

grad, div, rot

S.Ayrinhac
ayrinhac@impmc.upmc.fr

définitions

Champ de scalaires

→ À tout point de l'espace de coordonnées (x,y,z) on associe un nombre f

- Exemples : la température $T(x,y,z)$, la densité $\rho(x,y,z)$, etc.
- En pratique, si on échantillonne les points de l'espace, on peut stocker toute l'information dans un tableau de 4 colonnes $|x|y|z|f|$
- Si à tout point d'un plan on associe un nombre alors on définit une surface. Exemple : topographie d'un terrain avec l'altitude de chaque point.

Champ vectoriel

→ À tout point de l'espace (x,y,z) on associe un vecteur $\mathbf{F}=(F_x,F_y,F_z)=F_x(x,y,z)\mathbf{e}_x+F_y(x,y,z)\mathbf{e}_y+F_z(x,y,z)\mathbf{e}_z$

- Exemples : le champ électrique \mathbf{E} , le champ des vitesses \mathbf{v} , etc.
- En pratique, on peut stocker toute l'information dans un tableau de 6 colonnes $|x|y|z|F_x|F_y|F_z|$
- F_x ne dépend pas uniquement de x , mais dépend de x , y et z .

Flux Φ (flow) $\Phi = \int \vec{F} d\vec{S}$

- Par convention le flux est positif s'il quitte une surface fermée.

- S est une surface orientée

- une surface fermée S entoure un volume V (on ajoute un rond sur l'intégrale double)



Exemples :

- l'intensité du courant électrique I est le flux du courant volumique J à travers une surface S
- l'angle solide Ω est le flux de \mathbf{e}_r/r^2 à travers la surface interceptée S'

Circulation C

-s'applique à un champ scalaire f ou un champ vectoriel \mathbf{F}

(*path integral*) $C = \int_A^B f ds$

- dépend du chemin

(*line integral*) $C = \int_A^B \vec{F} d\vec{l}$ où $d\vec{l} = \hat{t} ds$

- ne dépend pas du chemin dans le cas d'une force centrale (dépend de la distance, agit suivant le vecteur joignant)

- un circuit est fermé lorsque $A=B$ (on ajoute un rond sur l'intégrale)
- un circuit fermé enclose une surface
- à ne pas confondre avec l'intégrale d'un vecteur, qui est l'expression de Chasles généralisée
- indépendance de chemin : n'a rien à voir avec une loi en $1/r^2$

$$C \neq \oint_A^B \vec{F}$$

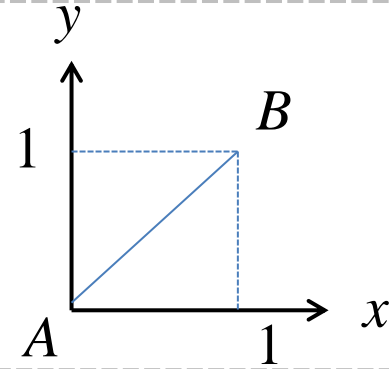
Exemples :

- le travail W est la circulation d'une force F le long d'un trajet
- la différence de potentiel V est la circulation du champ électrique E le long d'un trajet

Exemple de calcul de circulation

Énoncé

Calculer l'intégrale curviligne C de la fonction $f(x,y)=x+y$, le long de la diagonale AB (voir schéma ci-contre).



Solution

$$C = \int_A^B f(x,y) ds$$

ds est un déplacement élémentaire sur le trajet

On exprime x et y en fonction de s , qui va de 0 à 1 (longueur du trajet)

$$C = \int_A^B (\cos(\alpha)s + \sin(\alpha)s) ds$$

$$\cos(\alpha) = x/s; \alpha = \pi/4$$

$$C = \cos(\alpha) + \sin(\alpha) \int_0^l s ds$$

$$\sin(\alpha) = y/s$$

$$C = \frac{2}{\sqrt{2}} \left[\frac{s^2}{2} \right]_0^l; l = \sqrt{2}$$

$$C = \sqrt{2}$$

Opérateurs différentiels

Opérateurs

- il existe 3 opérateurs différentiels principaux appelés **rotationnel**, **divergence**, **gradient**

qui généralisent la notion de dérivée

- ces 3 opérateurs peuvent s'exprimer avec l'opérateur **nabla** (english : *del*) (défini uniquement en coord. cartésiennes)

