

# Une présentation informelle des opérateurs vectoriels

Simon AYRINHAC

Sorbonne Université - Faculté des sciences et ingénierie  
Campus Pierre et Marie Curie - 75252 Paris Cedex 05  
[simon.ayrinhac@sorbonne-universite.fr](mailto:simon.ayrinhac@sorbonne-universite.fr)

## 1. Introduction générale

Un article récent d'Eddy Smigiel [SMIGIEL2016] a mis en évidence, grâce à un sondage effectué auprès d'étudiants et de spécialistes, que la définition de l'opérateur vectoriel « divergence » était restituée sous sa forme la plus abstraite et la moins didactique par la totalité des étudiants sondés, et par une écrasante majorité des spécialistes. Il est dommage que la définition des opérateurs vectoriels ne soit pas attachée à une signification physique concrète, ce qui permettrait une meilleure maîtrise et assimilation de ces concepts. Les ouvrages américains sont, à ce titre, bien plus didactiques que leurs homologues français [CHABAY-SHERWOOD2011, SCHEY2004, SMIGIEL2013]. Cette « tradition mathématique » française est, semble-t-il, liée au système des classes préparatoires qui prend les mathématiques pour critère d'élimination [SMIGIEL2013].

Cet article propose une présentation « renouvelée » de l'excellent article de Jean SIVARDIERE qui présentait les opérateurs sous une forme physique et géométrique [SIVARDIERE1992]. En effet, l'algèbre tensorielle n'étant plus abordée avant le niveau master, celle-ci ne peut pas servir de base pour aborder les opérateurs qui sont vus en licence. Les programmes actuels privilégient plutôt une présentation avec l'opérateur nabla, ce qui a pour effet (entre autres) d'augmenter l'importance de l'opérateur gradient qui était absent de l'article de Jean SIVARDIERE.

Nous proposons dans cet article des suggestions pour présenter les opérateurs vectoriels de manière *informelle*, sous forme de schémas très simples, voire de pictogrammes. Cette approche est analogue à la figure 4 de l'article de Jean SIVARDIERE [SIVARDIERE1992, p.1428], sans être identique. Cette figure, souvent reprise par les enseignants pour ses aspects visuel et synthétique, présente de manière rigoureuse le lien entre opérateur et allure des lignes de champ au voisinage d'un point. De manière analogue, une figure qui synthétise les suggestions faites dans le corps de l'article sera donnée en conclusion.

La maîtrise d'un concept provient souvent de la familiarité qu'on entretient avec lui, souvent issue d'une longue expérience pour les enseignants. Ici notre objectif est de rendre ces opérateurs *d'emblée* plus familiers auprès des non-connaisseurs, quitte à rajouter ensuite des strates d'explications de plus en plus précises et rigoureuses, si le temps d'enseignement le permet.

## 2. Les opérateurs vectoriels

Il existe trois opérateurs différentiels du premier ordre appelés **rotationnel**, **divergence**, **gradient** qui généralisent la notion de dérivée d'une fonction. Ces trois opérateurs peuvent s'exprimer avec l'opérateur **nabla**, défini de la manière suivante en coordonnées cartésiennes

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{u}_x + \frac{\partial}{\partial y} \vec{u}_y + \frac{\partial}{\partial z} \vec{u}_z. \quad (1)$$

L'opérateur divergence est ainsi formellement équivalent à  $\vec{\nabla} \cdot \vec{F}$  soit

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}. \quad (2)$$

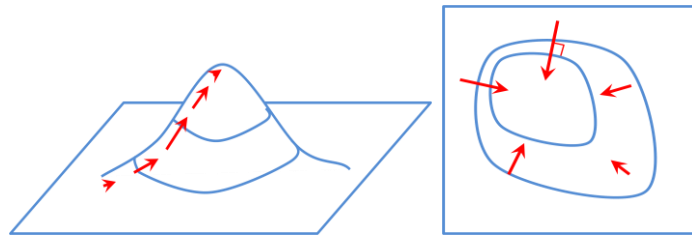
On retrouve ici la définition mathématique de la divergence telle que discutée par Eddie SMIGIEL [SMIGIEL2016].

Ils définissent des relations *locales*, valables en tout point, mais sur un volume infinitésimal (mésoscopique), car une dérivée ne peut être évaluée sans connaître le voisinage immédiat d'un point.

