UNIVERSITE LIBRE DE BRUXELLES

Faculté des Sciences

STRUCTURES BORNOLOGIQUES
ET
PRODUIT TENSORIEL

Thèse présentée en vue de l'obtention
du grade de Docteur en Sciences

Guy NOEL

1969

Introduction.

Depuis une dizaine d'années est apparu en analyse fonctionnelle un point de vue en quelque sorte dual du point de vue habituel. Divers auteurs, parmi lesquels nous citerons G. Marinescu, J. Sebastiao e Silva et L. Waelbroeck ont constaté que dans bien des cas, les topologies localement convexes placées sur divers espaces vectoriels n'interviennent que par l'intermédiaire de leurs parties bornées. La conclusion logique fut d'introduire un nouveau système d'axiomes définissant ce qui sera appelé dans la suite la structure d'espace bornologique convexe. Il est à noter que certains espaces vectoriels possèdent une structure bornologique naturelle, mais aucune structure topologique naturelle. Par exemple, il en ainsi de l'espace des applications linéaires continues d'un espace localement convexe dans un autre.

Dans sa thèse d'agrégation [16], L.Waelbroeck développe une théorie spectrale des algèbres bornologiques convexes complètes. Cette théorie est relative, en ce sens que l'auteur étudie une algèbre complète, modulo un idéal, lui-même muni d'unestructure bornologique convexe complète. Il n'est cependant pas question d'y faire le quotient de l'algèbre par l'idéal, car ce quotient n'existe pas dans la catégorie des espaces bornologiques convexes complets. En effet, la bornologie de l'idéal n'est pas nécessairement induite par celle de l'algèbre. L.Waelbroeck chercha alors à définir un substitut pour ce quotient, et, identifiant les espaces bornologiques convexes à certains foncteurs, il parvint à introduire en 1962, [18], une catégorie dont les objets sont les conoyaux des applications linéaires bornées entre espaces bornologiques convexes. Cette catégorie des Q-espaces (q_o-espaces dans la terminologie de [18]) est de plus abélienne, propriété dont l'importance n'est pas à souligner.

Depuis quelques années, la théorie des catégories s'est considérablement développée. Ses résultats nous ont permis de construire plus simplement qu'auparavant la catégorie des Q-espaces, et par là même, d'aborder avec plus de chances de succès certaines questions laissées sans réponse en 1962. Ces questions concernent essentiellement le produit tensoriel des Q-espaces: définir cette notion, en établir les propriétés essentielles, comparer le produit tensoriel de deux espaces bornologiques en tant que Q-espaces à leur produit tensoriel en tant qu'espaces bornologiques.; étudier la propriété de platitude. Conformément à la tendance actuelle, nous avons considéré le produit tensoriel comme étant un foncteur adjoint à gauche d'un foncteur "Hom" interne, à la catégorie des Q-espaces.

Le premier chapitre est un chapitre préliminaire, où nous exposons les rudiments de la théorie des catégories à produit tensoriel, théorie actuellement en pleine expansion.

Au deuxième chapitre, nous construisons la catégorie des Q-espaces, et établissons ses propriétés principales. Le chapitre 3 est consacré à la théorie des Q-espaces complets et à la construction du complété d'un Q-espace. Nous montrons en particulier que tout espace bornologique convexe séparé est isomorphe à un sous-espace dense d'un Q-espace complet. Le mot dense signifie ici que tout morphisme de l'espace bornologique convexe dans un espace complet se prolonge de façon unique au complété. L'importance du problème de la complétion est bien connue; dans ce cas particulier, le résultat est d'autant plus intéressant qu'il n'est pas possible, de façon générale, d'immerger un espace bornologique convexe séparé dans un espace bornologique convexe complet. Les Q-espaces se révèlent ici indispensables.

Au chapitre 4, nous construisons un foncteur "Hom" interne et un foncteur "produit tensoriel", successivement dans la catégorie des Q-espaces et des Q-espaces complets. Cette construction est faite en liaison avec la théorie des foncteurs analogues dans la

catégorie des espaces bornologiques convexes séparés, et dans celle des espaces complets. Nous démontrons également quelques propriétés, notamment d'exactitude, de ces foncteurs. Enfin, au chapitre 5, nous étudions en détail les propriétés de platitude des Q-espaces.

Chaque chapitre est précédé d'une introduction plus détaillée.

Dans tout ce travail, nous utilisons systématiquement la terminologie et les résultats généraux de la théorie des catégories, tels qu'ils apparaissent dans [15], par exemple. Nous dirons parfois d'un morphisme qu'il est monique si c'est un monomorphisme, qu'il est épique si c'est un épimorphisme. Si ϕ est une transformation naturelle du foncteur F dans le foncteur G, $(F, G: K_1 \longrightarrow K_2)$, et si P est un objet de K_1, nous notons ϕ_P le morphisme de F(P) dans G(P) qui appartient à ϕ. La catégorie duale d'une catégorie K est notée K^*.

D'autre part, nous utilisons pour le foncteur "hom" la notation de Zeeman: l'ensemble des morphismes de l'objet a dans l'objet b est noté $a \pitchfork b$. Si $\alpha: a \longrightarrow b$ et $\beta: a' \longrightarrow b'$ sont deux morphismes, alors $\alpha \pitchfork \beta$ désigne l'application $b \pitchfork a' \longrightarrow a \pitchfork b'$: $\gamma \longmapsto \beta\gamma\alpha$.

Nous désignons par **ENS** la catégorie des ensembles, par **GRAB** celle des groupes abéliens et par **EV** celle des espaces vectoriels.

Conformément à une mode qui semble se répandre, nous avons noté d'un signe spécial la fin des démonstrations. Ce signe est le suivant: c.q.f.d.

Ce m'est un agréable devoir d'exprimer ma reconnaissance à M.Waelbroeck qui a suggéré le sujet de ce travail et a accepté d'en assurer la direction. Il n'y a aucun doute que sans les nombreuses heures qu'il m'a consacrées, ce travail n'aurait jamais vu le jour.

C'est M.Papy qui guida mes premiers pas en mathématique. Je lui suis en très grande partie redevable de ma formation. Qu'il trouve ici mes vifs remerciements.

Dans un système où il est, en pratique, impossible de réaliser

un doctorat sans dépendre matériellement d'une unique personne, je ne puis oublier l'intérêt qui m'a été porté par M. Janssens.

Toute ma gratitude va également au F.N.R.S. au budget duquel j'ai émargé durant quatre ans.

Enfin, j'ai beaucoup apprécié les contacts que j'ai pu avoir avec tous les participants à la "Foire Sabbatique". Nul doute que l'atmosphère de franche camaraderie qui règne dans ce groupe constitue un adjuvant précieux.

Table des matières.

Chapitre I.

Catégories à produit tensoriel.

0. Introduction.

Ce chapitre constitue lui-même une introduction à l'ensemble du travail: introduction où nous rassemblons quelques résultats de la théorie générale des catégories à produit tensoriel.

Les premières tentatives d'introduction d'un produit tensoriel dans une catégorie quelconque sont dues à Bénabou [7] et Mac Lane [12], [13]. Depuis le travail de Kelly [10], on considère le foncteur "produit tensoriel" comme étant l'adjoint d'un foncteur " Hom " interne. C'est ce point de vue que nous adoptons ici, et que nous exposons dans les paragraphes 1 et 2. Contrairement aux auteurs cités ci-dessus nous ne considérons pas de conditions de cohérence pour le produit tensoriel, car nous ne les utilisons pas dans la suite. Ces conditions seraient cependant nécessaires si l'on voulait développer plus avant la théorie abstraite.

Les paragraphes 3 et 4 sont consacrés aux catégories abéliennes à produit tensoriel. Nous y démontrons quelques résultats sans grande originalité, mais que nous n'avons pas découvert dans la littérature. Peut-être est-ce faute d'avoir bien cherché.

1. Catégories fortes.

Afin de pouvoir traiter les nombreux exemples de catégories pour lesquelles l'ensemble, noté $a \pitchfork b$, des morphismes d'un objet a dans un objet b est muni d'une structure qui en fait un objet de la catégorie, on introduit la définition suivante:

Définition 1.1: On appelle catégorie forte toute catégorie K munie de deux foncteurs [illegible] : K $\longrightarrow$ Ens et $\phi_K : K^* \times K \longrightarrow K$ tels que [illegible] $\circ\, \phi_K = \phi$

Chapitre I.

Catégories à produit tensoriel.

0. Introduction.

Ce chapitre constitue lui-même une introduction à l'ensemble du travail, introduction où nous rassemblons quelques résultats de la théorie générale des catégories à produit tensoriel.

Les premières tentatives d'introduction d'un produit tensoriel dans une catégorie quelconque sont dues à Bénabou [1] et Mac Lane [12], [13]. Depuis le travail de Kelly [10], on considère le foncteur "produit tensoriel" comme étant l'adjoint d'un foncteur " Hom " interne. C'est ce point de vue que nous adoptons ici, et que nous exposons dans les paragraphes 1 et 2. Contrairement aux auteurs cités ci-dessus nous ne considérons pas de conditions de cohérence pour le produit tensoriel, car nous ne les utilisons pas dans la suite. Ces conditions seraient cependant nécessaires si l'on voulait développer plus avant la théorie abstraite.

Les paragraphes 3 et 4 sont consacrés aux catégories abéliennes à produit tensoriel. Nous y démontrons quelques résultats sans grande originalité, mais que nous n'avons pas découvert dans la littérature. Sans doute est-ce faute d'avoir bien cherché.

1. Catégories fortes.

Afin de pouvoir traiter les nombreux exemples de catégories pour lesquelles l'ensemble, noté $a \pitchfork b$, des morphismes d'un objet a dans un objet b est muni d'une structure qui en fait un objet de la catégorie, on introduit la définition suivante:

Définition 1.1: On appelle catégorie forte toute catégorie X munie de deux foncteurs $\sigma: K \longrightarrow \underline{Ens}$ et $\phi_K: K^{\circ} \times K \longrightarrow K$ tels que $\sigma \circ \phi_K = \phi$

Les images par le foncteur ϕ_K d'un couple (a, b) d'objets et d'un couple (α, β) de morphismes sont notées respectivement $a\phi_K b$ et $\alpha\phi_K\beta$. On appellera souvent σ le foncteur oubli, l'ensemble $\sigma(a)$ étant appelé l'ensemble sous-jacent à l'objet a. Ainsi $a\phi b$ est l'ensemble sous-jacent à $a\phi_K b$.

Remarque: Dans de nombreux cas, le foncteur oubli est fidèle. Nous n'imposons cependant pas cette condition [11], contrairement à Linton [11].

Définition 1.2 : Soient K une catégorie forte et $F: K \longrightarrow K$ un foncteur. On dit qu'un foncteur $G: K \longrightarrow K$ est un adjoint fort à gauche de F si et seulement si les foncteurs suivants sont naturellement équivalents:

$K^\circ \times K \longrightarrow K \quad (x, y) \longmapsto x\phi_K F(y)$

$K^\circ \times K \longrightarrow K \quad (x, y) \longmapsto G(x)\phi_K y$

Une simple composition avec le foncteur oubli montre qu'un adjoint fort à gauche de F est un adjoint à gauche de F.

Pour les foncteurs de deux variables, la définition est analogue.

Définition 1.3 : Soient K une catégorie forte et $F: K^\circ \times K \longrightarrow K$ un bifoncteur. On dit qu'un foncteur $G: K \times K \longrightarrow K$ est un adjoint fort à gauche de F si et seulement si les foncteurs suivants sont naturellement équivalents:

$K^\circ \times K^\circ \times K \longrightarrow K$; $(a, b, c) \longmapsto a\phi_K F(b, c)$

$K^\circ \times K^\circ \times K \longrightarrow K$; $(a, b, c) \longmapsto G(a, b)\phi_K c$

2. Produit tensoriel.

Définition 2.1 ([10], [11]): On appelle produit tensoriel sur une catégorie forte K, tout foncteur $\otimes_K : K \times K \longrightarrow K$, adjoint fort à gauche du foncteur ϕ_K.

On pose $a \otimes_K b = \otimes_K(a, b)$. On désignera par $\Omega^b_{a,c}$ l'isomorphisme naturel $a\phi_K(b\phi_K c) \longrightarrow (a \otimes_K b)\phi_K c$. On pose enfin:

$$\omega^b_{a,c} = \sigma(\Omega^b_{a,c})$$

Définition 2.2 : Etant donnés trois objets a, b, c d'une catégorie forte K munie d'un produit tensoriel $\otimes_K$, on désigne par $A_{a,b,c}$ le morphisme de $a \otimes_K (b \otimes_K c)$ dans $(a \otimes_K b) \otimes_K c$ défini par la formule

$$A_{a,b,c} = \omega^c_{a\otimes_K b, d} \circ \omega^b_{a, c\phi_K d} \circ (a\phi(\Omega^c_{b,d})^{-1}) \circ ((\omega^{b\otimes_K c}_{a,d})^{-1}(id\ a\phi(b\otimes_K c)))$$

où $d = a \otimes_K (b \otimes_K c)$

La proposition suivante se démontre par une simple vérification routinière:

Proposition 2.3 : $A_{a,b,c}$ est un isomorphisme naturel de $a \otimes_K (b \otimes_K c)$ sur $(a \otimes_K b) \otimes_K c$ qui rend commutatif le diagramme suivant, quels que soient a, b, c, d :

$$\begin{tikzcd}
a\phi_K((b\otimes_K c)\phi_K d) \arrow[rr, "a\phi_K(\Omega^c_{b,d})^{-1}"] \arrow[dr, "\Omega^{b\otimes_K c}_{a,d}"'] & & a\phi_K(b\phi_K(c\phi_K d)) \arrow[rr, "\Omega^b_{a,c\phi_K d}"] & & (a\otimes_K b)\phi_K(c\phi_K d) \arrow[dl, "\Omega^c_{a\otimes_K b,d}"] \\
& (a\otimes_K(b\otimes_K c))\phi_K d \arrow[rr, "A^{-1}_{a,b,c}\phi_K d"'] & & ((a\otimes_K b)\otimes_K c)\phi_K d &
\end{tikzcd}$$

On voit que le produit tensoriel, s'il existe, est nécessairement associatif. Par contre, il n'est pas nécessairement commutatif (voir [10]).

Définition 2.4 : Le produit tensoriel $\otimes_K$ est dit commutatif si les foncteurs $(a, b) \longmapsto a \otimes_K b$ et $(a, b) \longmapsto b \otimes_K a$ sont naturellement équivalents.

On notera toujours $T_{a,b}$ l'isomorphisme naturel $a \otimes_K b \longrightarrow b \otimes_K a$.

Définition 2.5 : On appelle catégorie à produit tensoriel toute catégorie forte K munie d'un produit tensoriel $\otimes_K$ et d'isomorphismes naturels

$\Omega^b_{a,c} : a\phi_K(b\phi_K c) \longrightarrow (a \otimes_K b)\phi_K c$ et $T_{a,b} : a \otimes_K b \longrightarrow b \otimes_K a$

Les images par le foncteur $\pitchfork_K$ d'un couple (a,b) d'objets et d'un couple (α,β) de morphismes sont notées respectivement $a\pitchfork_K b$ et $\alpha\pitchfork_K\beta$. On appellera souvent σ le foncteur oubli, l'ensemble $\sigma(a)$ étant appelé l'ensemble sous-jacent à l'objet a. Ainsi $a\pitchfork b$ est l'ensemble sous-jacent à $a\pitchfork_K b$.

Remarque: Dans de nombreux cas, le foncteur oubli est fidele. Nous n'imposons cependant pas cette condition (1), contrairement à Linton [11].

Définition 1.2 : Soient K une catégorie forte et $F: K \longrightarrow K$ un foncteur. On dit qu'un foncteur $G: K \longrightarrow K$ est un adjoint fort à gauche de F si et seulement si les foncteurs suivants sont naturellement équivalents:

$$K^\circ \times K \longrightarrow K : (x,y) \longmapsto x\pitchfork_K F(y)$$

$$K^\circ \times K \longrightarrow K : (x,y) \longmapsto G(x)\pitchfork_K y$$

Une simple composition avec le foncteur oubli montre qu'un adjoint fort à gauche de F est un adjoint à gauche de F.

Pour les foncteurs de deux variables, la définition est analogue:

Définition 1.3 : Soient K une catégorie forte et $F: K^\circ \times K \longrightarrow K$ un bifoncteur. On dit qu'un foncteur $G: K\times K \longrightarrow K$ est un adjoint fort à gauche de F si et seulement si les foncteurs suivants sont naturellement équivalents:

$$K^\circ \times K^\circ \times K \longrightarrow K : (a,b,c) \longmapsto a\pitchfork_K F(b,c)$$

$$K^\circ \times K^\circ \times K \longrightarrow K : (a,b,c) \longmapsto G(a,b)\pitchfork_K c$$

2. Produit tensoriel.

Définition 2.1 ([10], [11]): On appelle produit tensoriel sur une catégorie forte K, tout foncteur $\otimes_K : K\times K \longrightarrow K$, adjoint fort à gauche du foncteur $\pitchfork_K$.

On pose $a \otimes_K b = \otimes_K(a,b)$. On désignera par $\Omega^b_{a,c}$ l'isomorphisme naturel $a\pitchfork_K(b\pitchfork_K c) \longrightarrow (a\otimes_K b)\pitchfork_K c$. On pose enfin:

$$\omega^b_{a,c} = \sigma(\Omega^b_{a,c})$$

Définition 2.2 : Etant donnés trois objets a,b,c d'une catégorie forte K, munie d'un produit tensoriel $\otimes_K$, on désigne par $A_{a,b,c}$ le morphisme de $a\otimes_K(b\otimes_K c)$ dans $(a\otimes_K b)\otimes_K c$ défini par la formule

$$A_{a,b,c} = \omega^c_{a\otimes_K b,d} \circ \omega^b_{a,c\pitchfork_K d} \circ (a\pitchfork(\Omega^c_{b,d})^{-1}) \circ ((\omega^{b\otimes_K c}_{a,d})^{-1}(\mathrm{id}\ a\otimes_K(b\otimes_K c)))$$

où $d = a\otimes_K(b\otimes_K c)$

La proposition suivante se démontre par une simple vérification routinière:

Proposition 2.3 : $A_{a,b,c}$ est un isomorphisme naturel de $a\otimes_K(b\otimes_K c)$ sur $(a\otimes_K b)\otimes_K c$ qui rend commutatif le diagramme suivant, quels que soient a,b,c,d :

$$\begin{tikzcd}
a\pitchfork_K((b\otimes_K c)\pitchfork_K d) \arrow[rr, "a\pitchfork_K(\Omega^c_{b,d})^{-1}"] \arrow[dr, "\Omega^{b\otimes_K c}_{a,d}"'] & & a\pitchfork_K(b\pitchfork_K(c\pitchfork_K d)) \arrow[rr, "\Omega^b_{a,c\pitchfork_K d}"] & & (a\otimes_K b)\pitchfork_K(c\pitchfork_K d) \arrow[dl, "\Omega^c_{a\otimes_K b,d}"] \\
& (a\otimes_K(b\otimes_K c))\pitchfork_K d \arrow[rr, "A^{-1}_{a,b,c}\pitchfork_K d"'] & & ((a\otimes_K b)\otimes_K c)\pitchfork_K d &
\end{tikzcd}$$

On voit que le produit tensoriel, s'il existe, est nécessairement associatif. Par contre, il n'est pas nécessairement commutatif(voir [10]).

Définition 2.4 : Le produit tensoriel $\otimes_K$ est dit commutatif si les foncteurs $(a,b) \longmapsto a\otimes_K b$ et $(a,b) \longmapsto b\otimes_K a$ sont naturellement équivalents.

On notera toujours $T_{a,b}$ l'isomorphisme naturel $a\otimes_K b \longrightarrow b\otimes_K a$.

Définition 2.5 : On appelle catégorie à produit tensoriel toute catégorie forte K munie d'un produit tensoriel $\otimes_K$ et d'isomorphismes naturels

$$\Omega^b_{a,c} : a\pitchfork_K(b\pitchfork_K c) \longrightarrow (a\otimes_K b)\pitchfork_K c \quad \text{et} \quad T_{a,b} : a\otimes_K b \longrightarrow b\otimes_K a$$

Proposition 2.6 : Soit K une catégorie à produit tensoriel. Quel que soit l'objet a de K, le foncteur $a\pitchfork_K$ est compatible avec les limites projectives, et le foncteur $\otimes_K a$ est compatible avec les limites inductives.

En effet, $a\pitchfork_K$ admet un adjoint à gauche, et $\otimes_K a$ admet un adjoint à droite.

c.q.f.d.

3. Catégories abéliennes à produit tensoriel.

Si la catégorie K est abélienne, il est naturel de supposer que le foncteur oubli σ prend ses valeurs dans la catégorie Grab des groupes abéliens, et est additif. On pourrait même exiger que ce foncteur soit exact. Ce sera effectivement le cas pour la catégorie QESP que nous définirons au chapitre suivant. Cependant, il est au moins un exemple intéressant de catégorie abélienne à produit tensoriel pour laquelle ce n'est pas le cas: si X est un espace topologique, et $\mathcal{O}$ un faisceau d'anneaux commutatifs sur X, la catégorie des faisceaux de modules sur $\mathcal{O}$ est abélienne et à produit tensoriel. Le foncteur oubli de cette catégorie applique un faisceau F sur le groupe F(X) des sections continues au-dessus de X. Il est exact à gauche mais non à droite.

Définition 3.1 : On appelle catégorie abélienne à produit tensoriel toute catégorie à produit tensoriel qui est abélienne et telle que le foncteur oubli se factorise au travers d'un foncteur additif prenant ses valeurs dans la catégorie Grab.

Proposition 3.2 : Si K est une catégorie abélienne à produit tensoriel, alors quel que soit l'objet a de K, le foncteur $a\pitchfork_K$ est exact à gauche, et le foncteur $\otimes_K a$ est exact à droite.

C'est une conséquence de la proposition 2.6.

c.q.f.d.

En particulier, ces foncteurs sont additifs.

Rappelons qu'un objet de K est projectif si et seulement si le foncteur $a\pitchfork$ est exact. Rappelons aussi que dans une catégorie abélienne, toute somme d'objets projectifs est un objet projectif ainsi que toute sommande directe d'un objet projectif.

Définition 3.3 : Un objet a d'une catégorie abélienne à produit tensoriel est dit fortement projectif si le foncteur $a\pitchfork_K$ est exact.

Si le foncteur oubli σ est exact à droite, tout objet fortement projectif est projectif. Réciproquement, on a les résultats suivants:

Proposition 3.4: Soit K une catégorie abélienne à produit tensoriel. Si le foncteur oubli σ est fidèle, alors tout objet projectif de K est fortement projectif.

Soit $\theta : a \longrightarrow b$ un épimorphisme de la catégorie K et p un objet projectif de K. Soit ρ une flèche de K telle qu'on ait $\rho\cdot(p\pitchfork_K \theta) = o$

Appliquons le foncteur oubli : $\sigma(\rho)\cdot(p\pitchfork\theta) = o$

Puisque p est projectif, $p\pitchfork\theta$ est un épimorphisme, donc $\sigma(\rho) = o$

σ étant fidèle, on en déduit que $\rho = o$

c.q.f.d.

Rappelons le lemme suivant:

Lemme 3.5 : Si K est une catégorie abélienne comportant suffisamment de projectifs, une suite $o \longrightarrow a \xrightarrow{\alpha} b \xrightarrow{\beta} c \longrightarrow o$ est exacte si et seulement si pour tout objet projectif p de K la suite de groupes abéliens $o \longrightarrow p\pitchfork a \xrightarrow[p\pitchfork\alpha]{} p\pitchfork b \xrightarrow[p\pitchfork\beta]{} p\pitchfork c \longrightarrow o$ est exacte.

Il suffit de démontrer les conditions suffisantes:

a) Exactitude en c:

Soit p un objet projectif et $\xi : p \longrightarrow c$ un épimorphisme. Puisque $p\pitchfork\beta$ est surjectif, il existe une flèche $\eta \in p\pitchfork b$ telle que $\xi = \beta\eta$. Ceci implique que la flèche β est épique.

b) Exactitude en a:

Soit $x \xrightarrow{\gamma} a$ une flèche telle que $\alpha\gamma = o$. Soit $p \xrightarrow{\xi} x$ une flèche épique, où p est projectif. On a $\alpha\gamma\xi = (p\pitchfork\alpha)(\gamma\xi) = o$. Donc $\gamma\xi = o$ ce qui entraîne que $\gamma = o$ puisque ξ est un épimorphisme.

c) Exactitude en b:

1) Pour tout projectif p, on a $p\pitchfork(\beta\alpha) = (p\pitchfork\beta)(p\pitchfork\alpha) = o$. Soit $p \xrightarrow{\xi} a$

une flèche épique où p est projectif. Puisque $o = (p\phi(\beta\alpha))(\xi) = \beta\alpha\xi$, on a aussi $\beta\alpha = o$.

2) Soit $x \xrightarrow{\delta} B$ une flèche telle que $\beta\delta = o$. Il faut montrer que δ se factorise à travers α. Soit $p \xrightarrow{\xi} x$ une flèche épique où p est projectif. Par hypothèse, $p\phi\delta$ se factorise à travers $p\phi\alpha$: il existe un homomorphisme de groupes u tel que $p\phi\delta = (p\phi\alpha)\circ u$. Posons $\theta = u(\xi)$. On a alors $\delta\xi = \alpha\theta$. Si ζ est une flèche noyau de ξ, on a $\delta\xi\zeta = \alpha\theta\zeta = o$. Puisque α est une flèche monique, on en déduit $\theta\zeta = o$, ce qui implique que θ se factorise à travers ξ : $\theta = \eta\xi$. Mais alors $\delta\xi = \alpha\eta\xi$, de sorte que $\delta = \alpha\eta$.

c.q.f.d.

<u>Proposition 3.6</u> : <u>Soit</u> K <u>une catégorie abélienne à produits tensoriels comportant suffisamment de projectifs. Les propositions suivantes sont équivalentes:</u>

(1) <u>Tout objet projectif de</u> K <u>est fortement projectif.</u>

(2) <u>Si</u> p <u>et</u> q <u>sont deux objets projectifs, alors</u> $p \otimes_K q$ <u>est un objet projectif.</u>

(1) ==> (2)

Soit $a \xrightarrow{\alpha} b$ une flèche épique. Le carré suivant est commutatif, et les flèches verticales sont des isomorphismes:

$$\begin{tikzcd}
(p \otimes_K q)\phi a \arrow[r, "(p\otimes q)\phi\alpha"] & (p \otimes_K q)\phi b \\
p\phi(q\phi_K a) \arrow[u, "\omega^q_{p,a}"'] \arrow[r, "p\phi(q\phi_K\alpha)"] & p\phi(q\phi_K b) \arrow[u, "\omega^q_{p,b}"']
\end{tikzcd}$$

Par hypothèse, p est projectif et q est fortement projectif, de sorte que la flèche $p\phi(q\phi_K\alpha)$ est épique. Il en est donc de même de la flèche $(p \otimes_K q)\phi\alpha$.

(2) ==> (1)

Soient p un objet projectif et $a \xrightarrow{\alpha} b$ une flèche épique. D'après le lemme 3.5, nous devons simplement montrer que pour tout objet projectif q, la flèche $q\phi(p\phi_K a) \xrightarrow{q\phi(p\phi_K\alpha)} q\phi(p\phi_K b)$ est épique.

Il suffit donc de démontrer que la flèche $(q \otimes_K p)\phi a \xrightarrow{(q\otimes_K p)\phi\alpha} (q \otimes_K p)\phi b$ est épique, ce qui se déduit immédiatement de (2).

c.q.f.d.

4. <u>Objets plats.</u>

Si la catégorie abélienne K comporte suffisamment de projectifs, on peut construire une théorie des foncteurs dérivés exactement comme dans une catégorie de modules. Cette construction a été faite par D. Buchsbaum, [2]. On en déduit que si z est un objet projectif de K, et si L est le premier satellite (gauche) d'un foncteur F covariant et exact à droite, alors $L(z) = 0$. Nous appliquons ce résultat en choisissant pour F le foncteur $\otimes_K c$, où c est un objet de K. On voit ainsi que si

$$o \longrightarrow a \longrightarrow b \longrightarrow c \longrightarrow o$$

est une suite exacte, il en est de même de la suite

$$o \longrightarrow z \otimes_K a \longrightarrow z \otimes_K b \longrightarrow z \otimes_K c \longrightarrow o$$

Autrement dit, si z est projectif, le foncteur $z \otimes_K$ est exact.

