# grad, div, rot

**S.Ayrinhac**
**ayrinhac@impmc.upmc.fr**

UPMC
SORBONNE UNIVERSITÉS

# définitions

## Champ de scalaires

→ À tout point de l'espace de coordonnées (x,y,z) on associe un nombre *f*

- Exemples : la température T(x,y,z), la densité ρ(x,y,z), etc.
- En pratique, si on échantillonne les points de l'espace, on peut stocker toute l'information dans un tableau de 4 colonnes |x|y|z|f|
- Si à tout point d'un plan on associe un nombre alors on définit une surface. Exemple : topographie d'un terrain avec l'altitude de chaque point.

## Champ vectoriel

→ À tout point de l'espace (x,y,z) on associe un vecteur $\mathbf{F}=(F_x,F_y,F_z)=F_x(xy,z)\mathbf{e_x}+F_y(x,yz)\mathbf{e_y}+F_z(x,y,z)\mathbf{e_z}$

- Exemples : le champ électrique **E**, le champ des vitesses **v**, etc.
- En pratique, on peut stocker toute l'information dans un tableau de 6 colonnes $|x|y|z|F_x|F_y|F_z|$
- $F_x$ ne dépend pas uniquement de x, mais dépend de x, y et z.

Flux Φ (*flow*) $\Phi = \int \vec{F} d\vec{S}$

- Par convention le flux est positif s'il quitte une surface fermée.

- S est une surface orientée
- une surface fermée S entoure un volume V (on ajoute un rond sur l'intégrale double) $\oiint$

**Exemples :**
- l'intensité du courant électrique I est le flux du courant volumique J à travers une surface S
- l'angle solide Ω est le flux de $\mathbf{e}_r/r^2$ à travers la surface interceptée S'

# Circulation C

-s'applique à un champ scalaire f ou un champ vectoriel **F**

*(path integral)* $C = \int_A^B f ds$

- dépend du chemin

*(line integral)* $C = \int_A^B \vec{F} d\vec{l}$ où $\vec{dl} = \hat{t} ds$

- ne dépend pas du chemin dans le cas d'une force centrale (dépend de la distance, agit suivant le veteur joignant)

- un circuit est fermé lorsque A=B (on ajoute un rond sur l'intégrale) $\oint$
- un circuit fermé enclos une surface
- à ne pas confondre avec l'intégrale d'un vecteur, qui est l'expression de Chasles généralisée $C \neq \int_A^B \vec{F}$
- indépendance de chemin : n'a rien à voir avec une loi en $1/r^2$

**Exemples :**

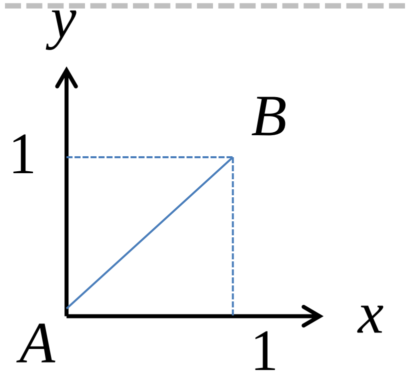
• le travail W est la circulation d'une force F le long d'un trajet

• la différence de potentiel V est la circulation du champ électrique E le long d'un trajet

## Exemple de calcul

**Enoncé**

Calculer l'intégrale curviligne C de la fonction f(x,y)=x+y, le long de la diagonale AB (voir schéma ci-contre).




