

grad, div, rot

S. AYRINHAC

simon.ayrinhac@sorbonne-universite.fr



Définitions

Champ scalaire

→ À tout point de l'espace de coordonnées (x,y,z) on associe un scalaire f

- Exemples : la température $T(x,y,z)$, la masse volumique $\rho(x,y,z)$, etc.
- En pratique, si on échantillonne les points de l'espace, on peut stocker toute l'information dans un tableau de 4 colonnes $|x|y|z|f|$
- Si à tout point d'un plan on associe un nombre alors on définit une surface. Exemple : topographie d'un terrain avec l'altitude de chaque point.

Champ vectoriel

→ À tout point de l'espace (x,y,z) on associe un vecteur

$$\vec{F}(x,y,z) = F_x(x,y,z)\vec{e}_x + F_y(x,y,z)\vec{e}_y + F_z(x,y,z)\vec{e}_z$$

- Exemples : le champ électrique \mathbf{E} , le champ des vitesses \mathbf{v} , etc.
- F_x ne dépend pas uniquement de x , mais dépend de x , y et z .
- En pratique, on peut stocker l'information dans un tableau de 6 colonnes $|x|y|z|F_x|F_y|F_z|$

Flux Φ (flow) $\Phi = \oiint_S \vec{F} \cdot \vec{dS}$

- Par convention le flux est positif s'il quitte une surface fermée.

- S est une surface orientée

- une surface fermée S entoure un volume V (on ajoute un rond sur l'intégrale double) \oiint

Exemples :

- l'intensité du courant électrique I est le flux du courant volumique J à travers une surface S
- l'angle solide Ω est le flux de \mathbf{e}_r/r^2 à travers la surface interceptée S'

Circulation C

- s'applique à un champ scalaire f ou un champ vectoriel \mathbf{F}
- donne un scalaire

$$(path\ integral)\ C = \int_A^B f \cdot dl$$

$$(line\ integral)\ C = \int_A^B \vec{F} \cdot \vec{dl}$$

- un circuit est fermé lorsque $A=B$ (on ajoute un rond sur l'intégrale)

$$C = \oint_C \vec{F} \cdot \vec{dl}$$

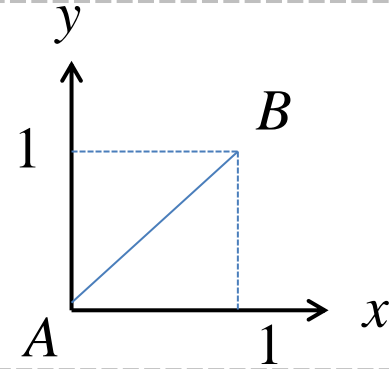
Exemples :

- le travail W est la circulation d'une force \mathbf{F} le long d'un trajet
- la différence de potentiel U est la circulation du champ électrique \mathbf{E} le long d'un trajet

Exemple de calcul de circulation

Énoncé

Calculer l'intégrale curviligne C de la fonction $f(x,y)=x+y$, le long de la diagonale AB (voir schéma ci-contre).



Solution

$$C = \int_A^B f(x,y) ds$$

ds est un déplacement élémentaire sur le trajet

On exprime x et y en fonction de s , qui va de 0 à l (longueur du trajet)

$$C = \int_A^B (\cos(\alpha)s + \sin(\alpha)s) ds$$

$$\cos(\alpha) = x/s; \alpha = \pi/4$$

$$C = \cos(\alpha) + \sin(\alpha) \int_0^l s ds$$

$$\sin(\alpha) = y/s$$

$$C = \frac{2}{\sqrt{2}} \left[\frac{s^2}{2} \right]_0^l; l = \sqrt{2}$$

$$C = \sqrt{2}$$

Opérateurs différentiels

Opérateurs

- il existe 3 opérateurs différentiels principaux appelés **rotationnel**, **divergence**, **gradient**