Ainsi, pour déterminer le champ vectoriel connaissant sa divergence ou son gradient, il faut tenir compte des conditions aux limites. Ces conditions aux limites passent souvent inaperçues, mais il s'agit bien de cela lorsqu'on énonce que le champ est nul très loin des sources. En général, les distributions vues dans les cours élémentaires d'électromagnétisme ont un haut degré de symétrie et une extension spatiale limitée, ce qui permet de simplifier les calculs [SCHEY2004]. C'est le cas du théorème de Gauss appliqué à une sphère chargée, qui est un classique des exercices d'électromagnétisme. Cependant, cette simplicité apparente cache le fait que les problèmes possèdent souvent plus d'inconnues que d'équations, ou que la résolution numérique est nécessaire.

## 2.1 Le gradient

Le gradient d'une fonction  $f$ , déterminé en un point, donne un vecteur, qui indique la direction de variation maximale, et dont la longueur (le module) est proportionnelle à la variation ; on écrira  $\vec{F} = \overrightarrow{\text{grad}} f$ . Pour une fonction  $f(x,y)$  représentée par une surface vallonnée, les flèches convergent vers un pic et s'éloignent d'une vallée (voir Fig. 1). Les vecteurs du gradient sont perpendiculaires aux lignes d'isovaleurs (ou aux surfaces d'isovaleurs dans le cas tridimensionnel), qui sont les lignes de même valeur. Plus ces lignes sont serrées, plus le module du gradient est grand.



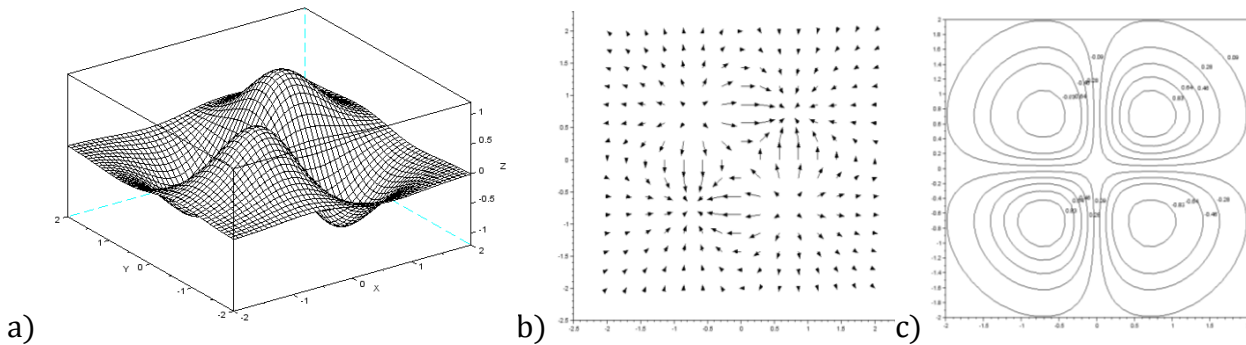
**Figure 1.** (Gauche) Supposons que la fonction  $f(x,y)$  soit représentée sous la forme d'une colline. Les flèches du gradient pointent dans la direction de plus forte pente, avec un module proportionnel à la pente. (Droite) Le champ de gradient est perpendiculaire aux lignes isovaleurs (appelée « courbes de niveau » en topographie).

La notion de gradient peut être illustrée par l'étude du relief d'un terrain. Les lignes d'isovaleurs sont les courbes de niveau, qui sont les lignes de même altitude. Ces courbes de niveau renseignent les éventuels randonneurs : plus les lignes sont serrées, plus la pente est forte. Le gradient est un champ de vecteurs toujours orientés dans le sens de la pente la plus grande et dont le module est proportionnel au dénivelé dans cette direction. Dans le langage courant, on parle de gradient (de concentration ou de température, par exemple) pour désigner un volume possédant des régions où la quantité physique considérée varie.

On dira en sciences physiques qu'un champ  $\vec{F}$  « dérive d'un potentiel »  $U$ , et on écrira dans ce cas  $\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}} U$ . Le signe moins apparaît ici, car un minimum du potentiel correspond à

une position d'équilibre stable (qui possède une définition précise en termes d'énergie).

À une fonction  $f$  on peut associer un champ de gradient  $\vec{F}$  (voir Fig. 2) : il est clair que l'information contenue dans les deux représentations est la même (à une constante près), on peut dire que la fonction  $f$  présente une compression *sans perte* de l'information car à chaque point de l'espace est associé une valeur unique au lieu de trois. Cependant, on ne peut pas toujours associer un champ scalaire à un champ vectoriel quelconque, comme nous le verrons ci-dessous.



