grad, div, rot

S. Ayrinhac
simon.ayrinhac@sorbonne-universite.fr

SORBONNE UNIVERSITÉ
CRÉATEURS DE FUTURS DEPUIS 1257

définitions

Champ scalaire

$\rightarrow$ À tout point de l'espace de coordonnées (x,y,z) on associe un scalaire f

- Exemples : la température T(x,y,z), la densité ρ(x,y,z), etc.
- En pratique, si on échantillonne les points de l'espace, on peut stocker toute l'information dans un tableau de 4 colonnes |x|y|z|f|
- Si à tout point d'un plan on associe un nombre alors on définit une surface. Exemple : topographie d'un terrain avec l'altitude de chaque point.

Champ vectoriel

$\rightarrow$ À tout point de l'espace (x,y,z) on associe un vecteur

$$\vec{F}(x,y,z)=F_x(x,y,z)\overrightarrow{e_x}+F_y(x,y,z)\overrightarrow{e_y}+F_z(x,y,z)\overrightarrow{e_z}$$

- Exemples : le champ électrique **E**, le champ des vitesses **v**, etc.
- F_x ne dépend pas uniquement de x, mais dépend de x, y et z.
- En pratique, on peut stocker l'information dans un tableau de 6 colonnes |x|y|z|F_x|F_y|F_z|

Flux Φ (*flow*) $\Phi = \oiint_S \vec{F} \cdot \overrightarrow{dS}$

- Par convention le flux est positif s'il quitte une surface fermée.

  - S est une surface orientée
  - une surface fermée S entoure un volume V (on ajoute un rond sur l'intégrale double) $\oiint$

Exemples :

- l'intensité du courant électrique I est le flux du courant volumique J à travers une surface S
- l'angle solide Ω est le flux de $\mathbf{e}_r/r^2$ à travers la surface interceptée S'

Circulation C

- s'applique à un champ scalaire *f* ou un champ vectoriel **F**
- donne un scalaire

(path integral) $$C = \int_A^B f.\,dl$$

(line integral) $$C = \int_A^B \vec{F} \cdot \overrightarrow{dl}$$

• un circuit est fermé lorsque A=B (on ajoute un rond sur l'intégrale)

$$C = \oint_C \vec{F} \cdot \overrightarrow{dl}$$

Exemples :

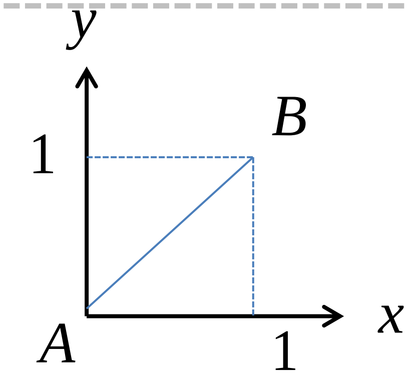
• le travail W est la circulation d'une force **F** le long d'un trajet

• la différence de potentiel U est la circulation du champ électrique **E** le long d’un trajet

Exemple de calcul de circulation

Énoncé

Calculer l'intégrale curviligne *C* de la fonction f(x,y)=x+y, le long de la diagonale AB (voir schéma ci-contre).



Solution

$$C = \int_A^B f(x,y)ds$$

ds est un déplacement élémentaire sur le trajet

On exprime x et y en fonction de s, qui va de 0 à l (longueur du trajet)

$$\mathrm{C} = \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} (\cos(\alpha)s + \sin(\alpha)s)ds$$

$$\cos(\alpha) = x/s; \alpha = \pi/4$$

$$\sin(\alpha) = y/s$$

$$C = \cos(\alpha) + \sin(\alpha)\int_0^l s ds$$

$$C = \frac{2}{\sqrt{2}}\left[\frac{s^2}{2}\right]_0^l ; l = \sqrt{2}$$

$$C = \sqrt{2}$$

Opérateurs différentiels

Opérateurs

- il existe 3 opérateurs différentiels principaux
appelés **rotationnel**, **divergence**, **gradient**
qui généralisent la notion de dérivée
- ces 3 opérateurs peuvent s'exprimer avec l'opérateur
nabla (english : *del*) (ici défini en coord. cartésiennes)

