec{x}}{V}\right),$$
où F est une fonction quelconque. Dans cette expression, que signifient u'_i et V ?
4. Écrire l'équation de propagation pour des ondes planes progressives (cette équation est appelée *équation de Christoffel*).
5. On introduit un tenseur Γ appelé *tenseur de Christoffel* et défini par $\Gamma_{il} = C_{ijkl}n_j n_k$. Expliciter les 6 composantes indépendantes non-nulles du tenseur Γ pour une onde plane se propageant dans une direction quelconque.
6. On souhaite calculer les vitesses de propagation le long de l'axe (Ox_1). Réécrire le tenseur de Christoffel Γ dans ce cas. En utilisant l'équation de Christoffel, déduire l'expression des vitesses et les polarisations associées.
7. Application numérique : calculer la valeur des vitesses. On prendra $\rho = 2648$ kg/m^3, $C_{11} = 86.7$ GPa, $C_{44} = 57.9$ GPa, $C_{66} = 39.8$ GPa, $C_{14} = -17.9$ GPa.

Exercice I

A) Cas du quartz

1. Le quartz est de classe cristalline **trigonale** et de classe de symétrie **32**. La forme du tenseur des constantes élastiques est tabulée ※[1].

1. Voir D. Royer, E. Dieulesaint, *Ondes Élastiques dans les Solides - Tome 1: Propagation Libre et Guidée*, Masson, Paris, p.128 Fig.3.9

On compte le nombre de composantes indépendantes non nulles et on trouve 6 constantes élastiques indépendantes (ce nombre est indiqué en bas à droite de la table) : C_{11}, C_{33}, C_{12}, C_{44}, C_{13}, C_{14}. La composante C_{66} n'est pas indépendante : $C_{66} = \frac{1}{2}(C_{11} - C_{12})$.

2. L'équation de propagation pour un milieu continu est :

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = C_{ijkl} \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_j x_k} .$$

3. Dans l'équation

$$u_i = u'_i F\left(t - \frac{\vec{n} \cdot \vec{x}}{V}\right),$$

u'_i est la polarisation de l'onde, V est la vitesse de propagation, $\vec{n}$ est la direction de propagation, et $\vec{x}$ est le vecteur position (noté $\vec{r} = \vec{x} = \overrightarrow{OM}$).

4. L'équation de propagation pour des ondes planes progressives est :

$$\rho V^2 u'_i = C_{ijkl} n_j n_k u'_l,$$

qu'on appelle *équation de Christoffel*. On introduit un nouveau tenseur $\Gamma_{il} = C_{ijkl} n_j n_k$ et on obtient

$$\rho V^2 u'_i = \Gamma_{il} u'_l.$$

5. On introduit dans cette question le tenseur de Christoffel Γ. Le tenseur Γ dans le cas général est donné dans le livre de D. Royer équation (4.11) p.160. Il suffit de reprendre ces formules pour le cas du quartz (ou de les recalculer), et on trouve [2] :

$$\Gamma_{11} = C_{11} n_1^2 + C_{66} n_2^2 + C_{44} n_3^2 + 2C_{14} n_2 n_3,$$

$$\Gamma_{22} = C_{66} n_1^2 + C_{11} n_2^2 + C_{44} n_3^2 - 2C_{14} n_2 n_3,$$

$$\Gamma_{33} = C_{66} n_1^2 + C_{11} n_2^2 + C_{44} n_3^2 - 2C_{14} n_2 n_3,$$

$$\Gamma_{12} = (C_{12} + C_{66}) n_1 n_2 + 2C_{14} n_1 n_3,$$

$$\Gamma_{13} = (C_{13} + C_{44}) n_1 n_2 + 2C_{14} n_1 n_2,$$

$$\Gamma_{23} = (C_{13} + C_{44}) n_2 n_3 + C_{14}\left(n_1^2 - n_2^2\right).$$

Complément : voici le détail des étapes du calcul pour la composante Γ_{12} (les différents termes ont été rangés dans un tableau pour faciliter la lecture) :