**Solution**

$$\mathrm{C} = \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} f(x,y)ds$$

ds est un déplacement élémentaire sur le trajet

On exprime x et y en fonction de s, qui va de 0 à l (longueur du trajet)

$$\mathrm{C} = \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} (\cos(\alpha)s + \sin(\alpha)s)ds$$

$$\cos(\alpha) = x/s; \alpha = \pi/4$$

$$\sin(\alpha) = y/s$$

$$C = \cos(\alpha) + \sin(\alpha)\int_0^l sds$$

$$C = \frac{2}{\sqrt{2}}\left[\frac{s^2}{2}\right]_0^l ; l = \sqrt{2}$$

$$C = \sqrt{2}$$

# Opérateurs différentiels

<u>Opérateurs</u>

- il existe 3 opérateurs différentiels principaux appelés **rotationnel**, **divergence**, **gradient** qui généralisent la notion de dérivée
- ces 3 opérateurs peuvent s'exprimer avec l'opérateur **nabla** (english : *del*) (défini uniquement en coord. cartésiennes)

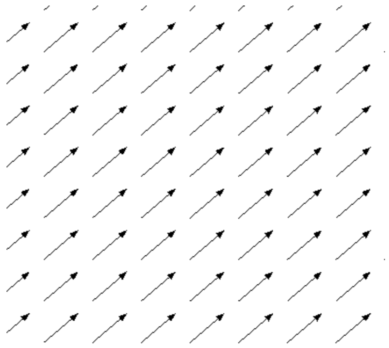
$$\mathrm{grad}(f) = \vec{\nabla}.f$$
$$\mathrm{div}(\vec{F}) = \vec{\nabla}.\vec{F}$$
$$\mathrm{rot}(\vec{F}) = \vec{\nabla} \wedge \vec{F}$$

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial z}\vec{e}_z = \begin{bmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{bmatrix}$$

- ils définissent des relations **locales** :
- valables en tout point
- il faut intégrer pour atteindre les quantités physiques

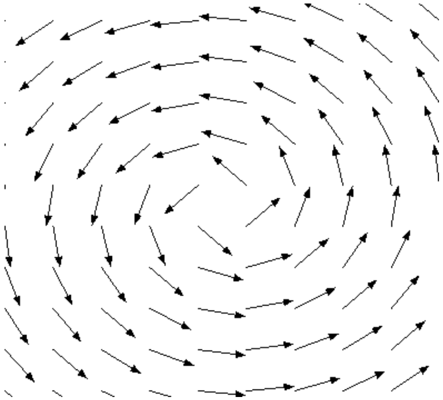
Rotationnel (*curl*) $\vec{\nabla} \wedge \vec{F}$

- s'applique à un champ de vecteurs
- donne un champ de vecteurs



$$\vec{\nabla} \wedge \vec{F} = \vec{0}$$

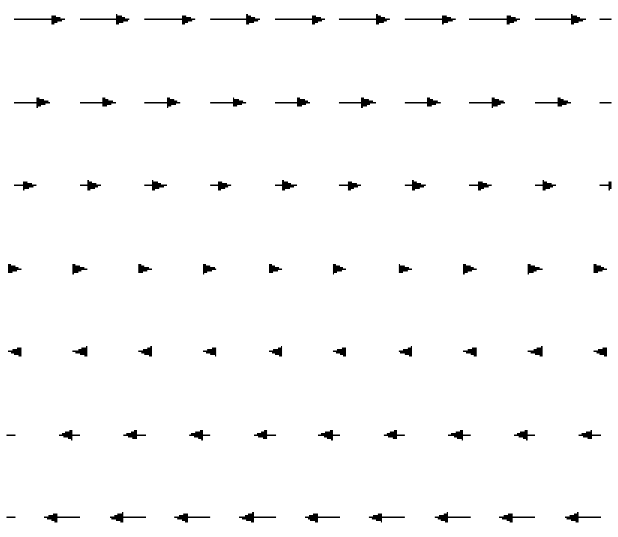
- champ « irrotationnel »



$$\vec{\nabla} \wedge \vec{F} \neq \vec{0}$$

- champ « tourbillonnant », « tournoyant »
- le champ résultant est perpendiculaire au plan du tourbillon (comme l'axe d'une toupie), ici vers le haut