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\mathrm{f} = \vec{\nabla} f$$

$$\mathrm{div}\,\vec{\mathrm{F}} = \vec{\nabla}\cdot\vec{\mathrm{F}}$$

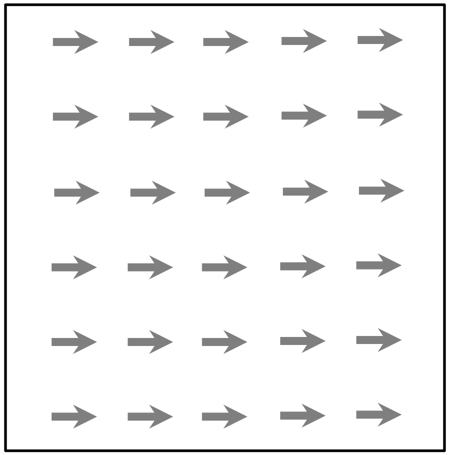
$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\mathrm{F}} = \vec{\nabla}\times\vec{\mathrm{F}}$$

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial \mathrm{x}}\overrightarrow{\mathrm{u_x}} + \frac{\partial}{\partial \mathrm{y}}\overrightarrow{\mathrm{u_y}} + \frac{\partial}{\partial \mathrm{z}}\overrightarrow{\mathrm{u_z}} = \begin{pmatrix} \partial/\partial \mathrm{x} \\ \partial/\partial \mathrm{y} \\ \partial/\partial \mathrm{z} \end{pmatrix}$$

- ils définissent des relations **<u>locales</u>** :
• dans un volume mésoscopique
• valables en tout point
• il faut intégrer pour atteindre les quantités physiques

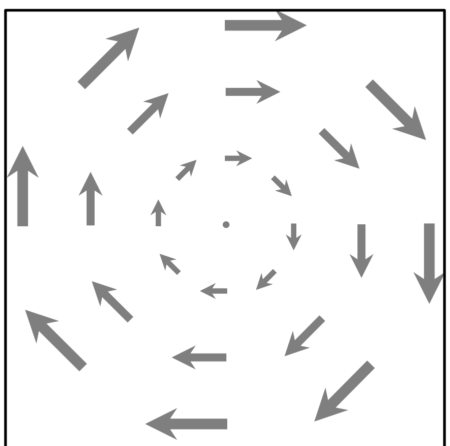
Rotationnel (*curl*) $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\mathrm{F}} = \vec{\nabla}\times\vec{\mathrm{F}}$

- s'applique à un champ de vecteurs
- donne un champ de vecteurs



$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\mathrm{F}} = \vec{0}$

- champ « irrotationnel »



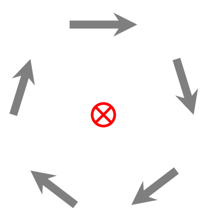
$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\mathrm{F}} \neq \vec{0}$

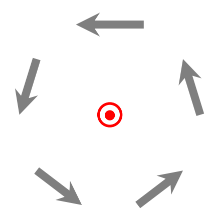
- champ « tourbillonnant », « tournoyant »
- le champ résultant est perpendiculaire au plan du tourbillon (comme l'axe d'une toupie), ici vers le haut

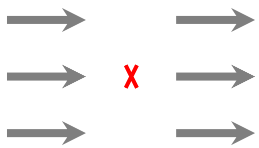
$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{F} \neq \vec{0}$$

$$\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{F}\right)\cdot\vec{e}_{\perp} < 0 \qquad\qquad \left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{F}\right)\cdot\vec{e}_{\perp} > 0$$

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{F} = \vec{0}$$



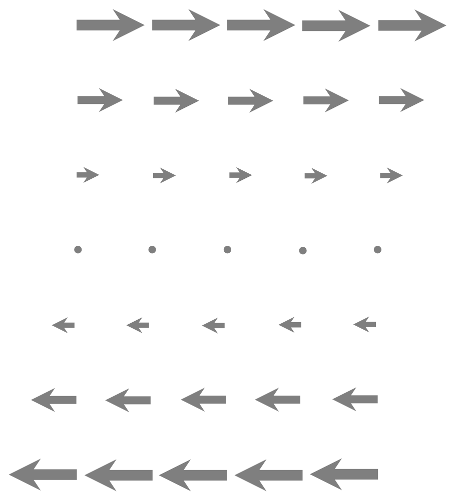




Remarque de vocabulaire : le rotationnel d’un vecteur polaire est un pseudo-vecteur, et inversement