<u>Définition 4.1</u> : <u>Un objet</u> z <u>d'une catégorie abélienne à produits tensoriels est dit plat si le foncteur</u> $z \otimes_K$ <u>est exact.</u>

On a donc vu ci-dessus que

<u>Proposition 4.2</u> : <u>Tout objet projectif d'une catégorie abélienne à produit tensoriel comportant suffisamment de projectifs est plat.</u>

On en déduit la proposition suivante:

<u>Proposition 4.3</u> : <u>Quel que soit l'objet</u> x <u>de</u> K, <u>le foncteur</u> $\phi_K x$ <u>est exact à gauche.</u>

Soit $o \longrightarrow a \longrightarrow b \longrightarrow c \longrightarrow o$ une suite exacte. D'après le lemme 3.5, il suffit de démontrer que quel que soit le projectif p, la suite $o \longrightarrow p\phi(c\phi_K x) \longrightarrow p\phi(b\phi_K x) \longrightarrow p\phi(a\phi_K x)$ est exacte. Cette suite est isomorphe à la suite $o \longrightarrow (p \otimes_K c)\phi x \longrightarrow (p \otimes_K b)\phi x \longrightarrow (p \otimes_K a)\phi x$, laquelle est exacte puisque p est plat et que le foncteur ϕx est exact à gauche.

c.q.f.d.

Rappelons le lemme suivant:

<u>Lemme 4.4</u> (lemme du serpent): <u>Dans une catégorie abélienne K, supposons que le diagramme suivant soit commutatif, et que ses deuxième et troisième lignes soient exactes:</u>

$$\begin{tikzcd}
 & \ker u_1 \arrow[r] \arrow[d] & \ker u_2 \arrow[r] \arrow[d] & \ker u_3 \arrow[d] & \\
 & a_1 \arrow[r] \arrow[d] & a_2 \arrow[r] \arrow[d] & a_3 \arrow[r] \arrow[d] & o \\
o \arrow[r] & b_1 \arrow[r] \arrow[d] & b_2 \arrow[r] \arrow[d] & b_3 \arrow[d] & \\
 & \operatorname{coker} u_1 \arrow[r] & \operatorname{coker} u_2 \arrow[r] & \operatorname{coker} u_3 &
\end{tikzcd}$$

<u>Il existe alors un morphisme</u> $v : \ker u_3 \longrightarrow \operatorname{coker} u_1$ <u>tel que la suite</u>

$$\ker u_1 \longrightarrow \ker u_2 \longrightarrow \ker u_3 \xrightarrow{v} \operatorname{coker} u_1 \longrightarrow \operatorname{coker} u_2 \longrightarrow \operatorname{coker} u_3$$

<u>soit exacte</u>.

Ce lemme est bien connu lorsque K est une catégorie de modules. Sa validité lorsque K est une catégorie abélienne quelconque résulte facilement du théorème d'immersion pleine de Mitchell. (voir [14]) Il a été démontré sans utiliser ce théorème par Buchsbaum [2].

<u>Proposition 4.5</u>: <u>Tout objet sommande directe d'un objet plat est plat.</u>

Soit a un objet plat, somme des objets a_1 et a_2. Soit $o \to t \to u \to v \to o$ une suite exacte. Considérons le diagramme

$$\begin{tikzcd}
 & o \arrow[d] & o \arrow[d] & o \arrow[d] & \\
 & t\otimes_K a_1 \arrow[r] \arrow[d] & u\otimes_K a_1 \arrow[r] \arrow[d] & v\otimes_K a_1 \arrow[r] \arrow[d] & o \\
o \arrow[r] & t\otimes_K a \arrow[r] \arrow[d] & u\otimes_K a \arrow[r] \arrow[d] & v\otimes_K a \arrow[r] \arrow[d] & o \\
 & t\otimes_K a_2 \arrow[r] \arrow[d] & u\otimes_K a_2 \arrow[r] \arrow[d] & v\otimes_K a_2 \arrow[r] \arrow[d] & o \\
 & o & o & o &
\end{tikzcd}$$

Les trois colonnes sont exactes puisque les foncteurs $t\otimes_K$, $u\otimes_K$ et $v\otimes_K$ sont additifs et que a est la somme de a_1 et a_2. Les trois lignes

sont exactes puisque $\otimes_K$ est exact à droite et que a est plat. Du lemme du serpent, on déduit que le morphisme $t\otimes_K a_2 \longrightarrow u\otimes_K a_2$ est un monomorphisme. Donc a_2 est plat, et il en est de même de a_1.

c.q.f.d.

<u>Proposition 4.6</u> : <u>Si dans la catégorie</u> K, <u>les limites inductives filtrantes sont exactes, alors toute limite inductive filtrante d'objets plats est un objet plat.</u>

Soit $a = \varinjlim a_i$, où les a_i sont plats. Quel que soit l'objet x, le foncteur $x\otimes_K$ est compatible avec les limites inductives. Il en résulte que si

$$o \longrightarrow t \longrightarrow u \longrightarrow v \longrightarrow o$$

est une suite exacte, la suite $o \longrightarrow t\otimes_K a \longrightarrow u\otimes_K a \longrightarrow v\otimes_K a \longrightarrow o$ est la limite inductive des suites exactes

$$o \longrightarrow t\otimes_K a_i \longrightarrow u\otimes_K a_i \longrightarrow v\otimes_K a_i \longrightarrow o$$

Elle est donc exacte.

c.q.f.d.

<u>Proposition 4.7</u>: <u>Soit</u> K <u>une catégorie abélienne à produit tensoriel, comportant suffisamment de projectifs</u>. <u>Pour qu'un objet</u> x <u>soit plat, il faut et il suffit que la suite</u> $o \longrightarrow a\otimes_K c \longrightarrow b\otimes_K c \longrightarrow x\otimes_K c \longrightarrow o$ <u>soit exacte quels que soient l'objet</u> c <u>et la suite exacte</u>

$$o \longrightarrow a \longrightarrow b \longrightarrow c \longrightarrow o$$

Supposons d'abord que x est plat. Puisque K comporte suffisamment de projectifs, il existe une suite exacte $o \longrightarrow m \longrightarrow p \longrightarrow c \longrightarrow o$ où p est projectif. Considérons alors le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
 & & & o \arrow[d] & \\
 & a\otimes_K m \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & b\otimes_K m \arrow[r] \arrow[d, "\beta"] & x\otimes_K m \arrow[r] \arrow[d] & o \\
o \arrow[r] & a\otimes_K p \arrow[r] \arrow[d] & b\otimes_K p \arrow[r] \arrow[d] & x\otimes_K p \arrow[r] \arrow[d] & o \\
 & a\otimes_K c \arrow[r] \arrow[d] & b\otimes_K c \arrow[r] \arrow[d] & x\otimes_K c \arrow[r] \arrow[d] & o \\
 & o & o & o &
\end{tikzcd}$$

Les trois colonnes de ce diagramme sont exactes puisque $\otimes_K$ est exact à droite et que x est plat. Les trois lignes sont aussi exactes puisque p est projectif, donc plat. On déduit alors du lemme du serpent que la flèche $a \otimes_K c \longrightarrow b \otimes_K c$ est monique.

Démontrons la réciproque: soit $o \longrightarrow m \longrightarrow p \longrightarrow c \longrightarrow o$ une suite exacte quelconque. Insérons x dans une suite exacte $o \longrightarrow a \longrightarrow b \longrightarrow x \longrightarrow o$ où b est projectif. Nous pouvons construire un diagramme " 3x3 " du type du précédent et appliquer à nouveau le lemme du serpent. On montre ainsi que la flèche $x \otimes_K m \longrightarrow x \otimes_K p$ est monique.

c.q.f.d.

Proposition 4.8 : Soit K une catégorie abélienne à produit tensoriel comportant suffisamment de projectifs. Soit $o \longrightarrow a \longrightarrow b \longrightarrow c \longrightarrow o$ une suite exacte où c est plat. Alors a est plat si et seulement si b est plat.

Soit $o \longrightarrow x \longrightarrow y \longrightarrow z \longrightarrow o$ une suite exacte. Considérons le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
 & & & o \arrow[d] & \\
o \arrow[r] & x \otimes_K a \arrow[r] \arrow[d] & x \otimes_K b \arrow[r] \arrow[d] & x \otimes_K c \arrow[r] \arrow[d] & o \\
o \arrow[r] & y \otimes_K a \arrow[r] \arrow[d] & y \otimes_K b \arrow[r] \arrow[d] & y \otimes_K c \arrow[r] \arrow[d] & o \\
o \arrow[r] & z \otimes_K a \arrow[r] \arrow[d] & z \otimes_K b \arrow[r] \arrow[d] & z \otimes_K c \arrow[r] \arrow[d] & o \\
 & o & o & o &
\end{tikzcd}$$

Les lignes sont exactes d'après la proposition précédente et la troisième colonne est exacte puisque c est plat.

Si b est plat, la flèche $x \otimes_K b \longrightarrow y \otimes_K b$ est monique, ce qui entraine qu'il en est de même de la flèche $x \otimes_K a \longrightarrow y \otimes_K a$, de sorte que a est plat.

Si a est plat, la flèche $x \otimes_K a \longrightarrow y \otimes_K a$ est monique, et on peut pour terminer, écraser la situation en appliquant une nouvelle fois le lemme du serpent.

c.q.f.d.

Chapitre II.

La catégorie des Q-espaces.

0. Introduction.

La catégorie des Q-espaces, qui fait l'objet de ce travail, a été construite dès 1962 par L.Waelbroeck [18]. L'exposé que nous présentons ici est assez différent de l'exposé original. D'une part, nous considérons des Q-espaces non nécessairement complets, la construction du complété d'un Q-espace, qui n'est pas décrite dans le travail de L. Waelbroeck, étant faite au chapitre suivant. D'autre part, nous définissons les Q-espaces comme des foncteurs à valeurs dans la catégorie des espaces vectoriels, moyennant quelques restrictions de caractère ensembliste qui ont pour objet de permettre la considération de ces foncteurs comme objets d'une catégorie, tout en assurant l'existence de suffisamment de Q-espaces. Nous montrons ensuite que les espaces bornologiques convexes séparés sont des Q-espaces, et nous établissons un théorème de structure d'après lequel un Q-espace est le quotient de deux espaces bornologiques convexes séparés. Les derniers paragraphes sont consacrés à quelques notions plus techniques fort utiles dans la suite.

1. Univers.

Afin d'éviter tout ennui d'ordre ensembliste, nous utiliserons la notion d'univers, due à Grothendieck (voir [5]):

Définition 1.1: On appelle univers tout ensemble $\mathcal{U}$ satisfaisant aux conditions suivantes:

(1) $x \in \mathcal{U}$ et $y \in x \Longrightarrow y \in \mathcal{U}$

(2) $x \in \mathcal{U}$ et $y \in \mathcal{U} \Longrightarrow \{x, y\} \in \mathcal{U}$

(3) $x \in \mathcal{U} \Longrightarrow \mathcal{P}(x) \in \mathcal{U}$ (*)

(4) $I \in \mathcal{U}$ et $(\forall i \in I)\ (x_i \in \mathcal{U}) \Longrightarrow \bigcup_{i \in I} x_i \in \mathcal{U}$

Il résulte de ces axiomes que le résultat d'opérations ensemblistes usuelles appliquées à des éléments d'un univers appartient encore à cet univers.

La notion d'univers n'est utile que s'il en existe suffisamment. On ajoute donc aux axiomes usuels de la théorie des ensembles l'axiome suivant:

TOUT ENSEMBLE APPARTIENT A UN UNIVERS.

<u>Définition 1.2: Si $\mathcal{U}$ est un univers, on appelle $\mathcal{U}$-catégorie toute catégorie K vérifiant l condition suivante</u>

<u>Si x et y sont des objets de K, l'ensemble des morphismes de x dans y est équipotent à un ensemble de l'univers $\mathcal{U}$.</u>

Si K est une catégorie dont la classe des objets et la classe des morphismes sont des ensembles appartenant à l'univers $\mathcal{U}$, et si D est une $\mathcal{U}$-catégorie, alors la catégorie des foncteurs de K dans D est une $\mathcal{U}$-catégorie.

Nous travaillerons avec deux univers $\mathcal{U}_1$ et $\mathcal{U}_2$ possédant la propriété suivante:

$$\underline{\underline{C}} \in \mathcal{U}_1 \in \mathcal{U}_2 \qquad (**)$$

Les notations $\underline{\underline{ENS}}$, $\underline{\underline{GRAB}}$ et $\underline{\underline{EV}}$ désigneront respectivement la catégorie des ensembles, celle des groupes abéliens et celle des espaces vectoriels complexes dont les ensembles sous-jacents appartiennent à l'univers $\mathcal{U}_2$. Ces catégories sont des $\mathcal{U}_2$-catégories.

Chaque fois que nous utiliserons un ensemble d'indices, nous supposerons implicitement que celui-ci appartient à l'univers $\mathcal{U}_2$.

(*) $\mathcal{P}(x)$ est l'ensemble des parties de x.

(**) $\underline{\underline{C}}$ est le corps complexe.

2. <u>La catégorie K.</u>

Nous désignerons par K une sous-catégorie pleine de la catégorie des espaces normés complexes appartenant à $\mathcal{U}_1$, possédant les propriétés suivantes:

AI: <u>Le corps $\underline{\underline{C}}$ des nombres complexes est isomorphe à un objet de K.</u>

AII: <u>Tout espace normé complexe appartenant à $\mathcal{U}_1$ est un quotient d'un objet de K.</u>

AIII: <u>Soit P un objet de K, X un espace normé appartenant à $\mathcal{U}_1$ et S un sous-espace fermé de X. Quelle que soit l'application linéaire continue α de P dans X/S, il existe une application linéaire continue β de P dans X telle que le diagramme suivant soit commutatif:</u>

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, "\beta"'] \arrow[d, "\alpha"] \\ X \arrow[r] & X/S \end{tikzcd}$$

AIV: <u>La somme directe de deux objets de K est un objet de K.</u>

Il n'est pas difficile de construire une catégorie K possédant ces propriétés:

A tout ensemble X, appartenant à $\mathcal{U}_1$, on associe l'espace vectoriel $\underline{\underline{C}}^{(X)}$ des combinaisons linéaires formelles d'éléments de X à coefficients complexes. On munit cet espace de la norme définie par

$$\left\| \sum_{x \in X} \alpha_x x \right\| = \sum_{x \in X} |\alpha_x|$$

(Cette somme a un sens puisque la famille (α_x) est presque nulle.)

Il est facile de vérifier que les espaces normés $\underline{\underline{C}}^{(X)}$ constituent une catégorie qui vérifie les conditions AI à AIV.

Il est à noter que la catégorie K est additive.

Puisque K est un sous-ensemble de $\mathcal{U}_1$ et que $\mathcal{U}_1 \in \mathcal{U}_2$, la catégorie K appartient à $\mathcal{U}_2$.

3. <u>La catégorie $\underline{\underline{QESP}}$.</u>

La catégorie K appartient à l'univers $\mathcal{U}_2$. D'autre part la catégorie $\underline{\underline{EV}}$ est une $\mathcal{U}_2$-catégorie. Il en résulte que les foncteurs additifs contravariants de K dans $\underline{\underline{EV}}$ constituent une $\mathcal{U}_2$-catégorie.

<u>Définition 3.1: On appelle Q-espace tout foncteur additif contravariant de K dans EV. La catégorie des Q-espaces est notée QESP.</u>

Un morphisme de Q-espaces est évidemment une transformation naturelle de foncteurs.

Etant une catégorie de foncteurs, la catégorie QESP hérite de la plupart des propriétés de la catégorie EV ([15] Chap.3). En particulier:

<u>Théorème 3.2: QESP est une catégorie abélienne comportant des limites inductives exactes.</u>

Remarquons encore ce qui suit: Etant donnés deux objets F et G de QESP, le groupe abélien $F\phi G$ des transformations naturelles de F dans G est muni d'une structure d'espace vectoriel complexe: si $\phi \in F\phi G$, et $a \in \mathbb{C}$, on définit $a\phi$ en posant $(a\phi)_P = a\phi_P$ quel que soit l'objet P de K.

On sait aussi qu'une suite $X \longrightarrow Y \longrightarrow Z$ de Q-espaces est exacte si et seulement si pour tout objet P de K, la suite d'espaces vectoriels $X(P) \longrightarrow Y(P) \longrightarrow Z(P)$ est exacte.

4. <u>La catégorie EBCS.</u>

Les espaces bornologiques convexes séparés ont été définis indépendamment par plusieurs auteurs vers 1960. Un exposé commode a été rédigé par H.Buchwalter [3], dont nous utilisons la terminologie.

Nous rappellerons seulement qu'un espace bornologique convexe séparé apparaît comme étant une limite inductive monique d'une famille filtrante $(X_i)_{i\in I}$ d'espaces normés.

Nous désignerons par EBCS la catégorie des espaces bornologiques convexes séparés qui sont des limites inductives filtrantes de familles d'espaces normés appartenant à l'univers $\mathcal{U}_1$, l'ensemble d'indices pouvant appartenir à $\mathcal{U}_2$.

Ces précisions étant faites, nous ne mentionnerons plus explicitement les univers $\mathcal{U}_1$ et $\mathcal{U}_2$.

Nous montrerons dans ce numéro qu'on peut considérer la catégorie EBCS comme une sous-catégorie pleine de la catégorie QESP définie au numéro précédent.

Soit X un espace bornologique convexe séparé. Tout objet P de K étant en particulier un espace bornologique convexe séparé, on définit un foncteur additif contravariant F_X de la catégorie K dans EV en associant à P l'espace vectoriel $F_X(P) = P\phi X$ des applications linéaires bornées de P dans X, et à tout morphisme $P_1 \xrightarrow{\alpha} P_2$ de K l'application linéaire

$$F_X(\alpha) = \alpha\phi X : P_2\phi X \longrightarrow P_1\phi X : \beta \longmapsto \beta\alpha$$

Ainsi, à tout objet X de EBCS est associé un objet de QESP que nous notons provisoirement F_X. (Une notation plus logique, mais aussi plus indigeste serait ϕX.)

A tout morphisme $X \xrightarrow{\alpha} Y$ de EBCS, il convient aussi d'associer une transformation naturelle F_α du foncteur F_X dans le foncteur F_Y. Si P est un objet de K, on pose

$$(F_\alpha)_P = P\phi\alpha : P\phi X \longrightarrow P\phi Y : \beta \longmapsto \alpha\beta$$

Il est immédiat que F_α est effectivement une transformation naturelle (qu'il serait logique de noter $\phi\alpha$) de F_X dans F_Y. On a ainsi défini un foncteur F: EBCS $\longrightarrow$ QESP.

<u>Proposition 4.1: Le foncteur</u> F <u>est pleinement fidèle.</u>

Nous devons montrer que l'application suivante est bijective, quels que soient les objets X, Y de EBCS:

$$X\phi Y \longrightarrow F_X\phi F_Y : \alpha \longmapsto F_\alpha$$

($X\phi Y$ désigne ici l'ensemble des applications linéaires bornées de X dans Y et $F_X\phi F_Y$ l'ensemble des transformations naturelles de F_X dans F_Y.)

<u>Injectivité</u>: Soient $\alpha, \beta \in X\phi Y$, avec $\alpha \neq \beta$. Il existe donc $x \in X$ tel que $\alpha(x) \neq \beta(x)$. Soit $x^\vee : \mathbb{C} \longrightarrow X$ l'application linéaire bornée définie par $x^\vee(1) = x$. On a alors $(F_\alpha)_{\mathbb{C}}(x^\vee) \neq (F_\beta)_{\mathbb{C}}(x^\vee)$, ce qui entraine que $F_\alpha \neq F_\beta$

Remarquons que c'est ici qu'intervient pour la première fois l'axiome AI de la définition de la catégorie K.

<u>Surjectivité</u>: Soit ϕ une transformation naturelle du foncteur F_X dans le foncteur F_Y. On définit une application linéaire φ de X dans Y en posant:

$\forall x \in X : \varphi(x) = \bar{\Phi}_{\mathbb{C}}(x^{\vee})(1)$, où $x^{\vee}$ est définie comme ci-dessus.

Montrons que pour tout objet P de K, et toute application linéaire bornée $\alpha \in P\phi X$, on a $\bar{\Phi}_P(\alpha) = \varphi\alpha$, c'est à dire que pour tout vecteur $u \in P$, on a $\bar{\Phi}_P(\alpha)(u) = \varphi(\alpha(u))$. Mais $\varphi(\alpha(u)) = \bar{\Phi}_{\mathbb{C}}((\alpha(u))^{\vee})(1) = \bar{\Phi}_{\mathbb{C}}(\alpha \circ u^{\vee})(1)$.

Il faut donc montrer que $\bar{\Phi}_P(\alpha)(u) = \bar{\Phi}_{\mathbb{C}}(\alpha \circ u^{\vee})(1)$.

De la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccc} F_X(P) & \xrightarrow{F_X(u^{\vee})} & F_X(\mathbb{C}) \\ \downarrow \bar{\Phi}_P & & \downarrow \bar{\Phi}_{\mathbb{C}} \\ F_Y(P) & \xrightarrow{F_Y(u^{\vee})} & F_Y(\mathbb{C}) \end{array}$$

on déduit que $\bar{\Phi}_P(\alpha) \circ u^{\vee} = \bar{\Phi}_{\mathbb{C}}(\alpha \circ u^{\vee})$, donc $\bar{\Phi}_P(\alpha)(u) = \bar{\Phi}_{\mathbb{C}}(\alpha \circ u^{\vee})(1)$.

On a ainsi montré que $\bar{\Phi} = F_{\varphi}$ pour autant que φ soit une application linéaire bornée de X dans Y.

Soit B une partie bornée et disquée (*) de X. Normons le sous-espace X_B de X engendré par B par la jauge de B. Appliquons l'axiome AII: il existe un objet P de K tel que X_B soit un quotient de P. L'application canonique $\alpha : P \longrightarrow X_B$ sera ici considérée en tant qu'application linéaire bornée de P dans X. Alors $\bar{\Phi}_P(\alpha) = \varphi\alpha$ est une application linéaire bornée de P dans Y. On en déduit que $\varphi(B)$ est une partie bornée de Y.

c.q.f.d.

Le foncteur F possède une autre propriété importante: il est additif, et même linéaire, en ce sens que la bijection $X\phi Y \longrightarrow F_X \phi F_Y$ définie par F est linéaire, quels que soient les espaces bornologiques convexes séparés X et Y. Ces applications sont donc en fait des isomorphismes d'espaces vectoriels.

Nous voyons qu'il est parfaitement légitime de renoncer à faire une distinction entre la catégorie EBCS et son image par F. Dans la suite, nous considérerons donc les espaces bornologiques convexes séparés comme étant eux-mêmes des objets de QESP. Nous continuerons à utiliser la notation $P\phi X$ pour désigner la valeur prise par X en tant que foncteur

(*) Un disque est une partie convexe et équilibrée.

en un objet P de K. Cette notation désigne aussi l'espace vectoriel des morphismes de P dans X considérés tout deux comme objets de QESP. Ainsi que nous venons de le voir, il n'y a là aucune contradiction.

Proposition 4.2: Une suite $X \xrightarrow{\varphi} Y \xrightarrow{\psi}$ d'espaces bornologiques convexes séparés et d'applications linéaires bornées est exacte dans QESP si et seulement si les bornés de Y contenus dans le noyau de ψ sont exactement les images par φ des bornés de X.

Soit $X \xrightarrow{\varphi} Y \xrightarrow{\psi}$ une suite exacte, où X, Y, Z sont des objets de EBCS. On a $\psi\varphi = 0$, donc l'image par φ d'un borné de X est toujours incluse au noyau de ψ. Soit B un borné de Y inclus au noyau de ψ. Soit P un objet de K à un quotient duquel l'espace normé Y_B est isomorphe, l'application canonique étant notée λ. On a alors $\psi\lambda = (P\phi\psi)(\lambda) = 0$. Puisque la suite

$$P\phi X \xrightarrow{P\phi\varphi} P\phi Y \xrightarrow{P\phi\psi} P\phi Z$$

est exacte, il existe $\mu \in P\phi X$ tel que $\lambda = \varphi\mu$. Si A est la boule unité de P, on a $B \subset \lambda(A) = \varphi(\mu(A))$. Ceci montre que B est l'image par φ d'un borné de X.

Réciproquement, supposons que les bornés de Y inclus au noyau de ψ sont précisément les images par φ des bornés de X. Soit P un objet de K. Puisque $\psi\varphi = 0$, on a aussi $(P\phi\psi)\circ(P\phi\varphi) = P\phi\psi\varphi = 0$.

Soit $\alpha \in P\phi Y$ une application linéaire bornée telle que $(P\phi\psi)(\alpha) = 0$. On déduit aisément de l'axiome AIII l'existence d'une application linéaire bornée $\beta \in P\phi X$ telle que $\alpha = \varphi\beta = (P\phi\varphi)(\beta)$. Ceci montre que la suite

$$P\phi X \xrightarrow[P\phi\varphi]{} P\phi Y \xrightarrow[P\phi\psi]{} P\phi Z$$

est exacte.

Corollaire 4.3: Une application linéaire bornée $\varphi : X \longrightarrow Y$ est un monomorphisme de QESP si et seulement si elle est injective. Elle est un épimorphisme si et seulement si tout borné de Y est l'image par φ d'un borné de X.

5. Objets projectifs dans QESP.

Rappelons d'abord le lemme de Yoneda:

$\forall x \in X : \varphi(x) = \bar{\Phi}_{C}(x^{\vee})(1)$, où $x^{\vee}$ est définie comme ci-dessus.

Montrons que pour tout objet P de K, et toute application linéaire bornée $\alpha \in P\phi X$, on a $\bar{\Phi}_P(\alpha) = \varphi\alpha$, c'est à dire que pour tout vecteur $u \in P$, on a $\bar{\Phi}_P(\alpha)(u) = \varphi(\alpha(u))$. Mais $\varphi(\alpha(u)) = \bar{\Phi}_C((\alpha(u))^{\vee})(1) = \bar{\Phi}_C(\alpha \circ u^{\vee})(1)$.

Il faut donc montrer que $\bar{\Phi}_P(\alpha)(u) = \bar{\Phi}_C(\alpha \circ u^{\vee})(1)$.

De la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccc} F_X(P) & \xrightarrow{F_X(u^{\vee})} & F_X(C) \\ \downarrow \bar{\Phi}_P & & \downarrow \bar{\Phi}_C \\ F_Y(P) & \xrightarrow{F_Y(u^{\vee})} & F_Y(C) \end{array}$$

on déduit que $\bar{\Phi}_P(\alpha)\circ u^{\vee} = \bar{\Phi}_C(\alpha \circ u^{\vee})$, donc $\bar{\Phi}_P(\alpha)(u) = \bar{\Phi}_C(\alpha \circ u^{\vee})(1)$.

On a ainsi montré que $\bar{\Phi} = F_\varphi$ pour autant que φ soit une application linéaire bornée de X dans Y.

Soit B une partie bornée et disquée (*) de X. Normons le sous-espace X_B de X engendré par B par la jauge de B. Appliquons l'axiome AII: il existe un objet P de K tel que X_B soit un quotient de P. L'application canonique $\alpha : P \longrightarrow X_B$ sera ici considérée en tant qu'application linéaire bornée de P dans X. Alors $\bar{\Phi}_P(\alpha) = \varphi\alpha$ est une application linéaire bornée de P dans Y. On en déduit que $\varphi(B)$ est une partie bornée de Y.

c.q.f.d.

La foncteur F possède une autre propriété importante: il est additif, et même linéaire, en ce sens que la bijection $X\phi Y \longrightarrow F_X \phi F_Y$ définie par F est linéaire, quels que soient les espaces bornologiques convexes séparés X et Y. Ces applications sont donc en fait des isomorphismes d'espaces vectoriels.

Nous voyons qu'il est parfaitement légitime de renoncer à faire une distinction entre la catégorie EBCS et son image par F. Dans la suite, nous considérerons donc les espaces bornologiques convexes séparés comme étant eux-mêmes des objets de QESP. Nous continuerons à utiliser la notation $P\phi X$ pour désigner la valeur prise par X en tant que foncteur

(*) Un disque est une partie convexe et équilibrée.

en un objet P de K. Cette notation désigne aussi l'espace vectoriel des morphismes de P dans X considérés tout deux comme objets de QESP. Ainsi que nous venons de le voir, il n'y a là aucune contradiction.