**Figure 2.** Trois représentations différentes d'une même fonction  $f(x, y)$ . Considérons le champ scalaire défini par la fonction suivante :  $f(x, y) = xe^{-(x^2+y^2)}$ . **(a)** Ce champ est représenté par une surface « vallonnée ». **(b)** Champ de gradient associé : les flèches pointent dans le sens de l'augmentation des valeurs, leur module est plus petit dans les régions planes et plus grand dans les régions pentues. **(c)** Courbes de niveau, ou lignes isovaleurs, similaires à une carte topographique, les flèches du gradient sont toujours perpendiculaires aux lignes isovaleurs.

## 2.2 La divergence

La divergence d'un champ vectoriel donne le flux d'une quantité qui entre ou sort d'un petit volume centré autour d'un point ; ce flux, analogue à un débit, est un scalaire. Dans un premier temps, trois cas simples peuvent être présentés (voir Fig. 3):

- s'il y a une *source* du champ dans le volume, les flèches « divergent », la divergence est positive,
- s'il y a un *puits* pour le champ, les flèches « convergent », la divergence est négative,
- en l'absence de source ou de puits, il y a autant de flèches qui rentrent et qui sortent du volume, la divergence est nulle. On dit que le flux du champ est conservatif

Par exemple, une charge électrique négative est source du champ électrique  $\vec{E}$  (les lignes « fuient » la charge), tandis qu'une charge positive est un « puits » pour le champ  $\vec{E}$  (les lignes « convergent » vers la charge).

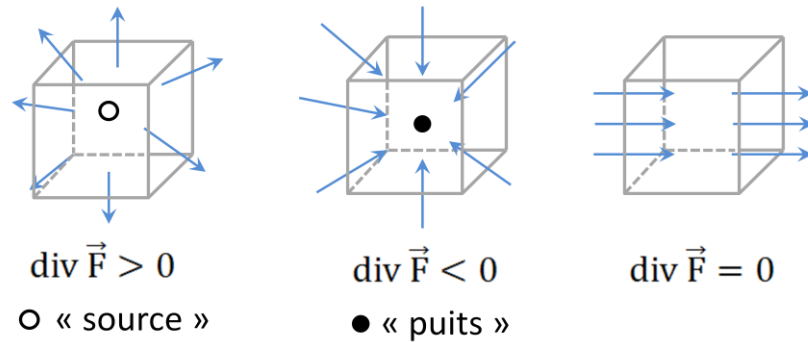


Figure 3. Schémas de la divergence.

Dans un deuxième temps, des cas particuliers peuvent être abordés (Fig. 4). Au cours de la discussion, il est impossible de se passer de la notion de flux vectoriel : flux et divergence sont intimement liés. On peut ainsi définir la divergence d'un champ  $\vec{F}$  en fonction du flux de  $\vec{F}$  à travers la surface  $\Delta S$  entourant un volume infinitésimal  $\Delta V$  telle que [CHABAY-SHERWOOD2011]

$$\operatorname{div} \vec{F} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \left( \frac{\oint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS}{\Delta V} \right) \quad (3)$$

où  $\vec{n}$  est un vecteur unitaire perpendiculaire à la surface et dirigé vers l'extérieur du volume, par convention. Cette expression nous indique simplement que la divergence est le flux du champ  $\vec{F}$  par unité de volume au voisinage d'un point.

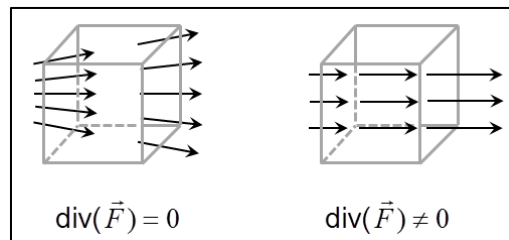
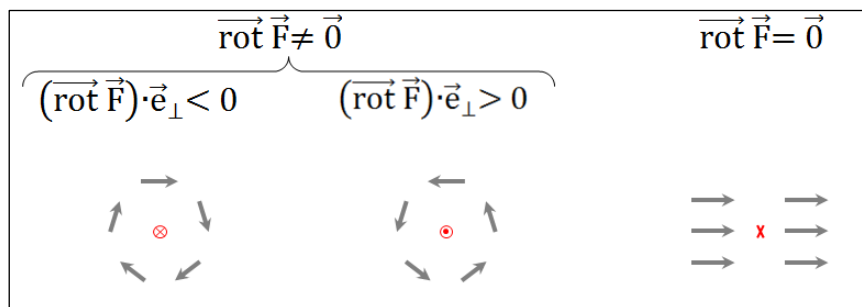


Figure 4. (Gauche) Les lignes de champ divergent, mais la divergence est nulle car il y a autant de flèches qui rentrent et qui sortent du volume. (Droite) La divergence est non nulle malgré des lignes de champ parallèles, car le module des flèches sortantes est plus grand que celui des flèches rentrantes, il y a donc une source du champ dans le volume.