Exemple simple de champ au rotationnel non nul

$$\vec{F} = y\,\vec{e_x}$$



$$\mathrm{div}\,\vec{F} = 0$$

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{F} = -\,\vec{e_z}$$

un champ « cisaillant » présente un rotationnel non nul

Montrons qu'un champ irrotationnel dérive d'un potentiel :

$$\vec{\nabla}\times\vec{F} = 0 = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right)\overrightarrow{e_x} + \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right)\overrightarrow{e_y} + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)\overrightarrow{e_z}$$

$$\left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right) = 0$$

$$\frac{\partial F_z}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial z}$$

Si **F** dérive d'un potentiel

$$F_z = -\frac{\partial f}{\partial z}\,; F_y = -\frac{\partial f}{\partial y}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

On retrouve le théorème de Schwarz

f est donc une <u>différentielle totale exacte</u>

$\boxed{\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{F} = \vec{0}}$ $\Longrightarrow$ Le champ est dit *lamellaire* ou *potentiel*

dans un domaine simplement connexe

champ F à **circulation C conservative**

il existe un **potentiel scalaire *f*** (ou U) tel que

$$\vec{F} = \overrightarrow{\text{grad}}\, f$$

$$\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, U$$

$$C = \int_A^B \vec{F} \cdot \vec{dl} = -\int_A^B \overrightarrow{\text{grad}}\, f \cdot \vec{dl} = f(A) - f(B)$$

pour un contour fermé et orienté : A=B $\Rightarrow$C=0

- *f* (ou U) défini à une constante près
- U défini tel que le min. du potentiel corresponde à une position d'équilibre stable
- existence de *surfaces équipotentielles*

<u>Exemples</u> :

- le champ électrique **E**, qui dérive du potentiel électrique V (tension électrique ddp U=V(B)-V(A)) *(vrai en régime permanent seulement)*
- la force de Coulomb **F**, qui dérive d'une énergie potentielle $\mathcal{E}$, dont la circulation est égale au travail W
- le champ gravitationnel **G**, qui dérive d'un potentiel Φ
- la force de gravitation **F**, qui dérive de l'énergie potentielle gravitationnelle Ep
- le champ des vitesses **v**, qui dérive du potentiel des vitesses Φ
- le champ magnétique **B**, qui dérive d'un potentiel scalaire magnétique Φ_M (en l'absence de courants)

<u>Contre-exemples</u> :

- le champ électro-moteur d'induction, dont la circulation est égale à la f.e.m.

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{F} = \vec{k}}$$

champ F à **circulation**
C non-conservative

$$C = \int_A^B \vec{F} \cdot \overrightarrow{dl} = \text{constante}$$

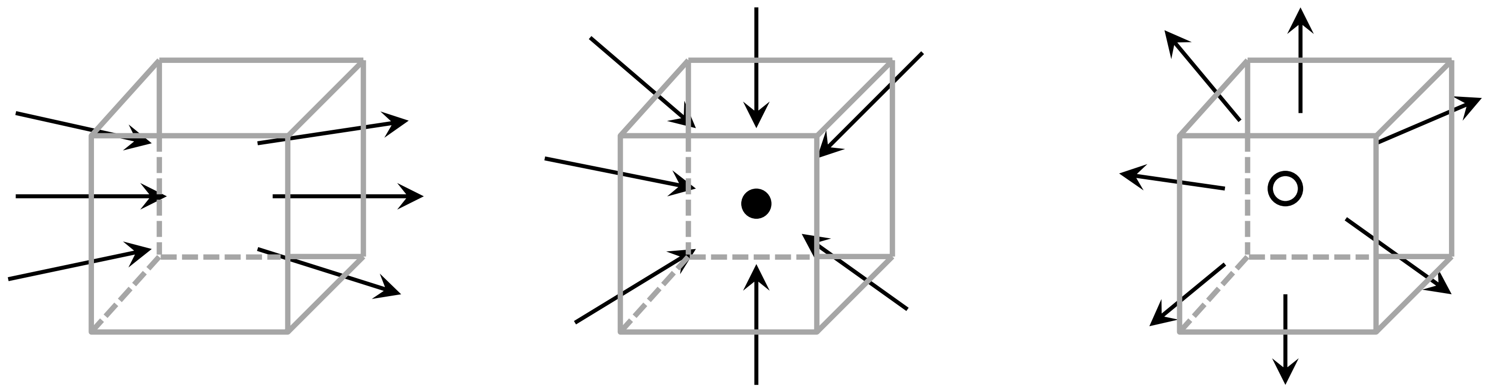
pour un contour fermé et
orienté : A=B $\Rightarrow$C=constante

Exemples :

- le champ électro-moteur d'induction, dont la circulation est égale à la f.e.m.
- le champ magnétique **B**, dont la circulation est proportionnelle au courant I