Proposition 4.2: Une suite $X \xrightarrow{\varphi} Y \xrightarrow{\psi}$ d'espaces bornologiques convexes séparés et d'applications linéaires bornées est exacte dans QESP si et seulement si les bornés de Y contenus dans le noyau de ψ sont exactement les images par φ des bornés de X.

Soit $X \xrightarrow{\varphi} Y \xrightarrow{\psi}$ une suite exacte, où X, Y, Z sont des objets de EBCS. On a $\psi\varphi = 0$, donc l'image par φ d'un borné de X est toujours incluse au noyau de ψ. Soit B un borné de Y inclus au noyau de ψ. Soit P un objet de K à un quotient duquel l'espace normé Y_B est isomorphe, l'application canonique étant notée λ. On a alors $\psi\lambda = (P\phi\psi)(\lambda) = 0$. Puisque la suite

$$P\phi X \xrightarrow{P\phi\varphi} P\phi Y \xrightarrow{P\phi\psi} P\phi Z$$

est exacte, il existe $\mu \in P\phi X$ tel que $\lambda = \varphi\mu$. Si A est la boule unité de P, on a $B \subset \lambda(A) = \varphi(\mu(A))$. Ceci montre que B est l'image par φ d'un borné de X.

Réciproquement, supposons que les bornés de Y inclus au noyau de ψ sont précisément les images par φ des bornés de X. Soit P un objet de K. Puisque $\psi\varphi = 0$, on a aussi $(P\phi\psi)\circ(P\phi\varphi) = P\phi\psi\varphi = 0$.

Soit $\alpha \in P\phi Y$ une application linéaire bornée telle que $(P\phi\psi)(\alpha) = 0$. On déduit aisément de l'axiome AIII l'existence d'une application linéaire bornée $\beta \in P\phi X$ telle que $\alpha = \varphi\beta = (P\phi\varphi)(\beta)$. Ceci montre que la suite

$$P\phi X \xrightarrow[P\phi\varphi]{} P\phi Y \xrightarrow[P\phi\psi]{} P\phi Z$$

est exacte.

Corollaire 4.3: Une application linéaire bornée $\varphi : X \longrightarrow Y$ est un monomorphisme de QESP si et seulement si elle est injective. Elle est un épimorphisme si et seulement si tout borné de Y est l'image par φ d'un borné de X.

5. Objets projectifs dans QESP.

Rappelons d'abord le lemme de Yoneda:

Lemme 5.1 (Yoneda): *Soit P un objet de K et F un objet de QESP. L'application* $P\phi F \longrightarrow F(P) : \Phi \longrightarrow \Phi_P(\mathrm{id}\ P)$ *est un isomorphisme.*

La démonstration est bien connue et ne présente aucune difficulté.

c.q.f.d.

Ce lemme permet d'identifier $P\phi F$ à $F(P)$? Si Γ est une transformation naturelle du foncteur F dans le foncteur G, il résulte de la formule évidente $\Gamma_P(\Phi_P(\mathrm{id}\ P)) = (\Gamma\Phi)_P(\mathrm{id}\ P)$ que l'application linéaire Γ_P s'identifie à $P\phi\Gamma$.

Proposition 5.2 : *Tout objet de la catégorie K est projectif dans la catégorie QESP.*

Soient P unobjet de K, $X \xrightarrow{\Gamma} Y$ un épimorphisme de QESP et $P \xrightarrow{\Psi} Y$ un morphisme de QESP. On a $\Psi \in P\phi Y = Y(P)$. Puisque Γ est un épimorphisme, il existe $\Phi \in P\phi X$ tel que $\Gamma_P(\Phi) = \Psi$. Donc $\Gamma\Phi = \Psi$.

c.q.f.d.

Proposition 5.3: *Toute somme dans EBCS d'objets de K est un objet projectif de QESP.*

Cette proposition découle immédiatement de la suivante:

Proposition 5.4: *Les sommes d'objets de EBCS sont les mêmes dans EBCS et dans QESP.*

Soit $(E_i)_{i\in I}$ une famille d'espaces bornologiques convexes séparés. Désignons par E la somme de cette famille dans EBCS. Donnons-nous un foncteur Z, objet de QESP et, pour tout i, une transformation naturelle de E_i dans Z : Φ_i. Alors, pour tout objet P de K, $(\Phi_i)_P$ est une application linéaire de $P\phi E_i$ dans $Z(P)$. Il existe donc une application linéaire unique Φ_P de $\bigoplus_{i\in I} (P\phi E_i)$ dans $Z(P)$ dont la restriction à $P\phi E_i$ est $(\Phi_i)_P$.

P étant un espace normé, on a $\bigoplus_{i\in I} (P\phi E_i) = P\phi E$, et il est aisé de vérifier que les applications Φ_P constituent effectivement une transformation naturelle de E dans Z.

c.q.f.d.

Tant que nous y sommes, remarquons aussi que

Proposition 5.5: *Les produits d'objets de EBCS sont les mêmes dans EBCS et dans QESP.*

Cela résulte immédiatement de l'isomorphisme $P\phi(\prod_{i\in I} E_i) = \prod_{i\in I} P\phi E_i$.

c.q.f.d.

Proposition 5.6: *Les objets de la catégorie K constituent une famille de générateurs projectifs de la catégorie QESP.*

Il faut montrer que si $Z \xrightarrow{\Phi} T$ est un morphisme non nul de QESP, on peut trouver un morphisme $\Psi : P \longrightarrow Z$, où P est un objet de K, tel que $\Phi\Psi \neq 0$. Puisque $\Phi \neq 0$, il existe un objet P de K tel que $\Phi_P(Z(P)) \neq 0$. D'après le lemme de Yoneda, $Z(P) = P\phi Z$ et $\Phi_P = P\phi\Phi$. Ainsi l'image de $P\phi\Phi$ est non nulle, ce qui entraine l'existence d'un $\Psi \in P\phi Z$ tel que $\Phi\Psi \neq 0$.

c.q.f.d.

Proposition 5.7: *Quel que soit le Q-espace Z, on peut trouver une famille* $(P_i)_{i\in I}$ *d'objets de K et un épimorphisme* $\Phi : \bigoplus_{i\in I} P_i \longrightarrow Z$.

Considérons l'ensemble $A = G\phi Z$ où $G = \bigoplus_{P\in \mathrm{Ob}K} P$. A tout $\alpha \in A$, on associe l'espace bornologique convexe séparé $G_\alpha = G$. On considère alors l'espace $Y = \bigoplus_{\alpha\in A} G$. Cet espace est une somme d'objets de K puisqu'il en est ainsi de chacun des G . On définit un morphisme $Y \xrightarrow{\Phi} Z$ par la condition que la restriction de Φ à G_α est précisément α. Si $Z \xrightarrow{\Psi} T$ est un morphisme tel que $\Psi\Phi = 0$, on a $\Psi\alpha = 0$ quel que soit $\alpha \in G\phi Z$. Donc la restriction de $\Psi\alpha$ à tout objet P de K est nulle, ce qui entraine d'après la proposition précédente que $\Psi = 0$.

c.q.f.d.

Remarque: Choisissons pour K la catégorie des espaces normés du type $\underline{C}^{(X)}$, avec $X \in \mathcal{U}_1$. Il est clair qu'au lieu de prendre $G = \bigoplus_{X\in\mathcal{U}_1} \underline{C}^{(X)}$, on pourrait choisir $G = \bigoplus_{c\in\mathfrak{C}} \underline{C}^{(X_c)}$ où $\mathfrak{C}$ est l'ensemble des cardinaux des éléments de $\mathcal{U}_1$, et où pour tout $c \in \mathcal{C}$, X_c est un ensemble de $\mathcal{U}_1$ de cardinal c. Cet espace G est, lui-aussi un générateur de QESP.

<u>Corollaire 5.8: Un Q-espace est projectif si et seulement si c'est une sommande directe d'une somme d'objets de K.</u>

6. Structure des Q-espaces.

<u>Théorème 6.1: Tout Q-espace</u> Z <u>peut-être inséré dans une suite exacte</u>

$$0 \longrightarrow X \longrightarrow Y \longrightarrow Z \longrightarrow 0$$

<u>où X et Y sont deux espaces bornologiques convexes séparés.</u>

On écrit alors $Z = Y|X$.

Compte tenu de la proposition 5.7, il suffit de démontrerla proposition suivante:

<u>Proposition 6.2 : Si F est un Q-espace, Y un espace bornologique convexe séparé et</u> $F \longrightarrow Y$ <u>un monomorphisme, alors F est isomorphe dans la catégorie QESP à un espace bornologique convexe séparé.</u>

On identifiera l'espace vectoriel $C \pitchfork Y$ à l'espace vectoriel sous-jacent à Y.

Désignons par X l'espace vectoriel $\Phi_C(F(C))$. X est un sous-espace vectoriel de $C\pitchfork Y$. On va munir X d'une bornologie convexe qui le rend isomorphe à F. Pour tout objet P de K, on notera B_P la boule unité de P.

Si $P \in \mathrm{Ob}K$ et $u \in F(P)$, $\Phi_P(u)$ est une application linéaire bornée de P dans Y. Montrons que l'image de $\Phi_P(u)$ est incluse à X. Soit $x \in P$. Notons $x^\vee$ l'application linéaire bornée $C \longrightarrow P$ défihie par $x^\vee(1) = x$. Le carré suivant est commutatif:

$$\begin{tikzcd} F(P) \arrow[r, "\Phi_P"] \arrow[d, "F(x^\vee)"] & P\pitchfork Y \arrow[d, "x^\vee \pitchfork Y"] \\ F(C) \arrow[r, "\Phi_C"] & C\pitchfork Y \end{tikzcd}$$

On en déduit que $\Phi_P(u) \circ x^\vee = \Phi_C \circ F(x^\vee)(u)$. Donc $\Phi_P(u)(x) \in \Phi_C(F(C)) = X$.

On dira alors qu'une partie A de X est bornée s'il existe un objet P de K et un $u \in F(P)$ tels que $A \subset \Phi_P(u)(B_P)$. Il est immédiat qu'on définit ainsi une bornologie convexe sur X. Cette bornologie est de plus séparée car l'application canonique $X \longrightarrow Y$ est bornée.

Φ est ainsi devenu un monomorphisme de F dans X, et il reste à montrer que Φ est un isomorphisme, c'est à dire que pour tout objet P, Φ_P est un isomorphisme. Soit $\alpha \in P\pitchfork X$. L'ensemble αB_P est borné dans X, est donc inclus à un ensemble du type $\Phi_R(v)(B_R)$, où R est un objet de K et $v \in F(R)$. Puisque P est projectif et que l'image de $\alpha \in P\pitchfork X$ est incluse à celle de $\Phi_R(v) \in R\pitchfork X$, il existe $\beta \in P\pitchfork R$ tel que $\alpha = \Phi_R(v)\circ\beta$. Considérons alors le carré commutatif

$$\begin{tikzcd} F(R) \arrow[r, "\Phi_R"] \arrow[d, "F(\beta)"] & R\pitchfork X \arrow[d, "\beta\pitchfork X"] \\ F(P) \arrow[r, "\Phi_P"] & P\pitchfork X \end{tikzcd}$$

On a $(\beta \pitchfork X)\circ\Phi_R(v) = \Phi_P(F(\beta)(v))$, c'est à dire $\alpha = \Phi_R(v)\circ\beta = \Phi_P(F(\beta)(v))$

c.q.f.d.

<u>Remarque</u>: D'après ce qui précède, il est clair qu'on peut supposer dans l'énoncé du théorème 6.1 que Y est projectif.

Considérons à présent un espace bornologique convexe séparé Y et un sous-espace fermé X de Y muni de la bornologie induite par Y. Il convient de comparer l'espace bornologique convexe séparé Y/X au Q-espace $Y|X$.

<u>Proposition 6.3: Si Y est un espace bornologique convexe séparé, et X un sous-espace fermé de Y, muni de la bornologie induite par Y, alors les Q-espaces Y/X et $Y|X$ sont isomorphes.</u>

Soit P un objet de K. On déduit aisément de ce que P est projectif que les espaces vectoriels $P\pitchfork(Y/X)$ et $P\pitchfork Y/P\pitchfork X$ sont isomorphes. De plus cet isomorphisme est naturel en P.

c.q.f.d.

<u>Proposition 6.4: Soit $(Z_i)_{i\in I}$ une famille de Q-espaces. Pour tout $i \in I$, soit $Z_i = Y_i|X_i$. La somme de la famille (Z_i) est le Q-espace</u>

$$\bigoplus_{i\in I} Y_i \,\Big|\, \bigoplus_{i\in I} X_i$$

Cette proposition se déduit immédiatement de ce que dans QESP, les limites inductives filtrantes sont exactes.

c.q.f.d.

Proposition 6.5: Soit $(Z_i)_{i\in I}$ une famille de Q-espaces. Pour tout $i\in I$, soit $Z_i = Y_i|X_i$. Le produit de la famille (Z_i) est le Q-espace

$$\prod_{i\in I} Y_i \mid \prod_{i\in I} X_i$$

Soit $Z = \prod_{i\in I} Z_i$. Pour tout objet P de K, on a $Z(P) = \prod_i Z_i(P)$ $= \prod_i (P\hat{\otimes}Y_i/P\hat{\otimes}X_i) = \prod_i P\hat{\otimes}Y_i \,/\, \prod_i P\hat{\otimes}X_i$. On en déduit la thèse.

c.q.f.d.

7. Un foncteur canonique de QESP dans EBCS.

Nous traiterons dans ce numéro le problème suivant: le foncteur d'immersion de EBCS dans QESP admet-il un adjoint à gauche ? Autrement dit, peut-on associer à tout Q-espace Z un objet bZ de EBCS tel qu'on ait un isomorphisme naturel (en Z, objet de QESP et en X, objet de EBCS) : $Z\hat{\otimes}X \cong bZ\hat{\otimes}X$. La réponse est positive:

Théorème 7.1: Soit $Z = Y|X$ un Q-espace. Soit $\tilde{X}$ le plus petit sous-espace fermé de Y qui contienne X, muni de la bornologie induite par Y. Quel que soit l'espace bornologique convexe séparé U, les espaces vectoriels $Z\hat{\otimes}U$ et $(Y/\tilde{X})\hat{\otimes}U$ sont isomorphes.

Posons $bZ = Y/\tilde{X}$, et définissons un morphisme e_Z de Z dans bZ: pour tout objet P de K, $(e_Z)_P$ est l'application linéaire canonique de $Z(P) = P\hat{\otimes}Y/P\hat{\otimes}X$ sur $P\hat{\otimes}Y/P\hat{\otimes}\tilde{X}$ (on a $P\hat{\otimes}X \subset P\hat{\otimes}\tilde{X}$). On vérifie aisément que e_Z est effectivement une transformation naturelle de foncteur, c'est à dire un morphisme de QESP. De plus, e_Z est un épimorphisme.

Considérons à présent un espace bornologique convexe séparé U et un morphisme $\psi \in Z\hat{\otimes}U$. Si Σ est l'épimorphisme canonique $Y \longrightarrow Z$, le morphisme $\theta = \psi\Sigma$ est une application linéaire bornée de Y dans U nulle sur X. Elle est donc également nulle sur $\tilde{X}$ et définit par passage au quotient une application linéaire bornée $\tilde{\theta}$ de $Y/\tilde{X}$ dans U. Il est immédiat que $\psi = \tilde{\theta}\, e_Z$. De plus l'unicité d'une application $\tilde{\theta}$ vérifiant cette relation résulte de ce que e_Z est un épimorphisme. On vérifie à présent sans difficultés que l'application $Z\hat{\otimes}U \longrightarrow bZ\hat{\otimes}U$ est un isomorphisme.

c.q.f.d.

Le foncteur b:QESP $\longrightarrow$ EBCS n'est pas encore entièrement défini: il reste à définir $b\Phi$ si $\Phi: Z \longrightarrow T$ est un morphisme de QESP. Si e_T est l'épimorphisme canonique de T sur bT, le morphisme $e_T\Phi$ se factorise à travers bZ: il existe une et une seule application linéaire bornée $b\Phi$ de bZ dans BT qui rend commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "e_Z"] \arrow[d, "\Phi"'] & bZ \arrow[d, "b\Phi"] \\ T \arrow[r, "e_T"'] & bT \end{tikzcd}$$

La définition du foncteur b, adjoint à gauche de l'immersion canonique de EBCS dans QESP est ainsi terminée.

Remarques:

1) Le Q-espace Z est un espace bornologique convexe séparé si et seulement si $Z = bZ$.

2) L'espace bZ peut être nul sans que Z le soit.

Corollaire 7.2: L'immersion canonique de EBCS dans QESP commute avec les limites projectives (en particulier avec les produits et les noyaux). Le foncteur b commute avec les limites inductives (en particulier avec les conoyaux et les sommes.)

En effet, b admet un adjoint à droite et l'immersion canonique admet un adjoint à gauche.

c.q.f.d.

Nous verrons au chapitre III que l'immersion canonique de EBCS dans QESP commute aussi avec les limites inductives filtrantes moniques.

8. Morphismes induits.

Définition 8.1: Soient $Z_1 = Y_1|X_1$ et $Z_2 = Y_2|X_2$ deux Q-espaces. On dit qu'un morphisme $\Phi : Z_1 \longrightarrow Z_2$ est induit s'il existe une application linéaire bornée $\varphi \in Y_1 \phi Y_2$, dont la restriction à X_1 appartient à $X_1 \phi X_2$ et telle que le diagramme suivant soit commutatif:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & X_1 & \longrightarrow & Y_1 & \longrightarrow & Z_1 & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow\varphi & & \downarrow\varphi & & \downarrow\Phi & & \\ 0 & \longrightarrow & X_2 & \longrightarrow & Y_2 & \longrightarrow & Z_2 & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Remarque: Il est immédiat que $\Phi = 0 \Longleftrightarrow \varphi \in Y_1 \phi X_2$

On notera souvent $(Y_1, X_1)\phi(Y_2, X_2)$ le sous-espace vectoriel de $Y_1 \phi Y_2$ formé des applications dont la restriction à X_1 appartient à $X_1 \phi X_2$.

Proposition 8.2: Soient $Z_i = Y_i|X_i$ $(i=1,2,3)$ trois Q-espaces et $Z_1 \xrightarrow{\Phi} Z_2$, $Z_2 \xrightarrow{\Psi} Z_3$ deux morphismes induits respectivement par des applications $\varphi \in (Y_1, X_1)\phi(Y_2, X_2)$ et $\psi \in (Y_2, X_2)\phi(Y_3, X_3)$. La suite

$$Z_1 \xrightarrow[\Phi]{} Z_2 \xrightarrow[\Psi]{} Z_3$$

est exacte si et seulement si les bornés de Y_2 dont l'image par ψ est incluse et bornée dans X_3 sont exactement les parties de Y_2 incluses à la somme d'un borné de X_2 et de l'image par φ d'un borné de Y_1.

Supposons que la suite est exacte, et donnons-nous un borné B de Y_2 tel que $\psi(B)$ soit borné dans X_3. L'espace normé $(Y_2)_B$ est isomorphe à un quotient d'un objet P de K. Soit $P \xrightarrow{\sigma} (Y_2)_B$ l'épimorphisme canonique. Le diagramme suivant est commutatif, et ses lignes sont exactes:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & P\phi X_1 & \longrightarrow & P\phi Y_1 & \longrightarrow & Z_1(P) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow P\wedge\varphi & & \downarrow P\wedge\varphi & & \downarrow \Phi_P & & \\ 0 & \longrightarrow & P\phi X_2 & \longrightarrow & P\phi Y_2 & \longrightarrow & Z_2(P) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow P\wedge\psi & & \downarrow P\wedge\psi & & \downarrow \Psi_P & & \\ 0 & \longrightarrow & P\phi X_3 & \longrightarrow & P\phi Y_3 & \longrightarrow & Z_3(P) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

On a $\Psi_P(\sigma + P\phi X_2) = \psi\sigma + P\phi X_3$. Mais $\psi\sigma \in P\phi X_3$ puisque $\psi(B)$ est borné dans X_3. Donc $\Psi_P(\sigma + P\phi X_2) = 0$. Il existe donc une application linéaire bornée $\rho \in P\phi Y_1$ telle que $\sigma + P\phi X_2 = \Phi_P(\rho + P\phi X_1) = \varphi\rho + P\phi X_2$

On peut donc écrire $\sigma = \varphi\rho + \tau$ où $\rho \in P\phi Y_1$ et $\tau \in P\phi X_2$.

Par conséquent, le borné B de Y_2 qui est inclus à l'image par σ de la boule unité de P est aussi inclus à la somme d'un borné de X_2 et de l'image par φ d'un borné de Y_1. Considérons àprésent un borné A de X_2 et un borné B de Y_1. $A + \varphi(B)$ est un borné de Y_2. $\psi(A)$ est borné dans X_3 par hypothèse. $\psi(\varphi(B))$ est borné dans X_3 puisque $\psi\varphi = 0$. Donc $\psi(A + \varphi(B))$ est borné dans X_3.

Supposons à présent réalisée la condition de l'énoncé. Soit P un objet de K et $\sigma \in P\phi Y_2$ tel que $\Psi_P(\sigma + P\phi X_2) = 0$. On a alors $\psi\sigma \in P\phi X_3$. Si A est la boule unité de P, nous voyons que $\sigma(A) \subset B + \varphi(C)$, où B est borné dans X_2 et C borné dans Y_1. L'ensemble $D = \{(b,c) \mid b \in B, c \in C\}$ est borné dans $X_2 \oplus Y_1 = Z$. Et $(1, \varphi)$ est un épimorphisme de Z_D sur $(Y_2)_{B+\varphi(C)}$. Il existe donc $\tau \in P\phi Z$ tel que $\sigma = (1, \varphi)\circ\tau$. On peut écrire $\tau = (\tau_1, \tau_2)$ où $\tau_1 \in P\phi X_2$ et $\tau_2 \in P\phi Y_1$. On alors $\sigma = \tau_1 + \varphi\tau_2$, donc $\sigma + P\phi X_2 = \varphi\tau_2 + P\phi X_2 = \Phi_P(\tau_2 + P\phi X_1)$. Ceci montre que la suite donnée est exacte.

c.q.f.d.

Corollaire 8.3: Soient $Z_i = Y_i|X_i$ $(i=1,2)$ deux Q-espaces. Une application $\varphi \in (Y_1, X_1)|(Y_2, X_2)$ induit un monomorphisme de Z_1 dans Z_2 si et seulement si tout borné de Y_1 dont l'image par φ est incluse et bornée dans X_2 est lui-même inclus et borné dans X_1. φ induit un épimorphisme si et seulement si tout borné de Y_2 est inclus à la somme d'un borné de X_2 et de l'image par φ d'un borné de Y_1.

Théorème 8.4: Soit $Z = Y|X$ un Q-espace, où Y est projectif. Tout morphisme Φ de Z dans un Q-espace $T = U|V$ est induit par une application $\varphi \in (Y, X)\phi(U, V)$

C'est immédiat.

c.q.f.d.

Chapitre III.

La catégorie des Q-espaces complets.

0. Introduction.

Ce chapitre est consacré à la définition et à l'étude de la sous-catégorie pleine abélienne de QESP engendrée par les espaces bornologiques convexes complets. Cette sous-catégorie, dont les objets sont appelés des Q-espaces complets, aurait pu être définie de façon analogue à la catégorie QESP. Les Q-espaces complets seraient alors apparus comme étant des foncteurs additifs contravariants d'une catégorie K^1, satisfaisant à des axiomes analogues aux axiomes AI, AII, AIII, AIV, du n°II.2, dans la catégorie EV. Un exemple de catégorie K^1 est la catégorie dont les objets sont les espaces de Banach du type $l^1(X)$ ($X \in \mathcal{U}_1$) et dont les morphismes sont les applications linéaires continues. Nous montrons au n°6 que le point de vue que nous avons en fait adopté est équivalent à celui qui vient d'être décrit.

La présentation choisie met l'accent sur la construction du complété d'un Q-espace. On sait, [17], qu'il n'est pas toujours possible d'immerger un espace bornologique convexe séparé dans un espace bornologique convexe complet. Nous montrons au n°3 que tout objet X de EBCS peut être immergé dans un Q-espace complet, celui-ci méritant d'être appelé le complété de X. Mais nous perdons du côté des Q-espaces ce que nous avons gagné du côté des espaces bornologiques: s'il est possible de définir le complété d'un Q-espace, le morphisme canonique d'un Q-espace dans son complété n'est pas nécessairement un monomorphisme, et peut même être nul.

Le chapitre se termine par un paragraphe où nous considérons les

Q-espaces complets comme étant des foncteurs sur la catégorie K^1 mentionnée ci-dessus. Nous caractérisons les Q-espaces du type $Y|X$ où les ensembles sous-jacents à Y et X appartiennent à l'univers $\mathcal{U}_1$. Cette caractérisation fait intervenir les restrictions des Q-espaces à la sous-catégorie de K^1 dont les objets sont de cardinal inférieur à un cardinal donné. Nous montrons en particulier que tout Q-espace complet $Y|X$, où Y et X sont à bornés séparables est caractérisé par sa restriction à la sous-catégorie de K^1 dont les objets sont les espaces de Banach $l^1(X)$, avec X de cardinal au plus dénombrable.

1. Q-espaces complets.

<u>Définition 1.1: Un Q-espace Z est dit complet s'il existe une suite exacte</u> $0 \longrightarrow X \longrightarrow Y \longrightarrow Z \longrightarrow 0$ <u>où X et Y sont des espaces bornologiques convexes complets.</u>

On notera QESPC la sous-catégorie pleine de QESP dont les objets sont les Q-espaces complets. Nous utiliserons la notation EBCC pour désigner la sous-catégorie pleine de EBCS dont les objets sont les espaces bornologiques convexes complets.

Même si Z est un Q-espace complet, on peut trouver des suites exactes $0 \longrightarrow X \longrightarrow Y \longrightarrow Z \longrightarrow 0$ où X et Y sont des espaces bornologiques convexes séparés non complets. Cependant, sauf mention expresse du contraire, si un Q-espace complet est représenté par la notation $Y|X$, cela sous-entend que X et Y sont des objets de EBCC.

Il est immédiat que le foncteur canonique b: QESP $\longrightarrow$ EBCS applique QESPC sur EBCC.

Nous construirons bientôt un foncteur Chap: QESP $\longrightarrow$ QESPC adjoint à gauche de l'immersion canonique de QESPC dans QESP. Z étant un Q-espace et T un Q-espace complet, on doit donc avoir un isomorphisme naturel $Z \phi T \approx \mathrm{Chap}(Z) \phi T$. Il s'agit, on l'a deviné, de construire le complété d'un Q-espace. D'habitude, on écrira $\hat{Z}$ au lieu de Chap(Z).

2. Limites inductives dans EBCS et dans QESP.

Nous étudierons dans ce numéro le comportement du foncteur d'immersion canonique de EBCS dans QESP par rapport aux limites inductives filtrantes.

Soit I un ensemble ordonné filtrant et $(X_i, \lambda_{ji})_{i \in I}$ un spectre inductif d'espaces bornologiques convexes séparés. En général, ce spectre a des limites inductives différentes dans les catégories EBCS et QESP.

Donnons un exemple: soit $I = \mathbb{N}$. Pour tout naturel i, soit X_i l'espace de Banach des suites absolument sommables de nombres complexes: l^1. Pour $i \leq j$, posons $\lambda_{ji} = \lambda^{j-i}$, où λ est l'opérateur

$$\lambda : l^1 \longrightarrow l^1 : (x_1, x_2, \ldots) \longmapsto (x_2, x_3, \ldots)$$

On a donc en fait le spectre inductif $l^1 \xrightarrow{\lambda} l^1 \xrightarrow{\lambda} l^1 \xrightarrow{\lambda} \ldots$

La limite inductive de ce spectre dans EBCS est nulle. En effet, si (f_i) est une famille d'applications bornées de l^1 dans un espace bornologique convexe séparé E telle que pour $i \leq j$, on ait $f_i = f_j \lambda^{j-i}$, alors chaque f_i est nulle sur le sous-espace de l^1 formé des suites presque nulles, donc aussi sur l'adhérence de ce sous-espace, c'est à dire sur l^1 tout entier.