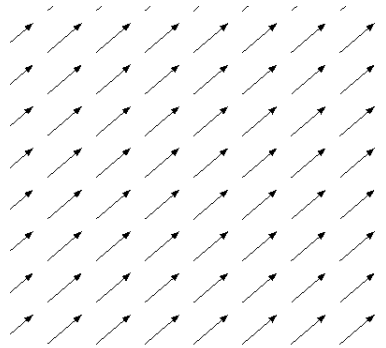
$$\begin{aligned} \text{grad}(f) &= \vec{\nabla} \cdot f \\ \text{div}(\vec{F}) &= \vec{\nabla} \cdot \vec{F} \\ \text{rot}(\vec{F}) &= \vec{\nabla} \wedge \vec{F} \end{aligned} \quad \vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial z} \vec{e}_z = \begin{bmatrix} \partial / \partial x \\ \partial / \partial y \\ \partial / \partial z \end{bmatrix}$$

- ils définissent des relations **locales** :

- valables en tout point
- il faut intégrer pour atteindre les quantités physiques

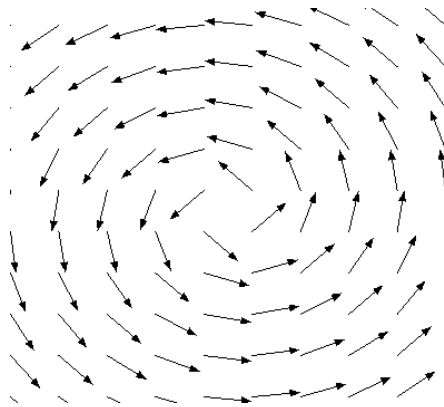
Rotationnel (*curl*) $\vec{\nabla} \wedge \vec{F}$

- s'applique à un champ de vecteurs
- donne un champ de vecteurs



$$\vec{\nabla} \wedge \vec{F} = \vec{0}$$

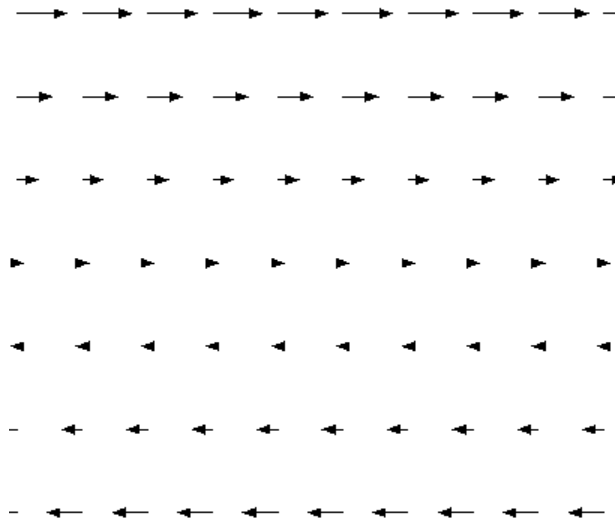
- champ « irrotationnel »



$$\vec{\nabla} \wedge \vec{F} \neq \vec{0}$$

- champ « tourbillonnant », « tournoyant »
- le champ résultant est perpendiculaire au plan du tourbillon (comme l'axe d'une toupie), ici vers le haut

Autre champ au rotationnel non nul $\vec{F} = x\vec{e}_x$



Note : le rotationnel d'un vecteur polaire est un pseudo-vecteur, et inversement

Montrons qu'un champ irrotationnel dérive d'un potentiel :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{F} = \vec{0} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) \vec{e}_x + \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) \vec{e}_y + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \vec{e}_z$$

$$\left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) = 0$$

$$\frac{\partial F_z}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial z}$$

Si F dérive d'un potentiel

$$F_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z}; F_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)$$

On retrouve le théorème de Schwarz

F est donc une différentielle totale exacte

$$\vec{\text{rot}} \vec{F} = \vec{0}$$

\implies Le champ est dit lamellaire ou potentiel

champ F à circulation C conservative

il existe un potentiel scalaire f tel que $F = -\text{grad}(f)$

$$C = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{l} = -\int_A^B \text{grad } f \cdot d\vec{l} = f(A) - f(B)$$

pour un contour fermé et orienté : $A=B \implies C=0$

- f est défini à une constante près
- existence de surfaces équipotentielles

Exemples :