Autre champ au rotationnel non nul $\vec{F} = x\vec{e}_x$



Note : le rotationnel d'un vecteur polaire est un pseudo-vecteur, et inversement

**Montrons qu'un champ irrotationnel dérive d'un potentiel :**

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{F} = \vec{0} = \left( \frac{\partial Fz}{\partial y} - \frac{\partial Fy}{\partial z} \right) \vec{e}_x + \left( \frac{\partial Fx}{\partial z} - \frac{\partial Fz}{\partial x} \right) \vec{e}_y + \left( \frac{\partial Fy}{\partial x} - \frac{\partial Fx}{\partial y} \right) \vec{e}_z$$

$$\left( \frac{\partial Fz}{\partial y} - \frac{\partial Fy}{\partial z} \right) = 0$$

$$\frac{\partial Fz}{\partial y} = \frac{\partial Fy}{\partial z}$$

Si F dérive d'un potentiel

$$Fz = \frac{\partial \varphi}{\partial z} ; Fy = \frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)$$

On retrouve le théorème de Schwarz

F est donc une différentielle totale exacte

$$\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{F}=\vec{0}$$

champ F à **circulation C conservative**

il existe un **potentiel scalaire f** tel que F=-grad(f)

f est défini à une constante près

$$C=\int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{l}=-\int_A^B \vec{\mathrm{grad}}\ f\cdot d\vec{l}=f(A)-f(B)$$

pour un contour fermé et orienté : A=B $\Rightarrow$C=0

**Exemples :**

- le champ électrique E, qui dérive du potentiel électrique V (tension électrique ddp U=V(B)-V(A))

  *(vrai en régime permanent seulement)*
- la force de Coulomb F, qui dérive d'une énergie potentielle $\mathcal{E}$, dont la circulation est égal au travail W
- le champ gravitationnel G, qui dérive d'un potentiel $\Phi$
- la force de gravitation F, qui dérive de l'énergie potentielle gravitationnelle Ep
- le champ des vitesses v, qui dérive du potentiel des vitesses $\Phi$
- le champ magnétique B, qui dérive d'un potentiel scalaire magnétique $\Phi_M$ (en l'absence de courants)

**Contre-exemples :**

- le champ électro-moteur d'induction, dont la circulation est égale à la f.e.m.

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{F} = \vec{k}}$$

champ F à **circulation C non-conservative**

$$\mathrm{C} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

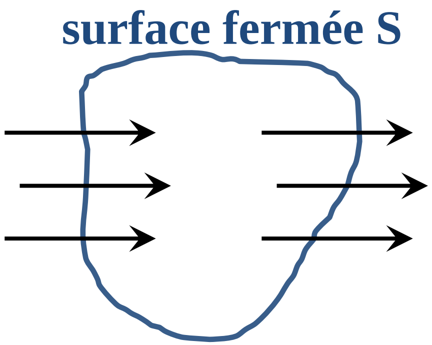
pour un contour fermé et orienté : A=B $\Rightarrow$C=constante

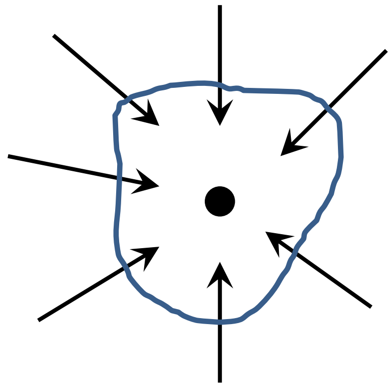
**<u>Exemples</u> :**

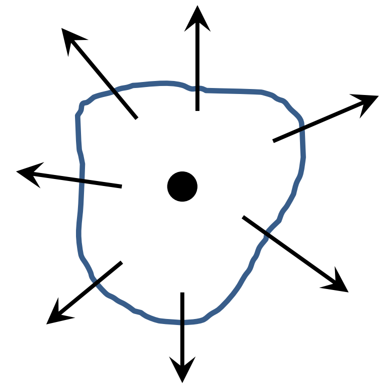
- le champ électro-moteur d'induction, dont la circulation est égale à la f.e.m.
- le champ magnétique **B**, dont la circulation est proportionnelle au courant I