qui généralisent la notion de dérivée

- ces 3 opérateurs peuvent s'exprimer avec l'opérateur **nabla** (english : *del*) (ici défini en coord. cartésiennes)

$$\overrightarrow{\text{grad}} f = \vec{\nabla} f$$

$$\text{div } \vec{F} = \vec{\nabla} \cdot \vec{F}$$

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{F}$$

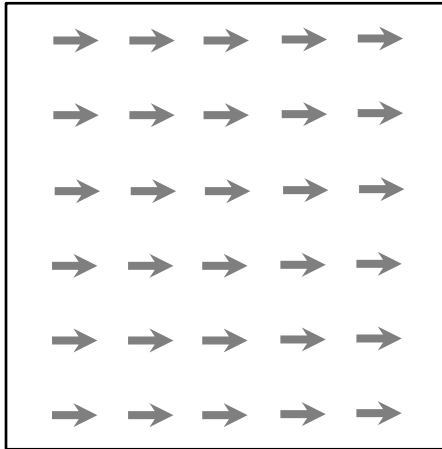
$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{u}_x + \frac{\partial}{\partial y} \vec{u}_y + \frac{\partial}{\partial z} \vec{u}_z = \begin{pmatrix} \partial / \partial x \\ \partial / \partial y \\ \partial / \partial z \end{pmatrix}$$

- ils définissent des relations **locales** :

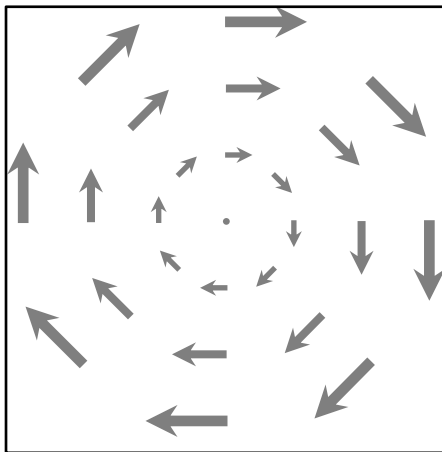
- dans un volume mésoscopique
- valables en tout point
- il faut intégrer pour atteindre les quantités physiques

Rotationnel (curl) $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{F}$

- s'applique à un champ de vecteurs
- donne un champ de vecteurs



$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{F} = \vec{0} \quad \text{- champ « irrotationnel »}$$



$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{F} \neq \vec{0}$$

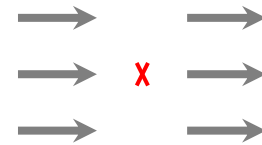
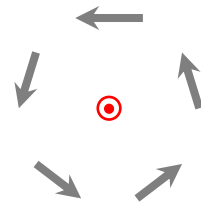
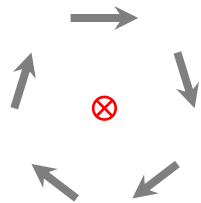
- champ « tourbillonnant », « tournoyant »
- le champ résultant est perpendiculaire au plan du tourbillon (comme l'axe d'une toupie), ici vers le haut

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{F} \neq \vec{0}$$

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{F} = \vec{0}$$

$$(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{F}) \cdot \vec{e}_\perp < 0$$

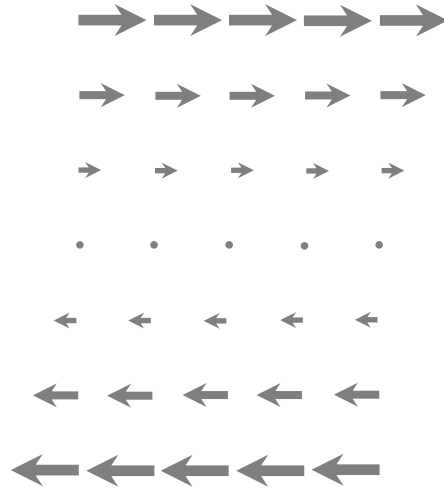
$$(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{F}) \cdot \vec{e}_\perp > 0$$