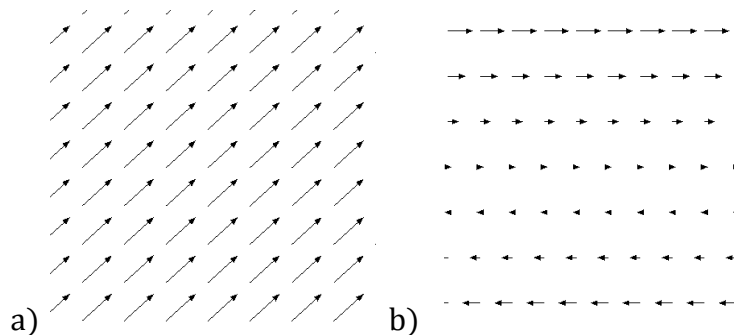
Or cette expression (3), très intéressante d'un point de vue didactique, reste d'un abord plus compliqué que la divergence exprimée avec le nabla (équation (2)), car la notion de flux vectoriel et le passage à la limite peuvent dérouter. L'équation (1) est séduisante, car elle fournit une manière simple de calculer la divergence, mais rien ne rattache la somme des dérivées partielles à un flux. Alors, quelle équation choisir ? Nous proposons de ne pas choisir dans un premier temps, et de dessiner la figure 2, en évoquant simplement une quantité vectorielle entrante ou sortante du volume sous forme de flèches. Ici, le discours et les schémas font sens avec le nom de l'opérateur, « divergence ». Il s'agit évidemment d'une simplification, mais elle est profitable, car elle fournit une clef de compréhension de l'opérateur divergence. Des situations plus compliquées peuvent être ensuite abordées à partir de ce point d'entrée.

### 2.3 Le rotationnel

Le rotationnel d'un champ vectoriel est non nul si le champ présente un effet de « tourbillon » (voir Fig. 5), ou de « cisaillement » (voir Fig. 6b). En dynamique des fluides, on parle d'ailleurs de *vorticité*, dérivé du mot « vortex », défini comme le rotationnel de la vitesse du fluide. Le vecteur rotationnel résultant pointe dans l'axe du tourbillon, de manière analogue à l'axe d'une toupie ; il est normal au plan du tourbillon. Il est orienté vers le bas ou vers le haut suivant l'orientation du tourbillon ; la règle d'orientation est donnée par la *règle de la main droite*. Le rotationnel dépendant d'une convention d'orientation du repère, le rotationnel est donc un champ de *pseudo-vecteurs* ou de *vecteurs axiaux*. Notons enfin que l'axe du tourbillon est un « tube » de champ : il est à flux conservatif, comme le montre bien la relation vectorielle  $\text{div}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{F}) = 0$ .



**Figure 5.** Dans le cas où un champ bidimensionnel « tourbillonne » (ou « tournoie ») dans le sens horaire (à gauche) ou antihoraire (au milieu), le champ de rotationnel est normal au plan du tourbillon, et tel que  $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{F} \neq \vec{0}$ . Dans le cas où le champ vectoriel ne présente aucun tourbillon (à droite), le rotationnel est nul. L'orientation du vecteur résultant (ici en rouge) est donnée par la convention de la « règle de la main droite ».

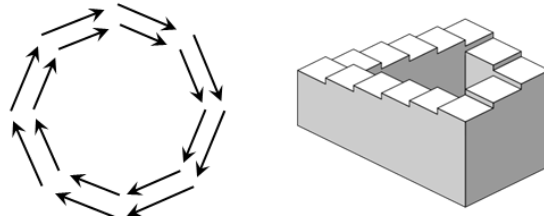


**Figure 6. a)** Champ irrotationnel, tel que  $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{F} = \vec{0}$ . **b)** Représentation du champ vectoriel  $\vec{F} = x\vec{e}_x$ , tel que  $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{F} \neq \vec{0}$ , analogue à un effet de « cisaillement ». Cet exemple montre que les lignes de champ peuvent être parallèles mais le rotationnel non nul.