- le champ électrique E, qui dérive du potentiel électrique V (tension électrique ddp $U = V(B) - V(A)$)
(vrai en régime permanent seulement)
- la force de Coulomb F, qui dérive d'une énergie potentielle \mathcal{E} , dont la circulation est égal au travail W
- le champ gravitationnel G, qui dérive d'un potentiel Φ
- la force de gravitation F, qui dérive de l'énergie potentielle gravitationnelle E_p
- le champ des vitesses v, qui dérive du potentiel des vitesses Φ
- le champ magnétique B, qui dérive d'un potentiel scalaire magnétique Φ_M (en l'absence de courants)

Contre-exemples :

- le champ électro-moteur d'induction, dont la circulation est égale à la f.e.m.

$$\vec{\text{rot}} \vec{F} = \vec{k}$$

champ F à **circulation C**
non-conservative

$$C = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

pour un contour fermé et
orienté : $A=B \Rightarrow C=\text{constante}$

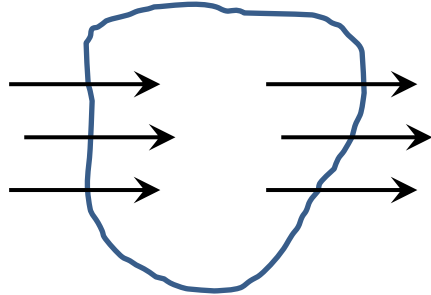
Exemples :

- le champ électro-moteur d'induction, dont la circulation est égale à la f.e.m.
- le champ magnétique **B**, dont la circulation est proportionnelle au courant I