Remarque de vocabulaire : le rotationnel d'un vecteur *polaire* est un *pseudo-vecteur*, et inversement

Exemple simple de champ au rotationnel non nul

$$\vec{F} = ye_x$$



$$\operatorname{div} \vec{F} = 0$$

$$\operatorname{rot} \vec{F} = -e_z$$

un champ « cisailant » présente un rotationnel non nul

Montrons qu'un champ irrotationnel dérive d'un potentiel :

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0 = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) \vec{e}_x + \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) \vec{e}_y + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \vec{e}_z$$

$$\left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) = 0$$

$$\frac{\partial F_z}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial z}$$

Si \mathbf{F} dérive d'un potentiel

$$F_z = -\frac{\partial f}{\partial z}; F_y = -\frac{\partial f}{\partial y}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

On retrouve le théorème de Schwarz

f est donc une différentielle totale exacte

Rotationnel et circulation

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{F} = \lim_{dS \rightarrow 0} \left(\frac{\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{l}}{dS} \right) \vec{n},$$

Le rotationnel d'un champ vectoriel F est égal à la circulation de F sur un chemin de longueur infinitésimale centré autour d'un point. Le rotationnel est égal à la circulation d'un champ bidimensionnel F le long d'un parcours fermé infinitésimal, entourant une surface dS , où n donne l'orientation de la petite surface dS . Remarque : pour un champ tridimensionnel, la direction du rotationnel est donnée par l'orientation de la courbe qui donne la circulation maximale.

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{F} = \vec{0}$$

Le champ est dit lamellaire ou potentiel

champ F à circulation C conservative

il existe un potentiel scalaire f (ou U) tel que
 $\vec{F} = \overrightarrow{\text{grad}} f$
 $\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}} U$

$$C = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{l} = - \int_A^B \overrightarrow{\text{grad}} f \cdot d\vec{l} = f(A) - f(B)$$

pour un contour fermé et orienté : $A=B \Rightarrow C=0$

- f (ou U) défini à une constante près
- U défini tel que le min. du potentiel corresponde à une position d'équilibre stable
- existence de surfaces équipotentielles

Exemples :

- le champ électrique E , qui dérive du potentiel électrique V (tension électrique ddp $U=V(B)-V(A)$)
(vrai en régime permanent seulement)
- la force de Coulomb F , qui dérive d'une énergie potentielle \mathcal{E} , dont la circulation est égale au travail W
- le champ gravitationnel G , qui dérive d'un potentiel Φ
- la force de gravitation F , qui dérive de l'énergie potentielle gravitationnelle E_p
- le champ des vitesses v , qui dérive du potentiel des vitesses Φ
- le champ magnétique B , qui dérive d'un potentiel scalaire magnétique Φ_M (en l'absence de courants)

Contre-exemples :

- le champ électro-moteur d'induction, dont la circulation est égale à la f.e.m.

$$\overline{\text{rot}} \vec{F} = \vec{k}$$

champ F à **circulation C non-conservative**

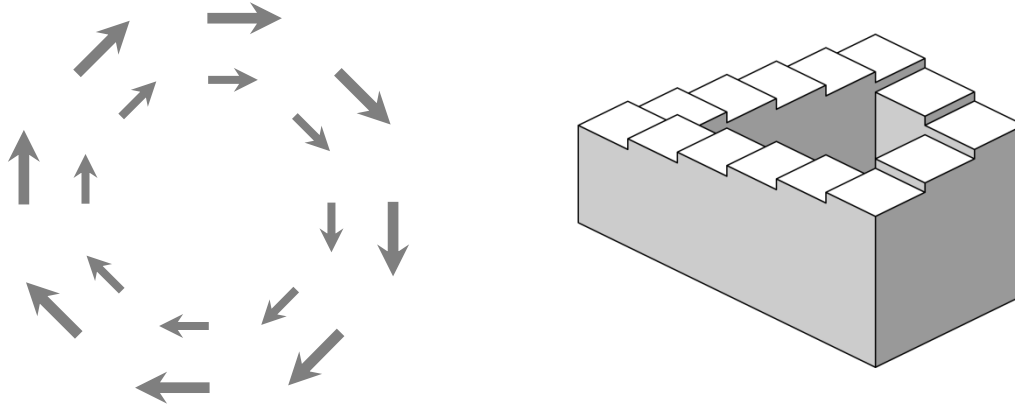
$$C = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{l} = \text{constante}$$

pour un contour fermé et orienté : $A=B \Rightarrow C=\text{constante}$

Exemples :