La limite inductive de ce spectre dans QESP n'est pas nulle. En effet, le sous-espace $P = \mathbb{C}^{(\mathbb{N})}$ de l^1, formé des suites presque nulles est un objet de la catégorie K. Et la limite inductive du spectre d'espaces vectoriels

$$P \phi l^1 \xrightarrow{P\phi\lambda} P \phi l^1 \xrightarrow{P\phi\lambda} P \phi l^1 \xrightarrow{P\phi\lambda} \ldots$$

n'est pas nulle. Par exemple, l'application canonique de P dans l^1 n'est envoyée sur 0 par aucune des applications $(P\phi\lambda)^i$. On montre que la limite inductive dans QESP du spectre donné est isomorphe à $l^1|P$ où P est comme ci-dessus le sous-espace de l^1 formé des suites presque nulles, muni cette fois de la bornologie convexe la plus fine (pour laquelle les bornés sont de rang fini).

Proposition 2.1: Soit (X_i, λ_{ji}) un spectre inductif filtrant d'espaces bornologiques convexes séparés. Si Z est la limite inductive de ce spectre dans la catégorie QESP et X sa limite inductive dans EBCS, alors $X = bZ$.

Cette proposition a déjà été démontrée (Corollaire II.7.2)

c.q.f.d.

Il y a un cas important où Z est un objet de EBCS.

Proposition 2.2: Soit (X_i, λ_{ji}) un spectre inductif filtrant d'espaces bornologiques convexes séparés. Si chacune des applications linéaires bornées λ_{ji} est injective, alors le Q-espace limite inductive du spectre dans QESP est un objet de EBCS.

Soit X la limite inductive du spectre dans EBCS, et λ_i l'application canonique de X_i dans X, application dont on sait qu'elle est injective. Il suffit de montrer que pour tout objet P de K l'espace vectoriel $P\phi X$ est la limite du spectre $(P\phi X_i, P\phi\lambda_{ji})$. En fait, c'est même vrai dès que P est un espace normé. Car un borné de X est l'image par l'une des applications λ_i d'un borné de X_i. Il en résulte que tout élément de $P\phi X$ provient d'un élément de $P\phi X_i$. L'application canonique de $\varinjlim P\phi X_i$ dans $P\phi X$ est donc surjective. Il est tout aussi immédiat que cette application est injective.

c.q.f.d.

3. Le complété d'un espace bornologique convexe séparé.

Si X est un espace normé, la notation $\hat{X}$ désigne, comme à l'habitude, l'espace de Banach complété de X.

Soit X un espace bornologique convexe séparé. On sait que X est la limite inductive dans EBCS et dans QESP d'un spectre inductif filtrant (X_i, λ_{ji}) d'espaces normés, les applications λ_{ji} étant de plus injectives.

Chacune des applications λ_{ji} peut être prolongée en une application $\hat{\lambda}_{ji}$ de l'espace de Banach $\hat{X}_i$ dans $\hat{X}_j$. On construit ainsi un spectre inductif filtrant d'espaces de Banach, dont nous noterons la limite dans QESP par $\hat{X}$. On définit de façon évidente un morphisme canonique de X dans $\hat{X}$.

Proposition 3.1: Soit X un espace bornologique convexe séparé. Le morphisme canonique de X dans $\hat{X}$ est un monomorphisme. Le Q-espace $\hat{X}$ est complet

La première affirmation résulte de ce quel les injections canoniques $X_i \longrightarrow \hat{X}_i$ définissent par passage à la limite un monomorphisme puisque dans QESP les limites inductives filtrantes sont exactes.

Pour démontrer la seconde affirmation, on constate que $\hat{X}$ est isomorphe au Q-espace $S|T$ où $S = \bigoplus_i \hat{X}_i$ et où T est le sous-espace deS somme de la famille des sous-espaces $(\mu_i - \mu_j \hat{\lambda}_{ji})(\hat{X}_i)$ (si μ_i est l'application canonique de $\hat{X}_i$ dans S) muni de la plus fine des bornologies convexes pour lesquelles sont bornées les applications $\mu_i - \mu_j \hat{\lambda}_{ji}$. On vérifie aisément que S et T sont effectivement des espaces bornologiques convexes complets.

c.q.f.d.

Remarque: On déduit aisément de la proposition 2.2 que si X est un espace bornologique convexe complet, alors $X = \hat{X}$.

Nous voulons maintenant montrer que le Q-espace complet $\hat{X}$ mérite d'être appelé le complété de X. Nous commencerons par le cas où X est un espace normé.

Proposition 3.2: Soit X un espace normé. Tout morphisme de X dans un Q-espace complet Z se factorise de façon unique à travers l'espace de Banach $\hat{X}$.

Démontrons d'abord l'existence de la factorisation. Soit P un espace normé projectif tel que $X = P/Q$. Si $Z = U|V$, où U et V sont deux espaces bornologiques convexes complets, le morphisme $\Phi : X \longrightarrow Z$ est induit par une application linéaire bornée $\varphi : P \longrightarrow U$. Puisque U est complet, se prolonge en une application linéaire bornée $\hat{\varphi} : \hat{P} \longrightarrow U$. L'espace de Banach $\hat{X}$ est le quotient de $\hat{P}$ par $\bar{Q}$ (adhérence de Q dans $\hat{P}$). Et $\hat{\varphi}$ applique $\bar{Q}$ dans V puisque φ applique Q dans V et que V est complet. Donc $\hat{\varphi}$ induit un morphisme $\hat{\Phi} : \hat{X} \longrightarrow Z$, et on voit aisément que $\hat{\Phi}\eta = \Phi$, si η est l'injection canonique $X \longrightarrow \hat{X}$.

Pour démontrer l'unicité, nous utilisons le lemme suivant:

Lemme 3.3: Soient X un espace normé, $\hat{X}$ son complété et P un espace normé projectif dans QESP tel qu'on ait une suite exacte

$$0 \longrightarrow Q \xrightarrow{\alpha} P \xrightarrow{\sigma} \hat{X} \longrightarrow 0$$

Si Γ est l'épimorphisme canonique $\hat{X} \longrightarrow \hat{X}|X$, soit $\beta : R \longrightarrow P$ un morphisme noyau de l'épimorphisme $\Gamma\sigma$. Alors R est un espace normé, et $\hat{\beta}$ est un isomorphisme d'espaces de Banach de $\hat{R}$ sur $\hat{P}$.

Démonstration du lemme:

Les Q-espaces $P|R$ et $\hat{X}|X$ sont isomorphes. Appliquons le foncteur b:

$$b(P|R) = P/\bar{R} \cong \hat{X}/\bar{X} = 0$$

Ainsi R est un sous-espacevectoriel dense de P. Il reste à montrer que la bornologie de R est induite par celle de P. Soient B la trace sur R de la boule unité de P et $E \xrightarrow{\nu} P_B$ une application linéaire bornée surjective, E étant un espace normé projectif. Puisque R est le noyau de $\Gamma\sigma$, l'espace vectoriel $E\phi R$ est le noyau de l'application linéaire $\Gamma_E \circ (E\phi\sigma) : E\phi P \longrightarrow E\phi\hat{X}/E\phi X$. Pour montrer que B est borné dans R, il suffit évidemment de montrer que $\nu \in E\phi R$, c'est à dire que $(\Gamma_E \circ (E\phi\sigma))(\nu) = 0$ ou encore $\sigma\nu \in E\phi X$. Or en passant aux espaces vectoriels sous-jacents, on déduit de $\nu(E) \subset R$ que $\sigma\nu(E) \subset X$. Mais la bornologie de X est induite par celle de $\hat{X}$. Donc $\sigma\nu \in E\phi X$.

c.q.f.d.

Démontrons maintenant l'unicité de $\hat{\Phi}$: Soit $Z = U|V$ un Q-espace complet et $\hat{X} \xrightarrow{\hat{\Phi}} Z$ un morphisme tel que $\hat{\Phi}\eta = 0$. Alors $\hat{\Phi}$ se factorise à travers $\hat{X}|X$: $\hat{\Phi} = \Psi\Gamma$ (où Γ a la même signification que dans le lemme ci-dessus). Considérons alors des suites exactes $0 \longrightarrow Q \longrightarrow P \xrightarrow{\sigma} \hat{X} \longrightarrow 0$ et $0 \longrightarrow R \xrightarrow{\beta} P \xrightarrow{\Gamma\sigma} \hat{X}|X \longrightarrow 0$ où P est une espace normé projectif. Puisque P est projectif, Ψ est induit par une application linéaire bornée $\psi : P \longrightarrow U$. Les espaces U et V étant complets, ψ se prolonge à $\hat{P}$ et $\hat{R}$. On arrive ainsi au diagramme suivant où, d'après le lemme, l'application $\hat{\beta}$ est un isomorphisme:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & R \arrow[rr, "\beta"] \arrow[dd] \arrow[dr] & & P \arrow[rr, "\Gamma\sigma"] \arrow[dd] \arrow[dr, "\psi"] & & \hat{X}|X \arrow[rr] \arrow[dr, "\Psi"] & & 0 \\
& 0 \arrow[r] & V \arrow[rr] & & U \arrow[rr] & & Z \arrow[r, dashed] & 0 \\
0 \arrow[r] & \hat{R} \arrow[rr, "\hat{\beta}"] \arrow[ur] & & \hat{P} \arrow[r] \arrow[ur, "\hat{\psi}"'] & 0
\end{tikzcd}$$

Puisque $\hat{\beta}$ est un isomorphisme, $\hat{\psi} \in P\phi V$. Ceci entraine que $\psi \in P\phi V$, et par voie de conséquence que $\Psi = 0$ et $\Phi = 0$.

c.q.f.d.

Nous pouvons maintenant démontrer la propriété universelle du complété d'un espace bornologique convexe séparé:

Théorème 3.4: Soit X un espace bornologique convexe séparé. A tout morphisme Φ de X dans un Q-espace complet Z, on peut associer un et un seul morphisme $\hat{\Phi}$ de $\hat{X}$ dans Z tel que $\Phi = \hat{\Phi}\eta$, si η est le morphisme canonique de X dans le Q-espace complet $\hat{X}$.

La démonstration de ce théorème est purement routinière, compte tenu de la proposition 3.2, et de ce que, si X est la limite inductive des espaces normés X_i, alors $\hat{X}$ est la limite inductive des espaces de Banach $\hat{X}_i$.

c.q.f.d.

Si $X \xrightarrow{\alpha} Y$ est une application linéaire bornée, on définit de façon évidente un morphisme $\hat{\alpha} : \hat{X} \longrightarrow \hat{Y}$ qui prolonge α.

Si X est un espace bornologique convexe séparé, il résulte de la définition du foncteur b que toute application linéaire bornée de X dans un espace bornologique convexe complet Y se factorise de façon unique à travers l'espace $b\hat{X}$.

4. Conoyaux dans QESPC.

Les paragraphes 4 à 6 seront consacrés à la démonstration de ce que la catégorie QESPC est abélienne.

Proposition 4.1: Soit P un Q-espace projectif. Si Z et T sont deux Q-espaces complets et $Z \xrightarrow{\Phi} T$ un épimorphisme de QESP, alors à tout morphisme $\Gamma : \hat{P} \longrightarrow T$, on peut associer un morphisme $\Delta : \hat{P} \longrightarrow Z$ tel que $\Gamma = \Phi\Delta$.

Puisque P est projectif, P est un espace bornologique convexe séparé. Désignons par η l'application linéaire canonique $P \longrightarrow \hat{P}$. Il existe un morphisme $\Delta_1 : P \longrightarrow Z$ tel que $\Gamma\eta = \Phi\Delta_1$. Mais Δ_1 se prolonge à $\hat{P}$ puisque Z est complet: $\Delta_1 = \Delta\eta$.

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[r, "\eta"] \arrow[d, "\Delta_1"'] & \hat{P} \arrow[d, "\Gamma"] \arrow[dl, "\Delta"'] \\
Z & T \arrow[l, "\Phi"]
\end{tikzcd}$$

On a alors $\Gamma\eta = \Phi\Delta\eta$, ce qui entraine d'après le théorème 3.4 que $\Gamma = \Phi\Delta$.

c.q.f.d.

Dès qu'on aura identifié les épimorphismes de QESPC, on déduira de cette proposition que $\hat{P}$ est projectif dans QESPC.

Théorème 4.2: Soient $Z_1 = Y_1|X_1$ et $Z_2 = Y_2|X_2$ deux Q-espaces complets. Le conoyau dans QESP d'un morphisme $\Phi : Z_1 \longrightarrow Z_2$ appartient à QESPC (et est donc aussi un conoyau de Φ dans QESPC).

Soit $Z_2 \xrightarrow{\Psi} T$ un morphisme conoyau dans QESP de Φ.
Soient E un espace bornologique convexe séparé, somme d'objets de K, et $E \xrightarrow{\Sigma} Z_1$ un épimorphisme (II.5.7). Puisque E est projectif, le morphisme $\Phi\Sigma : E \longrightarrow Z_2$ se relève en un morphisme $E \xrightarrow{\Theta} Y_2$. Puisque Z_1 et Y_2 sont complets, les morphismes Σ et Θ se prolongent à $\hat{E}$ en des morphismes $\Sigma^\wedge$ et $\Theta^\wedge$ qui vérifient encore la relation $\Phi\Sigma^\wedge = \Delta\Theta^\wedge$ (Δ est l'épimorphisme canonique de Y_2 sur Z_2) Il est à noter que $\hat{E}$ est un espace bornologique convexe complet, et que $\Sigma^\wedge$ est encore un épimorphisme. Considérons alors le diagramme suivant:

$$\begin{tikzcd}
& X_2 \oplus \hat{E} \arrow[dr, "\Xi"] & \hat{E} \arrow[r, "\Sigma^\wedge"] \arrow[d, "\Theta^\wedge"] & Z_1 \arrow[d, "\Phi"] & \\
0 \arrow[r] & X_2 \arrow[r, "\Gamma"] & Y_2 \arrow[r, "\Delta"] \arrow[dr, "\Psi\Delta"'] & Z_2 \arrow[r] \arrow[d, "\Psi"] & 0 \\
& & & T &
\end{tikzcd}$$

Montrons que $\Psi\Delta$ est un conoyau de $\Xi = (\Gamma, \Theta^\wedge)$. Il suffit de montrer que pour tout objet P de K, le noyau de $\Psi_P\Delta_P$ est l'image de $\Xi_P = P\phi\Xi$.

Soit $f \in P\phi Y_2$. On a:

$$\begin{aligned} f \in \operatorname{Ker} \psi_p \Delta_p &\Longleftrightarrow \Delta_p(f) \in \operatorname{Ker} \psi_p \\ &\Longleftrightarrow \exists\, g \in Z_1(P) : \Delta_p(f) = \phi_p(g) \\ &\Longleftrightarrow \exists\, h \in P\phi\hat{E} : \Delta_p(f) = \phi_p \Sigma^{\wedge}_p(h) = \Delta_p \Theta^{\wedge}_p(h) \\ &\Longleftrightarrow \exists\, h \in P\phi\hat{E} : f - \Theta^{\wedge}_p(h) \in \operatorname{Ker}\Delta_p = \operatorname{Im}\Gamma_p \\ &\Longleftrightarrow f \in \operatorname{Im}\Gamma_p + \operatorname{Im}\Theta^{\wedge}_p = \operatorname{Im}\Xi_p \end{aligned}$$

On a ainsi trouvé deux espaces bornologiques convexes complets $X_2 + \hat{E}$, Y_2 et une application linéaire bornée $\Xi : X_2 \oplus \hat{E} \longrightarrow Y_2$ dont T est le conoyau. Factorisons Ξ à travers son image: $\Xi = \Xi_2 \Xi_1$ où Ξ_1 est un épimorphisme $X_2 \oplus \hat{E} \longrightarrow S$ et où Ξ_2 est un monomorphisme $S \longrightarrow Y_2$.

L'espace S est encore un espace bornologique convexe complet, et cette fois, on a une suite exacte $0 \longrightarrow S \longrightarrow Y_2 \longrightarrow T \longrightarrow 0$ où S et Y_2 sont des objets de EBCC.

c.q.f.d.

Corollaire 4.3: Un morphisme de QESPC est un épimorphisme de QESPC si et seulement si c'est un épimorphisme de QESP.

Corollaire 4.4: Si P est un Q-espace projectif, alors le Q-espace complet $\hat{P}$ est projectif dans QESPC.

Cela se déduit immédiatement de la proposition 4.' et du corollaire 4.3.

Corollaire 4.5: Si X est un ensemble appartenant à l'univers $\mathcal{U}_1$, l'espace de Banach $l^1(X)$ est un objet projectif de QESPC.

En effet, on a vu au paragraphe II.2 qu'il est permis de prendre pour catégorie K la sous-catégorie pleine de la catégorie des espaces normés dont les objets sont du type $\underline{C}^{(X)}$, avec $X \in \mathcal{U}_1$. Et le complété de $\underline{C}^{(X)}$ est $l^1(X)$.

c.q.f.d.

Corollaire 4.6: Tout Q-espace Z peut s'écrire sous la forme $Z = Y|X$ où X et Y sont deux espaces bornologiques convexes complets, Y étant de plus projectif dans QESPC.

Ecrivons d'abord $Z = Y_1|X_1$ où Y_1 et X_1 sont deux objets de EBCC. Soient $Y \xrightarrow{\sigma} Y_1$ un épimorphisme, où Y est une somme d'espaces de Banach du type $l^1(X)$. Soit X le sous-espace vectoriel de Y, image réciproque de X_1 par σ, muni de la moins fine des bornologies convexes qui sont plus fines que la bornologie induite par Y et pour lesquelles la restriction de σ à X appartient à $X\phi X_1$. (X est le produit fibré de Y et X_1 au-dessus de Y_1, dans la catégorie EBCC) X est un espace bornologique convexe complet, et $\sigma \in (Y,X)\phi(Y_1,X_1)$. Donc σ induit un morphisme de $Y|X$ dans $Y_1|X_1$ qui, d'après le corollaire II.8.3 est un isomorphisme.

c.q.f.d.

Corollaire 4.7 : Un Q-espace complet est projectif dans QESPC si et seulement si c'est une sommande directe d'une somme d'espaces de Banach du type $l^1(X)$. C'est donc un espace bornologique convexe complet.

5. Noyaux dans QESPC.

Théorème 5.1: Si le morphisme $X \xrightarrow{\Phi} Y$ est noyau dans QESPC d'un morphisme $\Psi : Y \longrightarrow Z$ de QESPC, alors Φ appartient à QESPC. (et est donc aussi noyau de Ψ dans QESPC.)

Ecrivons $Y = Y_1|Y_2$ et $Z = Z_1|Z_2$ où les Y_i et Z_i sont des espaces bornologiques convexes complets. D'après le corollaire 4.6, on peut supposer que Y_1 est projectif dans QESPC. Il en résulte que le morphisme Ψ est induit par une application linéaire bornée $\psi \in (Y_1,Y_2)\phi(Z_1,Z_2)$.

Soit U le produit fibré dans la catégorie EBCC de Y_1 et Z_2 au-dessus de Z_1. Le diagramme suivant est commutatif:

$$\begin{array}{ccccc} U & \xrightarrow{\pi_1} & Y_1 & \xrightarrow{\Sigma_1} & Y \\ \downarrow{\scriptstyle \pi_2} & & \downarrow{\scriptstyle \psi} & & \downarrow{\scriptstyle \Psi} \\ Z_2 & \xrightarrow{\mu} & Z_1 & \xrightarrow{\Sigma_2} & Z \end{array}$$

Posons $\Gamma = \Sigma_1 \pi_1$. La suite $U \xrightarrow{\Gamma} Y \xrightarrow{\Psi} Z$ est exacte. En effet, on a d'abord clairement $\Psi\Gamma = 0$. Ensuite, soit P un objet de K et $f \in P\phi Y_1$ tel que $f + P\phi Y_2 \in \operatorname{Ker} \Psi_p$. On a donc $\psi f \in P\phi Z_2$, de sorte qu'on peut écrire $\psi f = \mu\psi f$. U étant le produit fibré de Y_1 et Z_2 au-dessus de Z_1, il existe $g \in P\phi U$ telle que $f = \pi_1 g$ et $\psi f = \pi_2 g$. On a alors

$$\Gamma_P(g) = \pi_2 g + P\phi Y_2 = f + P\phi Y_2$$

Ainsi la suite considérée est exacte. En réappliquant ce résultat au morphisme Γ lui-même, on trouve une suite exacte $V \xrightarrow{\theta} U \xrightarrow{\Gamma} Y \xrightarrow{\psi} Z$ où U et V sont des objets de EBCC. Il en résulte qu'un objet noyau de ψ est aussi un objet conoyau de θ et est donc un Q-espace complet, d'après le théorème 4.2.

c.q.f.d.

<u>Corollaire 5.2</u> : <u>Un morphisme de QESPC est un monomorphisme de QESPC si et seulement si c'est un monomorphisme de QESP.</u>

6. Abélianité de QESPC.

D'après les paragraphes 4 et 5, l'immersion canonique QESPC $\longrightarrow$ QESP commute avec les noyaux et les conoyaux. Elle est donc exacte. Des formules donnant la somme et le produit d'une famille de Q-espaces (II.6.4, II.6.5), on déduit qu'elle commute aussi avec les sommes et les produits, donc avec les limites inductives et projectives. Tenant compte de ce que la catégorie QESP est abélienne et comporte des limites inductives exactes, (théorème II.3.2), le théorème suivant est immédiat:

<u>Théorème 6.1</u>: <u>La catégorie QESPC est une sous-catégorie pleine, abélienne de QESP. Elle admet des limites inductives filtrantes exactes. L'immersion canonique de QESPC dans QESP est exacte et commute avec les limites inductives et projectives.</u>

D'après un théorème dû à Freyd (voir [15] p.109), toute catégorie abélienne comportant des limites inductives et un ensemble générateurs de projectifs est équivalente à la catégorie des foncteurs contravariants de la sous-catégorie pleine dont les objets sont ces générateurs projectifs dans la catégorie des groupes abéliens. Ce théorème nous permet d'énoncer le résultat suivant:

<u>Théorème 6.2</u>: <u>Soit K^1 la catégorie dont les objets sont les espaces de Banach du type $\ell^1(X)$ et dont les morphismes sont les applications linéaires continues. La catégorie QESPC est équivalente à la catégorie des foncteurs</u>

<u>additifs contravariants de la catégorie K^1 dans la catégorie EV.</u>

On aurait pu prendre cette proposition comme définition des Q-espaces complets. La théorie des ces espaces n'aurait alors pas dépendu du chapitre II et se serait développée de façon analogue à celle des Q-espaces. Il aurait cependant fallu construire l'immersion de QESPC dans QESP.

7. Le complété d'un Q-espace.

Au paragraphe 3, nous avons défini un foncteur de EBCS dans QESPC: $X \longmapsto \hat{X}$. La propriété universelle vue dans le théorème 3.4 signifie que si T est un Q-espace complet, les espaces vectoriels $X\phi T$ et $\hat{X}\phi T$ sont isomorphes. Nous allons maintenant étendre ce foncteur "complétion" à la catégorie QESP. On perdra une propriété importante: le morphisme canonique d'un Q-espace dans son complété n'est en général plus un monomorphisme.

<u>Proposition 7.1</u>: <u>Soit Z un Q-espace et</u> $0 \longrightarrow X \xrightarrow{\alpha} Y \xrightarrow{\beta} Z \longrightarrow 0$ <u>une suite exacte où X et Y sont deux espaces bornologiques convexes séparés. Désignons par η_X et η_Y les monomorphismes canoniques de X et Y dans $\hat{X}$ et $\hat{Y}$. Désignons par $\hat{Z}$ le conoyau du morphisme $\hat{\alpha}$ et par η_Z le morphisme de Z dans $\hat{Z}$ induit par η_Y. A tout morphisme ϕ de Z dans un Q-espace complet T, on peut associer un et un seul morphisme $\hat{\phi}$ de $\hat{Z}$ dans T tel que</u> $\phi = \hat{\phi}\,\eta_Z$.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & X \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\eta_X"] & Y \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\eta_Y"'] & Z \arrow[r] \arrow[d, "\eta_Z"] \arrow[dl, "\phi"'] & 0 \\
 & \hat{X} \arrow[r, "\hat{\alpha}"'] & \hat{Y} \arrow[r, "\hat{\beta}"'] \arrow[ur, phantom, ""] & \hat{Z} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

$$\hat{Y} \xrightarrow{\psi} T \xleftarrow{\hat{\phi}} \hat{Z}$$

Le morphisme $\phi\beta : Y \longrightarrow T$ se prolonge à $\hat{Y}$: $\phi\beta = \psi\eta_Y$. On a $\psi\hat{\alpha}\eta_X = \psi\eta_Y\alpha = \phi\beta\alpha = 0$, donc $\psi\hat{\alpha} = 0$ (théorème 3.4). Ainsi ψ se factorise à travers $\hat{\beta}$: $\psi = \hat{\phi}\hat{\beta}$. Et on a $\hat{\phi}\eta_Z\beta = \hat{\phi}\hat{\beta}\eta_Y = \psi\eta_Y = \phi\beta$, donc $\hat{\phi}\eta_Z = \phi$. L'unicité de $\hat{\phi}$ est immédiate.

c.q.f.d.

D'après le théorème 4.2, $\hat{Z}$ est un Q-espace complet, et il résulte de la propriété universelle qui vient d'être démontrée que $\hat{Z}$ ne dépend pas (à un isomorphisme près) du choix de la suite exacte $0 \to X \to Y \to Z \to 0$.

De plus, si Z est un espace bornologique convexe séparé, le Q-espace $\hat{Z}$ défini dans la proposition 6.1 est isomorphe à celui qui a été défini au n°3.

On a ainsi achevé la construction du foncteur Chap : QESP $\longrightarrow$ QESPC.

Que le morphisme canonique $Z \longrightarrow \hat{Z}$ ne soit pas toujours un monomorphisme est immédiat: si $Z = \hat{X}|X$ est un espace normé, alors $\hat{Z} = 0$.

La démonstration de ce que l'isomorphisme $X\phi T = \hat{X}\phi T$ est naturel en le Q-espace X, et le Q-espace complet T nepose aucun problème; on montre ainsi que

<u>Théorème 7.2</u>: <u>Le foncteur</u> Chap <u>est un adjoint à gauche de l'immersion canonique de</u> QESPC <u>dans</u> QESP.

<u>Corollaire 7.3</u>: <u>Le foncteur</u> Chap <u>est exact à droite et commute avec les limites inductives</u>.

8. <u>Une équivalence de catégories</u>.

Les considérations que nous allons développer dans la fin de ce chapitre auraient déjà pu être émises à propos de la catégorie QESP. Nous préférons nous limiter à la catégorie plus intéressante des Q-espaces complets.

Rappelons que $\mathcal{U}_1$ est un des univers avec lesquels nous travaillons. (voir les paragraphes II.1 à II.3) Soit $\mathcal{C}$ l'ensemble des cardinaux des éléments de $\mathcal{U}_1$, et, pour tout $c \in \mathcal{C}$, soit X_c un ensemble de $\mathcal{U}_1$ de cardinal c. Comme dans le § II.5, on montre que:

<u>Proposition 8.1</u>: <u>L'espace bornologique convexe complet</u> $G = \bigoplus_{c \in \mathcal{C}} l^1(X_c)$ <u>est un générateur de la catégorie</u> QESPC.

<u>Théorème 8.2</u>: <u>La catégorie</u> QESPC <u>comporte suffisamment d'injectifs</u>.

En effet, Grothendieck a montré, [9], que toute catégorie possédant des limites inductives exactes et un générateur comporte suffisamment d'injectifs.

c.q.f.d.

Soit A l'anneau des endomorphismes du Q-espace complet G . Si Z est un Q-espace complet, le groupe abélien $G\phi Z$ est muni d'une structure de

module à droite sur A, si on définit le produit de $\Gamma \in G\phi Z$ par $\Delta \in A$ comme étant $\Gamma\Delta = \Gamma \cdot \Delta$. Il est immédiat que si $\phi : Z_1 \longrightarrow Z_2$ est un morphisme de Q-espaces, alors $G\phi\phi : G\phi Z_1 \longrightarrow G\phi Z_2$ est un homomorphisme de modules. Ainsi $G\phi$ est un foncteur exact (puisque G est projectif) de QESPC dans la catégorie A-Mod des modules sur l'anneau A. Un résultat dû à Mitchell, [15] montre que $G\phi$ est une immersion pleine. Ainsi QESPC est équivalent à une sous-catégorie pleine de A-Mod.

9. <u>Remarques sur la grandeur des Q-espaces complets</u>.

L'emploi d'univers nous a permis d'éviter des difficultés dans la considération de catégories de foncteurs. Par contre, cet emploi amène des restrictions sur les objets considérés. Ainsi les seuls espaces bornologiques convexes complets caractérisés comme foncteurs sur K^1 sont ceux qui sont limites inductives d'espaces de Banach appartenant à $\mathcal{U}_1$, l'ensemble d'indices appartenant à $\mathcal{U}_2$. Cependant, tout espace bornologique convexe complet définit un foncteur de K^1 dans EV.