étape 1	$\Gamma_{12} =$		$C_{1112} n_1 n_1$	+	$C_{1122} n_1 n_2$	+	$C_{1132} n_1 n_3$
		+	$C_{1212} n_2 n_1$	+	$C_{1222} n_2 n_2$	+	$C_{1232} n_2 n_3$
		+	$C_{1312} n_3 n_1$	+	$C_{1322} n_3 n_2$	+	$C_{1332} n_3 n_3$
étape 2	$\Gamma_{12} =$		$C_{16} n_1^2$	+	$C_{12} n_1 n_2$	+	$C_{14} n_1 n_3$
		+	$C_{66} n_1 n_2$	+	$C_{62} n_2^2$	+	$C_{64} n_2 n_3$
		+	$C_{56} n_1 n_3$	+	$C_{52} n_2 n_3$	+	$C_{54} n_3^2$
étape 3	$\Gamma_{12} =$		0	+	$C_{12} n_1 n_2$	+	$C_{14} n_1 n_3$
		+	$C_{66} n_1 n_2$	+	0	+	0
		+	$C_{14} n_1 n_3$	+	0	+	0

2. Voir D. Royer, *op. cit*, équation (4.50) page 185.

6. Les 3 vitesses de propagation le long de l'axe Ox_1 sont calculées à partir de l'équation de Christoffel.

   Direction (Ox_1) signifie $n = (1{,}0{,}0)$ donc

$$\Gamma = \begin{pmatrix} C_{11} & 0 & 0 \\ 0 & C_{66} & C_{14} \\ 0 & C_{14} & C_{44} \end{pmatrix}.$$

   On écrit l'équation séculaire $\det(\bar{\bar{\Gamma}} - \rho V^2 I_3) = 0$, qui donne :

$$\begin{vmatrix} C_{11} - \rho V^2 & 0 & 0 \\ 0 & C_{66} - \rho V^2 & C_{14} \\ 0 & C_{14} & C_{44} - \rho V^2 \end{vmatrix} = 0,$$

   soit

$$\left(C_{11} - \rho V^2\right)\left[\left(C_{66} - \rho V^2\right)\left(C_{44} - \rho V^2\right) - C_{14}^2\right] = 0.$$

   Les racines de cette équation nous permettent de déduire les 3 vitesses V_1, V_2 et V_3 telles que :

$$\rho V_1^2 = C_{11},$$

$$2\rho V_{2,3}^2 = (C_{44} + C_{66}) \pm \sqrt{(C_{66} - C_{44})^2 + 4C_{14}^2}\,.$$

   Les polarisations sont les vecteurs propres associés à chaque valeur propre ρV_i^2. Ici, V_1 correspond à la vitesse d'une onde longitudinale car la polarisation est suivant l'axe de propagation.

7. Application numérique avec les valeurs données dans l'énoncé :

$$V_1 = V_L = 5722 \text{ m/s},$$

$$V_2 = V_{T_1} = 5101 \text{ m/s},$$

$$V_3 = V_{T_2} = 3297 \text{ m/s}.$$

B) Cas du silicium

On s'intéresse aux propriétés élastiques du silicium, qui est un cristal anisotrope (système cristallin : *cubique*, groupe ponctuel : $m\bar{3}m$). Nous allons voir que les constantes élastiques du silicium peuvent être déterminées à partir de la mesure de vitesses du son.

1. Combien de constantes élastiques non nulles et indépendantes possède le silicium ? Écrire le tenseur des constantes élastiques C associé en vous aidant de la figure jointe.
2. Écrire l'équation de propagation pour les ondes planes progressives (cette équation est appelée *équation de Christoffel*).
3. On introduit un tenseur Γ appelé *tenseur de Christoffel* et défini par $\Gamma_{il} = C_{ijkl} n_j n_k$.
   a. Expliciter les 6 composantes indépendantes non-nulles du tenseur Γ pour une onde plane se propageant suivant une direction quelconque (Aide : $\Gamma_{33} = C_{44}\left(n_1^2 + n_2^2\right) + C_{11} n_3^2$ et $\Gamma_{13} = (C_{12} + C_{44}) n_1 n_3$).
   b. La propagation a lieu dans la direction [100)]. Résoudre l'équation séculaire et en déduire les vitesses de propagation (Aide : l'équation séculaire est de la forme $\left|\Gamma_{il} - \rho V^2 \delta_{il}\right| = 0$). Quelles sont les vitesses longitudinales ou transverses ?
   c. Faire de même pour la direction [110], en précisant dans ce cas l'expression de $\vec{n}$. Quelles sont les vitesses longitudinales ou transverses ?

d. Dans ce dernier cas (propagation dans la direction [100]), calculer les constantes élastiques en fonction des vitesses calculées dans la question précédente et de la masse volumique ρ.