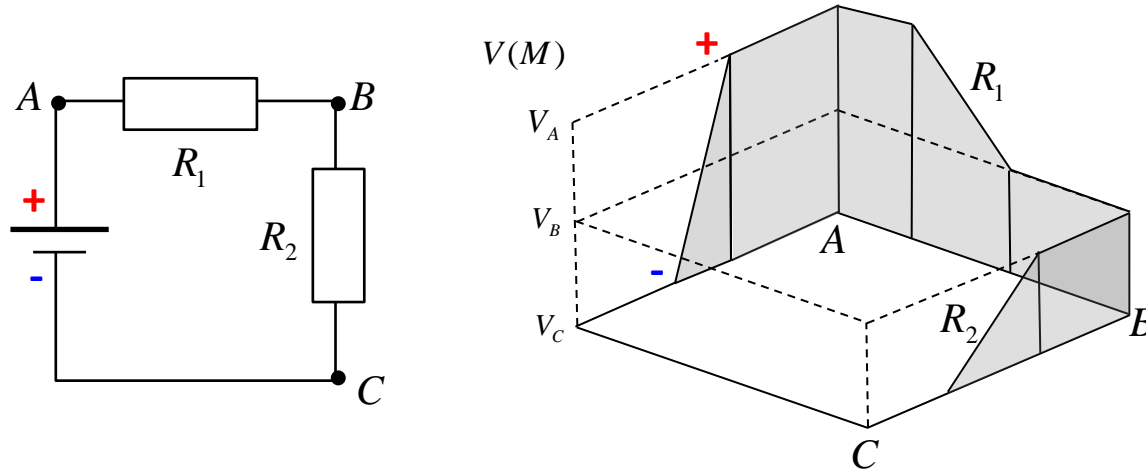
- le champ électro-moteur d'induction, dont la circulation est égale à la f.e.m.
- le champ magnétique **B**, dont la circulation est proportionnelle au courant I

Illustration 1



Un champ rotationnel 2D (à gauche) ne peut pas être un champ de gradient, car cela revient à avoir une fonction scalaire analogue à un escalier qui descend sans fin, comme l'escalier (en trompe l'oeil) d'Escher-Penrose (à droite).

Illustration 2



En régime stationnaire, le champ électrique E dans un circuit est produit par les charges accumulées à la surface des conducteurs. Ce champ électrique étant conservatif, dans un circuit fermé la variation du potentiel $V(M)$ le long de ce circuit est nulle. Il en résulte que le champ conservatif dans la batterie s'oppose au passage des électrons. C'est un champ non-conservatif E_{NC} produit par des réactions chimiques dans la batterie qui permet aux charges mobiles de circuler à travers celle-ci ; la force électromotrice (f.e.m.) s'identifie au travail par unité de charge effectué par ce champ non conservatif.