Considérons par exemple l'espace de Banach $l^1(\mathcal{U}_1)$, qui appartient à l'univers $\mathcal{U}_2$, mais non à $\mathcal{U}_1$. Si P est un objet de K^1, toute application linéaire bornée de P dans $l^1(\mathcal{U}_1)$ se factorise à travers un sous-espace de $l^1(\mathcal{U}_1)$ du type $l^1(X)$, où $X \in \mathcal{U}_1$. Il n'y a donc pas de différence dans la théorie considérée entre l'espace de Banach $l^1(\mathcal{U}_1)$ et l'espace bornologique convexe complet $\varinjlim_{X \in \mathcal{U}_1} l^1(X)$. Pour pouvoir distinguer ces deux espaces, il serait nécessaire d'introduire des univers plus grands.

On peut aussi chercher à caractériser les espaces bornologiques convexes complets qui sont limites inductives d'espaces de Banach appartenant à $\mathcal{U}_1$, l'ensemble d'indices appartenant lui-aussi à $\mathcal{U}_1$. Cette caractérisation est aisée: X est un tel espace si et seulement s'il appartient à $\mathcal{U}_1$; dans ce cas, pour tout objet P de K, l'espace vectoriel $P\phi X$ appartient encore à $\mathcal{U}_1$. Inversément, si X est un espace bornologique convexe complet tel que pour tout objet P de K, l'espace vectoriel $P\phi X$ appartient à $\mathcal{U}_1$, alors l'ensemble sous-jacent à X, qui s'identifie à $\underline{C} \phi X$, appartient à $\mathcal{U}_1$.

Cherchons à présent à caractériser les Q-espaces complets qui s'écrivent sous la forme $Z = Y|X$, où les espaces bornologiques convexes complets Y et X appartiennent à $\mathcal{U}_1$. On pourrait penser qu'un Q-espace est de ce type si et seulement s'il applique la catégorie K^1 dans la catégorie des espaces vectoriels dont l'ensemble sous-jacent est équipotent à un ensemble de l'univers $\mathcal{U}_1$. L'exemple suivant montre qu'il n'en est rien.

Soit $\mathcal{C}$ l'ensemble des cardinaux des ensembles appartenant à $\mathcal{U}_1$. Pour tout $c \in \mathcal{C}$, soit X_c un ensemble de $\mathcal{U}_1$, de cardinal c. Soient P_c l'espace de Banach $l^1(X_c)$ et Q_c l'espace vectoriel sous-jacent à P_c muni de la bornologie formée des bornés de P_c de rang strictement inférieur à c:

$$Q_c = \varinjlim_{\substack{Y \in X_c \\ \# Y < c}} l^1(Y) \qquad (*)$$

On considère alors le Q-espace $Z = \bigoplus_{c \in \mathcal{C}} P_c \,\Big|\, \bigoplus_{c \in \mathcal{C}} Q_c$.

Si $X \in \mathcal{U}_1$ est tel que $\# X < c$, alors on a $l^1(X) \hat{\otimes} P_c = l^1(X) \hat{\otimes} Q_c$. Par conséquent

$$Z(l^1(X)) = \bigoplus_{c \leq \# X} l^1(X) \hat{\otimes} P_c \Big/ \bigoplus_{c \leq \# X} l^1(X) \hat{\otimes} Q_c$$

Il en résulte que Z applique la catégorie K^1 dans la catégorie des espaces vectoriels de cardinal appartenant à $\mathcal{C}$. Cependant, on voit sans peine qu'on ne peut écrire $Z = Y|X$, avec Y et $X \in \mathcal{U}_1$.

Considérons à présent un cardinal infini $c \in \mathcal{C}$, et désignons par $\mathcal{U}_c$ l'ensemble des $X \in \mathcal{U}_1$ tels que $\# X \leq c$. Notons K^1_c la sous-catégorie pleine de K^1 dont les objets sont les espaces de Banach $l^1(X)$, avec $X \in \mathcal{U}_c$. Désignons enfin par QESPC$_c$ la catégorie des foncteurs additifs contravariants de K^1_c dans EV.

(*) Si A est un ensemble, $\# A$ désigne le cardinal de A.

La théorie élaborée au chapitre II peut être reproduite, moyennant des adaptations évidentes, pour la catégorie QESPC$_c$. L'analogue de la proposition II.4.1 est la suivante:

Soit EBCC$_c$ la sous-catégorie pleine de EBCC dont les objets sont les espaces bornologiques convexes complets E, limites inductives d'espaces de Banach E_B vérifiant tous la condition suivante:
"La boule unité B de E_B contient une partie dense de cardinal au plus égal à c."
Alors le foncteur qui associe à tout objet E de EBCC$_c$ l'objet $\hat{\otimes} E$ de QESPC$_c$ est un foncteur pleinement fidèle de EBCC$_c$ dans QESPC$_c$.
(La notation $\hat{\otimes} E$ désigne ici le foncteur $K^1_c \longrightarrow$ EV: $P \longrightarrow P \hat{\otimes} E$)

La démonstration de cette proposition est identique à celle de la proposition II.4.1 si l'on tient compte de ce que, lorsque la boule unité de l'espace de Banach E_B contient une partie dense de cardinal au plus égal à c, cet espace E_B est le quotient d'un espace $l^1(X)$, où X est un ensemble de cardinal au plus égal à c.

On a aussi l'analogue du théorème II.6.1: Tout objet Z de QESPC$_c$ peut s'écrire sous la forme $Z = Y|X$, où Y et X sont des objets de EBCC$_c$.

On peut maintenant construire des foncteurs canoniques F_c et G_c:
F_c : QESPC $\longrightarrow$ QESPC$_c$, G_c : QESPC$_c$ $\longrightarrow$ QESPC.

La définition de F_c est simple: si Z est un Q-espace complet, c'est à dire un foncteur additif contravariant de K^1 dans EV, $F_c(Z)$ est la restriction de Z à K^1_c. Il est clair que F_c est un foncteur exact.

La définition de G_c est un peu moins simple. Un objet Z de QESPC$_c$ peut s'écrire sous la forme $Z = Y|X$ où Y et X sont des objets de EBCC$_c$. Nous souhaitons définir $G_c(Z)$ comme étant le Q-espace complet $Y|X$, Y et X étant cette fois considérés en tant qu'objets de EBCC. Il faut au préalable démontrer que ce Q-espace complet ne dépend pas de la décomposition $Z = Y|X$ choisie. C'est l'objet dela proposition suivante:

<u>Proposition 9.1</u>: <u>Soient</u> $Z = Y|X$ <u>et</u> $T = U|V$ <u>deux Q-espaces complets tels que</u> X, Y, U, V <u>soient des objets de</u> $\underline{EBCC}_c$. <u>Si</u> $F_c(Z) \cong F_c(T)$, <u>alors</u> $Z \cong T$.

La démonstration est basée sur le fait que la proposition II.8.3 reste valable dans la catégorie $\underline{QESPC}_c$. En remplaçant éventuellement l'espace Y par une somme d'objets de K_c^1, on peut supposer que l'isomorphisme Φ de $F_c(Z)$ sur $F_c(T)$ est induit par une application linéaire bornée φ de Y dans U. D'après les conditions nécessaires de II.8.3, cette application φ jouit de propriétés particulières portant sur les bornés de X, Y, U, V. Ces propriétés sont intrinsèques, ne dépendent pas de la catégorie considérée. Les conditions suffisantes de la même proposition entraînent alors que Z est isomorphe à T.

c.q.f.d.

La définition de $G_c(Z)$ est ainsi achevée. En même temps, on a montré que les Q-espaces complets, quotients d'objets de $\underline{EBCC}_c$ sont caractérisés par leurs restrictions à K_c^1. On définit l'image d'un morphisme par G_c de façon évidente, en supposant que ce morphisme est induit par une application linéaire bornée.

Si X est un espace bornologique convexe complet, il est immédiat que $F_c(X)$ est l'espace vectoriel sous-jacent à X, muni de la bornologie dont un système fondamental est formé des parties B qui sont bornées et complétantes dans X et telles que la boule unité de l'espace de Banach X_B admette une partie dense de cardinal au plus égal à c. De ce résultat, on déduit facilement que :

1) Quel que soit le Q-espace complet $Z = Y|X$, l'application identique de Y induit un monomorphisme canonique de $G_cF_c(Z)$ dans Z.

2) $F_cG_cF_c = F_c$

3) F_cG_c est le foncteur identique de $\underline{QESPC}_c$.

<u>Définition 9.2</u>: <u>Nous disons qu'un Q-espace complet</u> Z <u>est de densité au plus égale à</u> c <u>si</u> $Z \cong G_cF_c(Z)$.

En particulier un espace bornologique convexe complet, limite inductive d'espaces de Banach séparables est de densité $\aleph_0$. La proposition 9.1 pourrait s'énoncer: " Deux Q-espaces complets de densité

au plus c sont isomorphes si et seulement s'ils ont des restrictions à K_c^1 isomorphes."

Considérons deux cardinaux c et d $\in \mathscr{C}$. Supposons qu'on ait $c \leq d$. De la caractérisation vue précédemment pour $F_c(X)$, lorsque X est un espace bornologique convexe complet, on déduit l'existence, lorsque Z est un Q-espace complet, d'un monomorphisme canonique de $G_cF_c(Z)$ dans $G_dF_d(Z)$. Le Q-espace complet Z apparaît même comme étant la limite inductive des Q-espaces $G_cF_c(Z)$.

Soit $Z = Y|X$ un Q-espace complet, où les ensembles sous-jacents à X et Y appartiennent à l'univers $\mathcal{U}_1$. On a alors $\# X \in \mathscr{C}$ et $\# Y \in \mathscr{C}$. Soit $c = \max(\# X, \# Y)$. Si B est un borné complétant de X ou de Y, l'espace de Banach X_B ou Y_B admet nécessairement une partie dense de cardinal au plus égal à c. Par conséquent le Q-espace complet $Z = Y|X$ est de densité au plus égale à c. On sait que, de plus, Z applique la catégorie K^1 dans la catégorie des espaces vectoriels dont l'ensemble sous-jacent appartient à $\mathcal{U}_1$. Réciproquement:

<u>Théorème 9.3</u>: <u>Si</u> Z <u>est un Q-espace complet, les propositions suivantes sont équivalentes</u>:

(a) Z <u>admet une décomposition</u> $Z = Y|X$, <u>où les ensembles sous-jacents à</u> X <u>et</u> Y <u>appartiennent à</u> $\mathcal{U}_1$.

(b) Z <u>applique la catégorie</u> K^1 <u>dans la catégorie des espaces vectoriels dont l'ensemble sous-jacent appartient à</u> $\mathcal{U}_1$, <u>et il existe un cardinal</u> $c \in \mathscr{C}$ <u>tel que</u> Z <u>soit de densité au plus égale à</u> c.

Il reste à montrer que (b) $\Longrightarrow$ (a). Nous reprenons une partie de la démonstration de la proposition II.5.7. La catégorie $\underline{QESPC}_c$ admet comme générateur l'espace $G_c = \bigoplus_{d<c} l^1(X_d)$ où, pour tout cardinal $d<c$, X_d est un ensemble de $\mathcal{U}_1$ de cardinal d. Comme dans la proposition II.5.7, on construit alors un épimorphisme de $U = \bigoplus_{\alpha \in A} G_\alpha$ dans $F_c(Z)$ où $A = G_c \phi Z$, et où pour tout $\alpha \in A$, $G_\alpha = G_c$.

Puisque $G_c = \bigoplus_{d<c} l^1(X_d)$, on a $A = \prod_{d<c} l^1(X_d) \phi Z$. Par hypothèse, les ensembles $l^1(X_d) \phi Z$ appartiennent à $\mathcal{U}_1$. Comme c est le cardinal

d'un ensemble de $\mathcal{U}_1$, on a $A \in \mathcal{U}_1$. Les ensembles $G_\alpha = G$ appartiennent aussi à $\mathcal{U}_1$, de sorte que finalement, on a $U \in \mathcal{U}_1$. On peut donc construire une décomposition $F_c(Z) = U|V$ où $U \in \mathcal{U}_1$. On a encore $V \in \mathcal{U}_1$ puisque V estun sous-objet de U. On déduit alors (a) de ce que $Z = G_c F_c(Z)$.

c.q.f.d.

Chapitre IV.

Foncteurs "Hom" internes et produits tensoriels dans QESP et QESPC.

0. Introduction.

Ce chapitre est consacré à la construction dans les catégories QESP et QESPC de foncteurs "Hom" internes, notés ϕ_q et de foncteurs "produit tensoriel" notés $\otimes_q$ et $\hat{\otimes}_q$. Ces catégories deviennent ainsi des catégories à produit tensoriels Si Z et T sont deux espaces bornologiques convexes séparés, le Q-espace $Z \phi_q T$ est en fait l'espace vectoriel $Z\phi T$ muni de la bornologie des parties équibornées. Ainis la restriction de ϕ_q à EBCS est un foncteur "Hom" interne dans cette catégorie. Il en est de même de la restriction de ϕ_q à EBCC. Par contre, si Z et T sont des objets de EBCS, il n'en est pas nécessairement de même de $Z \otimes_q T$.

On peut cependant construire dans la catégorie EBCS un foncteur "produit tensoriel", noté $\otimes_b$. On compare alors $Z \otimes_q T$ à $Z \otimes_b T$, et on montre l'égalité de ces deux objets dans certains cas. Si Z et T sont deux espaces bornologiques convexes complets, on peut définir trois notions de "produit tensoriel complet" de Z et T: $Z \hat{\otimes}_q T$ est le Q-espace complété du Q-espace $Z \otimes_q T$; $Z \hat{\otimes}_b T$ est le Q-espace complété de l'espace bornologique convexe séparé $Z \otimes_b T$; enfin, aux Q-espaces complets $Z \hat{\otimes}_q T$ et $Z \hat{\otimes}_b T$ est associé le même espace bornologique convexe complet $b(Z \hat{\otimes}_q T) = b(Z \hat{\otimes}_b T)$. Cet espace est en fait le produit tensoriel de Z et T dans la catégorie EBCC. On a une situation analogue à celle des espaces non complets: en général $Z \hat{\otimes}_q T \neq Z \hat{\otimes}_b T$. (L'égalité éventuelle de ces deux espaces est étudiée plus en détail au chapitre suivant.) Cependant, moennant l'hypothèse d'approximation, on montre que $Z \hat{\otimes}_b T$ est un objet de EBCC, et coïncide donc avec $b(Z \hat{\otimes}_b T)$.

1. Le produit tensoriel dans EBCS.

La catégorie EBCS est une catégorie à produit tensoriel (définition I.2.5) Pour le montrer, il convient d'abord de définir un foncteur oubli σ et un foncteur ϕ_b tels que $\sigma \circ \phi_b = \phi$. La définition de ces foncteurs est aisée, et d'ailleurs bien connue: un espace bornologique convexe séparé X est un espace vectoriel muni d'une structure supplémentaire. $\sigma(X)$ est l'espace vectoriel sous-jacent à X.

Si X et Y sont deux espaces bornologiques convexes séparés, on munit l'espace vectoriel $X\phi Y$ d'une bornologie en décrétant qu'une partie H de $X\phi Y$ est bornée si l'ensemble $H(B) = \{h(x) \mid h\in H,\ x\in B\}$ est borné dans Y chaque fois que B est borné dans X. L'espace vectoriel $X\phi Y$, muni de cette bornologie (dont on vérifie sans peine qu'elle est convexe et séparée) est noté $X\phi_b Y$. Si $\alpha : X_1 \longrightarrow Y_1$ et $\beta : X_2 \longrightarrow Y_2$ sont deux applications linéaires bornées, alors l'application $\alpha\phi\beta$ de $Y_1\phi_b X_2$ dans $X_1\phi_b Y_2$ est bornée. On la notera parfois $\alpha\phi_b\beta$. Ceci complète la définition du foncteur ϕ_b.

Si X et Y sont deux espaces normés, $X\phi_b Y$ est l'espace des applications linéaires continues de X dans Y, muni de sa norme usuelle.

On connait la notion de produit tensoriel projectif de deux espaces normés: soient X et Y deux espaces normés, de boules unités A et B. Si $A\otimes B = \{x\otimes y \mid x\in A,\ y\in B\}$, l'enveloppe disquée de $A\otimes B$ est un disque normant (*) qui engendre l'espace vectoriel $X\otimes Y$. On note alors $X\otimes_b Y$ et on appelle produit tensoriel projectif de X et Y l'espace vectoriel $X\otimes Y$ muni de la norme "jauge de l'enveloppe disquée de $A\otimes B$". De façon précise, la norme de $X\otimes_b Y$ est donnée par la formule

$$\forall u \in X\otimes Y : \ ||u|| = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{n} ||x_i||\cdot||y_i|| \ \Big|\ u = \sum_{i=1}^{n} x_i\otimes y_i \right\}$$

Cette notion de produit tensoriel jouit de la propriété universelle souhaitée:

Proposition 1.1: Si X,Y,Z sont trois espaces normés, les espaces vectoriels $X\phi_b(Y\phi_b Z)$ et $(X\otimes_b Y)\phi_b Z$ sont naturellement isomorphes. Les espaces normés $X\otimes_b Y$ et $Y\otimes_b X$ sont naturellement isomorphes.

(*) Un disque est dit normant si sa jauge est une norme sur l'espace vectoriel engendré par le disque.

Cette proposition est bien connue et dedémonstration aisée.

c.q.f.d.

Les espaces $X\phi_b(Y\phi_b Z)$ et $(X\otimes_b Y)\phi_b Z$ s'identifient aussi à l'espace des applications bilinéaires bornées de $X\times Y$ dans Z.

Nous allons étendre le foncteur $\otimes_b$ à la catégorie EBCS. Rappelons que si E est un espace bornologique convexe séparé, tout disque borné A de E est normant. La notation E_A désigne le sous-espace vectoriel de E engendré par A et normé par la jauge de A.

Définition 1.2: Soient E, F deux espaces bornologiques convexes séparés. On appelle produit tensoriel bornologique inductif de E et F, et on note $E\otimes_b F$ l'espace vectoriel $E\otimes F$ muni de la bornologie convexe la plus fine parmi celles qui rendent bornées toutes les applications canoniques $E_A\otimes_b F_B \longrightarrow E\otimes F$, lorsque A parcourt l'ensemble des disques bornés de E, et B l'ensemble des disques bornés de F.

$E\otimes_b F$ est donc la limite inductive des espaces normés $E_A\otimes_b F_B$.

La proposition suivante se démontre exactement comme la proposition 1.1:

Proposition 1.2: Si X,Y, Z sont trois espaces bornologiques convexes séparés, les espaces bornologiques convexes séparés $(X\otimes_b Y)\phi_b Z$ et $X\phi_b(Y\phi_b Z)$ sont naturellement isomorphes. Il en est de même des espaces $X\otimes_b Y$ et $Y\otimes_b X$.

Autrement dit: Le foncteur ϕ_b admet un adjoint fort à gauche $\otimes_b$. EBCS est une catégorie à produit tensoriel.

Proposition 1.3: Si X et Y sont deux espaces bornologiques convexes séparés, projectifs dans QESP, alors $X\otimes_b Y$ est projectif dans QESP.

On sait que X et Y sont des sommandes directes de sommes d'objets de K; on peut écrire $\begin{cases} X\oplus X' = \bigoplus_i P_i \\ Y\oplus Y' = \bigoplus_j Q_j \end{cases}$ avec P_i, Q_j objets de K. (Prop.II.5.8)

On a alors $\bigoplus_{i,j} P_i\otimes_b Q_j = X\otimes_b Y + (X'\otimes_b Y + X\otimes_b Y' + X'\otimes_b Y')$

Si K est la catégorie des espaces normés du type $\underline{C}^{(E)}$ (n°II.2), l'espace normé $P_i \otimes_b Q_j$ est encore un objet de K. En effet, il est facile de vérifier que $\underline{C}^{(E)} \otimes_b \underline{C}^{(F)} = \underline{C}^{(E\times F)}$. Ainsi $X \otimes_b Y$ est une sommande directe d'une somme d'objets de K, ce qui entraine que $X \otimes_b Y$ est projectif dans $\underline{\underline{QESP}}$.

c.q.f.d.

2. Q-espaces de morphismes.

Nous allons dans ce numéro définir sur la catégorie $\underline{\underline{QESP}}$ un foncteur oubli et un foncteur Hom interne.

Si X est unespace bornologique convexe séparé, l'espace vectoriel sous-jacent à X s'identifie à $\underline{C}\phi X$. On généralise cette définition:

Définition 2.1: On appelle espace vectoriàl sous-jacent à un Q-espace Z, l'espace vectoriel $\underline{C}\phi Z$. Le foncteur $\underline{C}\phi$: $\underline{\underline{QESP}} \longrightarrow \underline{\underline{EV}}$ s'appelle le foncteur oubli.

Puisque $\underline{C}$ est un Q-espace projectif, le foncteur oubli est exact. Si $Z = Y|X$, rappelons que $\underline{C}\phi Z = \underline{C}\phi Y/\underline{C}\phi X = Y/X$. Ceci implique que l'espace vectoriel sous-jacent à un Q-espace Z peut être nul sans que Z soit nul. Ainsi, le foncteur oubli n'est pas fidèle.

Considérons deux Q-espaces $Z = Y|X$ et $T = U|V$ où l'espace bornologique convexe séparé Y est projectif. On sait que l'espace vectoriel $Z\phi T$ est isomorphe au quotient $(Y,X)\phi(U,V)/Y\phi V$ où $(Y,X)\phi(U,V)$ est l'espace vectoriel des applications linéaires bornées de Y dans U dont la restriction à X appartient à $X\phi V$. Cet espace vectoriel sera muni de la moins fine des bornologies convexes pour lesquelles sont bornées l'injection canonique $(Y,X)\phi(U,V) \longrightarrow Y\phi_b U$ et la restriction $(Y,X)\phi(U,V) \longrightarrow X\phi_b V$. Ainsi une partie H de $(Y,X)\phi(U,V)$ est bornée si elle applique tout borné de Y sur un borné de U, et tout borné de X sur un borné de V. Muni de cette bornologie, l'espace $(Y,X)\phi(U,V)$ est noté $(Y,X)\phi_b(U,V)$. (On pourrait résumer cette définition en disant que $(Y,X)\phi_b(U,V)$ est le produit fibré de $Y\phi_b U$ et $X\phi_b V$ au-dessus de $X\phi_b U$.)

L'espace $Y\phi_b V$ est évidemment inclus à $(Y,X)\phi_b(U,V)$, avec une bornologie plus fine que la bornologie induite.

Considérons à présent quatre Q-espaces $Z_i = Y_i|X_i$, $T_i = U_i|V_i$, $(i=1,2)$. Soient $\Phi: T_1 \longrightarrow Z_1$ et $\Psi: Z_2 \longrightarrow T_2$ des morphismes induits respectivement par des applications linéaires bornées $\varphi \in (U_1,V_1)\phi(Y_1,X_1)$ et $\psi \in (Y_2,X_2)\phi(U_2,V_2)$.

Il est immédiat que $\varphi\phi\psi$ est une application linéaire bornée de $(Y_1,X_1)\phi_b(Y_2,X_2)$ dans $(U_1,V_1)\phi_b(U_2,V_2)$, dont larestriction à $Y_1\phi_b X_2$ est une application linéaire bornée de cet espace dans $U_1\phi V_2$. Ainsi, $\varphi\phi\psi$ induit un morphisme du Q-espace $(Y_1,X_1)\phi_b(Y_2,X_2) \mid Y_1\phi_b X_2$ dans le Q-espace $(U_1,V_1)\phi_b(U_2,V_2) \mid U_1\phi_b V_2$. Nous allons indiquer quelques propriétés de ce morphisme induit.

Lemme 2.2: Si Φ est un épimorphisme, et Ψ un monomorphisme, alors le morphisme induit par $\varphi\phi\psi$ est un monomorphisme.

D'après le corollaire II.8.3B, il suffit de montrer que tout borné de $(Y_1,X_1)\phi_b(Y_2,X_2)$ dont l'image par $\varphi\phi\psi$ est incluse et bornée dans $U_1\phi_b V_2$ est lui-même inclus et borné dans $Y_1\phi_b X_2$. Soit H un tel borné de $(Y_1,X_1)\phi_b(Y_2,X_2)$. Soit B un borné de Y_1. Puisque φ induit un épimorphisme, on peut écrire $B \subset A+\varphi(C)$ où A est borné dans X_1 et C dans U_1. L'ensemble H(A) est donc borné dans X_2. Puisque $(\varphi\phi\psi)(H)$ est borné dans $U_1\phi_b V_2$, l'ensemble $(\varphi\phi\psi)(H)(C) = \psi H \varphi(C)$ est borné dans V_2. De ce que ψ induit un monomorphisme, on déduit alors que $H\varphi(C)$ est borné dans X_2. Par conséquent, H(B) est inclus à la somme de H(A) et $H\varphi(C)$, tous deux bornés dans X_2. Ceci montre que H est borné dans $Y_1\phi_b X_2$.

c.q.f.d.

Lemme 2.3: En plus des hypothèses déjà en vigueur, nous supposons que U_1 et Y_1 sont projectifs. Si Φ et Ψ sont des isomorphismes, alors le morphisme induit par $\varphi\phi\psi$ est un isomorphisme.

Tenant compte du lemme précédent, il reste à montrer que $\varphi\phi\psi$ induit un épimorphisme, c'est à dire, toujours d'après le corollaire II.8.3 que tout borné de $(U_1,V_1)\phi_b(U_2,V_2)$ est inclus à la somme d'un borné de $U_2\phi_b V_2$

et de l'image par $\varphi\phi\psi$ d'un borné de $(Y_1,X_1)\phi_b(Y_2,X_2)$.

Soit H un borné de $(U_1,V_1)\phi_b(U_2,V_2)$. Puisque ψ induit un épimorphisme, l'application $(\psi,1): Y_2 \oplus V_2 \longrightarrow U_2$ est un épimorphisme. Puisque U_1 est projectif, le borné H de $U_1\phi_b U_2$ est l'image par $U_1\phi(\psi,1)$ d'un borné K de $U_1\phi_b(Y_2 \oplus V_2)$. (Si U_1 est normé, la démonstration de ce fait est immédiate: l'image de la boule unité de U_1 par H est un borné de U_2 qui se relève en un borné de $Y_2 \oplus V_2$, les éléments de H se relèvent alors en un borné de $U_1\phi_b(Y_2 \oplus V_2)$; si U_1 n'est pas normé, on se ramène à ce cas en utilisant le fait que U_1 est une sommande directe d'espaces normés projectifs.)

On a donc $H = (\psi,1)\circ K$. Désignons par K_1 (resp. K_2) la composée de K et du projecteur de $Y_2 \oplus V_2$ sur Y_2 (resp. V_2). On a alors $H \subset \psi\circ K_1 + K_2$. De plus, K_2 est une partie bornée de $U_1\phi_b V_2$, et K_1 est borné dans $U_1\phi_b Y_2$. Mais si B est un borné de V_1, $H(B)$ et $K_2(B)$ sont desbornés de V_2. Comme on a $\psi K_1(B) \subset H(B) - K_2(B)$, on voit que $\psi K_1(B)$ est inclus et borné dans V_2. Or ψ induit un monomorphisme. Donc $K_1(B)$ est inclus et borné dans X_2. Il en résulte finalement que K_1 est inclus et borné dans $(U_1,V_1)\phi_b(Y_2,X_2)$.

Désignons maintenant par τ l'application linéaire bornée de Y_1 dans U_1 qui induit l'isomorphisme $\Phi^{-1}: Z_1 \longrightarrow T_1$. Puisque $\tau\varphi$ induit le morphisme identique de T_1, on a $1-\tau\varphi \in U_1\phi V_1$. Alors $K_1\tau$ est une partie bornée de $(Y_1,X_1)\phi_b(Y_2,X_2)$ et

$$\psi K_1 \subset \psi K_1\tau\varphi + \psi K_1(1-\tau\varphi) = (\varphi\phi\psi)(K_1\tau) + \psi K_1(1-\tau\varphi)$$

D'après ce qui précède, $\psi K_1(1-\tau\varphi)$ est unepartie bornée de $U_1\phi_b V_2$. On arrive ainsi à $H \subset (\varphi\phi\psi)(K_1\tau) + (\psi K_1(1-\tau\varphi) + K_2)$ avec $K_1\tau$ borné dans $(Y_1,X_1)\phi_b(Y_2,X_2)$ et $\psi K_1(1-\tau\varphi) + K_2$ borné dans $U_1\phi_b V_2$.

c.q.f.d.