Exercice I

B) Cas du silicium

1. Le silicium possède seulement 3 constantes élastiques non nulles et indépendantes,

$$C_{11} = C_{22} = C_{33},$$
$$C_{12} = C_{21} = C_{13} = C_{31} = C_{32} = C_{23},$$
$$C_{44} = C_{55} = C_{66}.$$

Le tenseur des constantes élastiques C associé est le suivant :

$$\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} \end{pmatrix}. \tag{1}$$

2. L'équation de propagation pour des ondes planes progressives est :

$$\rho V^2 u'_i = C_{ijkl} n_j n_k u'_l,$$

qu'on appelle *équation de Christoffel*. On introduit un nouveau tenseur $\Gamma_{il} = C_{ijkl} n_j n_k$ et on a

$$\rho V^2 u'_i = \Gamma_{il} u'_l.$$

3. *a.* Les 6 composantes indépendantes non-nulles du tenseur Γ, pour une onde plane se propageant suivant une direction quelconque, sont les suivantes :

$$\Gamma_{11} = C_{44}\left(n_2^2 + n_3^2\right) + C_{11} n_1^2,$$
$$\Gamma_{22} = C_{44}\left(n_1^2 + n_3^2\right) + C_{11} n_2^2,$$
$$\Gamma_{33} = C_{44}\left(n_1^2 + n_2^2\right) + C_{11} n_3^2,$$
$$\Gamma_{12} = \Gamma_{21} = (C_{12} + C_{44}) n_1 n_2,$$
$$\Gamma_{13} = \Gamma_{31} = (C_{12} + C_{44}) n_1 n_3,$$
$$\Gamma_{23} = \Gamma_{32} = (C_{12} + C_{44}) n_2 n_3.$$

b. La propagation a lieu dans la direction [100].

$$\Gamma = \begin{pmatrix} C_{11} & 0 & 0 \\ 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & C_{44} \end{pmatrix}.$$

On résoud l'équation séculaire :

$$det \begin{pmatrix} C_{11} - \rho V^2 & 0 & 0 \\ 0 & C_{44} - \rho V^2 & 0 \\ 0 & 0 & C_{44} - \rho V^2 \end{pmatrix} = 0$$

Et les vitesses de propagation se déduisent :

$$V_1 = \sqrt{\frac{C_{11}}{\rho}},$$

$$V_2 = V_3 = \sqrt{\frac{C_{44}}{\rho}}.$$

Quelles sont les vitesses longitudinales ou transverses : V_1 est la vitesse longitudinale, V_2 et V_3 sont des vitesses transverses.

c. Calcul des vitesses longitudinales ou transverses pour la direction [110].

Précisons d'abord l'expression de $\vec{n}$:

$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\overrightarrow{u_x} + \frac{1}{\sqrt{2}}\,\overrightarrow{u_y}.$$

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(C_{11}+C_{44}) & \frac{1}{2}(C_{12}+C_{44}) & 0 \\ \frac{1}{2}(C_{12}+C_{44}) & \frac{1}{2}(C_{11}+C_{44}) & 0 \\ 0 & 0 & C_{44} \end{pmatrix}$$

$$V_L = \sqrt{\frac{C_{11}+2C_{44}+C_{12}}{2\rho}},$$

$$V_{T_1} = \sqrt{\frac{C_{11}-C_{12}}{2\rho}},$$

$$V_{T_2} = \sqrt{\frac{C_{44}}{\rho}}.$$

d. Exprimons les constantes élastiques en fonction des vitesses calculées dans la question précédente et de la masse volumique ρ :

$$C_{11} = \rho(V_L^2 - V_{T_1}^2 + V_{T_2}^2),$$
$$C_{12} = \rho(V_L^2 - V_{T_1}^2 - V_{T_2}^2),$$
$$C_{44} = \rho V_{T_1}^2.$$

Conclusion : la mesure des 3 vitesses du son, dans la direction [110], dans un cristal de silicium permet de déterminer toutes les constantes élastiques du silicium. Ci-dessous le tableau complet des relations entre direction de propagation, polarisations et constantes élastiques :

C) Cas d'un matériau orthotrope : bois de balsa ou os

Le bois de balsa et l'os possèdent des propriétés élastiques similaires, ce sont tous deux des *matériaux orthotropes*.