Divergence $\mathrm{div}\,\vec{F} = \vec{\nabla}\cdot\vec{F}$

- s'applique à un champ de vecteurs
- donne un champ scalaire



$\mathrm{div}\,\vec{F} = 0$ $\mathrm{div}\,\vec{F} < 0$ $\mathrm{div}\,\vec{F} > 0$

il existe une *source* ou un *puits* pour le champ
(symbolisés par ● et ○)

$$\mathrm{div}\,\vec{F} = 0$$

Le champ est dit *solénoïdal* ou *laplacien*

champ F **à flux Φ conservatif**

$$\Phi = \oiint_S \vec{F} \cdot \overrightarrow{dS}$$

S est une surface fermée et orientée
F*S=constante

il existe un **potentiel vecteur A** tel que $\vec{F} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A}$

$$\mathrm{div}\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{F}\right) = 0 \quad \forall \vec{A}$$

A n'est pas unique, il est défini à un grad(f') près

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f\right) = 0 \quad \forall f$$

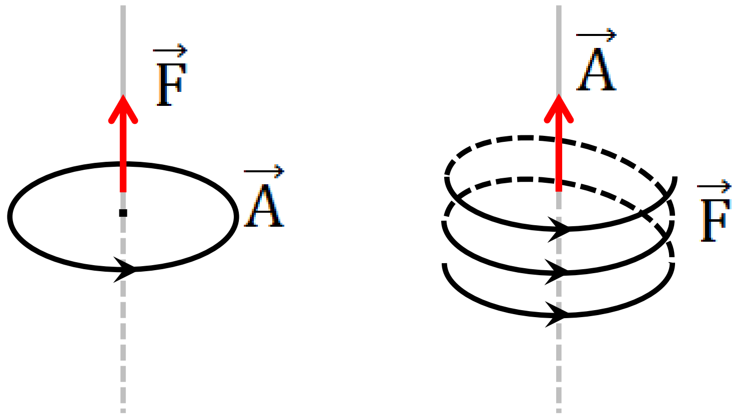
f' donnée par un **choix de jauge**

Exemples :

- le champ magnétique **B**, qui dérive du potentiel vecteur magnétique **A**
- la densité de courant volumique **J** en régime stationnaire
- la déformation **u** pour un solide incompressible
- les vitesses **v** pour un écoulement(≠fluide) incompressible, qui dérive d'un potentiel vecteur cinématique **U**

Potentiel vecteur **A** $\quad \vec{F} = \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A}$

- existe si $\text{div}\,\vec{F} = 0$
- défini à un grad(*f*) près



- Si **F** est un champ vectoriel uniforme

$$\vec{A} = \frac{1}{2}\vec{F}\times\vec{r}$$

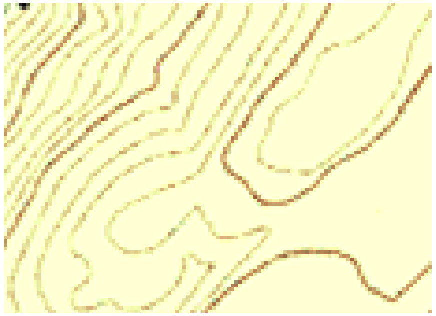
Gradient $\overrightarrow{\text{grad}}\ \text{f} = \vec{\nabla} f$

- s'applique à un champ de scalaires
- donne un champ vectoriel

Définition pratique :
Le gradient d'un champ scalaire en un point M est un vecteur dirigé dans la direction dans laquelle *f* possède la pente la plus forte et dont le module est égal à la pente dans cette direction.

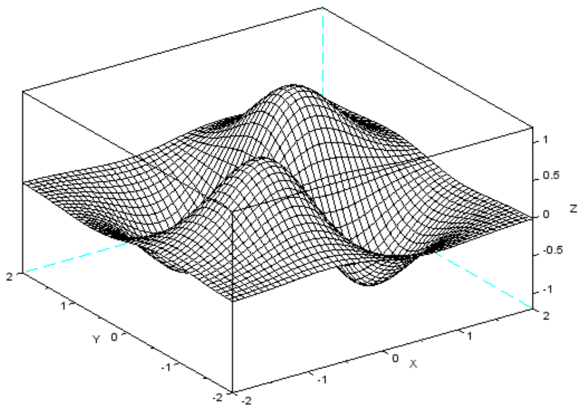
Exemple ci-dessous avec une *carte topographique* (qui donne l'altitude du terrain en fonction de la longitude et de la latitude)