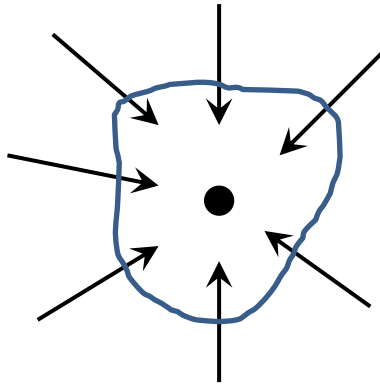
Divergence $\vec{\nabla} \cdot \vec{F}$

- s'applique à un champ de vecteurs
- donne un champ scalaire

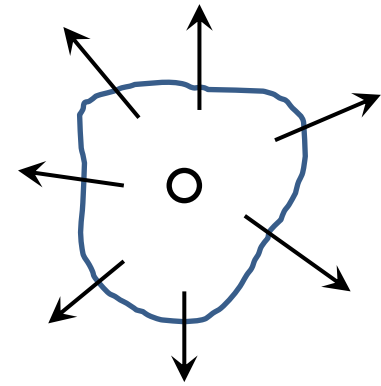
surface fermée S



$$\text{div}(\vec{F}) = 0$$

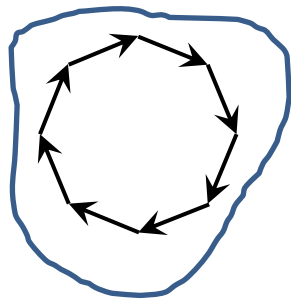


$$\text{div}(\vec{F}) < 0$$



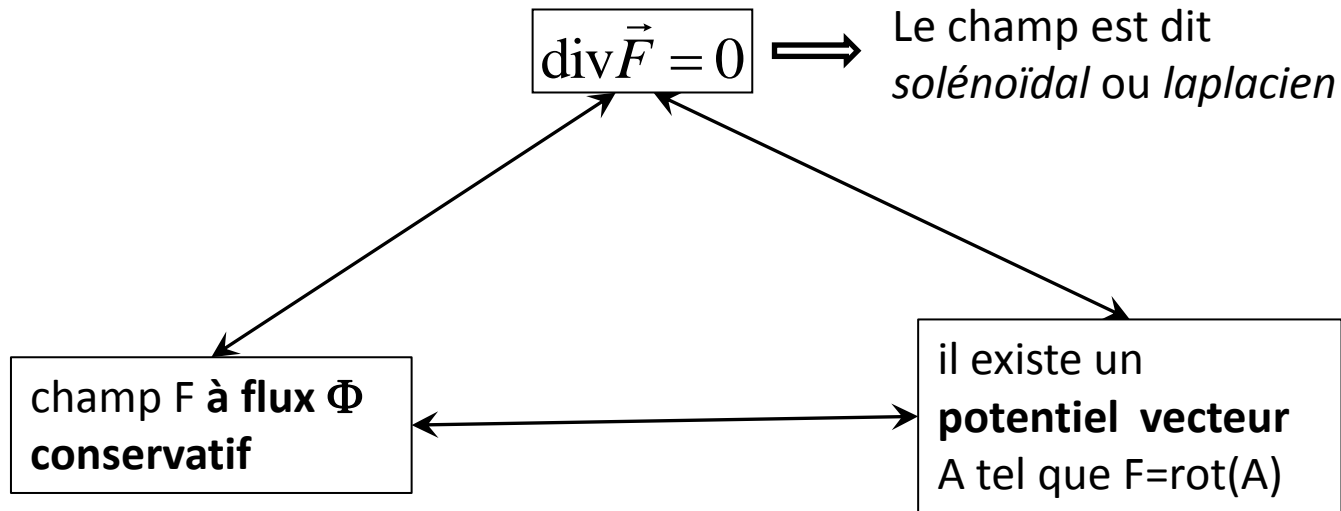
$$\text{div}(\vec{F}) > 0$$

il existe une *source* ou un *puits* pour le champ
(symbolisés par ● et ○)



champ « tournoyant »

$$\text{div}(\vec{\text{rot}}(\vec{F})) = 0 \quad \text{car } \text{rot}(\vec{F}) \text{ est un champ axial}$$



$$\Phi = \oiint_S \vec{F} d\vec{S} = 0$$

S est une surface fermée et orientée
 $F \cdot S = \text{constante}$

Exemples :

- le champ magnétique \mathbf{B} , qui dérive du potentiel vecteur \mathbf{A}
- la densité de courant volumique \mathbf{J} en régime stationnaire

Gradient $\vec{\nabla}.f(x, y, z)$

- s'applique à un champ de scalaires
- donne un champ vectoriel

Définition pratique : le gradient d'un champ scalaire en un point M est un vecteur dirigé dans la direction dans laquelle f possède la pente la plus forte et dont le module est égal à la pente dans cette direction.

Conséquence 1 : plus les lignes sont serrées, plus le module du gradient est grand.

Conséquence 2 : le gradient est perpendiculaire à la surface $f(x,y,z)=cste$, c-a-d aux lignes d'isovaleurs

Conséquence 3 : le vecteur pointe des valeurs basses vers les valeurs plus hautes

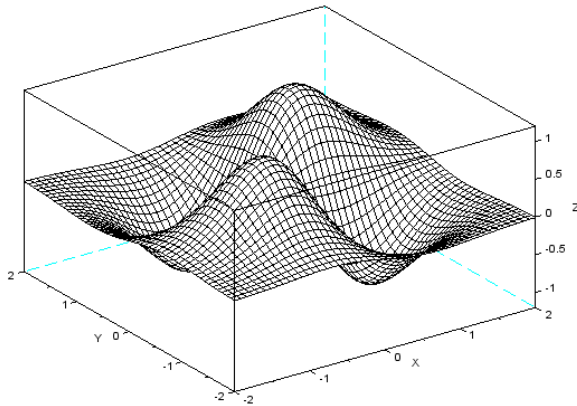
Exemple ci-contre avec une *carte topographique* (qui donne l'altitude du terrain en fonction de la longitude et de la latitude)