Nous pouvons maintenant définir les Q-espaces de morphismes:

<u>Définition 2.4</u>: <u>Soient</u> $Z = Y|X$ <u>et</u> $T = U|V$ <u>deux</u> Q-<u>espaces, les espaces bornologiques convexes séparés</u> Y <u>et</u> U <u>étant projectifs. Alors on désigne par</u> $Z\phi_q T$ <u>le</u> Q-<u>espace</u> $(Y,X)\phi_b(U,V) \mid Y\phi_b V$.

Du lemme 2.3, on déduit que le Q-espace $Z\phi_q T$ ne dépend qu'à un isomorphisme près, du choix des décompositions de Z et T en $Z=Y|X$ et $T=U|V$.

<u>Définition 2.5</u>: <u>Soient</u> $Z_i = Y_i|X_i$ <u>et</u> $T_i = U_i|V_i$ $(i=1,2)$ <u>quatre</u> Q-<u>espaces, les espaces bornologiques convexes séparés</u> Y_i <u>et</u> U_i <u>étant projectifs. Soient</u> $\Phi: T_1 \longrightarrow Z_1$, $\Psi: Z_2 \longrightarrow T_2$ <u>des morphismes induits respectivement par des applications linéaires bornées</u> $\varphi \in (U_1,V_1)\phi(Y_1,X_1)$ <u>et</u> $\psi \in (Y_2,X_2)\phi(U_2,V_2)$. <u>On note</u> $\Phi\phi_q\Psi$ <u>le morphisme de</u> $Z_1\phi_q Z_2$ <u>dans</u> $T_1\phi_q T_2$ <u>induit par</u> $\varphi\phi\psi$.

Cette définition doit être validée: il convient de montrer que le morphisme $\Phi\phi_q\Psi$ ne dépend qu'à un isomorphisme près du choix des décompositions des Z_i et T_i. En fait, on peut en même temps démontrer que ϕ_q est un foncteur:

<u>Lemme 2.6</u>: <u>Soient</u> $Z_i = Y_i|X_i$, $Z_i' = Y_i'|X_i'$ <u>et</u> $T_i = U_i|V_i$ $(i=1,2)$ <u>des</u> Q-<u>espaces, les espaces</u> Y_i, Y_i' <u>et</u> U_i <u>étant projectifs. Soient</u> $\Phi: T_1 \longrightarrow Z_1$, $\Psi: Z_2 \longrightarrow T_2$, $\Phi': Z_1' \longrightarrow T_1$ <u>et</u> $\Psi': T_2 \longrightarrow Z_2'$ <u>des morphismes induits par des applications</u> $\varphi \in (U_1,V_1)\phi(Y_1,X_1)$, $\psi \in (Y_2,X_2)\phi(U_2,V_2)$, $\varphi' \in (Y_1',X_1')\phi(U_1,V_1)$, $\psi' \in (U_2,V_2)\phi(Y_2',X_2')$. <u>Alors</u>

$$(\Phi\circ\Phi')\phi_q(\Psi'\circ\Psi) = (\Phi'\phi_q\Psi')\circ(\Phi\phi_q\Psi)$$

C'est immédiat puisque $\Phi\circ\Phi'$ est induit par $\varphi\varphi'$ et $\Psi'\circ\Psi$ par $\psi'\psi$.

c.q.f.d.

<u>Remarque</u>: Dans la définition des Q-espaces $Z_1\phi_q Z_2$ et $T_1\phi_q T_2$, et du morphisme $\Phi\phi_q\Psi$, on suppose que les espaces Y_2 et U_2 qui interviennent dans les décompositions de Z_2 et T_2 sont projectifs. Il est clair que la condition "U_2 projectif" ne joue aucun rôle. Quant à la condition "Y_2 projectif", elle n'est utile qu'en ce qu'elle permet d'affirmer

que le morphisme $\overline{\psi}$ est induit par $\psi \in (Y_2,X_2)\phi(U_2,V_2)$. (Par contre, la condition de projectivité de Y_1 et U_1 est fondamentale) On peut lever la condition sur Y_2 de la façon suivante : si Y_2 n'est pas projectif, soit $Z_2 = Y_2'|X'_2$ une seconde décomposition de Z_2 où Y_2' est cette fois projectif. Alors le morphisme $\overline{\psi}$ est induit par une application linéaire bornée $\psi' \in (Y_2',X_2')\phi(U_2,V_2)$. On peut donc définir $\overline{\phi}\phi_q\overline{\psi}$ comme morphisme de $Z_1\phi_q Z_2 = (Y_1, X_1)\phi_b(Y_2',X_2') \mid Y_1\phi_b X_2'$ dans $T_1\phi_q T_2 = (U_1,V_1)\phi_b(U_2,V_2)|U_1\phi_b V_2$

D'autre part, le morphisme identique de Z_2 est induit par une application linéaire bornée $\gamma \in (Y_2',X_2')\phi(Y_2,X_2)$. On peut donc définir un morphisme $(idZ_1)\phi_q(idZ_2)$ de $Z_1\phi_q Z_2$ dans $(Y_1,X_1)\phi_b(Y_2,X_2) \mid Y_1\phi_b X_2$, et d'après le lemme 2.3, ce morphisme est un isomorphisme. On peut alors considérer le morphisme $(\overline{\phi}\phi_q\overline{\psi})\circ((idZ_1)\phi_q(idZ_2))^{-1}$, et le désigner également par $\overline{\phi}\phi_q\overline{\psi}$. En même temps, on a vu que la formule $Z_1\phi_q Z_2 = (Y_1,X_1)\phi_b(Y_2,X_2) \mid Y_1\phi_b X_2$ reste valable, même si Y_2 n'est pas projectif.

Comme tout Q-espace, $Z_1\phi_q Z_2$ est un foncteur de K dans $\underline{\underline{EV}}$. On peut donc se demander comment calculer $(Z_1\phi_q Z_2)(E)$ si E est un objet de K. Pour des raisons techniques, nous reportons la réponse à cette question au n°4.

3. Propriétés du foncteur ϕ_q.

Le foncteur ϕ_q vient d'être défini. Si σ est le foncteur oubli ($\sigma = \underline{\underline{C}}\phi$) il est clair que $\sigma\circ\phi_q = \phi$.

Avant de montrer que ϕ_q admet un adjoint à gauche, nous en remarquerons quelques propriétés.

Proposition 3.1: <u>Quels que soient les Q-espaces Z_i ($i=1,2,3$), les Q-espaces $Z_1\phi_q(Z_2\phi_q Z_3)$ et $Z_2\phi_q(Z_1\phi_q Z_3)$ sont naturellement isomorphes.</u>

Ecrivons $Z_i = Y_i|X_i$, où les Y_i sont projectifs. On a alors

$$Z_1\phi_q(Z_2\phi_q Z_3) = (Y_1,X_1)\phi_b(\ (Y_2,X_2)\phi_b(Y_3,X_3)\ ,\ Y_2\phi_b X_3\ ) \mid Y_1\phi_b(Y_2\phi_b X_3)$$

et

$$Z_2\phi_q(Z_1\phi_q Z_3) = (Y_2,X_2)\phi_b(\ (Y_1,X_1)\phi_b(Y_3,X_3)\ ,\ Y_1\phi_b X_3) \mid Y_2\phi_b(Y_1\phi_b X_3)$$

Si τ désigne l'isomorphisme canonique de $Y_1\phi_b(Y_2\phi_b Y_3)$ sur $Y_2\phi_b(Y_1\phi_b Y_3)$ on vérifie successivement :

1) que la restriction de τ à $(Y_1,X_1)\ \phi_b\ (\ (Y_2,X_2)\phi_b(Y_3,X_3),\ Y_2\phi_b X_3)$ est un isomorphisme sur $(Y_2,X_2)\ \phi_b\ (\ (Y_1,X_1)\ \phi_b(Y_3,X_3)\ ,\ Y_1\phi_b X_3)$

2) que la restriction de τ à $Y_1\phi_b(Y_2\phi_b X_3)$ est un isomorphisme sur $Y_2\phi_b(Y_1\phi_b X_3)$.

induit donc un isomorphisme de $Z_1\phi_q(Z_2\phi_q Z_3)$ sur $Z_2\phi_q(Z_1\phi_q Z_3)$, dont on voit facilement qu'il est naturel.

c.q.f.d.

Il importe de comparer $Z\phi_b T$ à $Z\phi_q T$ lorsque Z et T sont des espaces bornologiques convexes séparés. Considérons même une situation un peu plus générale : rappelons que si Z est un Q-espace et T un espace bornologique convexe séparé, alors les espaces vectoriels $Z\phi T$ et $bZ\phi T$ sont isomorphes (théorème II.7.1)

Proposition 3.2: <u>Si Z est un Q-espace et T un espace bornologique convexe séparé, alors les Q-espaces $Z\phi_q T$ et $bZ\phi_b T$ sont isomorphes. $Z\phi_q T$ est donc un espace bornologique convexe séparé.</u>

Ecrivons $Z = Y|X$ où Y est projectif et $T = T|0$. Puisque $Y\phi_b 0 = 0$, on a : $Z\phi_q T = (Y,X)\phi_b(T,0)$.

Le Q-espace $Z\phi_q T$ est donc l'espace vectoriel des applications linéaires bornées de Y dans T nulles sur X ; il est équivalent de dire qu'elles sont nulles sur $\overline{X}$. Ainsi $Z\phi_q T$ est isomorphe à $(Y/\overline{X})\phi_b T = bZ\phi_b T$.

c.q.f.d.

Corollaire 3.3: <u>Si Z et T sont deux espaces bornologiques convexes séparés, alors $Z\phi_q T$ et $Z\phi_b T$ sont isomorphes.</u>

Il est à noter que si Z et T sont deux Q-espaces quelconques, alors on a en général $b(Z\phi_q T) \neq bZ\phi_b bT$. Donnons un exemple : soit P un espace normé projectif et Q l'espace vectoriel sous-jacent à P, muni de la bornologie convexe la plus fine. On a alors:

$$P\phi_q(P|Q) = P\phi_b P | P\phi_b Q$$

Donc $b(P\phi_q(P|Q)) = P\phi_b P \,/\, \overline{P\phi Q}$. Tout élément de $P\phi Q$ est une application linéaire de rang fini de P dans lui-même? Donc tout élément de $\overline{P\phi Q}$ est une application compacte. Si P est de dimension infinie, il existe des applications continues non compactes, de sorte que $b(P\phi_q(P|Q)) \neq 0$. Par contre, on a $b(P|Q) = 0$, donc $bP\phi_b b(P|Q) = 0$

__Proposition 3.4:__ __Si__ Z __est un Q-espace et__ T __un Q-espace complet, alors le Q-espace__ $Z\phi_q T$ __est complet.__

Si $Z = Y|X$ (où Y est projectif) et $T = U|V$, où U et V sont complets, alors on a $Z\phi_q T = (Y,X)\phi_b(U,V) \mid Y\phi_b V$. On sait que $Y\phi_b V$, $Y\phi_b U$ et $X\phi_b V$ sont des espaces bornologiques convexes complets. L'espace $(Y,X)\phi_b(U,V)$ est également complet puisqu'il est isomorphe à un sous-espace formé du produit $(Y\phi_b U)\times(X\phi_b V)$.

c.q.f.d.

Si Z est un Q-espace non complet et T un Q-espace complet, nous voulons comparer $Z\phi_q T$ et $\hat{Z}\phi_q T$ qui sont deux Q-espaces complets. On a déjà le résultat suivant:

__Lemme 3.5:__ __Soient__ X __un espace bornologique convexe séparé et__ V __un espace bornologique convexe complet. Si__ η __et__ σ __sont respectivement les monomorphisme canonique__ $X \longrightarrow \hat{X}$ __et épimorphisme canonique__ $\hat{X} \longrightarrow b\hat{X}$, __alors__ $\sigma\eta\phi V$ __est un isomorphisme de__ $b\hat{X}\phi_b V$ __sur__ $X\phi_b V$.

Il est immédiat que $\sigma\eta\phi V$ est un monomorphisme: $\varphi\circ\eta = 0 \Longrightarrow \varphi\sigma = 0 \Longrightarrow \varphi = 0$. Soit H une partie bornée de $X\phi_b V$. Cela signifie que H applique tout borné B de X sur un borné de V. Mais $b\hat{X}$ est la limite inductive (dans __EBCS__) des espaces de Banach $\hat{X}_B$. Si $\hat{H}$ désigne l'ensemble des prolongés à $b\hat{X}$ des éléments de H, $\hat{H}$ applique la boule unité de $\hat{X}_B$ sur un borné de V. Ainsi $\hat{H}$ est borné dans $b\hat{X}\phi_b V$ et $H = \hat{H}\sigma\eta$.

__Lemme 3.6:__ __Soient__ $Z = Y|X$ __un Q-espace non nécessairement complet,__ Y __étant projectif dans__ __QESP__ __et__ $T = U|V$ __un Q-espace complet. Soit__ N __le noyau de l'épimorphisme canonique__ $\hat{Y} \longrightarrow \hat{Z}$. __Soit__ η_Y __le monomorphisme canonique__ $Y \longrightarrow \hat{Y}$. __L'isomorphisme__ $\eta_Y\phi U : \hat{Y}\phi_b U \longrightarrow Y\phi_b U$ __induit un isomorphisme de__ $\hat{Y}\phi_b V$ __sur__ $Y\phi_b V$ __et de__ $(\hat{Y},N)\phi_b(U,V)$ __sur__ $(Y,X)\phi_b(U,V)$.

La première affirmation est triviale, puisque la restriction de $\eta_Y\phi U$ à $\hat{Y}\phi V$ est $\eta_Y\phi V$. On applique donc le lemme précédent. Pour démontrer la seconde affirmation, il suffit de montrer que si H est un ensemble borné de $(Y,X)\phi_b(U,V)$, alors l'ensemble $\hat{H}$ des prolongés à $\hat{Y}$ des éléments de H est borné dans $(\hat{Y},N)\phi_b(U,V)$. On sait déjà que $\hat{H}$ est borné dans $\hat{Y}\phi_b U$.

N est un quotient de $b\hat{X}$. Soit σ l'épimorphisme canonique de $b\hat{X}$ sur N. Alors $\hat{H}\sigma$ est l'ensemble des prolongés à $b\hat{X}$ des éléments de H considérés comme applications de X dans V. Donc $\hat{H}\sigma$ est une partie bornée de $b\hat{X}\phi_b V$. Il en résulte que $\hat{H}$ est une partie bornée de $N\phi_b V$.

c.q.f.d.

On pourrait croire qu'il est possible de déduire immédiatement de ce lemme que les Q-espaces complets $Z\phi_q T$ et $\hat{Z}\phi_q T$ sont isomorphes. En fait, il faut d'abord démontrer que $\hat{Z}\phi_q T$ est donné par la formule $\hat{Z}\phi_q T = (\hat{Y},N)\phi_b(U,V) \mid \hat{Y}\phi_b V$. Cela n'est pas évident puisque cette formule ne serait la définition de $\hat{Z}\phi_q T$ que si $\hat{Y}$ était projectif dans __QESP__, ce qui n'est pas le cas ($\hat{Y}$ est projectif dans __QESPC__.)

__Proposition 3.7:__ __Soient__ $Z = Y|X$ __et__ $T = U|V$ __deux Q-espaces complets, où__ X, Y, U, V __sont des objets de__ __EBCC__, Y __étant projectif dans__ __QESPC__. __Alors__ $Z\phi_q T = (Y,X)\phi_b(U,V) \mid Y\phi_b V$.

On peut écrire $Z = Y_1|X_1$, où Y_1 et X_1 sont deux espaces bornologiques convexes séparés non complets, Y_1 étant projectif dans __QESP__. Soit $f : Y_1 \longrightarrow Y$ une application linéaire bornée qui induit le morphisme identique de Z. D'après le lemme 2.2, l'application $\varphi\phi U$ de $(Y,X)\phi_b(U,V)$ dans $(Y_1,X_1)\phi_b(U,V)$ induit un monomorphisme de $(Y,X)\phi_b(U,V)|Y\phi_b V$ dans $Z\phi_q T$. Pour montrer que ce morphisme induit est aussi un épimorphisme, on va adapter la démonstration du lemme 2.3.

Le foncteur Chap étant exact à droite (Corollaire III.7.3), on dispose d'un épimorphisme $\hat{Y}_1 \longrightarrow Z$. Considérons alors le diagramme suivant, où N est le noyau de cet épimorphisme, et où η est l'injection canonique $Y_1 \longrightarrow \hat{Y}_1$:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & H \arrow[r] & \hat{Y}_1 \arrow[r] & Z \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & X_1 \arrow[u, "\eta"] \arrow[d, "\varphi"] \arrow[r] & Y_1 \arrow[u, "\eta"] \arrow[d, "\varphi"] \arrow[r] & Z \arrow[u, "id\,Z"] \arrow[d, "id\,Z"] \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & X \arrow[u, bend left, "\tau"] \arrow[r] & Y \arrow[u, bend left, "\tau"] \arrow[r] & Z \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Puisque Y est projectif dans QESPC, il existe une application linéaire bornée τ qui induit le morphisme identique de Z. Soit H une partie bornée de $(Y_1,X_1)\phi_b(U,V)$. L'ensemble $\hat{H}$ des prolongements à $\hat{Y}_1$ des éléments de H est une partie bornée de $(\hat{Y}_1,N)\phi_b(U,V)$ (lemme 3.6) Ainsi $\hat{H}\tau$ est une partie bornée de $(Y,X)\phi_b(U,V)$. Puisque $\tau\varphi$ et η induisent le morphisme identique de Z, on a $\eta - \tau\varphi \in Y_1\phi N$, de sorte que $\hat{H}(\eta - \tau\varphi)$ est une partie bornée de $Y_1\phi_b V$. Puisque $\hat{H}\eta = H$, on a:

$$H = \hat{H}\eta \subset \hat{H}\tau\varphi + \hat{H}(\eta - \tau\varphi) = (\varphi\phi U)(\hat{H}\tau) + \hat{H}(\eta - \tau\varphi)$$

On voit que H est inclus à la somme d'un borné de $Y_1\phi_b V$ et de l'image par $\varphi\phi U$ d'un borné de $(Y,X)\phi_b(U,V)$. Ceci démontre que $\varphi\phi U$ induit un épimorphisme.

c.q.f.d.

On peut maintenant énoncer le

__Théorème 3.8: Les foncteurs QESP x QESPC ⟶ QESPC__ : $(Z,T) \longrightarrow Z\phi_q T$ __et QESP x QESPC__ ⟶ __QESPC__ : $(Z,T) \longrightarrow \hat{Z}\phi_q T$ sont isomorphes.

L'isomorphisme des Q-espaces $Z\phi_q T$ et $\hat{Z}\phi_q T$ se déduit du lemme 3.6 et de la proposition 3.7. Que cet isomorphisme soit naturel est immédiat.

c.q.f.d.

4. __Le produit tensoriel dans QESP.__

Nous allons maintenant montrer que QESP est une catégorie à produit tensoriel, c'est à dire que le foncteur ϕ_q admet un adjoint fort à gauche. Introduisons la définition suivante:

__Définition 4.1: Soient__ $T = U|V$ __et__ $Z = Y|X$ __deux Q-espaces, les espaces U et Y étant projectifs. On appelle produit tensoriel de T et Z le Q-espace__

$$T \otimes_q Z = U \otimes_b Y \mid (U \otimes_b X + V \otimes_b Y)$$

Dans cette formule, la notation $\otimes_b$ désigne évidemment le produit tensoriel bornologique inductif d'espaces vectoriels bornologiques convexes séparés.

Dans cette définition, apparaît la somme des deux sous-espaces $U \otimes_b X$ et $V \otimes_b Y$ de $U \otimes_b Y$. X et V ayant des bornologies plus fines que les bornologies induites par Y et U, il en est de même de $U \otimes_b X$ et $V \otimes_b Y$ par rapport à $U \otimes_b Y$. L'espace bornologique convexe séparé $U \otimes_b X + V \otimes_b Y$ est alors la somme algébrique des sous-espaces vectoriels $U \otimes X$ et $V \otimes Y$ de $U \otimes Y$, munie de la plus fine des bornologies pour lesquelles sont bornées les injections canoniques de $U \otimes_b X$ et $V \otimes_b Y$ dans cette somme. Ainsi, une partie de $U \otimes_b X + V \otimes_b Y$ est bornée si elle est contenue dans la somme d'un borné de $U \otimes_b X$ et d'un borné de $V \otimes_b Y$.

__Définition 4.2: Soient__ $T_i = U_i|V_i$ __et__ $Z_i = Y_i|X_i$, $i=1,2$, __quatre Q-espaces, les espaces__ U_i __et__ Y_i __étant projectifs. Soient__ $\Phi : T_1 \longrightarrow T_2$ __et__ $\Psi : Z_1 \longrightarrow Z_2$ __des morphismes induits par des applications linéaires bornées__ $\varphi \in (U_1,V_1)\phi(U_2,V_2)$, $\psi \in (Y_1,X_1)\phi(Y_2,X_2)$. __On note__ $\Phi \otimes_q \Psi$ __le morphisme de__ $T_1 \otimes_q Z_1$ __dans__ $T_2 \otimes_q Z_2$ __induit par l'application linéaire bornée__ $\varphi \otimes_b \psi$.

Il convient de montrer que les définitions 4.1 et 4.2 ne dépendent pas des décompositions choisies pour les Q-espaces qui y interviennent. Cela se déduit immédiatement de la propriété universelle que nous démontrons maintenant:

__Théorème 4.3: Le foncteur__ $\otimes_q$ __est un adjoint fort à gauche de__ ϕ_q.

Soient $T_1 = U_1|V_1$ et $T_2 = U_2|V_2$ deux Q-espaces où U_1 et U_2 sont projectifs. On peut écrire, si $Z = Y|X$, avec Y projectif:

$$T_1\phi_q(Z\,\phi_q T_2) = (U_1,V_1)\,\phi_b(\,(Y,X)\phi_b(U_2,V_2)\,,\,Y\phi_b V_2) \mid U_1\phi_b(Y\phi_b V_2)$$

D'autre part, puisque $U_1 \otimes_b Y$ est projectif (prop.1.3), on a aussi:

$$(T_1 \otimes_q Z)\phi_q T_2 = (U_1 \otimes_b Y,\ U_1 \otimes_b X + V_1 \otimes_b Y\ )\ \phi_b\ (U_2,V_2) \mid (U_1 \otimes_b Y)\phi_b V_2$$

Il est aisé de vérifier que l'isomorphisme canonique de $U_1\phi_b(Y\phi_b U_2)$ sur $(U_1 \otimes_b Y)\phi_b U_2$ (prop.1.1) induit des isomorphismes de $U_1\phi_b(Y\phi_b V_2)$ sur $(U_1 \otimes_b Y)\phi_b V_2$ et de $(U_1,V_1)\phi_b((Y,X)\phi_b(U_2,V_2),\ Y\phi_b V_2)$ sur

$(U_1 \otimes_b Y,\ U_1 \otimes_b X \oplus V_1 \otimes_b Y)\ \phi_b\ (U_2, V_2)$.

Ainsi cet isomorphisme induit un isomorphisme de $T_1 \phi_q (Z \phi_q T_2)$ sur $(T_1 \otimes_q Z) \phi_q T_2$.

On montre également sans difficultés que cet isomorphisme est naturel en T_1, T_2 et Z.

c.q.f.d.

Corollaire 4.4: QESP est une catégorie abélienne à produit tensoriel.

Le fait que le produit tensoriel soit commutatif se déduit de la proposition 3.1.

c.q.f.d.

Corollaire 4.5: Quel que soit le Q-espace Z, le foncteur $Z \phi_q$ est compatible avec les limites projectives (donc exact à gauche) et le foncteur $\otimes_q Z$ est compatible avec les limites inductives (donc exact à droite).

Proposition 4.6: Tout Q-espace projectif est fortement projectif. Si Z et T sont deux Q-espaces projectifs, alors le Q-espace $Z \otimes_q T$ est projectif.

En effet, si Z et T sont deux Q-espaces projectifs, ce sont des espaces bornologiques convexes séparés et on a, d'après la définition 4.1: $Z \otimes_q T = Z \otimes_b T$. La proposition résulte alors des propositions 1.3 et I.4.6.

c.q.f.d.

Théorème 4.7 : Si X est un Q-espace projectif, et T un espace bornologique convexe séparé, alors $X \otimes_q T = X \otimes_b T$.

Rappelons d'abord que X est sommande directe d'une somme d'espaces normés du type $\underset{\sim}{C}^{(I)}$ (prop.II.5.8.) Il résulte alors de l'additivité des foncteurs $\otimes_b$ et $\otimes_q$ qu'il suffit de démontrer la thèse lorsque X est un espace normé de ce type.

Posons donc $X = \underset{\sim}{C}^{(I)}$. Soit $0 \longrightarrow V \xrightarrow{\varphi} U \xrightarrow{\psi} T \longrightarrow 0$ une suite exacte où U est projectif. Alors, on a $X \otimes_q T = X \otimes_b U \mid X \otimes_b V$. Pour avoir $X \otimes_q T = X \otimes_b T$, il suffit donc de démontrer l'exactitude de la suite

$$0 \longrightarrow X \otimes_b V \xrightarrow{X \otimes \varphi} X \otimes_b U \xrightarrow{X \otimes \psi} X \otimes_b T \longrightarrow 0$$

Si α et β sont des épimorphismes d'espaces normés, on sait que $\alpha \otimes \beta$ en est un aussi. Cette propriété reste vraie par passage à la limite inductive. Donc $X \otimes \psi$ est un épimorphisme. L'application $X \otimes \varphi$ est injective. C'est donc un monomorphisme. Il reste à montrer que tout borné de $X \otimes_b U$ qui est inclus au noyau de $X \otimes \psi$ est l'image par $X \otimes \varphi$ d'un borné de $X \otimes_b V$.

Soit B un borné de $X \otimes_b U$ inclus au noyau de $X \otimes \psi$. On a $B \subset \Gamma(A_1 \otimes A_2)$ où A_1 est borné dans X, où A_2 est borné dans U et où Γ désigne l'enveloppe disquée. On peut donc écrire tout $u \in B$ sous la forme

$$u = \sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu a_\nu \otimes b_\nu \quad \text{avec} \quad \sum_\nu |\lambda_\nu| \leq 1,\quad a_\nu \in A_1,\ b_\nu \in A_2$$

Les a_ν sont des familles presque nulles de nombres complexes: si $a_\nu = (a_{\nu i})_{i \in I}$, on peut écrire $a_\nu = \sum_{i \in I} a_{\nu i} \delta_i$ où $\delta_i = (\delta_{ij})_{j \in I}$

On a alors

$$u = \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{i \in I} \lambda_\nu a_{\nu i} \delta_i \otimes b_\nu = \sum_{i \in I} \delta_i \otimes \Big(\sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu a_{\nu i} b_\nu \Big)$$

Appliquons $X \otimes \psi$:

$$X \otimes \psi(u) = 0 = \sum_{i \in I} \delta_i \otimes \psi\Big(\sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu a_{\nu i} b_\nu \Big)$$

Les δ_i constituant une base de $\underset{\sim}{C}^{(I)}$, on en déduit que

$$\psi\Big(\sum_{\nu=1}^{n} a_{\nu i} b_\nu \Big) = 0$$

Des relations $\sum_\nu |\lambda_\nu| \leq 1$, $a_\nu \in A_1$, $b_\nu \in A_2$, on déduit aisément que les $\sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu a_{\nu i} b_\nu$ constituent un borné de U dont on voit qu'il est inclus au noyau de ψ. Il est donc l'image par φ d'un borné de V. Ainsi on a une relation du type $B \subset \Gamma(D_1 \otimes \varphi(D_2))$ où D_1 est la boule unité de X et où D_2 est borné dans V. Ceci démontre la thèse.

c.q.f.d.

D'une façon générale, la formule $Z \otimes_q T = Z \otimes_b T$ est fausse lorsque Z et T sont des espaces bornologiques convexes séparés quelconques. On peut néanmoins comparer ces deux espaces:

Proposition 4.8: Quels que soient les Q-espaces Z et T, on a

$$b(Z \otimes_q T) = bZ \otimes_b bT$$

En effet, quel que soit l'espace bornologique convexe séparé X, on a les isomorphismes suivants, naturels en X:

$(Z \otimes_q T)\phi X \simeq Z\phi(T\phi_q X) \simeq Z\phi(bT\phi_b X) \simeq bZ\phi(bT\phi_b X) \simeq (bZ \otimes_b bT)\phi X$

On endéduit la thèse: $\quad b(Z \otimes_q T) = bZ \otimes_b bT$

c.q.f.d.