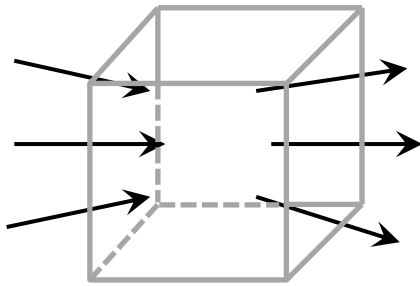
$$\vec{E}_{total} = \vec{E}_{NC} + \vec{E}_C$$

$$fem = \int \vec{E}_{NC} \cdot \vec{dl}$$

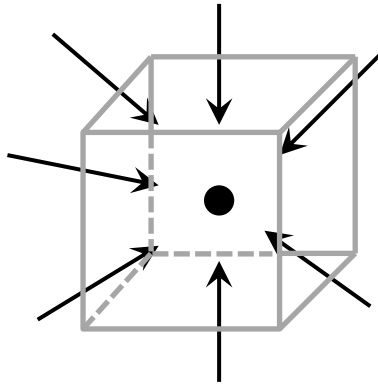
Divergence

$$\operatorname{div} \vec{F} = \vec{\nabla} \cdot \vec{F}$$

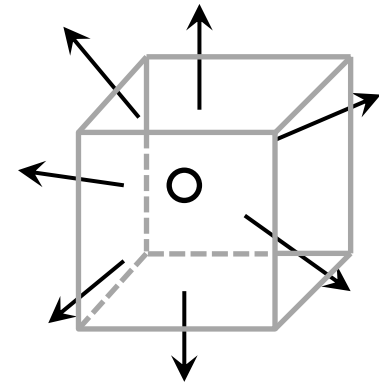
- s'applique à un champ de vecteurs
- donne un champ scalaire



$$\operatorname{div} \vec{F} = 0$$



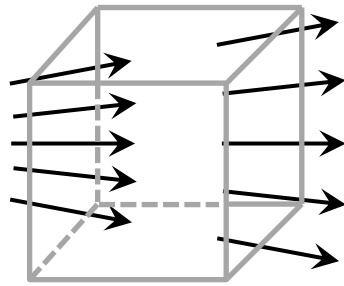
$$\operatorname{div} \vec{F} < 0$$



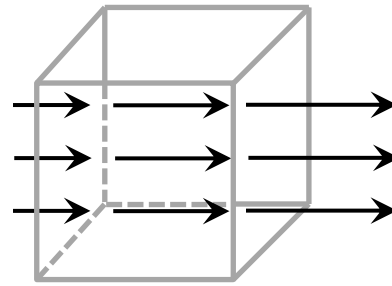
$$\operatorname{div} \vec{F} > 0$$

il existe une *source* ou un *puits* pour le champ
(symbolisés par ● et ○)

Cependant :



$$\operatorname{div} \vec{F} = 0$$



$$\operatorname{div} \vec{F} \neq 0$$

Divergence et flux

$$\operatorname{div} \vec{F} = \lim_{dV \rightarrow 0} \left(\frac{\oiint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS}{dV} \right)$$

La divergence est le flux du champ F par unité de volume au voisinage d'un point. La divergence d'un champ F est égale au flux de F à travers la surface dS entourant un volume infinitésimal dV où n est un vecteur unitaire perpendiculaire à la surface et dirigé vers l'extérieur du volume, par convention.

$$\text{div } \vec{F} = 0$$



Le champ est dit
solénoïdal ou laplacien

champ F à flux Φ
conservatif

$$\Phi = \oiint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

S est une surface fermée et orientée
 $F \cdot S = \text{constante}$

il existe un
potentiel vecteur
 A tel que $\vec{F} = \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}$

$$\text{div}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{F}) = 0 \quad \forall \vec{A}$$

A n'est pas unique,
il est défini à un
 $\text{grad}(f')$ près

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{grad}} f) = 0 \quad \forall f$$

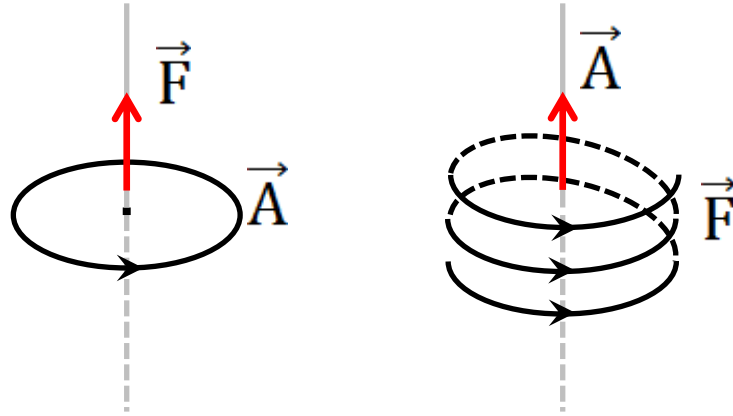
f' donnée par un
choix de jauge

Exemples :