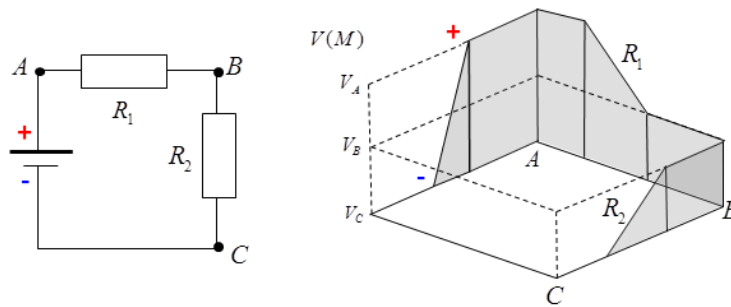
On peut montrer que le gradient d'un champ existe seulement si ce champ n'est pas « tourbillonnant ». En effet, si  $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{F} = \vec{0}$ , la circulation de  $\vec{F}$  est nulle sur un parcours fermé (on dit qu'elle est conservative) et alors  $\vec{F} = \overrightarrow{\text{grad}} f$ . Cela signifie qu'un champ rotationnel ne peut pas dériver d'un champ scalaire, comme le montre le paradoxe de l'escalier sans fin (voir Fig. 7). On comprend mieux l'égalité vectorielle  $\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{grad}} f) = \vec{0}$ , qui signifie qu'un champ de gradient ne peut pas présenter de « tourbillon ».

On retrouve le même paradoxe pour un circuit électrique : si le champ électrique dans la totalité du circuit est conservatif, alors maintenir la circulation des charges nécessiterait un « escalier sans fin » ! (voir Fig. 7) Pour résoudre ce paradoxe, il faut invoquer la présence d'un

champ électrique non conservatif dans le circuit, sous la forme d'une f.e.m. (force électromotrice) fournie par la batterie (voir Fig. 8).



**Figure 7.** Un champ rotationnel bidimensionnel (à gauche) ne peut pas être un champ de gradient, car cela équivaut à avoir une fonction scalaire analogue à un escalier qui descend sans fin, comme l'escalier en trompe l'œil d'Escher-Penrose (à droite).



**Figure 8.** En régime stationnaire, le champ électrique dans un circuit est produit par les charges accumulées à la surface des conducteurs [DEIBER2003]. Ce champ électrique étant conservatif, dans un circuit fermé la variation du potentiel  $V$  le long de ce circuit est nulle. Il en résulte que le champ conservatif  $\vec{E}_C$  dans la batterie s'oppose au passage des électrons. C'est un champ non-conservatif  $\vec{E}_{NC}$  produit par des réactions chimiques dans la batterie qui permet aux charges mobiles de circuler à travers celle-ci ( $\vec{E}_{total} = \vec{E}_{NC} + \vec{E}_C$ ); la force électromotrice (f.é.m.) s'identifie au travail par unité de charge effectué par ce champ non conservatif tel que : f. é. m. =  $\int \vec{E}_{NC} \cdot \vec{dl}$ . Cette quantité a la même dimension qu'un potentiel, mais n'est pas un potentiel. Schéma d'après Deiber [MOREAU89, DEIBER2003].

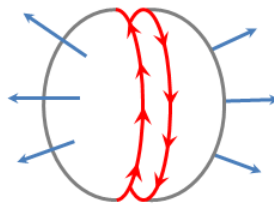
Le rotationnel est défini comme la circulation du champ  $\vec{F}$  le long d'un parcours fermé infinitésimal et nous pouvons écrire pour un champ bidimensionnel [CHABAY-SHERWOOD2011]

$$(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{F}) \cdot \vec{e}_1 = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \left( \frac{\oint_C \vec{F} \cdot \vec{dl}}{\Delta S} \right),$$

où  $\vec{e}_1$  est un vecteur unitaire normal au plan de la petite surface  $\Delta S$ . Cette expression nous indique que le rotationnel d'un champ vectoriel  $\vec{F}$  est égal à la circulation sur un chemin de longueur infinitésimale centré autour d'un point. Précisons que, pour un champ tridimensionnel, la direction du rotationnel est donnée par l'orientation de la courbe qui donne la circulation maximale [SIVARDIERE1989, SIVARDIERE1992]. Cette formule étant compliquée en apparence, il vaut mieux présenter dans un premier temps les schémas de la Fig.4 ; l'aspect tourbillonnaire des flèches fait sens avec le nom de l'opérateur, « rotationnel ».