Corollaire 4.9: Si X et Y sont deux espaces bornologiques convexes séparés, alors $b(X \otimes_q Y) = X \otimes_b Y$.

Remarque: Reprenons la question posée à la fin du n°2: si Z et T sont deux Q-espaces, et P un objet de K, que vaut $(Z\phi_q T)(P)$?

Nous supposons ici que les objets de K sont les espaces normés du type $\underline{C}^{(I)}$. On a alors:

$(Z\phi_q T)(P) = P\phi(Z\phi_q T) = Z\phi(P\phi_q T)$

Et $P\phi_q f$ est le Q-espace qui applique l'objet E de K sur l'espace vectoriel

$T^P(E) = (P\phi_q T)(E) = E\phi(P\phi_q T) = (E \otimes_q P)\phi T = T(E \otimes_b P)$

Ainsi $(Z\phi_q T)(P)$ est l'espace vectoriel des morphismes de Z dans le Q-espace T^P défini par la relation $T^P(E) = T(P \otimes_b E)$. T^P est effectivement un Q-espace, puisque si P et E sont des objets de K, $P \otimes_b E$ en est un aussi.

5. Le produit tensoriel dans QESPC.

Si Z et T sont deux Q-espaces complets, il n'y a aucune raison pour que le Q-espace $Z \otimes_q T$ soit complet. Mais nous pouvons considérer le complété $Z \hat{\otimes}_q T$ de cet espace. (n°III.7)

Proposition 5.1 : Le foncteur $\otimes_q$ est un adjoint fort à gauche du foncteur ϕ_q : QESPC x QESPC $\longrightarrow$ QESPC

En effet, si Z, T_1 et T_2 sont trois Q-espaces complets, on a les isomorphismes naturels

$$(T_1 \hat{\otimes}_q Z)\phi_q T_2 \; = \; (T_1 \otimes_q Z)\phi_q T_2 \; = \; T_1\phi_q(Z\phi_q T_2)$$

c.q.f.d.

Corollaire 5.2: QESPC est une catégorie abélienne à produit tensoriel.

Corollaire 5.3: Quel que soit le Q-espace complet Z, le foncteur $Z\phi_q$ est compatible avec les limites projectives (donc exact à gauche) et le foncteur $\hat{\otimes}_q Z$ est compatible avec les limites inductives. (donc exact à droite)

Proposition 5.4: Si Z et T sont deux Q-espaces non nécessairement complets, on a $\hat{Z} \hat{\otimes}_q \hat{T} \simeq Z \hat{\otimes}_q T$

En effet, quel que soit le Q-espace complet X, on a les isomorphismes naturels:

$$(\hat{Z} \hat{\otimes}_q \hat{T})\phi_q X \;\simeq\; (\hat{Z} \otimes_q \hat{T})\phi_q X \;\simeq\; \hat{Z}\phi_q(\hat{T}\phi_q X) \;\simeq\; \hat{Z}\phi_q(T\phi_q X) \;\simeq\; Z\phi_q(T\phi_q X)$$

$$\simeq\; (Z \otimes_q T)\phi_q X \;\simeq\; (Z \hat{\otimes}_q T)\phi_q X$$

c.q.f.d.

Proposition 5.5: Si Z et T sont deux Q-espaces complets projectifs dans QESPC, alors $Z \hat{\otimes}_q T$ est projectif dans QESPC.

D'après le corollaire III.4.7, Z et T sont des sommandes directes de sommes d'espaces de Banach du type $l^1(I)$. On peut donc écrire

$$Z \oplus Z' \; = \; \bigoplus_i l^1(X_i)$$

$$T \oplus T' \; = \; \bigoplus_j l^1(Y_j)$$

Le foncteur $\hat{\otimes}_q$ étant compatible avec les limites inductives, il vient

$$Z \hat{\otimes}_q T \oplus (Z \hat{\otimes}_q T' \oplus Z' \hat{\otimes}_q T \oplus Z' \hat{\otimes}_q T') \; = \; \bigoplus_{i,j} l^1(X_i) \otimes_q l^1(Y_j)$$

D'après la proposition précédente, $l^1(X_i) \hat{\otimes}_q l^1(Y_j)$ est le complété de $\underline{C}^{(X_i)} \otimes_q \underline{C}^{(Y_j)}$. Il résulte alors du corollaire III.4.4 que $l^1(X_i) \hat{\otimes}_q l^1(Y_j)$ est projectif dans QESPC. Il en est donc de même de $Z \hat{\otimes}_q T$.

c.q.f.d.

Corollaire 5.6: Tout Q-espace complet projectif est fortement projectif.

Si Z et T sont deux espaces bornologiques convexes complets, nous souhaitons transposer la relation $b(Z \otimes_q T) = Z \otimes_b T$, en passant aux complétés. Il faut cependant tenir compte de ce que le complété d'un espace bornologique convexe séparé est en général un Q-espace, et non un espace bornologique convexe complet. Ainsi, malgré l'indice b, la notation $Z \hat{\otimes}_b T$ ne désigne pas nécessairement un objet de EBCC. Nous verrons cependant au numéro suivant qu'on ne connait aucun exemple où $Z \hat{\otimes}_b T$ n'est pas un objet de EBCC.

Proposition 5.7: Si Z et T sont deux Q-espaces complets, alors

$$b(Z \hat{\otimes}_q T) = b(bZ \hat{\otimes}_b bT)$$

En effet, quel que soit l'espace bornologique convexe complet X, on a les isomorphismes naturels

$$b(Z \hat{\otimes}_q T)\phi_b X \cong (Z \hat{\otimes}_q T)\phi_q X \cong Z\phi_q(T\phi_q X) \cong bZ\phi_b(bT\phi_b X)$$

$$\cong (bZ \otimes_b bT)\phi_b X \cong (bZ \hat{\otimes}_b bT)\phi_q X \cong b(bZ \hat{\otimes}_b bT)\phi_b X$$

On en déduit la thèse.

c.q.f.d.

Corollaire 5.8: Si X et Y sont deux espaces bornologiques convexes complets, alors $b(X \hat{\otimes}_q Y) = b(X \hat{\otimes}_b Y)$

Si Z et T sont deux Q-espaces complets, écrivons $Z = Y|X$, $T = U|V$, où X,Y,U,V sont des objets de EBCC, Y et U étant projectifs dans QESPC.

Par analogie avec la définition de $Z \hat{\otimes}_q T$, nous souhaitons établir une formule du genre

$$Z \hat{\otimes}_q T = Y \hat{\otimes}_b U \mid Y \hat{\otimes}_b V + X \hat{\otimes}_b U$$

Nous pourrons donner un sens à cette formule, et la démontrer, pour une certaine catégorie de Q-espaces complets que nous allons étudier maintenant.

6. Propriétés d'approximation.

Rappelons qu'un espace de Banach E possède la propriété d'approximation si l'application identique de E est adhérente pour la topologie de la convergence unifrome sur tout compact de E à l'espace des endomorphismes de rang finide E. Cette propriété a été étudiée en détail par Alexandre Grothendieck, [7]. On ne connait aucun espace de Banach qui ne possède

pas cette propriété.

Définition 6.1: On dira qu'un espace bornologique convexe complet X est d'approximation, ou approximant, s'il admet un système fondamental de bornés complétants $(B_i)_{i\in I}$ tels que pour tout $i\in I$, l'espace de Banach X_{B_i} possède la propriété d'approximation.

Définition 6.2: On dira qu'un espace bornologique convexe complet X est sous-approximant si on peut trouver une application linéaire bornée injective $X \longrightarrow Y$ où Y est un espace bornologique convexe complet approximant.

Remarquons tout de suite la proposition suivante:

Proposition 6.3: Tout espace bornologique convexe complet somme d'espaces de Banach du type $l^1(I)$ est approximant. Tout espace projectif est sous-approximant.

La deuxième affirmation se déduit immédiatement de la première. Tout borné d'une somme directe infinie est déjà borné dans une somme partielle finie. Comme chacun des espaces $l^1(I)$ est approximant, il suffit de démontrer que la somme de deux espaces de Banach approximant E,F est elle-même d'approximation.

Munissons $E \oplus F$ de la norme $||(x,y)|| = \max\{||x||,||y||\}$.
Nous notons p_E et p_F les projecteurs sur E et F. Soit K un compact de $E \oplus F$. Alors $p_E K$ est compact dans E. Donc il existe un endomorphisme de rang fini u de E tel que

$$\forall x \in p_E K : \quad ||u(x) - x|| < \varepsilon$$

De même, il existe un endomorphisme de rang fini v de F tel que

$$\forall y \in p_F K : \quad ||v(y) - y|| < \varepsilon$$

Alors $w = (u,v)$ est de rang fini et

$$\forall z=(x,y) \in K : ||w(z)-z|| = \max\{||u(x)-x||, ||v(y)-y||\} < \varepsilon$$

c.q.f.d.

Nous voulons montrer que si X et Y sont deux espaces bornologiques convexes complets approximants, alors $X \hat{\otimes}_b Y$ est un espace bornologique convexe complet.

Si E est un espace de Banach, on note E' son dual topologique.

Lemme 6.4: Soient E,F,U des espaces de Banach, l'espace U étant approximant. Soit $u: E \longrightarrow F$ une application linéaire continue injective. Alors l'application $u \hat{\otimes} U \circ E \hat{\otimes}_b U \longrightarrow F \hat{\otimes}_b U$ est injective.

Puisque U est approximant, on sait que les applications canoniques $\mu : E \hat{\otimes}_b U \longrightarrow U'\phi_b E$ et $\nu : F \hat{\otimes}_b U \longrightarrow U'\phi_b F$ sont injectives. D'autre part, le carré suivant est commutatif:

$$\begin{tikzcd} E \hat{\otimes}_b U \arrow[r, "u\hat{\otimes}U"] \arrow[d, "\mu"] & F \hat{\otimes}_b U \arrow[d, "\nu"] \\ U'\phi_b E \arrow[r, "U'\phi u"] & U'\phi_b F \end{tikzcd}$$

L'application $U'\phi u$ est injective. En effet, puisque u est un monomorphisme on a $(U'\phi u)(f) = uf = 0 \Longrightarrow f = 0$.
Nous voyons que $\nu \circ (u \hat{\otimes} U)$ est injective, ce qui entraîne la thèse.

c.q.f.d.

Corollaire 6.5: Si U est un espace de Banach approximant, et X un espace bornologique convexe complet, alors le Q-espace complet $U \hat{\otimes}_b X$ est un objet de EBCC.

X est une limite inductive monique d'espaces de Banach: $X = \varinjlim X_i$. L'espace $U \hat{\otimes}_b X$ est la limite inductive des $U \hat{\otimes}_b X_i$, et d'après le lemme, les applications $U \hat{\otimes}_b X_i \longrightarrow U \hat{\otimes}_b X_j$ sont injectives. La thèse se déduit alors de la proposition III.2.2.

c.q.f.d.

Théorème 6.6: Soient E,F,U trois espaces bornologiques convexes complets, U étant approximant. Si $f: E \longrightarrow F$ est une application linéaire bornée injective, alors le morphisme $U \hat{\otimes} f \circ U \hat{\otimes}_b E \longrightarrow U \hat{\otimes}_b F$ est un monomorphisme.

Ecrivons $E = \varinjlim E_i$, $F = \varinjlim F_j$ et $U = \varinjlim U_h$ où les E_i, F_j, U_h sont des espaces de Banach, les U_h étant approximants. On suppose aussi que ces limites inductives sont moniques. Soit f_i la restriction de f à E_i. D'après le lemme 6.4, l'application $U_h \hat{\otimes} f_i$ est injective. L'application $U_h \hat{\otimes} f$ est la limite inductive (sur i) des applications $U_h \hat{\otimes} f_i$, et le morphisme $U \hat{\otimes} f$ est la limite inductive (sur h) des applications $U_h \hat{\otimes} f$.

Or dans la catégorie QESPC, les limites inductives filtrantes sont exactes (III.6.1). Donc, $U \hat{\otimes} f$ est un monomorphisme.

c.q.f.d.

Théorème 6.7: Soient X et Y deux espaces bornologiques convexes complets, X étant approximant et Y sous-approximant. Alors $X \hat{\otimes}_b Y$ est un espace bornologique convexe complet.

Supposons d'abord que X et Y sont approximants tous les deux. Soient $X = \varinjlim X_i$, $Y = \varinjlim Y_j$ où les espaces de Banach X_i et Y_j sont approximants, les limites inductives étant moniques.

$X \hat{\otimes}_b Y$ est la limite inductive des $X_i \hat{\otimes}_b Y_j$, et cette limite inductive d'après le lemme 6.4 est monique. Donc $X \hat{\otimes}_b Y$ est un objet de EBCC.

Si Y est sous-approximant, soit $Y \xrightarrow{f} Z$ une application linéaire bornée injective, où Z est approximant. D'après le théorème 6.6, $X \hat{\otimes} f$ est un monomorphisme. Mais d'après le théorème précédent, $X \hat{\otimes}_b Z$ est un objet de EBCC. Il en est donc de même de $X \hat{\otimes}_b Y$ (II.6.2).

c.q.f.d.

Nous allons maintenant pouvoir réaliser le voeu indiqué à la fin du n°5.

Lemme 6.8: Quel que soit le Q-espace convexe complet Z, on peut trouver une suite exacte $o \longrightarrow X \longrightarrow Y \longrightarrow Z \longrightarrow o$, où Y est un espace bornologique convexe complet projectif approximant.

C'est immédiat: on sait qu'on peut trouver une telle suite exacte où Y est une somme d'espaces $l^1(I)$. D'après la proposition 6.3, une telle somme est un espace approximant.

c.q.f.d.

Théorème 6.9: Soient $Z = Y|X$ et $T = U|V$ deux Q-espaces complets. Si Y et U sont deux espaces bornologiques convexes complets projectifs approximants:

$$Z \hat{\otimes}_q T = Y \hat{\otimes}_b U \mid Y \hat{\otimes}_b V + X \hat{\otimes}_b U$$

Si Y et U sont approximants, X et V sont sous-approximants, de sorte que $Y \hat{\otimes}_b U$, $Y \hat{\otimes}_b V$ et $X \hat{\otimes}_b U$ sont d'après le théorème 6.7 des objets de EBCC. De plus, d'après le théorème 6.6, $Y \hat{\otimes}_b V$ et $X \hat{\otimes}_b U$ sont des sous-objets de $Y \hat{\otimes}_b U$. Ainsi, le membre de droite de l'isomorphisme à démontrer est bien défini.

Calculons d'abord $Z \otimes_q T$. La formule $Z \otimes_q T = Y \otimes_b U \mid Y \otimes_b V + X \otimes_b U$ n'est pas évidente, puisque Y et U sont projectifs dans QESPC, et non dans QESP. Démontrons cette formule. Soient Y_1 et U_1 deux objets projectifs de QESP et $Y_1 \xrightarrow{\mu} Y$, $U_1 \xrightarrow{\nu} U$ des épimorphismes. Construisons les diagrammes suivants dont toutes les lignes sont exactes:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & X_1 \arrow[r] \arrow[d, "\mu"] & Y_1 \arrow[r, "\sigma\mu"] \arrow[d, "\mu"] & Z \arrow[r] \arrow[d, "id\,Z"] & 0 \\
0 \arrow[r] & X \arrow[r] & Y \arrow[r, "\sigma"] & Z \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & V_1 \arrow[r] \arrow[d, "\nu"] & U_1 \arrow[r, "\tau\nu"] \arrow[d, "\nu"] & T \arrow[r] \arrow[d, "id\,T"] & 0 \\
0 \arrow[r] & V \arrow[r] & U \arrow[r, "\tau"] & T \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & X_1 \otimes_b U_1 + Y_1 \otimes_b V_1 \arrow[r] \arrow[d, "\mu\otimes\nu"] & Y_1 \otimes_b U_1 \arrow[r] \arrow[d, "\mu\otimes\nu"] & Z \otimes_q T \arrow[r] \arrow[d, "\Phi"] & 0 \\
0 \arrow[r] & X \otimes_b U + Y \otimes_b V \arrow[r] & Y \otimes_b U \arrow[r] & K \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

On sait que si α et β sont deux épimorphismes d'espaces normés, $\alpha \otimes \beta$ en est un aussi. Cette propriété reste vraie par passage à la limite inductive. Donc $\mu\otimes\nu$: $Y_1 \otimes_b U_1 \longrightarrow Y \otimes_b U$ est un épimorphisme, ce qui entraîne que le morphisme Φ en est un aussi(II.8.3). Montrons maintenant que Φ est un monomorphisme.

On sait que X_1 est l'image réciproque de X par μ: une partie de X_1 est bornée dans X_1 si et seulement si elle est bornée dans Y_1, son image par μ étant bornée dans X. De même, une partie de V_1 est bornée dans V_1 si et seulement si elle est bornée dans U_1, son image par ν étant bornée dans V. Il en résulte quee les applications linéaires bornées $\mu: X_1 \longrightarrow X$, $\nu: V_1 \longrightarrow V$ et donc aussi $\mu\otimes\nu$: $X_1 \otimes_b U_1 + Y_1 \otimes_b V_1 \longrightarrow X \otimes_b U + Y \otimes_b V$ sont des épimorphismes. Il en résulte aussi que tout borné de Y_1 inclus au noyau de μ est borné dans X_1 et que tout borné de U_1 inclus au noyau de ν est borné dans V_1.

Soit B un borné de $Y_1 \otimes_b U_1$ dont l'image par $\mu\otimes\nu$ est incluse et bornée dans $X \otimes_b U + Y \otimes_b V$: on a alors $\mu\otimes\nu(B) = \mu\otimes\nu(B_1)$ où B_1 est un borné de

$X_1 \otimes_b U_1 + Y_1 \otimes_b V_1$. Il en résulte que $B \subset B_1 + B_2$ où B_2 est un borné de $Y_1 \otimes_b U_1$ inclus au noyau de $\mu\otimes\nu$. Le noyau de $\mu\otimes\nu$ est $\ker\mu \otimes U_1 + Y_1 \otimes \ker\nu$. L'espace U_1 étant projectif dans QESP, on déduit du théorème 4.7 que la bornologie de $\ker\mu \otimes_b U_1$ est la bornologie ~~de~~ induite par $Y_1 \otimes_b U_1$. Il en est de même pour $Y_1 \otimes_b \ker\nu$, et donc aussi pour $\ker\mu \otimes_b U_1 + Y_1 \otimes_b \ker\nu$. Ainsi, B_2 est borné dans $\ker\mu \otimes_b U_1 + Y_1 \otimes_b \ker\nu$, et par conséquent aussi dans $X_1 \otimes_b U_1 + Y_1 \otimes_b V_1$. Ceci montre que B est borné dans $X_1 \otimes_b U_1 + Y_1 \otimes_b V_1$, donc que Φ est un monomorphisme.

On est ainsi arrivé à la suite exacte

$$0 \longrightarrow Y \otimes_b V + X \otimes_b U \xrightarrow{\alpha} Y \otimes_b U \xrightarrow{\beta} Z \otimes_q T \longrightarrow 0$$

Le passage au complété étant un foncteur exact à droite, la suite suivante est exacte:

$$(Y \otimes_b V + X \otimes_b U)^{\wedge} \xrightarrow{\hat{\alpha}} Y \hat{\otimes}_b U \xrightarrow{\hat{\beta}} Z \hat{\otimes}_q T \longrightarrow 0$$

Décomposons $\hat{\alpha}$ en produit d'un monomorphisme γ et d'un épimorphisme δ: $\hat{\alpha} = \gamma\delta$.

Si N est la source de γ (et le but de δ), on voit que $Z \hat{\otimes}_q T \simeq Y \hat{\otimes}_b U | N$

On sait que $Y \otimes_b V + X \otimes_b U$ est l'image du morphisme canonique $(Y \otimes_b V) \oplus (X \otimes_b U) \longrightarrow Y \otimes_b U$. On dispose donc d'une suite

$$(Y \otimes_b V) + (X \otimes_b U) \xrightarrow{\omega} Y \otimes_b V + X \otimes_b U \xrightarrow{\alpha} Y \otimes_b U$$

où ω est un épimorphisme. Le passage au complété étant un foncteur additif et exact à droite, on a encore une suite

$$(Y \hat{\otimes}_b V) + (X \hat{\otimes}_b U) \xrightarrow{\hat{\omega}} (Y \otimes_b V + X \otimes_b U)^{\wedge} \xrightarrow{\delta} N \xrightarrow{\gamma} Y \hat{\otimes}_b U$$

où $\hat{\omega}$ et δ sont des épimorphismes et γ un monomorphisme. Ainsi N est l'image de $(Y \hat{\otimes}_b V) \oplus (X \hat{\otimes}_b U)$ dans $Y \hat{\otimes}_b U$, c'est à dire que $N = Y \hat{\otimes}_b V + X \hat{\otimes}_b U$.

c.q.f.d.

Chapitre V.

Platitude des Q-espaces complets.

0. Introduction.

Nous étudions dans ce chapitre le problème de la détermination des espaces bornologiques convexes complets Z qui sont plats en tant que Q-espaces, c'est à dire tels que le foncteur $Z\hat{\otimes}_q$ soit exact. Nous montrons au n°2 qu'il est équivalent de dire que les Q-espaces $Z\hat{\otimes}_q T$ et $Z\hat{\otimes}_b T$ coïncident chaque fois que T appartient à une classe assez large d'espaces, contenant notamment tous les espaces de Banach séparables.

Il est alors naturel de considérer les espaces Z tels que $Z\hat{\otimes}_q T = Z\hat{\otimes}_b T$ quel que soit T. Nous dirons de ces espaces qu'ils sont ultraplats. Nous donnons aux n°s 4, 5, 6 diverses caractérisations des espaces plats ou ultraplats, et nous donnons des exemples d'espaces non plats.

Nous démontrons aussi d'autres résultats dont les plus intéressants semblent être les suivants: un espace de Banach approximant, ultraplat et réflexif est de dimension finie; un espace bornologique convexe complet nucléaire est ultraplat; un espace de Banach approximant, plat et séparable est ultraplat. Nous ne pouvons malheureusement pas donner d'exemple d'espace qui soit plat sans être ultraplat.

1. Ultraplatitude des Q-espaces complets projectifs.

Si Z est un Q-espace projectif, et T un espace bornologique convexe séparé, on a vu au paragraphe IV.4 que $Z\hat{\otimes}_q T = Z\hat{\otimes}_b T$. Nous allons démontrer la propriété correspondante dans la catégorie QESPC, propriété à laquelle nous donnons (pour des raisons qui apparaitront au n°2) le nom d'ultraplatitude.

Définition 1.1: Un espace bornologique convexe complet Z est dit ultraplat si $Z\hat{\otimes}_q T = Z\hat{\otimes}_b T$ quel que soit l'espace bornologique convexe complet T.

Théorème 1.2: Tout Q-espace complet projectif est ultraplat.

Par le même raisonnement que dans la proposition IV.4.7, il suffit de démontrer que $Z\hat{\otimes}_q T \simeq Z\hat{\otimes}_b T$ chaque fois que Z est un espace de Banach du type $l^1(I)$. Or cet espace est le complété de $\underset{\sim}{C}^{(I)}$, et on a

$$l^1(I)\hat{\otimes}_q T = \underset{\sim}{C}^{(I)}\hat{\otimes}_q T = \underset{\sim}{C}^{(I)}\hat{\otimes}_b T \text{ (prop. IV.5.4)}$$

Mais on a aussi $\underset{\sim}{C}^{(I)}\hat{\otimes}_b T = l^1(I)\hat{\otimes}_b T$.

c.q.f.d.

Proposition 1.3: Soit $Z = Y|X$ un Q-espace complet, où Y est ultraplat et approximant. Quel que soit l'espace bornologique convexe complet approximant T, on a:

$$Z\hat{\otimes}_q T = Y\hat{\otimes}_b T|X\hat{\otimes}_b T$$

D'après les théorèmes IV.6.7 et IV.6.6, $Y\hat{\otimes}_b T$ est un objet de EBCC et $X\hat{\otimes}_b T$ est un sous-objet de $Y\hat{\otimes}_b T$. Le second membre de l'isomorphisme à démontrer est donc bien défini.

Le foncteur $\hat{\otimes}_q T$ étant exact à droite, la suite suivante est exacte:

$$X\hat{\otimes}_q T \longrightarrow Y\hat{\otimes}_q T \longrightarrow Z\hat{\otimes}_q T \longrightarrow 0$$

D'après la définition 1.1, $Y\hat{\otimes}_q T = Y\hat{\otimes}_b T$ est un objet de EBCC. Donc le morphisme $X\hat{\otimes}_q T \longrightarrow Y\hat{\otimes}_q T$ se factorise à travers $b(X\hat{\otimes}_q T) = X\hat{\otimes}_b T$. Puisque le morphisme $X\hat{\otimes}_b T \longrightarrow Y\hat{\otimes}_b T$ est un monomorphisme, la suite suivante est exacte:

$$0 \longrightarrow X\hat{\otimes}_b T \longrightarrow Y\hat{\otimes}_b T \longrightarrow Z\hat{\otimes}_q T \longrightarrow 0$$

c.q.f.d.

2. Un critère de platitude.

Nous allons démontrer dans ce numéro une condition nécessaire et suffisante pour qu'un espace bornologique convexe complet soit plat dans QESPC.

<u>Lemme 2.1: Soit</u> K <u>une catégorie abélienne comportant suffisamment de projectifs. Si</u> $0 \longrightarrow a_1 \xrightarrow{\alpha_1} a_2 \xrightarrow{\beta_1} a_3 \longrightarrow 0$ <u>est une suite exacte, il existe un diagramme commutatif</u> .

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & c_1 \arrow[r, "\gamma_1"] \arrow[d, "\alpha_3"] & b_1 \arrow[r, "\delta_1"] \arrow[d, "\alpha_2"] & a_1 \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_1"] & 0 \\
0 \arrow[r] & c_2 \arrow[r, "\gamma_2"] \arrow[d, "\beta_3"] & b_2 \arrow[r, "\delta_2"] \arrow[d, "\beta_2"] & a_2 \arrow[r] \arrow[d, "\beta_1"] & 0 \\
0 \arrow[r] & c_3 \arrow[r, "\gamma_3"] \arrow[d] & b_3 \arrow[r, "\delta_3"] \arrow[d] & a_3 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

<u>dont toutes les lignes et les colonnes sont exactes, et où</u> b_1, b_2 <u>et</u> b_3 <u>sont projectifs.</u>

On choisit des épimorphismes δ_1 et δ_3, avec b_1 et b_3 projectifs. On appelle γ_1 et γ_3 les morphismes noyaux de δ_1 et δ_3.

β_1 étant un épimorphisme, et b_3 étant projectif, il existe un morphisme $\theta : b_3 \longrightarrow a_2$ tel que $\delta_3 = \beta_1 \theta$. Les morphismes $\alpha_1 \delta_1 : b_1 \longrightarrow a_2$ et $\theta : b_3 \longrightarrow a_2$ permettent de définir un morphisme $\delta_2 : b_2 \longrightarrow a_2$ où b_2 est l'objet somme de b_1 et b_3. On sait que b_2 est encore projectif. On appelle α_2 et β_2 les morphismes canoniques de b_1 dans b_2 et de b_2 sur b_3. δ_2 est un épimorphisme. En effet, soit ξ un morphisme tel que $\xi \delta_2 = 0$. On a alors $\xi \alpha_1 \delta_1 = 0$ et $\xi \theta = 0$. δ_1 étant un épimorphisme, il vient $\xi \alpha_1 = 0$. Donc ξ se factorise à travers β_1 : $\xi = \eta \beta_1$. Mais alors $0 = \xi \theta = \eta \beta_1 \theta = \eta \delta_3$, et $\eta = 0$ puisque δ_3 est un épimorphisme. Donc $\xi = 0$.

Il reste maintenant à appeler γ_2 le morphisme noyau de δ_2 ; on arrive ainsi au diagramme souhaité, dont les lignes sont exactes, ainsi que les deux dernières colonnes. Il en résulte que la première colonne est aussi exacte.

c.q.f.d.