- le champ magnétique \mathbf{B} , qui dérive du potentiel vecteur magnétique \mathbf{A}
- la densité de courant volumique \mathbf{J} en régime stationnaire
- la déformation \mathbf{u} pour un solide incompressible
- les vitesses \mathbf{v} pour un écoulement (\neq fluide) incompressible, qui dérive d'un potentiel vecteur cinématique \mathbf{U}

Potentiel vecteur \vec{A} $\vec{F} = \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}$

- existe si $\text{div} \vec{F} = 0$
- défini à un grad(f) près



- Si \mathbf{F} est un champ vectoriel uniforme

$$\vec{A} = \frac{1}{2} \vec{F} \times \vec{r}$$

Gradient $\overrightarrow{\text{grad}} f = \vec{\nabla} f$

- s'applique à un champ de scalaires
- donne un champ vectoriel

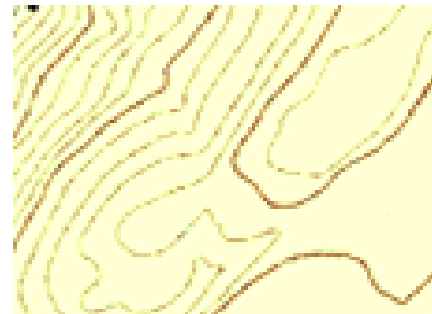
Définition pratique :

Le gradient d'un champ scalaire en un point M est un vecteur dirigé dans la direction dans laquelle f possède la pente la plus forte et dont le module est égal à la pente dans cette direction.

Exemple ci-dessous avec une *carte topographique* (qui donne l'altitude du terrain en fonction de la longitude et de la latitude)

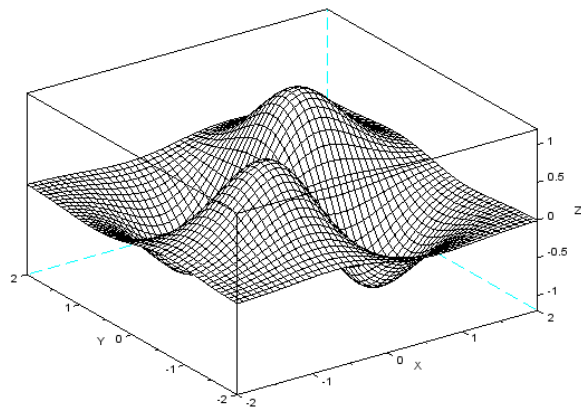
Conséquences :

- plus les lignes sont serrées, plus le module du gradient est grand.
- le gradient est perpendiculaire à la surface $f(x,y,z)=\text{cste}$, c-a-d aux lignes d'isovaleurs
- le vecteur pointe des valeurs basses vers les valeurs plus hautes