Retournons maintenant à la divergence. Un champ  $\vec{F}$  de divergence nulle découle d'un champ  $\vec{A}$  appelé *potentiel vecteur* tel que  $\vec{F} = \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}$ . Un tel champ implique localement des tubes du champ qui forment l'axe d'un champ solénoïdal  $\vec{A}$ . Il est impossible d'avoir localement une divergence non nulle et un rotationnel non nul : cela découle de l'orientation

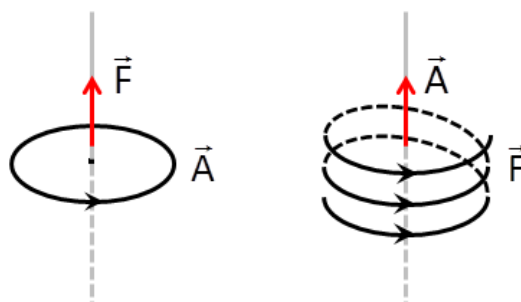
de la surface qui s'appuie sur un contour orienté par la règle de la main droite (on en propose une illustration dans la Fig. 9). Autrement dit, il est impossible de définir un contour orienté sur lequel viendrait s'appuyer une surface fermée.



**Figure 9.** Si on tente de recoller deux demi-sphères orientées de manière opposées pour reconstituer une surface fermée, il est impossible de faire coïncider les contours orientés associés.

Ce potentiel vecteur est abordé dans beaucoup de livres comme un intermédiaire de calcul, et apparaît comme un être mathématique abstrait. Cette disqualification est dommageable, car d'une part le potentiel vecteur contient de l'information physique, comme l'a montré l'effet Bohm-Aharonov [JECH1999], et d'autre part cet intrigant champ n'est jamais visualisé.

De la même manière qu'un champ magnétique  $\vec{B}$  découle de courants  $\vec{j}$  en électromagnétisme, le potentiel vecteur  $\vec{A}$  est orthoradial à un champ vectoriel  $\vec{F}$  tel que  $\vec{F} = \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}$ . Cette analogie nous permet de visualiser le champ  $\vec{A}$  (voir Fig. 10). Un champ  $\vec{F}$  de divergence nulle implique localement des tubes du champ qui forment l'axe d'un champ solénoïdal  $\vec{A}$ . Une région de l'espace où se trouve un champ potentiel vecteur uniforme  $\vec{A}$  peut être créé par un champ  $\vec{F}$  solénoïdal à l'extérieur de cette région, de la même manière qu'un champ  $\vec{B}$  uniforme est créé par un solénoïde parcouru par un courant  $\vec{j}$  [SEMON1996].



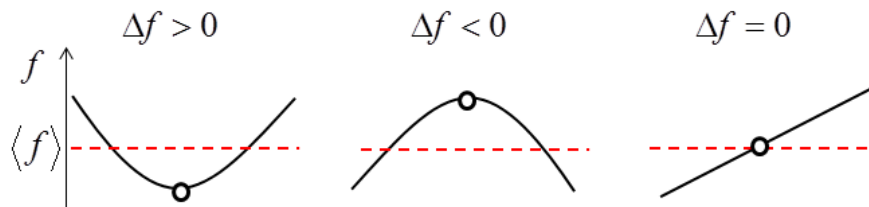
**Figure 10.** (Gauche)  $\vec{F} = \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}$  signifie que si  $\vec{F}$  est localement un « tube » de champ (de divergence nulle) alors il forme un axe autour duquel  $\vec{A}$  tend à tourner. (Droite) Inversement, le vecteur  $\vec{A}$  est un « axe » autour duquel s'enroule le champ  $\vec{F}$ .

Rappelons que le potentiel vecteur  $\vec{A}$  n'est connu qu'au gradient d'une fonction scalaire  $f'$  près (cette fonction  $f'$  est définie par le choix d'une *jauge*). En effet un champ de gradient est irrotationnel, donc il peut être ajouté sans modifier le champ  $\vec{A}$ . Comme pour le potentiel scalaire, cette fonction  $f'$  n'est pas essentielle, car seules les variations convoient de l'information physique.