<u>Définition 2.2: On dira qu'un Q-espace complet</u> Z <u>est sous-projectif si on peut trouver un monomorphisme</u> $Z \longrightarrow T$, <u>où</u> T <u>est un Q-espace projectif.</u>

no page 71 in my copy

De même que les Q-espaces complets projectifs, les Q-espaces complets sous-projectifs sont nécessairement des espaces bornologiques convexes complets sous-approximants.

<u>Théorème 2.3: Un espace bornologique convexe complet approximant</u> U <u>est plat si et seulement si</u> $U \hat{\otimes}_q Z = U \hat{\otimes}_b Z$ <u>chque fois que</u> Z <u>est un Q-espace complet sous-projectif.</u>

Démontrons la condition suffisante.

Soit $0 \longrightarrow Z_1 \longrightarrow Z_2 \longrightarrow Z_3 \longrightarrow 0$ une suite exacte de Q-espaces complets. Construisons un diagramme commutatif et exact à trois lignes et trois colonnes conformément au lemme 2.1. Appliquons le foncteur $U \hat{\otimes}_q$ à ce diagramme. Nous obtenons:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & U \hat{\otimes}_q X_1 \arrow[r] \arrow[d] & U \hat{\otimes}_q Y_1 \arrow[r] \arrow[d] & U \hat{\otimes}_q Z_1 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & U \hat{\otimes}_q X_2 \arrow[r] \arrow[d] & U \hat{\otimes}_q Y_2 \arrow[r] \arrow[d] & U \hat{\otimes}_q Z_2 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & U \hat{\otimes}_q X_3 \arrow[r] \arrow[d] & U \hat{\otimes}_q Y_3 \arrow[r] \arrow[d] & U \hat{\otimes}_q Z_3 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Le foncteur $U \hat{\otimes}_q$ étant exact à droite, toutes les lignes et les colonnes de ce diagramme sont exactes à droites. D'après l'hypothèse, on a $U \hat{\otimes}_q X_i = U \hat{\otimes}_b X_i$ et $U \hat{\otimes}_q Y_i = U \hat{\otimes}_b Y_i$. Mais on déduit alors du théorème IV.6.6 que les trois lignes et les deux premières colonnes sont exactes. Il en est donc de même de la troisième colonne.

Démontrons la condition nécessaire: supposons que U est plat. Soit Z un Q-espace complet sous-projectif. On peut donc trouver une suite exacte $0 \longrightarrow Z \longrightarrow Y \longrightarrow X \longrightarrow 0$ où Y est projectif. On peut même supposer que Y est approximant. Considérons la suite

$$0 \longrightarrow U \hat{\otimes}_q Z \longrightarrow U \hat{\otimes}_q Y \longrightarrow U \hat{\otimes}_q X \longrightarrow 0$$

Cette suite est exacte puisque U est plat. Mais puisque Y est projectif, on a $U \hat{\otimes}_q Y = U \hat{\otimes}_b Y$. Ainsi $U \hat{\otimes}_q Z$ est un sous-objet d'un espace bornologique convexe complet et est par conséquent lui-même un objet de EBCC. Donc $U \hat{\otimes}_q Z = b(U \hat{\otimes}_q Z) = U \hat{\otimes}_b Z$.

c.q.f.d.

Corollaire 2.4: Tout espace bornologique convexe compåct approximant et ultraplat est plat.

3. Sous-projectivité.

Il est assez naturêl de se demander s'il existe des espaces qui sont plats sans être ultraplats. J'ignore la réponse à cette question. Nous allons cependant voir qu'elle n'est pas vide de sens, qu'il existe effectivement des espaces bornologiques convexes complets, et même des espaces de Banach qui ne sont pas sous-projectifs.

Théorème 3.1: Soit I un ensemble. L'espace de Banach $\ell^\infty(I)$ des familles bornées de nombres complexes, indexées par I, est sous-projectif si et seulement si l'ensemble I est dénombrable.

Démontrons d'abord la condition nécessaire. Dire que $l^\infty(I)$ est sous-projectif signifie que $l^\infty(I)$ s'injecte dans une somme d'espaces du type $l^1(J)$. Un borné d'une somme directe est déjà borné dans une somme partielle finie. Mais une somme finie d'espaces du type $l^1(J)$ est un espace du même type.

Nous disposons donc d'uneapplication linéaire continue injective u de $l^\infty(I)$ dans $l^1(J)$. Désignons par α et β les injections linéaires canoniques de $l^2(I)$ dans $l^\infty(I)$ et de $l^1(J)$ dans $l^2(J)$. L'application $v = \beta u \alpha$ est une application linéaire continue injective de $l^2(I)$ dans $l^2(J)$. Si (x_n) est une suite faiblement convergente de $l^2(I)$, la suite $(u\alpha(x_n))$ est faiblement convergente dans $l^1(J)$. Mais, dans $l^1(J)$, toute suite faiblement convergente est fortement convergente ([4] p.295).

On en déduit que v est une injection linéaire compacte. La valeur absolue de v, définie par la relation $w^2 = v^*v$ est une transformation linéaire autoadjointe, compacte et injective de l'espace de Hilbert $l^2(I)$. D'après la théorie de Riesz, l'espace $l^2(I)$ est alors la somme hilbertienne du

noyau de W, c'est à dire de o, et d'une famille dénombrable de sous-espaces de dimension finie. Ainsi l'espace $l^2(I)$ est séparable, ce qui n'est possible que si l'ensemble I est dénombrable.

La condition suffisante du théorème est immédiate: Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite sommable avec $a_n \neq 0$ quel que soit n. L'application $l^\infty(\mathbb{N}) \longrightarrow l^1(\mathbb{N}) : (b_n) \longmapsto (b_n a_n)$ est linéaire continue et injective.

c.q.f.d.

Théorème 3.2: Tout espace de Banach séparable ou dual de séparable est sous-projectif.

Si E est séparable, la boule unité de son dual E' est faiblement métrisable. De plus, elle est faiblement compacte, de sorte qu'elle est faiblement séparable. Choisissons une suite (f_n) faiblement dense dans cette boule unité. L'application

$E \longrightarrow l^\infty(\mathbb{N}) : x \longmapsto (\langle x, f_n \rangle)_{n \in \mathbb{N}}$

est linéaire continue etinjective.

Si E est un dual de séparable, $E = F'$, on choisit une suite (x_n) dense dans la boule unité de F. Alors l'application

$E \longrightarrow l^\infty(\mathbb{N}) : f \longmapsto (\langle x_n, f \rangle)_{n \in \mathbb{N}}$

est linéaire continue et injective.

Dans les deux cas, on a trouvé une injection linéaire continue de E dans $l^\infty(\mathbb{N})$. La thèse se déduit alors du théorème précédent.

c.q.f.d.

4. Ultraplatitude: Le cas des espaces bornologiques convexes complets.

Nous allons donner ici plusieurs propriétés équivalentes à l'ultraplatitude.

Théorème 4.1: Si U est un espace bornologique convexe complet approximant, les propositions suivantes sont équivalentes:

(a) U est ultraplat.

(b) Si Y est un espace bornologique convexe compåct sous-approximant et X un sous-espace fermé de Y, alors $U \hat{\otimes}_b X$ est un sous-espace fermé de $U \hat{\otimes}_b Y$

(c) Pour tout ensemble I et tout sous-espace fermé X de $l^1(I)$, $U \hat{\otimes}_b X$ est un sous-espace fermé de $U \hat{\otimes}_b l^1(I)$.

(d) Pour tout espace de Banach Y: $U \hat{\otimes}_b Y = U \hat{\otimes}_q Y$

(e) U est plat et pour tout ensemble I : $U \hat{\otimes}_q l(I) = U \hat{\otimes}_b l(I)$

(a) ===> (b)

X étant un sous-espace fermé de Y, on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow X \longrightarrow Y \longrightarrow Y/X \longrightarrow 0$$

dont tous les éléments sont des objets de EBCC. Appliquons le foncteur exact $U \hat{\otimes}_q = U \hat{\otimes}_b$: la suite

$$0 \longrightarrow U \hat{\otimes}_b X \longrightarrow U \hat{\otimes}_b Y \longrightarrow U \hat{\otimes}_b (Y/X) \longrightarrow 0$$

est exacte. Par conséquent, $U \hat{\otimes}_b X$ est un sous-espace fermé de $U \hat{\otimes}_b Y$.

(b) ===> (c): Evident.

(c) ===> (d):

Ecrivons $Y = l^1(I)/X$. On a $U \hat{\otimes}_q Y = U \hat{\otimes}_b l^1(I) \mid U \hat{\otimes}_b X$ (prop.1.3). Mais $U \hat{\otimes}_b X$ est un sous-espace fermé de $U \hat{\otimes}_b l^1(I)$, de sorte que $U \hat{\otimes}_q Y$ est un objet de EBCC.

(d) ===> (a):

Tout espace bornologique convexe complet Y est une limite inductive d'espaces de Banach Y_i. On a alors à la fois:

$$U \hat{\otimes}_b Y = \varinjlim U \hat{\otimes}_b Y_i \quad ; \quad U \hat{\otimes}_q Y = \varinjlim U \hat{\otimes}_q Y_i \quad \text{et} \quad U \hat{\otimes}_b Y_i = U \hat{\otimes}_q Y_i .$$

Il en résulte que

$$U \hat{\otimes}_b Y = U \hat{\otimes}_q Y$$

(a) ===> (e): Evident.

(e) ===> (d):

Soit B la boule unité de Y'. L'espace Y est isométrique à un sous-espace fermé de $l^\infty(B)$. Puisque la suite $0 \longrightarrow Y \longrightarrow l^\infty(B)$ est exacte, et que U est plat, il en est de même de la suite

$$0 \longrightarrow U \hat{\otimes}_q Y \longrightarrow U \hat{\otimes}_q l^\infty(B)$$

Mais $U \hat{\otimes}_q l^\infty(B) = U \hat{\otimes}_b l^\infty(B)$, ce qui entraine que $U \hat{\otimes}_q Y$ est un objet de EBCC.

c.q.f.d.

Proposition 4.2: Toute limite inductive filtrante monique d'espaces bornologiques convexes complets approximants ultraplats est un espace ultraplat.

Soit $U = \varinjlim U_i$ où les U_i sont ultraplats. Si on suppose que la limite inductive est monique, c'est afin d'être sur que Y est un objet de EBCC.

Soit Y un espace de Banach. On a puisque $\hat{\otimes}_q$ et $\hat{\otimes}_b$ sont compatibles avec les limites inductives:

$$U \hat{\otimes}_q Y = \varinjlim U_i \hat{\otimes}_q Y = \varinjlim U_i \hat{\otimes}_b Y = U \hat{\otimes}_b Y$$

c.q.f.d.

Proposition 4.3: Toute sommande directé approximante d'un espace bornologique convexe approximant ultraplat est un espace ultraplat.

Soit U un espace ultraplat, et $U = U_1 \oplus U_2$. Quel que soit l'espace de Banach X, on a

$$U \hat{\otimes}_b X = (U_1 \hat{\otimes}_b X) \oplus (U_2 \hat{\otimes}_b X) = U \hat{\otimes}_q X = (U_1 \hat{\otimes}_q X) \oplus (U_2 \hat{\otimes}_q X)$$

Ceci entraine que $U_1 \hat{\otimes}_q X$ est un sous-objet de $U \hat{\otimes}_b X$, donc est lui-même un objet de EBCC. Donc $U_1 \hat{\otimes}_q X = U_1 \hat{\otimes}_b X$.

c.q.f.d.

La proposition 4.2 permet de construire des exemples d'espaces ultraplats, à partir d'espaces ultraplats déjà connus, tels des espaces $l^1(I)$. Ainsi, tout espace vectoriel muni de la bornologie convexe la plus fine est ultraplat. Un tel espace est en effet une limiée inductive d'espaces finidimensionnels. On a aussi le théorème suivant:

Théorème 4.4: Tout espace bornologique convexe complet nucléaire est ultraplat.

Rappelons d'abord qu'un espace bornologique convexe complet est dit nucléaire si à tout borné complétant B_1 de E, on peut associer un borné complétant B_2 contenant B_1 tel que l'injection canonique $E_{B_1} \longrightarrow E_{B_2}$ soit nucléaire.

Un borné B de E est dit quadratique si l'espace de Banach E_B est un espace de Hilbert. Un espace nucléaire admet un système fondamental de bornés quadratiques. En effet, soit $E_{B_1} \longrightarrow E_{B_2}$ une injection canonique nucléaire. Comme toute application nucléaire, α se factorise à travers l'espace de Hilbert $l^2(\mathbb{N})$: $\alpha = \gamma\beta$ où $E_{B_1} \xrightarrow{\beta} l^2(\mathbb{N}) \xrightarrow{\gamma} E_{B_2}$

L'image par γ de la boule unité de $l^2(\mathbb{N})$ est un borné complétant B_1' de E. L'espace $E_{B_1'}$ est hilbertien puisque c'est un quotient de $l^2(\mathbb{N})$.

Ainsi, B_1 est inclus au borné quadratique B_1'.

Montrons maintenant qu'un espace nucléaire est une limite inductive d'espaces du type $l^1(\mathbb{N})$, autrement ditadmet un système fondamental de bornés B tels que E_B soit isomorphe à $l^1(\mathbb{N})$. Soit Bun borné quadratique de E. On peut trouver un borné quadratique B_2 contenant B_1 tel que l'injection canonique $E_{B_1} \xrightarrow{\alpha} E_{B_2}$ soit nucléaire. Comme toute application nucléaire entre espaces d'Hilbert, α peut s'écrire $\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \, e_n \otimes f_n$ où $\sum |\lambda_n| < \infty$ et où (e_n), (f_n) sont des suites orthonormées de vecteurs de E_{B_1} et E_{B_2}. Factorisons α à travers $l^1(\mathbb{N})$: $\alpha = \gamma\beta$ où

$$\beta(x) = (\lambda_n \cdot (x|e_n))_{n\in\mathbb{N}}$$

, et où γ applique une suite $(\mu_n) \in l^1(\mathbb{N})$ sur le vecteur $\sum_n \mu_n f_n$.

L'application γ est injective, car la suite (f_n) étant orthonormée, on ne peut avoir $\sum_n \mu_n f_n = 0$ que si tous les μ_n sont nuls. Si on appelle B_1' l'image par γ de la boule unité de $l^1(\mathbb{N})$, on voit ainsi que $E_{B_1'}$ est isomorphe à $l^1(\mathbb{N})$. Et B est inclus à B_1'.

c.q.f.d.

Nous verrons au n°5 qu'il existe des espaces ultraplats qui ne sont pas des limites inductives d' espaces $l^1(I)$.

5 Ultraplatitude: Le cas des espaces de Banach.

Si U est un espace de Banach, les propositions équivalentes du théorème 4.1 sont aussi équivalentes à d'autres. Certaines de ces équivalences apparaissent déjà dans un texte de Grothendieck, [8].

Théorème 5.1/ Si U est un espace de Banach approximant/ les propriétés suivantes sont équivalentes:

(a) U est ultraplat.

(b) Si Y est un espace de Banach et X un sous-espace fermé de Y, toute application linéaire continue de X dans U' se prolonge à Y.

(c) U' admet un supplémentaire topologique dans tout espace de Banach qui le contient.

(d) U' admet un supplémentaire topologique dans un espace du type $L^\infty(K,\mu)$ où K est un espace localement compact, et μ une mesure de Radon positive sur K.

(e) U'' admet un supplémentaire topologique dans un espace du type $L^1(K,\mu)$ où K et μ ont la même signification qu'en (d).

(f) U'' est ultraplat.

(g) Si X est un sous-espace fermé de l'espace de Banach Y, toute application linéaire continue de U dans Y/X se relève en une application linéaire continue de U dans Y''.

(h) Si Y est un espace de Banach et X° un sous-espace faiblement fermé de son dual, toute application linéaire continue de U dans Y'/X° se relève en une application linéaire continue de U dans Y'.

Démonstration:

(a) ===> (b)

Si U est ultraplat, $U\hat{\otimes}_b X$ est un sous-espace fermé de $U\hat{\otimes}_b Y$ (th.4.1)

D'après le théorème de Hahn-Banach, toute forme linéaire continue sur $U\hat{\otimes}_b X$ se prolonge à $U\hat{\otimes}_b Y$. La thèse se déduit alors des isomorphismes $(U\hat{\otimes}_b X)\phi \underset{\sim}{C} \cong X\phi U'$ et $(U\hat{\otimes}_b Y)\phi \underset{\sim}{C} = Y\phi U'$.

(b) ===> (c)

Si U' est un sous-espace fermé de Y, d'après (b) l'application identique de U' se prolonge en une application continue idempotente de Y sur U', ce qui entraine (c).

(c) ===> (d)

C'est évident, tenant compte de ce que tout espace de Banach est isométrique à un sous-espace fermé d'un espace de type $L^\infty(K,\mu)$

(d) $\Longrightarrow$ (e)

Si U' admet un supplémentaire topologique dans $L^{\infty}(K,\mu)$, U'' admet un supplémentaire topologique dans le dual de $L^{\infty}(K,\mu)$. Or le dual d'un espace du type L^{∞} est, d'après le théorème de Kakutani, un espace du type L^1.

(e) $\Longrightarrow$ (f)

D'après la proposition 4.3, il suffit de démontrer que tout espace de Banach du type $L^1(K,\mu)$ est ultraplat. La démonstration, due à Grothendieck, [7], est basée sur le théorème de Dunford-Pettis: Si u est une forme linéaire continue sur $L^1(K,\mu)\ \hat{\otimes}_b F$, il existe une application bornée w de K dans F' telle que

$\forall\, g \in L^1(K,\mu)\ \forall\, x \in F : u(g\otimes x) = \int_K g(s)\ \langle w(s),x\rangle\ d\mu(s)$

Un borné de F' est l'image d'un borné de E'. On peut donc relever w en une application bornée $\tilde{w}$ de K dans E'. Posons alors

$\forall\, g \in L^1(K,\mu)\ \forall\, y \in E:\ \ \tilde{u}(g\otimes y) = \int_K g(s)\ \langle \tilde{w}(s),y\rangle\ d\mu(s)$

La forme linéaire $\tilde{u}$ est continue sur $L^1(K,\mu)\ \hat{\otimes}_b E$ et prolonge u. On en déduit que $L^1\ \hat{\otimes}_b F$ est un sous-espace fermé de $L^1\hat{\otimes}_b E$.

(f) $\Longrightarrow$ (g)

Soit u une application linéaire continue de U dans Y/X. En bitransposant, on obtient une application linéaire continue u'' de U'' dans $Y''/X^{\circ\circ} = (Y/X)''$. ($X^{\circ\circ}$ est le bipolaire de X dans Y'') Comme $Y''/X^{\circ\circ} = (X^{\circ})'$, u'' correspond à une forme linéaire continue $u^{\vee}: U''\hat{\otimes}_b X^{\circ} \longrightarrow \underline{C}$. Or U'' est ultraplat, de sorte que $U''\hat{\otimes}_b X^{\circ}$ est un sous-espace fermé de $U''\hat{\otimes}_b Y'$, ce qui permet de prolonger $u^{\vee}$ en une forme linéaire continue $v^{\vee}$ sur $U''\hat{\otimes}_b Y'$. La forme $v^{\vee}$ correspond à une application linéaire continue $v : U'' \longrightarrow Y''$ qui est un relèvement de u'', et donc aussi de u.

(g) $\Longrightarrow$ (h)

D'après (g), une application linéaire continue u de U dans Y'/X° se relève en une application linéaire continue v de U dans Y'''. Désignons par p_Y (resp. p_X) la projection canonique de Y''' sur Y' (resp. de X''' sur X'; rappelons que $X''' = Y'''/X^{\circ\circ\circ}$ et $X' = Y'/X^{\circ}$) et par q' (resp. q''') la projection canonique de Y' sur Y'/X° (resp. de Y''' sur $Y'''/X^{\circ\circ\circ}$). Dire que

v est un relèvement de u signifie que $u = p_X q''' v$. Or $p_X q''' = q' p_Y$. Donc $u = q'(p_Y v)$, ce qui montre que u se relève dans Y'.

(h) $\Longrightarrow$ (a)

Soit Y un espace de Banach et X un sous-espace fermé de Y? La condition (h) revient à dire que toute forme linéaire continue sur $U\hat{\otimes}_b X$ se prolonge à $U\ \hat{\otimes}_b Y$, autrement dit que $(U\ \hat{\otimes}_b X)'$ est un quotient de $(U\ \hat{\otimes}_b Y)'$. Il en résulte que $U\ \hat{\otimes}_b X$ est un sous-espace fermé de $U\ \hat{\otimes}_b Y$.

c.q.f.d.

<u>Remarque:</u> La propriété étudiée par Grothendieck dans [8] est plus forte que l'ultraplatitude: il s'agit de déterminer les espaces de Banach U tels que, chaque fois que X est un sous-espace fermé de Y, l'application canonique $U\ \hat{\otimes}_b X \longrightarrow U\ \hat{\otimes}_b Y$ est une isométrie. Grothendieck montre qu'un tel espace U est nécessairement du type $L^1(K,\mu)$.

<u>Proposition 5.2: Soit U un espace de Banach qui admet un supplémentaire topologique dans son bidual. Si U' est ultraplat, alors U admet un supplémentaire topologique dans tout espace de Banach le contenant.</u> (Grothendieck p.40, [7])

Supposons que U soit inclus à Y. Puisque U' est ultraplat, l'application canonique u de U dans U'' se prolonge en une application v de Y dans U'' (théorème 5.1.(b)). Si p est le projecteur de U'' sur U, l'application pv de Y sur U est un projecteur.

c.q.f.d.

<u>Théorème 5.3: Si U est un espace de Banach approximant, ultraplat et réflexif, alors U est de dimension finie.</u>

La boule unité B de U est faiblement compacte. Immergeons isométriquement U' dans l'espace C(B) des fonctions continues sur l'espace compact B. D'après le théorème 5.1.(c), on peut trouver un projecteur continu de C(B) sur U'. Ce projecteur est faiblement compact et applique toute partie relativement faiblement compacte de C(B) sur une partie relativement compacte de U'. ([4] p.494). En particulier, la boule unité de U' est compacte, de sorte que U' et U sont de dimension finie.

c.q.f.d.

Cette proposition fournit évidemment de nombreux exemples d'espaces de Banach non ultraplats. Elle fournit aussi des espaces U, Y tels qu'on ait $U \hat{\otimes}_b Y \neq U \hat{\otimes}_q Y$. Ainsi, conservons les notations du théorème 5.3, et posons de plus $Y = C(B)/U'$. On vérifie alors que $U \hat{\otimes}_b Y \neq U \hat{\otimes}_q Y$.

6. Platitude.

En ce qui concerne la platitude des espaces bornologiques convexes complets, et des espaces de Banach, des théorèmes analogues aux théorèmes 4.1 et 5.1 peuvent être démontrés, avec des démonstrations fort semblables. Nous nous contenterons donc d'énoncer ces théorèmes.

Théorème 6.1: Si U est un espace bornologique convexe complet approximant, les propositions suivantes sont équivalentes:

(a) U est plat.

(b) Si Y est un espace bornologique convexe complet sous-projectif, et si X est un sous-espace fermé de Y tel que Y/X soit sous-projectif, alors $U \hat{\otimes}_b X$ est un sous-espace fermé de $U \hat{\otimes}_b Y$.

(c) Si Y est un espace de Banach sous-projectif, et si X est un sous-espace fermé de Y tel que Y/X soit sous-projectif, alors $U \hat{\otimes}_b X$ est un sous-espace fermé de $U \hat{\otimes}_b Y$.

(d) Pour tout ensemble I et tout sous-espace fermé X de $l^1(I)$ tel que $l^1(I)$ soit sous-projectif, $U \hat{\otimes}_b X$ est un sous-espace fermé de $U \hat{\otimes}_b l^1(I)$.

(e) Pour tout espace de Banach sous-projectif X: $U \hat{\otimes}_b X = U \hat{\otimes}_q X$.

Théorème 6.2: Si U est un espace de Banach approximant, les propositions suivantes sont équivalentes:

(a) U est plat.

(b) Si Y est un espace de Banach et X un sous-espace fermé de Y tel que X soit sous-projectif, toute application linéaire continue de X dans U' se prolonge à Y.

(c) Si Y est un espace de Banach sous-projectif et X un sous-espace fermé de Y tel que Y/X soit sous-projectif, toute application linéaire continue de U dans Y'/X° se relève en une application linéaire continue de U dans Y'.

(d) Si Y est un espace de Banach, et si X est un sous-espace fermé de Y tel que Y' et Y'/X° sont sous-projectifs, alors toute application linéaire continue de U dans Y/X se relève en une application linéaire continue de U dans Y''.

De plus, ces propositions entraînent la suivante:

(e) U' admet un supplémentaire topologique dans tout espace de Banach sous-projectif Y tel que Y/U' soit sous-projectif.

Notons que les notions de platitude et d'ultraplatitude coïncident pour une large classe d'espaces de Banach:

Théorème 6.3: Si U est un espace de Banach approximant séparable et plat, alors U est ultraplat.

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dense dans la boule unité de U. On sait que l'application

$$u: l^1(\mathbb{N}) \longrightarrow U : (a_n) \longmapsto \sum_n a_n x_n$$

est un épimorphisme de QESP.

Il en résulte que u' est une isométrie de U' sur un sous-espace fermé de $l^{\infty}(\mathbb{N})$. Mais $l^{\infty}(\mathbb{N})$ et $l^{\infty}(\mathbb{N})/U'$ sont des duaux de séparables, donc sont sous-projectifs (théorème 3.2) D'après le théorème précédent, U' admet un supplémentaire topologique dans $l^{\infty}(\mathbb{N})$, ce qui entraîne que U est ultraplat (théorème 5.1).

c.q.f.d.

Le résultat suivant permet aussi de montrer que tel espace plat est en fait ultraplat:

Proposition 6.4: Soit Z un Q-espace complet plat. Si $Z = Y|X$ où Y est un espace bornologique convexe complet approximant ultraplat, alors X est ultraplat.

Soit T un objet de EBCC. D'après la proposition I.5.7, la suite $0 \longrightarrow X \hat{\otimes}_q T \longrightarrow Y \hat{\otimes}_q T \longrightarrow Z \hat{\otimes}_q T \longrightarrow 0$ est exacte. Mais, puisque Y est ultraplat, on a $Y \hat{\otimes}_q T = Y \hat{\otimes}_b T$. Il en résulte qu'on a aussi $X \hat{\otimes}_q T = X \hat{\otimes}_b T$.

C.Q.F.D.

Bibliographie.

[1] Bénabou, J. Catégories avec multiplication. C.R.A.S. 256, 1887-1890, 1963.

[2] Buchsbaum, D. Exact categories and duality. Trans. Amer. Math. Soc. 80, 1-34, 1955.

[3] Buchwalter, H. Espaces vectoriels bornologiques. Publ. Dep. Math. Lyon, 2, fasc.1, 2-53, 1965.

[4] Dunford, N and Schwartz, J. Linear Operators, Part I. Interscience, New York 1964.

[5] Gabriel, P. Des catégories abéliennes. Bull. Soc. Math. France, 90, 323-448, 1962.

[6] Grothendieck, A. Sur les applications linéaires faiblement compactes d'espaces du type C(K). Canadian J. Math. 5, 129-173, 1953.

[7] Grothendieck, A. Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires. Mem. Amer. Math. Soc. 16, 1955.

[8] Grothendieck, A. Une caractérisation vectorielle-métrique des espaces L^1. Canadian J. Math. 7, 552-561, 1955.

[9] Grothendieck, A. Sur quelques points d'algèbre homologique. Tohoku Math. Journal, Série 2, 9, 119-221, 1957.

[10] Kelly, G. Tensor products in categories. Journal of Algebra, 2, 315-349, 1965

[11] Linton, F. Autonomous categories and duality of funtors. Journal of Algebra, 2, 315-349, 1965.

[12] Mac Lane, S. Natural Associativity and Commutativity. Rice Univ. Studies, 49, 28-46, 1963.

[13] Mac Lane, S. Categorical Algebra. Bull. Amer. Math. Soc. 71, 40-106, 1965.

[14] Mitchell, B. The full embedding theorem. Amer. J. Math. 86, 6196637, 1964

[15] Mitchell, B. Theory of categories, Academic Press, New York, 1965.

[16] Waelbroeck, L. Etude spectrale des algèbres complètes. Mem. Cl. Sc. Acad. Roy. Belg. T XXXI, fasc.7, 1960

[17] Waelbroeck, L. Le complété et le dual d'un espace à bornés. C.R.A.S. 253, 2827-2828, 1961.

[18] Waelbroeck, L. Les quotients de b-espaces. Inst. Math. U.L.B. 1962.