Le balsa est un bois léger, dont la densité varie de 40 à 320 kg/m^3. Pour la plupart des applications, il peut être considéré comme un matériau *isotrope transversalement*, où le plan isotrope est perpendiculaire à l'axe de la fibre.

L'os est un matériau d'origine biologique qui constitue le squelette, chez les humains ou les animaux. Il est composé en grande partie de *fibres de collagène*. Ces fibres définissent un axe « préférentiel », tandis que le plan perpendiculaire à l'axe est considéré comme isotrope.

Plan cristallin	Direction de propagation	Polarisation	ρv^2	(Si) v (m/s)
(100)	[100]	L [100]	C_{11}	8433
		$T_1 = T_2$ † (100)	C_{44}	5843
(001)	[001]	L [001]	C_{11}	8433
		$T_1 = T_2$ † (001)	C_{44}	5843
(110)	[110]	L [110]	$(C_{11} + C_{12})/2 + C_{44}$	9134
		T_1 $[1\bar{1}0]$	C_{44}	5843
		T_2 [001]	$(C_{11} - C_{12})/2$	4673
$(1\bar{1}0)$	$[1\bar{1}0]$	L $[1\bar{1}0]$	$(C_{11} + C_{12})/2 + C_{44}$	9134
		T_1 [110]	C_{44}	5843
		T_2 [001]	$(C_{11} - C_{12})/2$	4673
(111)	[111]	L [111]	$\frac{1}{3}(C_{11} + 2C_{12} + 4C_{44})$	9360
		$T_1 = T_2$ † (111)	$\frac{1}{3}(C_{11} - C_{12} + C_{44})$	5085

Table 1 – Vitesses et polarisations des ondes, dans les cristaux anisotropes de système cubique. Dernière colonne : valeurs des vitesses dans le cas du silicium (tirées du livre *Ondes élastiques dans les solides*, D. Royer & E. Dieulesaint, p. 177)). † : Les deux modes transverses sont dégénérés.

Le tenseur des constantes élastiques C peut s'écrire de la manière suivante (rappelons qu'en notation de Voigt : 11 → 1,22 → 2,33 → 3,32/23 → 4,31/13 → 5,21/12 → 6) :

$$\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{13} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{pmatrix} \tag{2}$$

avec $C_{66} = \frac{1}{2}(C_{11} - C_{12})$.

Dans cet exercice, nous souhaitons montrer que les vitesses du son dans le balsa ou l'os dépendent de la direction dans laquelle on les mesure, et trouver la relation entre le tenseur des constantes élastiques défini ci-dessus et les vitesses de propagation du son.

1. En vous aidant de la figure qui donne la forme du tenseur en fonction du système de symétrie étudié (Fig.3.9. du D.Royer & E.Dieuleseaint), donner le système cristallin qui équivaut aux propriétés élastiques du balsa. Combien de constantes élastiques non nulles et indépendantes possède le tenseur C ? Dans quelle direction est orientée la fibre ?
2. Donner l'équation de propagation pour les ondes planes progressives (cette équation est appelée *équation de Christoffel*).
3. On introduit un tenseur Γ appelé *tenseur de Christoffel* et défini par $\Gamma_{il} = C_{ijkl} n_j n_k$.
   a. Calculer les 6 composantes indépendantes non-nulles du tenseur Γ pour une onde plane se propageant suivant une direction quelconque (Aide : $\Gamma_{33} = C_{44}\left(n_1^2 + n_2^2\right) + C_{33} n_3^2$ et $\Gamma_{13} = (C_{13} + C_{44}) n_1 n_3$)
   b. L'onde se propage dans la direction (Ox_3). Résoudre l'équation séculaire et en déduire les vitesses de propagation (Aide : l'équation séculaire est de la forme $\left|\Gamma_{il} - \rho V^2 \delta_{il}\right| = 0$). Quelles sont les vitesses longitudinales ou transverses ?
   c. L'onde se propage maintenant dans une direction quelconque dans le plan (Ox_1x_2). Préciser dans ce cas l'expression de $\vec{n}$. Réécrire Γ en fonction de C_{11}, C_{44}, C_{66} et θ : Calculer les vitesses et montrer qu'elles ne dépendent pas de la direction de propagation. Pour déterminer facilement les polarisations asso-

ciées, on se placera dans une direction de propagation particulière, [100] ou [010] au choix.