## 2.4 Le laplacien

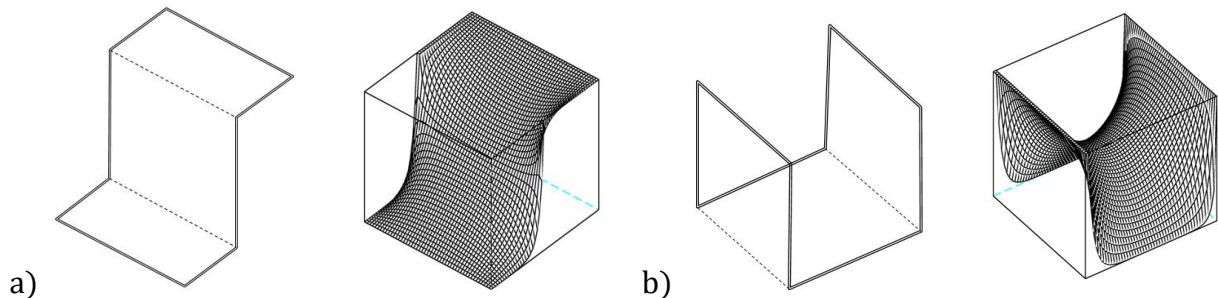
Nous avons vu qu'un champ de gradient dérive d'un champ scalaire  $f$ . Pour une « source »

ou un « puits » de ce champ, les lignes divergent ou convergent ; autrement dit la divergence de ce champ est positive ou négative. La divergence du champ de gradient n'est rien d'autre que le laplacien  $\Delta$ , que l'on écrira  $\Delta f = \text{div}(\overrightarrow{\text{grad}} f)$  ; celui-ci identifie donc les extréma du champ scalaire  $f$  (voir Fig. 11). D'un autre point de vue, Jean SIVARDIERE à bien montré [SIVARDIERE1992] que le laplacien est proportionnel à l'écart entre la fonction en un point et la valeur moyenne autour de ce point, tel que  $\Delta f \propto \langle f \rangle - f$ , où le coefficient de proportionnalité dépend de la forme du domaine (disque, cube, etc) pris pour calculer la valeur moyenne.



**Figure 11.** Le signe de l'opérateur laplacien est lié à la courbure locale de la fonction  $f$ . Une courbure prononcée induit des valeurs positives (concavité vers le haut, à gauche) ou négatives (concavité vers le bas, au milieu), tandis qu'une faible courbure induit une valeur faible, voire nulle si la fonction est localement linéaire (à droite).

Si le laplacien de  $f$  est nul sur un domaine fini (équation de Laplace,  $\Delta f = 0$ ), alors la fonction ressemble à une membrane élastique de masse négligeable tendue sur un cadre rigide, qui ne présente ni « creux » ni « bosse » (voir Fig. 12). Dans cette région, une bille qui glisse n'aura pas de point d'équilibre<sup>1</sup>. Une application concrète en robotique ou ingénierie est la recherche d'algorithmes du plus chemin optimal entre deux points [TARASSENKO1991] ; une fois  $f$  obtenue, le chemin le plus court est obtenu en choisissant le vecteur gradient le plus élevé en chaque point.



**Figure 12.** Une membrane tendue sur un cadre rigide, et décrite par une fonction  $f$ , obéit à l'équation de Laplace  $\Delta f = 0$ , dont voici deux exemples a) et b) montrant côte à côte le cadre rigide et la surface.

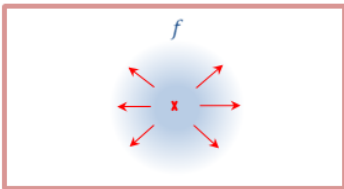
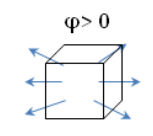
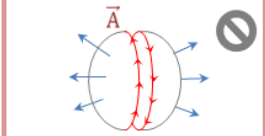

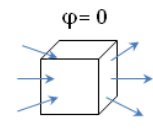
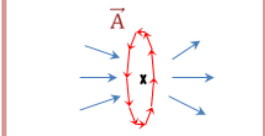



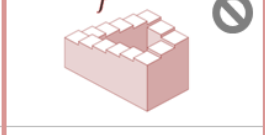

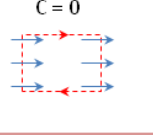
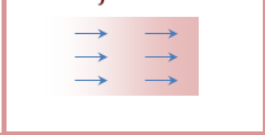
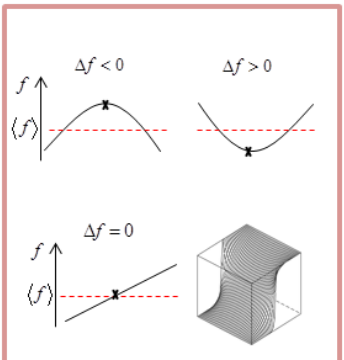
En régime transitoire, c'est-à-dire lorsque  $f$  est dépendant du temps, tel que  $\Delta f \propto \frac{\partial f}{\partial t}$  (équation de diffusion), la quantité tend à évoluer vers sa valeur moyenne. Ainsi, dans le cas d'une « bosse » locale, avec  $f > \langle f \rangle$  d'où  $\Delta f < 0$ ,  $f$  tend vers sa valeur moyenne plus rapidement si la concavité est grande ; la fonction se lisse. Par exemple, dans le cas d'un « point chaud », la « bosse » de température a tendance à diminuer et à s'étaler, conformément à l'expérience.