Conséquences :
- plus les lignes sont serrées, plus le module du gradient est grand.
- le gradient est perpendiculaire à la surface f(x,y,z)=cste, c-a-d aux lignes d'isovaleurs
- le vecteur pointe des valeurs basses vers les valeurs plus hautes

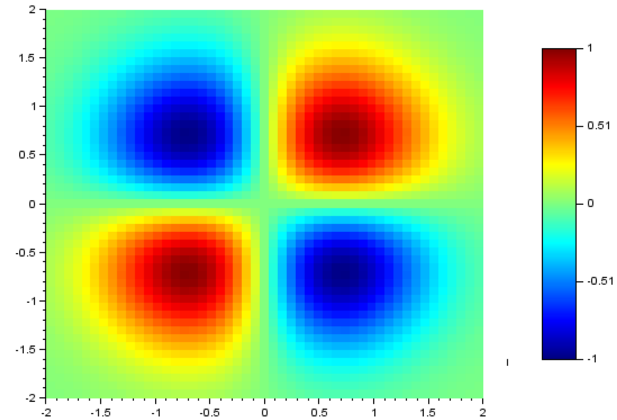


Exemple : champ scalaire *f* défini par: $f(x, y) = yxe^{-(x^2+y^2)}$

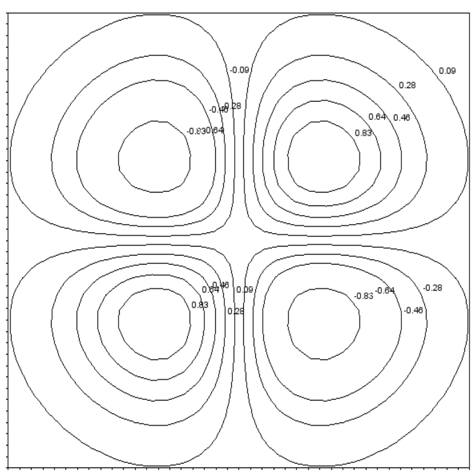
vue 3D



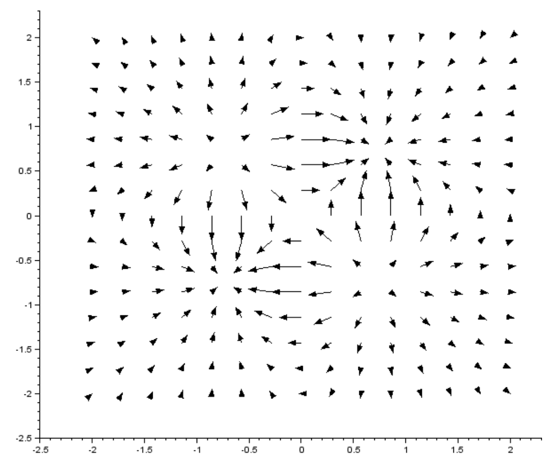
vue de dessus



Lignes iso-valeurs



Champ de gradient associé



Les vecteurs semblent « s'éloigner » des minima et semblent « attirés » par les maxima

$$\Delta f = \vec{\nabla}^2 f \qquad \Delta f = \mathrm{div}(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f)$$

Laplacien

$$\Delta \vec{F} = \vec{\nabla}^2 \vec{F} \qquad \Delta \vec{F} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}(\mathrm{div}\, \vec{F}) - \overrightarrow{\mathrm{rot}}(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{F})$$

- peut s'appliquer à un champ de scalaires ou vectoriel
- donne un champ du même type

- d'un champ scalaire : extrema de ce champ
- pour le potentiel électrostatique V : présence de charges

