3e CYCLE
D'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR

N° d'ordre : 818

THÈSE

PRÉSENTÉE

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE BORDEAUX

POUR OBTENIR LE GRADE DE

DOCTEUR DE SPÉCIALITÉ EN MATHÉMATIQUES

PAR

Marie-Thérèse AKKAR

ESPACES VECTORIELS BORNOLOGIQUES ORDONNÉS
BORNOLOGIES NUCLÉAIRES RÉTICULÉES

Soutenue le 9 octobre 1970 devant la Commission d'examen :

M. J. RISS .... *Président.*

MM. J. COLMEZ .... } *Examinateurs.*
H. HOGBE-NLEND .... }

1970

Je tiens à exprimer ma sincère gratitude à Monsieur le Professeur COLMEZ pour l'aide qu'il m'a apportée, les encouragements qu'il n'a cessé de me prodiguer tout au long de l'élaboration de ce travail et la confiance qu'il m'a toujours témoignée.

J'ai toujours bénéficié des conseils de Monsieur le Professeur RISS, tant dans ma formation générale que dans mes recherches. Il m'a fait l'honneur d'accepter la présidence de mon jury. Qu'il en soit vivement remercié.

Je tiens aussi à remercier Monsieur HOGBE NLEND d'avoir bien voulu s'intéresser à mon travail et accepter d'être membre de ce jury.

Enfin, je remercie le Personnel du Département de Mathématiques et plus particulièrement Mademoiselle Madeleine NEAU qui a dactylographié cette thèse avec beaucoup de soin et de compétence.

TABLE DES MATIERES

=========

INTRODUCTION

La théorie des structures vectorielles ordonnées s'est développée grâce à la théorie de l'intégration, dont elle s'est souvent inspirée et a permis à son tour de faire avancer la théorie abstraite de la mesure et de l'intégration.

En 1940, F. RIESZ publie un important mémoire sur les opérations linéaires (Annals of Math. 41, (1940), p. 174-206) directement inspiré du théorème de Lebesgue-Nikodym. A la même époque, J. DIEUDONNE publie deux articles sur le même sujet.

L'introduction des espaces réticulés en Analyse Fonctionnelle, dûe à F. RIESZ, date de 1928. Mais l'étude des espaces vectoriels topologiques ordonnés a commencé un peu plus tard et a connu un grand développement durant les années 1937-1948. Citons par exemple les travaux fondamentaux de M. G. KREIN et son école, de S. KAKUTANI ([13] et [14]), H. STONE et d'autres. La plupart de ces travaux concerne les espaces vectoriels normés réticulés. L'étude systématique de ces espaces est largement motivée, vue le rôle important que joue la structure d'ordre dans beaucoup d'espaces fonctionnels normés. Mais ces espaces se sont avérés très vite insuffisants car nombreux sont les espaces fonctionnels non normables qui interviennent en Analyse et qui sont munis d'un ordre naturel.

Le grand développement de la théorie des espaces vectoriels topologiques a permis de lever cette restriction et d'étudier les rapports qui existent entre l'ordre et la topologie dans des espaces très généraux. De nombreux travaux ont vu le jour, parmi lesquels on peut citer ceux de NAMIOKA [17], SCHAEFER [24] , NACHBIN [15] et NAKANO [16]. Jusqu'ici tous les travaux effectués en Analyse Fonctionnelle, dans le cadre des structures ordonnées concernaient uniquement les liens pouvant exister entre l'ordre et la topologie. Mais, bien souvent, on constate que les topologies considérées n'interviennent, dans leur rapport avec l'ordre que par la famille de leurs parties bornées. La topologie canonique associée à un ordre sur un espace vectoriel est elle même définie par la bornologie de l'ordre. Ainsi il existe des liens très étroits entre les structures ordonnées et la bornologie. En 1954, d'ailleurs, G. T. ROBERTS [22] a dégagé la notion d'espace bornologique (puisqu'il a été amené à étudier des topologies définies par une famille de "bornés") à partir d'une étude sur les espaces vectoriels topologiques ordonnés.

L'objet de ce travail est d'étudier quelques aspects de ces liens et de montrer que le point de vue bornologique dans les espaces vectoriels ordonnés permet de poser de façon naturelle beaucoup de problèmes qui ont pris naissance dans la théorie des espaces vectoriels topologiques ordonnés. La solution apportée à certains de ces problèmes permet de généraliser des théorèmes déjà connus dans les e. l. c. ordonnés.

Contenu du travail :

Ici, nous allons décrire succintement le contenu de ce mémoire puisqu'au début de chaque chapitre on trouvera une introduction plus détaillée.

Dans le chapitre 1 nous examinons le problème général du prolongement des applications linéaires positives définies sur un espace archimédien à son complété pour l'ordre.

Dans le chapitre 2 nous introduisons les notions d'espace vectoriel bornologique plein et d'espace vectoriel bornologique solide. Ces espaces possèdent beaucoup de propriétés analogues à celles des e. l. c. à cône normal et des e. l. c. localement solides.

Dans le chapitre 3 nous apportons une réponse affirmative au problème suivant : si E est un e. b. c. réticulé solide, comment définir une bornologie convenable sur le complété pour l'ordre de E, prolongeant la bornologie de E, d'une part et d'autre part, comment définir un ordre sur le complété bornologique $\hat{E}$ de E de telle sorte que E devienne un sous-espace ordonné réticulé de $\hat{E}$.

Dans le chapitre 4 nous étudions l'espace vectoriel des applications linéaires bornées, muni de la bornologie naturelle et nous cherchons dans quelles conditions cet espace est un e. b. c. réticulé. Nous donnons aussi des conditions suffisantes pour que toute forme linéaire positive soit bornée.