# <u>Divergence</u> $\vec{\nabla}.\vec{F}$

- s'applique à un champ de vecteurs
- donne un champ scalaire

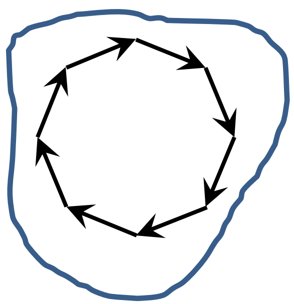




$\mathrm{div}(\vec{F}) = 0$ $\qquad$ $\mathrm{div}(\vec{F}) < 0$ $\qquad$ $\mathrm{div}(\vec{F}) > 0$

il existe une source ou un puits pour le champ
(symbolisée par ● )



champ « tournoyant »

$\mathrm{div}(\vec{\mathrm{rot}}(\vec{F})) = 0$ car rotF est un champ axial

$$\mathrm{div}\vec{F} = 0$$

champ F **à flux $\Phi$ conservatif**

il existe un **potentiel vecteur** A tel que F=rot(A)

$$\Phi = \oiint_S \vec{F}d\vec{S} = 0$$

S est une surface fermée et orientée

F*S=constante

**Exemples :**

- le champ magnétique **B**, qui dérive du potentiel vecteur **A**
- la densité de courant volumique **J** en régime stationnaire

# Gradient $\vec{\nabla}.f(x,y,z)$

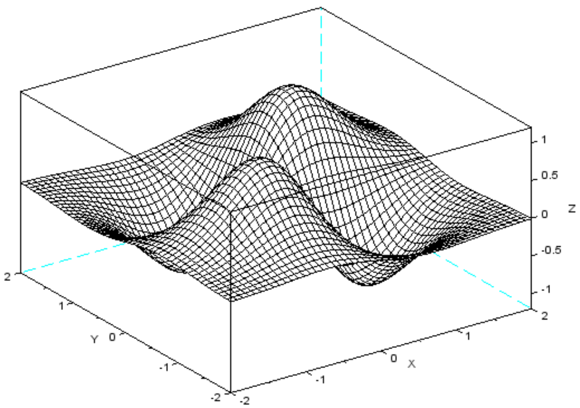
- s'applique à un champ de scalaires
- donne un champ vectoriel

**Définition pratique** : le gradient d'un champ scalaire en un point M est un vecteur dirigé dans la direction dans laquelle f possède la pente la plus forte et dont le module est égal à la pente dans cette direction.
**Conséquence 1** : plus les lignes sont serrées, plus le module du gradient est grand.
**Conséquence 2** : le gradient est perpendiculaire à la surface f(x,y,z)=cste, c-a-d aux lignes d'isovaleurs
**Conséquence 3 :** le vecteur pointe des valeurs basses vers les valeurs plus hautes