1. En comparant le tenseur de l'énoncé avec tous les tenseurs de la Fig.3.9 page 128 du D.Royer & E.Dieulesaint, le système cristallin qui équivaut aux propriétés élastiques du balsa est le système *hexagonal*. Le tenseur C possède donc **5** constantes élastiques non nulles et indépendantes. Sous la figure est indiqué « $Ox_3//A_6$, Ox_1 quelconque » : cela signifie que la fibre est orientée suivant Ox_3.
2. L'équation de propagation pour les ondes planes progressives est :

$$\rho V^2 u'_i = C_{ijkl} n_j n_k u'_l.$$

3. *a.* Les 6 composantes indépendantes non-nulles du tenseur Γ pour une onde plane se propageant suivant une direction quelconque sont

$$\begin{aligned}
\Gamma_{11} &= C_{11}n_1^2 + C_{66}n_2^2 + C_{44}n_3^2,\\
\Gamma_{22} &= C_{66}n_1^2 + C_{11}n_2^2 + C_{44}n_3^2,\\
\Gamma_{33} &= C_{44}\left(n_1^2 + n_2^2\right) + C_{33}n_3^2,\\
\Gamma_{12} &= (C_{12} + C_{66})n_1n_2,\\
\Gamma_{13} &= (C_{13} + C_{44})n_1n_3,\\
\Gamma_{23} &= (C_{13} + C_{44})n_2n_3.
\end{aligned}$$

   b. L'onde se propage dans la direction (Ox_3) donc l'équation séculaire est

$$det\begin{pmatrix} C_{44} - \rho V^2 & 0 & 0 \\ 0 & C_{44} - \rho V^2 & 0 \\ 0 & 0 & C_{33} - \rho V^2 \end{pmatrix} = 0$$

   Les vitesses sont donc

$$\begin{aligned}
V_1 &= \sqrt{C_{33}/\rho} = V_L,\\
V_2 = V_3 &= \sqrt{C_{44}/\rho} = V_T.
\end{aligned}$$

   La vitesses transverse est dite « dégénérée ».

   c. Précisons l'expression de $\vec{n}$ lorsque l'onde se propage dans une direction quelconque dans le plan (Ox_1x_2) :

$$\begin{aligned}
n_1 &= \cos(\theta),\\
n_2 &= \sin(\theta),\\
n_3 &= 0,
\end{aligned}$$

   et on peut vérifier que $\left\|\vec{n}\right\| = 1$.

   Réécrivons Γ en fonction de C_{11}, C_{66}, C_{44} et θ :

$$\Gamma = \begin{pmatrix} C_{11}\cos^2(\theta) + C_{66}\sin^2(\theta) & (C_{11} - C_{66})\cos(\theta)\sin(\theta) & 0 \\ (C_{11} - C_{66})\cos(\theta)\sin(\theta) & C_{66}\cos^2(\theta) + C_{11}\sin^2(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & C_{44} \end{pmatrix}$$

   On en déduit les vitesses :

$$V_L = \sqrt{\frac{C_{11}}{\rho}},$$

$$V_T = \sqrt{\frac{C_{66}}{\rho}},$$

$$V_T = \sqrt{\frac{C_{44}}{\rho}}.$$

Les vitesses ne dépendent pas de la direction de propagation dans le plan (Ox_1x_2) car elles ne dépendent pas de l'angle θ.

Pour déterminer facilement la polarisation, il suffit par exemple de prendre le cas $\theta = 0$.

Exercice II. Propagation du son dans un solide isotrope

A) Cas sans chargement mécanique

On considère un matériau isotrope de modules de Lamé λ et μ, et de masse volumique ρ. On rappelle la relation entre le tenseur de rigidité C_{ijkl} et λ et μ :

$$C_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}). \tag{3}$$

On rappelle aussi l'expression du tenseur de propagation (tenseur de Green-Christoffel) $\Gamma_{il} = C_{ijkl}n_jn_k$ où $\vec{n}$ représente la direction de propagation.