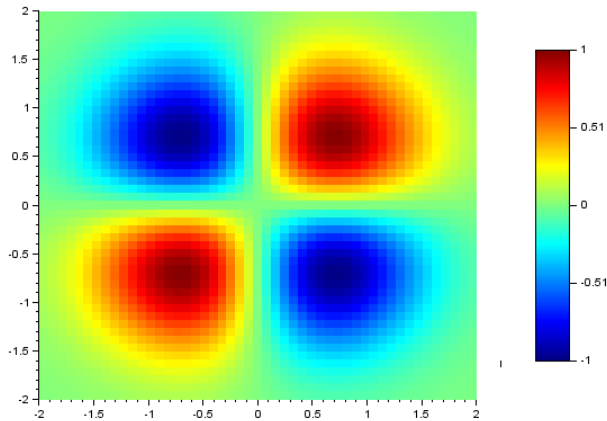


Exemple : champ scalaire f défini par: $f(x, y) = yxe^{-(x^2+y^2)}$

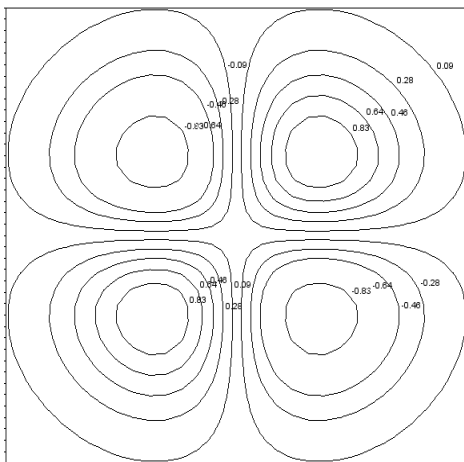
vue 3D



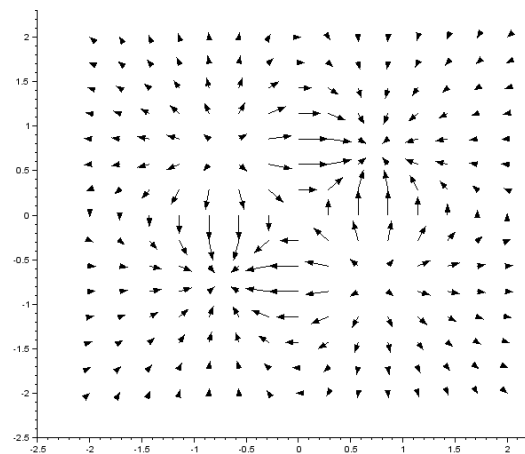
vue de dessus



Lignes iso-valeurs



Champ de gradient associé



Les vecteurs semblent « s'éloigner » des minima et semblent « attirés » par les maxima

Laplacien

$$\Delta f = \vec{\nabla}^2 f$$

$$\Delta f = \text{div}(\overrightarrow{\text{grad}} f)$$

$$\Delta \vec{F} = \vec{\nabla}^2 \vec{F}$$

$$\Delta \vec{F} = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div } \vec{F}) - \overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{F})$$

- peut s'appliquer à un champ de scalaires ou vectoriel
- donne un champ du même type

- d'un champ scalaire : extrema de ce champ
- pour le potentiel électrostatique V : présence de charges