<sup>1</sup> Analogie au théorème d'Earnshaw qui montre qu'un ensemble de particules ne peut être maintenu en équilibre seulement par les forces électrostatiques.



### 3. Conclusion

En guise de conclusion, nous proposons ci-dessous une « infographie » qui synthétise ce qui a été vu et qui présente simplement les opérateurs vectoriels.

	Opérateur vectoriel	Grandeur vectorielle	Potentiel
1 <sup>er</sup> ordre	<b>Gradient</b> $\overline{\text{grad}} f = \vec{\nabla} f$		
			
	<b>Divergence</b> $\text{div} \vec{F} = \vec{\nabla} \cdot \vec{F}$	<b>Flux</b> $\varphi = \oiint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$	<b>Potentiel vecteur</b> $\vec{A}$ $\vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$
	$\text{div}(\vec{F}) < 0$ ● « puits » $\text{div}(\vec{F}) > 0$ ○ « source »	$\varphi > 0$ 	
	<b>champ solénoïdal ou laplacien</b> $\text{div}(\vec{F}) = 0$ 	$\varphi = 0$ 	
	<b>Rotationnel</b> $\overline{\text{rot}} \vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{F}$	<b>Circulation</b> $c = \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{l}$	<b>Potentiel scalaire U</b> $\vec{F} = -\overline{\text{grad}} U$
	$\overline{\text{rot}} \vec{F} \neq \vec{0}$ $(\overline{\text{rot}} \vec{F}) \cdot \vec{e}_1 < 0$ $(\overline{\text{rot}} \vec{F}) \cdot \vec{e}_1 > 0$ 	$c > 0$ 	
<b>champ lamellaire ou potentiel</b> $\overline{\text{rot}} \vec{F} = \vec{0}$ 	$c = 0$ 		
2 <sup>e</sup> ordre	<b>Laplacien</b> $\Delta f = \vec{\nabla}^2 f$ $\Delta f = \text{div}(\overline{\text{grad}} f)$		
			

#### 4. Bibliographie

- [CHABAY-SHERWOOD2011] Ruth.W. CHABAY et Bruce A. SHERWOOD, *Matter & Interaction vol. II – Electric and magnetic interactions*, 3rd edition, John Wiley & Sons, 2011.
- [DEIBER03] André DEIBER et Frédéric PAVIET-SALOMON, *Bulletin de l'union des physiciens*, nov. 2003, vol. 97, n°858, p. 35-60.
- [JECH1999] Bruno JECH, « Variations sur le potentiel vecteur », série de 8 articles parus dans le *Bulletin de l'union des physiciens* (BUP), (juin 1999 –déc. 2006).
- [MOREAU89] W.R. MOREAU, « Charge distributions on DC circuits and Kirchhoff's laws », *Eur. J. Phys.* **10** 286-290 (1989).
- [SCHEY2004] Harry M. SCHEY, *Div grad curl and all that, an informal text on vector calculus*, W. W. Norton & Company, 2004.
- [SEMON1996] Mark D. SEMON et John R. TAYLOR, « Thoughts on the magnetic vector potential », *American Journal of Physics* **64** 1361 (1996).
- [SIVARDIERE1989] Jean SIVARDIERE, « Divergence et rotationnel d'un champ de vecteurs : Une présentation physique et géométrique », *Bulletin de l'union des physiciens*, n°719 (1989).
- [SIVARDIERE1992] Jean SIVARDIERE, *Bulletin de l'union des physiciens*, mai 1992, vol. 86, n°744, p. 771–788.
- [SMIGIEL2013] E. SMIGIEL et M. SONNTAG, “A paradox in physics education in France”, *Physics Education*, 48(4), 497, 2013.
- [SMIGIEL2016] Eddie SMIGIEL, *Bulletin de l'union des physiciens*, fév. 2016, vol. 110, n°744, p. 203–212.
- [TARASSENKO1991]L. Tarassenko and A. Blake, « Analogue computation of collision-free paths in Robotics and Automation », *Proceedings of 1991 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, IEEE, p. 540–545.