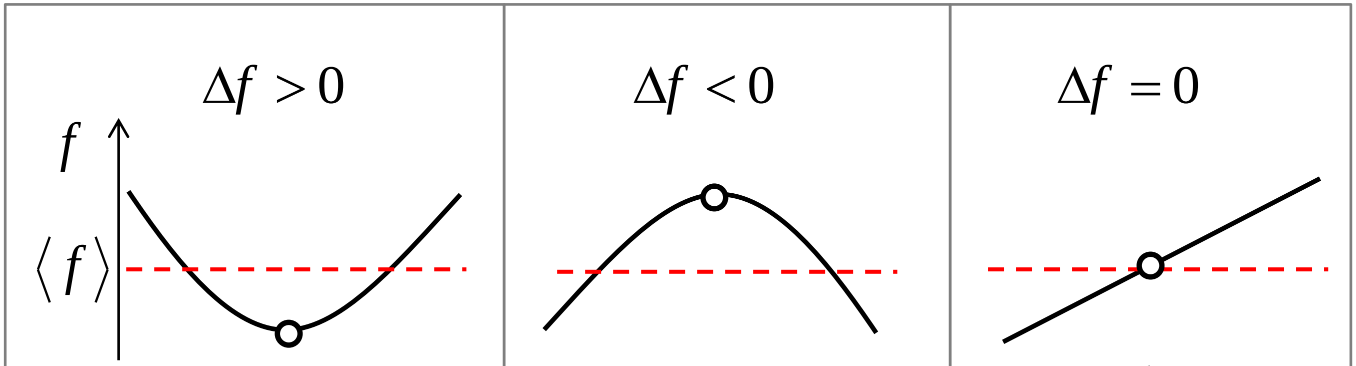
$$\Delta f = 0$$

- signifie qu'il n'y a pas de source ou de puits du champ F à proximité
- <u>Exemples</u> : $\Delta V=0$ (équation de Laplace) signifie qu'il n'y a pas de charges dans le volume étudié, dans le cas contraire $\Delta V=-\rho/\varepsilon_0$ (équation de Poisson) avec une densité volumique de charges ρ

<u>Exemples</u> :

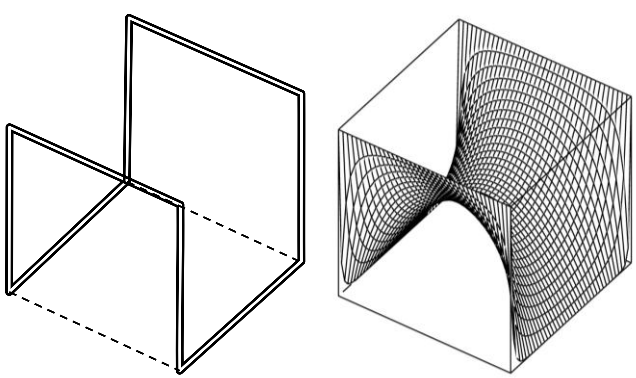
- l'équation de Laplace pour le potentiel V $\quad \Delta V = 0$
- l'équation de Poisson pour le potentiel V $\quad \Delta V = -\rho/\varepsilon_0$
- l'équation de Poisson pour le potentiel vecteur A $\quad \Delta \vec{A} = -\mu_0 \vec{J}$
- l'équation de Poisson pour le potentiel gravitationnel φ $\quad \Delta\varphi = 4\pi G\rho$
- l'équation de Poisson pour l'hydrodynamique $\quad \Delta\Phi = -\nu/\rho$
- l'équation de Poisson pour la conduction de chaleur $\quad \Delta T = -\nu/K$

Le laplacien Δf représente la courbure locale de f

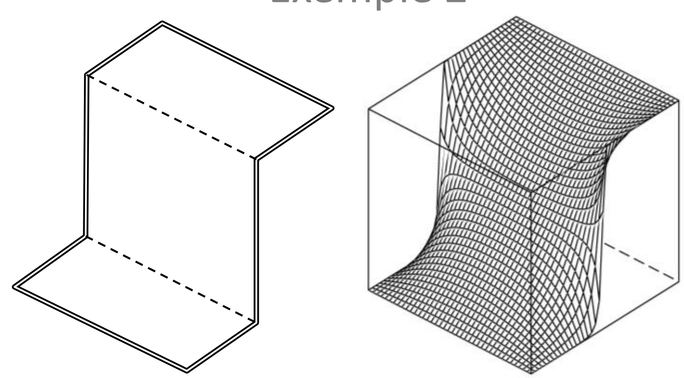


Un laplacien nul équivaut à
une membrane souple tendue sur un cadre rigide

Exemple 1



Exemple 2



Bibliographie

Bibliographie :

- H.M.SCHEY *Div grad curl and all that, an informal text on vector calculus*, 3rd ed., ISBN 0-393-96997-5

- Jean SIVARDIÈRE, *Divergence et rotationnel d'un champ de vecteurs : Une présentation physique et géométrique,* BUP n°719 (1989)

- Jean SIVARDIÈRE *Une introduction géométrique et physique du laplacien,* BUP n°744 *(1992)*

Webographie :

-http://betterexplained.com/articles/category/math/vector-calculus/

-http://alainrobichon.free.fr/cours/Maths/Champs_et_operateurs.pdf