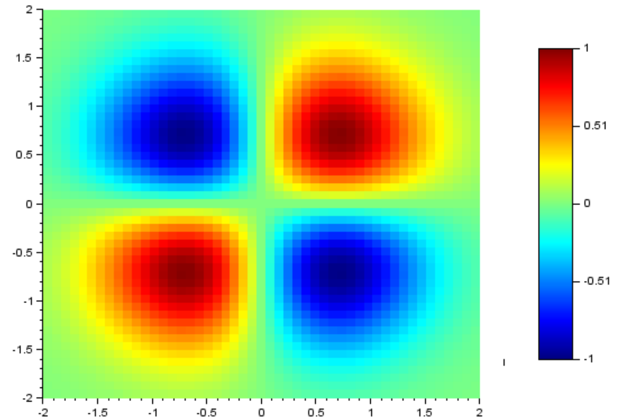
## Exemple 1

Champ de scalaires f défini par: $f(x,y) = xe^{-(x^2+y^2)}$

**vue 3D**

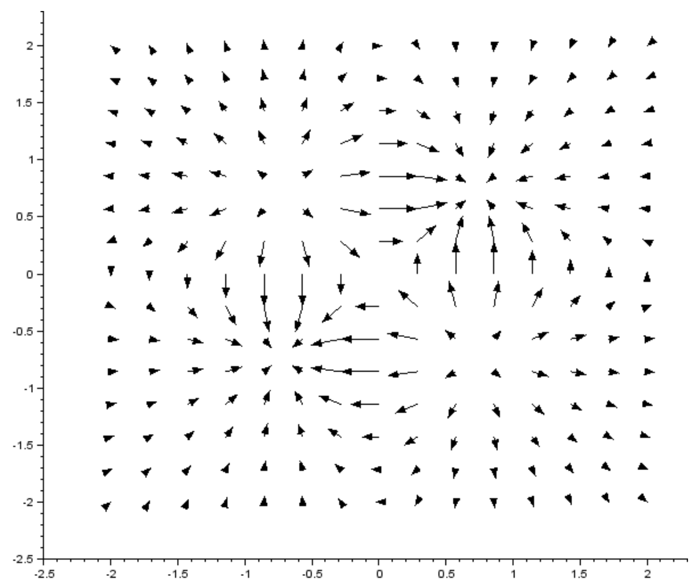



**vue de dessus**



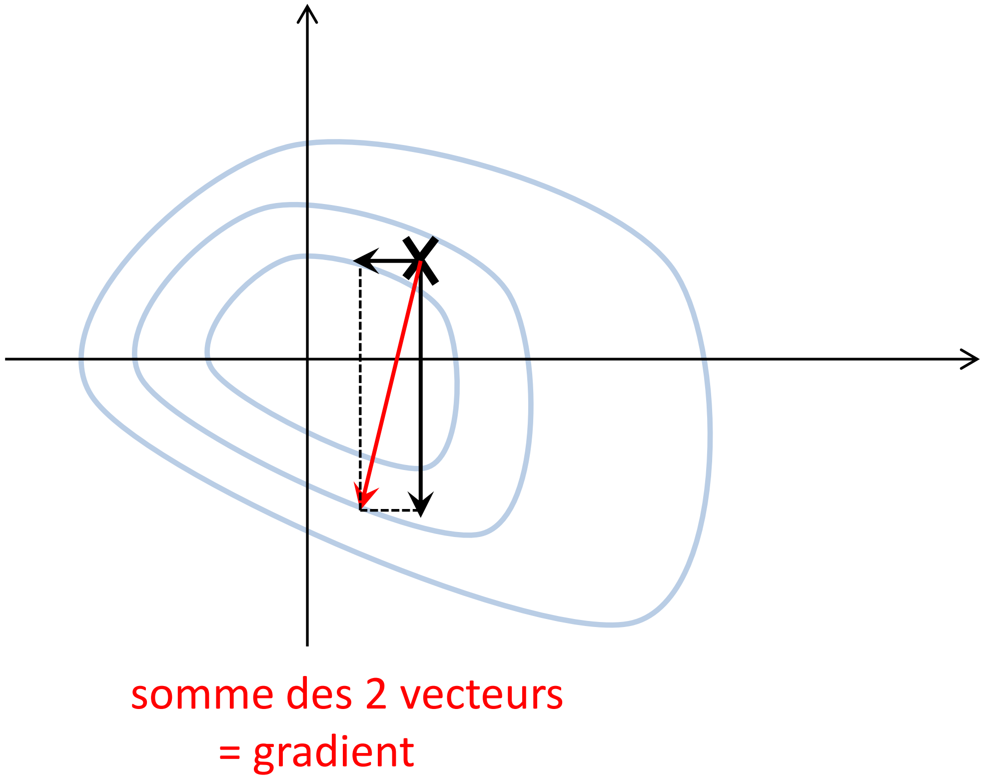

### Champ de gradient associé

Les vecteurs semblent « s'éloigner » des minima et semblent « attirés » par les maxima



**Exemple 2**

Une colline : le gradient pointe grossièrement vers le sommet



# Laplacien $\Delta f(x,y,z)$ $\Delta\vec{F}(x,y,z)$

- peut s'appliquer à un champ de scalaires ou vectoriel
- donne un champ du même type