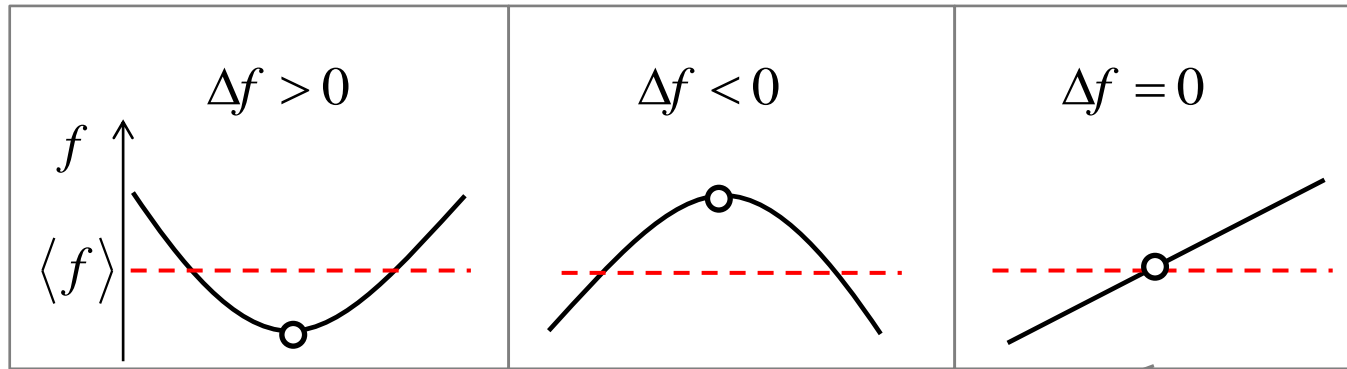
$$\Delta f = 0$$

- signifie qu'il n'y a pas de source ou de puits du champ F à proximité
- Exemples : $\Delta V=0$ (équation de Laplace) signifie qu'il n'y a pas de charges dans le volume étudié, dans le cas contraire $\Delta V=-\rho/\epsilon_0$ (équation de Poisson) avec une densité volumique de charges ρ

Exemples :

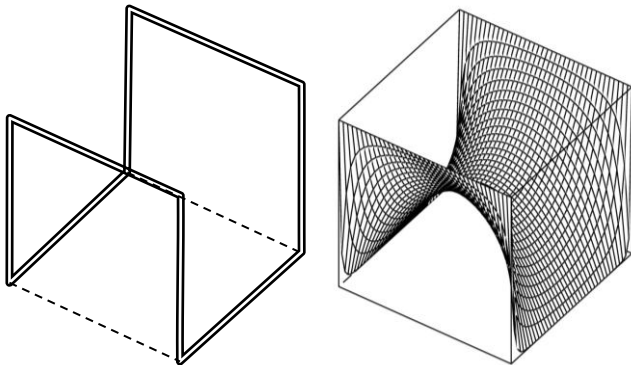
- l'équation de Laplace pour le potentiel V $\Delta V = 0$
- l'équation de Poisson pour le potentiel V $\Delta V = -\rho/\epsilon_0$
- l'équation de Poisson pour le potentiel vecteur A $\Delta \vec{A} = -\mu_0 \vec{J}$
- l'équation de Poisson pour le potentiel gravitationnel ϕ $\Delta \phi = 4\pi G\rho$
- l'équation de Poisson pour l'hydrodynamique $\Delta \Phi = -v/\rho$
- l'équation de Poisson pour la conduction de chaleur $\Delta T = -v/K$

Le laplacien Δf représente la courbure locale de f

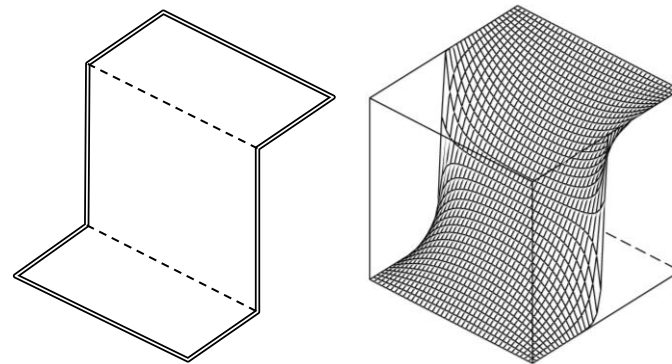


Un laplacien nul équivaut à
une membrane souple tendue sur un cadre rigide

Exemple 1



Exemple 2



Bibliographie

Bibliographie :

- H.M.SCHEY *Div grad curl and all that, an informal text on vector calculus*, 3rd ed., ISBN 0-393-96997-5
- Jean SIVARDIÈRE, *Divergence et rotationnel d'un champ de vecteurs : Une présentation physique et géométrique*, BUP n°719 (1989)
- Jean SIVARDIÈRE, *Une introduction géométrique et physique du laplacien*, BUP n°744 (1992)

Webographie :

- <http://betterexplained.com/articles/category/math/vector-calculus/>
- http://alainrobichon.free.fr/cours/Maths/Champs_et_operateurs.pdf
- <http://www.tangentex.com/OperateursDiff.htm>
- <http://www.sciences.ch/htmlfr/algebre/algebrecvvectoriel01.php#operateurscalairesvectoriels>