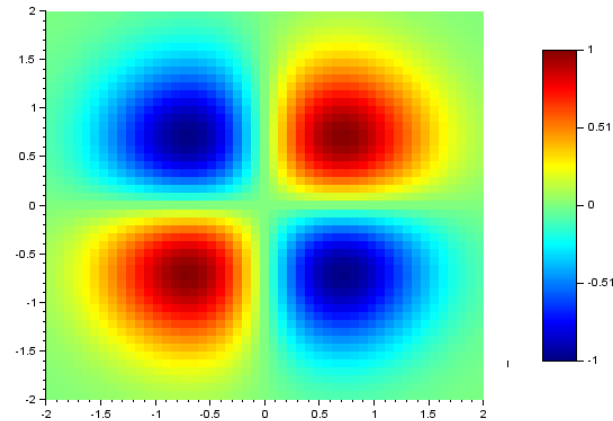
Exemple 1

Champ de scalaires f défini par: $f(x, y) = xe^{-(x^2+y^2)}$

vue 3D

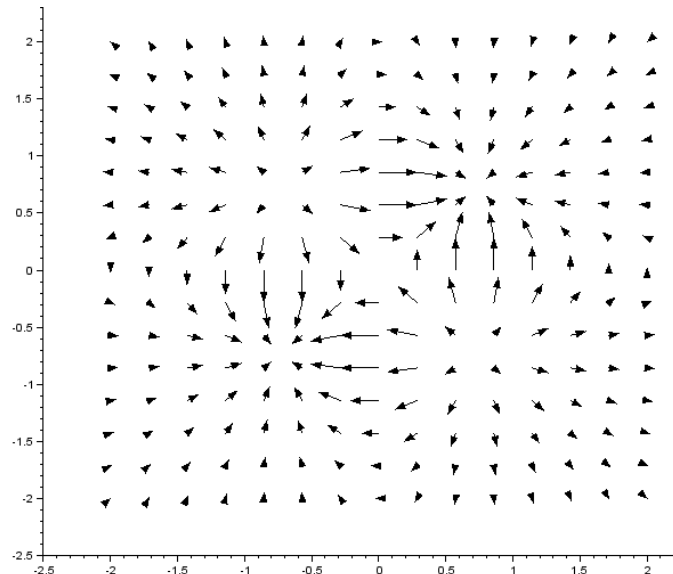


vue de dessus



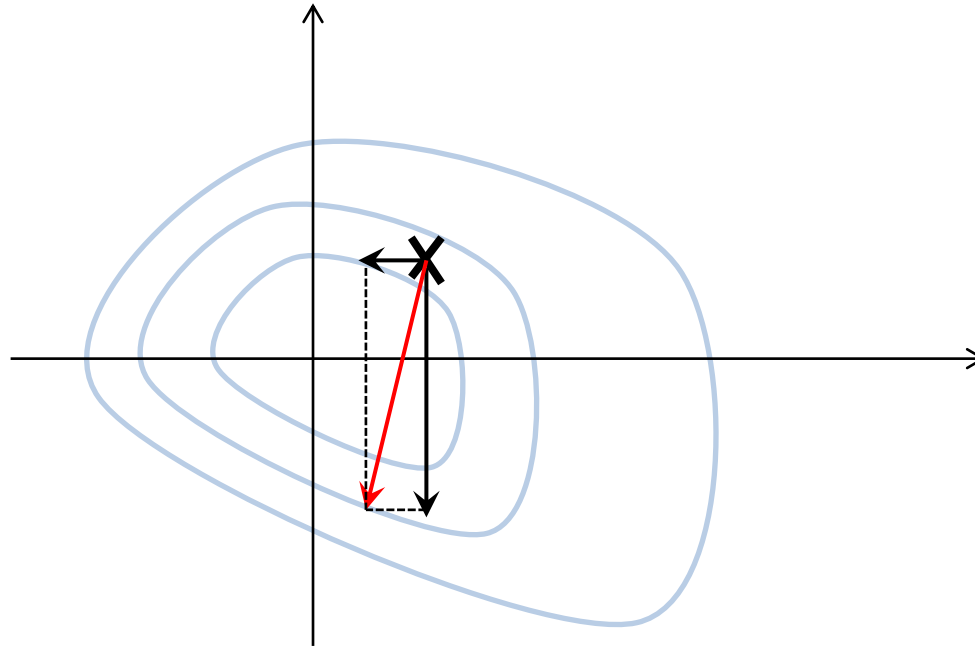
Champ de gradient associé

Les vecteurs semblent « s'éloigner »
des minima et semblent « attirés »
par les maxima



Exemple 2

Une colline : le gradient pointe grossièrement vers le sommet



somme des 2 vecteurs
= gradient

Laplacien $\Delta f(x, y, z)$ $\Delta \vec{F}(x, y, z)$

- peut s'appliquer à un champ de scalaires ou vectoriel
- donne un champ du même type