- d'un champ scalaire : extrema de ce champ
- pour V : présence de charges

$$\Delta . f = 0$$

- signifie qu'il n'y a pas de source ou de puits du champ F à proximité
- Exemple : (équation de Laplace) $\Delta$V=0 signifie qu'il n'y a pas de charges dans le volume à proximité, (équation de Poisson) $\Delta V=-\rho/\varepsilon_0$ dans le cas contraire

**Exemples :**

- l'équation de Laplace pour le potentiel V $\Delta V = 0$
- l'équation de Poisson pour le potentiel V $\Delta V = -\rho / \varepsilon_0$
- l'équation de Poisson pour le potentiel vecteur A $\Delta\vec{A} = -\mu_0 \vec{J}$

Exemple : équation de Laplace en dimension 2

$$\Delta f = \nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

## d'Alembertien $D.\, f(x, y, z) \qquad D\vec{F}(x, y, z)$

- peut s'appliquer à un champ de scalaires ou vectoriel
- donne un champ du même type

$$D = \Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

- signifie que la quantité f ou **F** se propage à une vitesse c

**Exemples :**

- l'équation de propagation du champ électromagnétique **E**,**B,** V, **A :** DX=0
- l'équation de propagation du champ acoustique P, **v**

# Annexes et bibliographie

# Annexe 1 : notations des dérivées

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

d/dx dérivée

d différentielle

d différentielle totale exacte : les dérivées croisées sont égales, ne dépend pas du chemin suivi, sont les dérivées d'une même fonction scalaire

δ forme différentielle de degré 1

$$\delta f = Adx + Bdy$$

exemples : travail δW, chaleur δQ

Δ intervalle

∂ dérivée partielle (lire « d rond »)

D dérivée particulaire

∇ nabla (eng. del)

Δ Laplacien

$$\delta f = df \text{ si } \mathrm{A} = \frac{\partial \mathrm{g}}{\partial \mathrm{x}} \text{ et } B = \frac{\partial g}{\partial y} \Leftrightarrow \frac{\partial \mathrm{B}}{\partial \mathrm{x}} = \frac{\partial A}{\partial y}$$

# Annexe 2 : formulaire simplifié d'électromagnétisme

| | électrostatique | magnétostatique | |
|---|---|---|---|
| | $\vec{F} = q\vec{E}$ | $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$ | |
| | $\vec{E} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\vec{r}}{r^3}$ | $\vec{B} = \dfrac{\mu_0}{4\pi} q\vec{v} \times \dfrac{\vec{r}}{r^3}$ | |
| $\oiint_S \vec{E}d\vec{S} = Q_{\text{int}} / \varepsilon_0$ | $\text{div}\vec{E} = \rho / \varepsilon_0$ | $\text{div}\vec{B} = 0$ | $\oiint_S \vec{B}d\vec{S} = 0$ |
| $\oint_C \vec{E}d\vec{l} = 0$ | $\vec{\text{rot}}\vec{E} = 0$ | $\vec{\text{rot}}\vec{B} = \mu_0 \vec{J}$ | $\oint_C \vec{B}d\vec{l} = \mu_0 I$ |
| | $\vec{E} = -\vec{\text{grad}}V$ | $\vec{B} = \vec{\text{rot}}\vec{A}$ | |
| | $\Delta V = -\rho / \varepsilon_0$ | $\Delta\vec{A} = -\mu_0 \vec{J}$ | |
| | condensateur plan ⇔ | solénoide infini | |

$$\varepsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$$

Bibliographie :


-*Div grad curl and all that, an informal text on vector calculus*, H.M.Schey, 3rd ed., ISBN 0-393-96997-5

-*Divergence et rotationnel d'un champ de vecteurs : Une présentation physique et géométrique,* SIVARDIÈRE Jean (1989) BUP n°719

-*Vector calculus*, Marsden & Tromba, ISBN 0-7167-1856-1

**Internet**
-http://betterexplained.com/articles/category/math/vector-calculus/
-http://alainrobichon.free.fr/cours/Maths/Champs_et_operateurs.pdf