1) Exprimer le tenseur C en fonction de λ et μ.

2) Exprimer les six composantes indépendantes du tenseur de Christoffel Γ en fonction de λ et μ.

3) On considère maintenant une propagation dans le plan (Ox_1x_2), on prendra θ l'angle entre $\vec{e_1}$ et $\vec{n}$. Réécrire Γ.

4) Montrer que $\Gamma_{11} + \Gamma_{22} = \lambda + 3\mu$, et que $(\Gamma_{11} - \Gamma_{22})^2 + 4\Gamma_{12}^2 = (\lambda + \mu)^2$.

Indications :

$$\cos^2(x) - \sin^2(x) = \cos(2x) \tag{4}$$

$$\cos^2(x)\sin^2(x) = \frac{1}{4}\sin^2(2x) \tag{5}$$

$$\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1 \tag{6}$$

5) Exprimer l'équation caractéristique associée au tenseur de propagation pour un champ de déplacement pris sous la forme d'ondes planes. Déduire les expressions des trois vitesses de propagation dans une direction quelconque (une vitesse longitudinale V_L et une vitesse transverse V_T dégénérée) et montrer que celles-ci ne dépendent pas de la direction.

B) Cas avec chargement mécanique

On suppose maintenant qu'un matériau isotrope est soumis à une contrainte mécanique σ exercée le long de l'axe 3. On définit un nouveau tenseur, le tenseur acoustoélastique A_{ijkl}, défini par la relation tensorielle $A_{ijkl} = C_{ijkl} + \sigma_{ij}\delta_{kl}$, avec $\sigma \ll \lambda, \mu$.

6) Donner le tenseur A (en notation contractée de Voigt) en fonction de λ, μ et σ. A est-il symétrique ?

7) Exprimer alors les neuf composantes du tenseur de Christoffel $\Gamma_{il} = A_{ijkl}n_j n_k$.

8) On mesure la propagation du son dans une direction $\vec{n}$ quelconque dans le plan (1,2), qui est le plan perpendiculaire à la direction de chargement mécanique, et θ est l'angle entre $\overrightarrow{e_1}$ et $\overrightarrow{n}$. Le vecteur direction de propagation s'écrit donc $n_1 = \cos(\theta); n_2 = \sin(\theta); n_3 = 0$). Montrer que la propagation dans ce plan est isotrope. Exprimer V_L et V_T.

9) Finalement, on se place dans le plan (1,3) ou (2,3). Montrer que ce plan est anisotrope vis à vis de la propagation du son. Donner des expressions simples de V_L et V_T. En déduire une méthode pour déterminer la contrainte appliquée σ.

Exercice II

Partie A : cas sans chargement mécanique

1)

$$C_{11} = C_{1111} = \lambda + 2\mu$$
$$C_{12} = C_{1122} = \lambda$$
$$C_{44} = C_{1212} = \mu$$

2) Le vecteur direction de propagation $\vec{n}$ possède les 3 composantes n_1, n_2, n_3.

$$\Gamma_{11} = (\lambda + 2\mu)n_1^2 + \mu(n_2^2 + n_3^2),$$
$$\Gamma_{22} = (\lambda + 2\mu)n_2^2 + \mu(n_1^2 + n_3^2),$$
$$\Gamma_{33} = (\lambda + 2\mu)n_3^2 + \mu(n_1^2 + n_2^2),$$
$$\Gamma_{12} = (\lambda + \mu)n_1 n_2,$$
$$\Gamma_{13} = (\lambda + \mu)n_1 n_3,$$
$$\Gamma_{23} = (\lambda + \mu)n_2 n_3.$$

3) Propagation dans le plan Ox_1x_2 : $n_1 = \cos\theta, n_2 = \sin\theta, n_3 = 0$. On peut vérifier que $\vec{n}$ est unitaire :

$$\left\|\vec{n}\right\| = \sqrt{n_1^2 + n_2^2} = \sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = 1$$

Les composantes du tenseur de Christoffel Γ deviennent

$$\Gamma_{11} = (\lambda + 2\mu)\cos^2\theta + \mu\sin^2\theta,$$
$$\Gamma_{22} = (\lambda + 2\mu)\sin^2\theta + \mu\cos^2\theta,$$
$$\Gamma_{33} = \mu,$$
$$\Gamma_{12} = (\lambda + \mu)\sin\theta\cos\theta,$$
$$\Gamma_{13} = 0,$$
$$\Gamma_{23} = 0.$$

4) *Cette question est laissée à l'appréciation du lecteur*.