- d'un champ scalaire : extrema de ce champ
- pour le potentiel électrostatique V : présence de charges

$$\Delta \cdot f = 0$$

- signifie qu'il n'y a pas de source ou de puits du champ F à proximité
- Exemple : (équation de Laplace) $\Delta V = 0$ signifie qu'il n'y a pas de charges dans le volume à proximité, (équation de Poisson) $\Delta V = -\rho / \epsilon_0$ dans le cas contraire

Exemples :

- | | |
|--|-----------------------------------|
| • l'équation de Laplace pour le potentiel V | $\Delta V = 0$ |
| • l'équation de Poisson pour le potentiel V | $\Delta V = -\rho / \epsilon_0$ |
| • l'équation de Poisson pour le potentiel vecteur A | $\Delta \vec{A} = -\mu_0 \vec{J}$ |
| • l'équation de Poisson pour le potentiel gravitationnel φ | $\Delta \varphi = 4\pi G \rho$ |
| • l'équation de Poisson pour l'hydrodynamique | $\Delta \Phi = -v / \rho$ |
| • l'équation de Poisson pour la conduction de chaleur | $\Delta T = -v / K$ |

Exemple : équation de Laplace en dimension 2

$$\Delta f = \nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

Le laplacien rentre en jeu dans

- l'équation des ondes
- L'équation de diffusion

d'Alembertien $D. f(x, y, z) \quad D\vec{F}(x, y, z)$

- peut s'appliquer à un champ de scalaires ou vectoriel
- donne un champ du même type

$$D = \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

- signifie que la quantité f ou \mathbf{F} se propage à une vitesse c

Exemples :

- l'équation de propagation du champ électromagnétique pour $\mathbf{E}, \mathbf{B}, \mathbf{V}, \mathbf{A}$: $\Delta X=0$
- l'équation de propagation du champ acoustique P, \mathbf{v}, x

Annexes et bibliographie

Annexe 1 : notations des dérivées

d/dx dérivée par rapport à x

$\partial/\partial x$ dérivée partielle (lire « d rond ») par rapport à x → $df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$

d différentielle

d différentielle totale exacte : les dérivées croisées sont égales, ne dépend pas du chemin suivi, sont les dérivées d'une même fonction scalaire

δ forme différentielle de degré 1

exemples : travail δW , chaleur δQ

$$\delta f = A dx + B dy$$

D dérivée particulaire

∇ nabla (eng. del)

Δ Laplacien

Δ Intervalle

$$\delta f = df \text{ si } A = \frac{\partial g}{\partial x} \text{ et } B = \frac{\partial g}{\partial y} \Leftrightarrow \frac{\partial B}{\partial x} = \frac{\partial A}{\partial y}$$

Annexe 2 : formulaire simplifié d'électromagnétisme

électrostatique

magnétostatique

$$\vec{F} = q\vec{E} \quad \vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^3} \quad \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} q\vec{v} \times \frac{\vec{r}}{r^3}$$

$$\oiint_S \vec{E} d\vec{S} = Q_{\text{int}} / \epsilon_0$$

$$\oint_C \vec{E} d\vec{l} = 0$$

$$\text{div} \vec{E} = \rho / \epsilon_0$$

$$\vec{r} \text{rot} \vec{E} = 0$$

$$\vec{E} = -\vec{g} \text{grad} V$$

$$\Delta V = -\rho / \epsilon_0$$

condensateur plan

$$\text{div} \vec{B} = 0$$

$$\vec{r} \text{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

$$\vec{B} = \vec{r} \text{rot} \vec{A}$$

$$\Delta \vec{A} = -\mu_0 \vec{J}$$

solénoïde infini

$$\oiint_S \vec{B} d\vec{S} = 0$$

$$\oint_C \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 I$$

$$\epsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$$

Bibliographie :

-*Div grad curl and all that, an informal text on vector calculus*,
H.M.Schey, 3rd ed., ISBN 0-393-96997-5

-*Divergence et rotationnel d'un champ de vecteurs : Une présentation physique et géométrique*, SIVARDIÈRE Jean (1989) BUP n°719

-*Vector calculus*, Marsden & Tromba, ISBN 0-7167-1856-1

Internet

-<http://betterexplained.com/articles/category/math/vector-calculus/>

-[http://alainrobichon.free.fr/cours/Maths/Champs et operateurs.pdf](http://alainrobichon.free.fr/cours/Maths/Champs%20et%20op%C3%A9rateurs.pdf)