5) L'équation caractéristique peut s'écrire :

$$(\Gamma_{33} - \rho V^2)\Big[(\Gamma_{11} - \rho V^2)(\Gamma_{22} - \rho V^2) - \Gamma_{12}^2\Big]$$

L'obtention des racines en V de l'équation caractéristique permet d'obtenir les vitesses, qui sont

$$V_L = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}},$$

$$V_T = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}.$$

La vitesse V_T de l'onde transverse est *dégénérée*.

Conclusion : les vitesses ne dépendent pas de θ, donc elles ne dépendent pas de la direction (cela paraît logique dans un milieu élastiquement isotrope).

Partie B : cas avec chargement mécanique

6) On note $\sigma_{33} = \sigma$, le tenseur acoustoélastique A s'écrit donc :

$$A = \begin{pmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda + \sigma & \lambda + \sigma & \lambda + 2\mu + \sigma & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}.$$

Remarque : A n'est pas symétrique, contrairement à C.

7) Les composantes du tenseur de Christoffel Γ sont les suivantes, dans le cas avec chargement mécanique :

$$\Gamma_{11} = (\lambda + 2\mu)n_1^2 + \mu(n_2^2 + n_3^2)$$
$$\Gamma_{22} = (\lambda + 2\mu)n_2^2 + \mu(n_1^2 + n_3^2)$$
$$\Gamma_{33} = (\lambda + 2\mu + \sigma)n_3^2 + \mu(n_1^2 + n_2^2)$$
$$\Gamma_{12} = (\lambda + \mu)n_1 n_2$$
$$\Gamma_{21} = (\lambda + \mu)n_1 n_2$$
$$\Gamma_{13} = (\lambda + \mu)n_1 n_3$$
$$\Gamma_{31} = (\lambda + \mu + \sigma)n_1 n_3$$
$$\Gamma_{23} = (\lambda + \mu)n_2 n_3$$
$$\Gamma_{32} = (\lambda + \mu + \sigma)n_2 n_3$$

8)

Dans le plan (1,2) : $n_1 = \cos\theta$, $n_2 = \sin\theta$, $n_3 = 0$ (le vecteur propagation $\vec{n}$ est unitaire). On trouve le même résultat que dans le cas isotrope. La contrainte appliquée σ_{33} ne modifie pas la propagation qui reste isotrope dans le plan (1,2), c'est-à-dire le plan perpendiculaire au chargement.

9) On se place dans le plan (1,3) qui contient la direction de chargement (Ox_3), et on définit l'angle θ' entre $\overrightarrow{e_1}$ et $\vec{n}$, d'où $n_1 = \cos\theta'$, $n_2 = 0$, $n_3 = \sin\theta'$.

Les 3 racines de l'équation caractéristique sont :

$$\rho V_1^2 = \lambda + 2\mu + \sigma \sin^2\theta',$$
$$\rho V_2^2 = \mu,$$
$$\rho V_3^2 = \mu.$$

Une méthode simple pour connaître σ (connaissant ρ) :

- il suffit de mesurer V en fonction de θ' (mais en pratique cette méthode est compliquée),
- il suffit de mesurer la vitesse sans chargement $V_{\sigma=0} = \lambda + 2\mu$ puis la vitesse avec chargement V_σ.

Pour une onde se propageant dans la direction $\vec{n} = (0,0,1)$, on a $\sin\theta' = 1$ (rappelons que l'angle θ' est pris à partir de l'axe $\overrightarrow{e_1}$) la vitesse V_σ dans l'axe du chargement est de

$$\boxed{V_\sigma = \sqrt{V_0^2 + \frac{\sigma}{\rho}}}, \tag{7}$$

et le calcul suivant permet de trouver σ :

$$\sigma = \rho\left(V_\sigma^2 - V_{\sigma=0}^2\right).$$

Valeurs numériques : un écart de 10 m/s représente une contrainte de 0.3 GPa environ. En-dessous de cette valeur, la contrainte n'est pas mesurable si l'on considère que 10 m/s est la variation de vitesse minimale mesurable.