Enfin dans le chapitre 5 nous étudions la nucléarité du point de vue bornologique et ordinal. Afin d'obtenir un théorème fondamental caractérisant les espaces b-nucléaires solides, nous commençons par donner quelques propriétés des espaces qui sont limites inductives soit d'espaces (L) semi-normés, soit d'espaces (M) semi-normés.

=========

CHAPITRE O

NOTATIONS ET RAPPELS GENERAUX

Dans l'ensemble du travail nous adoptons la terminologie utilisée dans [3], [4] et [10] pour ce qui concerne la théorie des espaces vectoriels topologiques et bornologiques. Pour ce qui concerne les espaces vectoriels ordonnés, avec ou sans topologie, nous nous conformerons à [5], [20] et [24]. Toutefois nous préférons rappeler dans ce chapitre certaines définitions ou notations parce qu'elles varient suivant les publications et les traités. Nous rappellerons aussi certains résultats de la théorie des e. l. c. ordonnés, soit parce que nous obtiendrons leurs analogues en bornologie, soit parce qu'ils ont un lien avec les propriétés démontrées ici.

Signalons que la notation $x_n \xrightarrow{b} x$ dans un e. v. b. signifie que la suite x_n converge vers x bornologiquement (au sens de Mackey).

Tous les espaces considérés dans ce travail ont pour corps de base $\mathbb{R}$. Dans tout ce qui suit E désignera un espace vectoriel ordonné de cône K .

Espace complet pour l'ordre :

On dit que E est complet pour l'ordre (ou complétement réticulé d'après Bourbaki) si toute partie filtrante supérieurement, majorée dans E, admet une borne supérieure.

Si E est filtrant (ce qui est équivalent à dire que le cône K engendre E, c'est-à-dire $E = K - K$), alors E est complet si et seulement si toute partie majorée a une borne supérieure.

Espace archimédien

E est dit presque-archimédien si la relation $-\alpha y \leq x \leq \alpha y$ pour un certain $y \in K$ et pour tout nombre réel positif α entraîne $x = 0$.

E est dit archimédien si la relation $\alpha x \leq y$, $y \in K$, $\forall \alpha > 0$ entraîne $x \leq 0$.

Il est évident qu'un espace archimédien est presque archimédien, la réciproque n'est pas vraie en général. Dans le cas réticulé les deux notions coïncident.

Tout espace complet pour l'ordre est archimédien.

Propriété de décomposition

On dira que E vérifie la propriété de décomposition si $\forall x, y \in K$ alors $[0,x] + [0,y] = [0,x+y]$. Tout espace vectoriel réticulé possède cette propriété.

Parties pleines. Parties solides

1°) Une partie A de E est dite pleine si :

$$a \leq b \leq c \ , \quad a \text{ et } c \in A \Rightarrow b \in A \ .$$

on notera par $[A]$ l'enveloppe pleine d'une partie quelconque A de E.

2°) Une partie A d'un espace vectoriel réticulé E est dite solide si les relations :

$$|a| \leq |b| \ , \quad a \in E \text{ et } b \in A \Rightarrow a \in A \ .$$

L'enveloppe solide d'une partie A quelconque de E sera notée $s(A)$.

Espace quotient et idéal

Un idéal pour l'ordre d'un espace vectoriel réticulé E est un sous-espace vectoriel qui, en plus, est une partie solide de E.

Soit F un sous-espace vectoriel, qui en plus est une partie pleine de E. Alors sur l'espace vectoriel quotient E/F la partie $\tilde{K} = \varphi(K)$ où φ est la surjection canonique $E \to E/F$ définit sur E/F un ordre compatible avec sa structure d'espace vectoriel.

Si E est réticulé et F un idéal de E, alors $\tilde{K}$ définit sur E/F une structure d'espace vectoriel réticulé.

Bande et projecteur

Si E est complet pour l'ordre un sous-espace vectoriel F de E est une bande si c'est un idéal vérifiant la propriété suivante : pour toute partie non vide X de B, majorée dans E la borne supérieure sup X de X dans E appartient à B.

On dit que E est somme directe ordonnée de ses deux sous-espaces vectoriels F et F' si $E = F \oplus F'$ et si $x = x_1 + x_2 \geq 0 \Leftrightarrow x_1 \geq 0$ et $x_2 \geq 0$. Dans ce cas on dit que F admet un supplémentaire pour l'ordre. On montre que F est une bande si et seulement si F admet un supplémentaire pour l'ordre et dans ce cas le projecteur défini par F s'appelle projecteur sur la bande F.

Application réticulante

Une application linéaire $u : E \to F$ (E et F réticulés) est dite <u>réticulante</u> si $|u(x)| = u(|x|)$ $\forall x \in E$. Le noyau d'une application réticulante est un idéal.

Bornologie de l'ordre

Si E est un espace vectoriel ordonné filtrant alors les ensembles $B_x = [-x, +x]$, $(x > 0)$, définissent une bornologie d'e. b. c. sur E, appelée bornologie de l'ordre. Toute partie contenue dans un B_x sera dite bornée pour l'ordre.

On a $E = \varinjlim E_x$ où E_x est l'espace semi-normé engendré par B_x. Les espaces E_x sont normés si et seulement si l'espace E est presque archimédien.

Si E est complet pour l'ordre, alors E est complet pour la bornologie de l'ordre [0].

Formes linéaires

Soit K^* l'ensemble des formes linéaires positives sur E. C'est un cône du dual algébrique E^* de E quand K engendre E.

On dira qu'une forme linéaire sur E est bornée pour l'ordre (ou modérée) si elle est bornée pour la bornologie de l'ordre. L'ensemble $\bar{E}$ des formes linéaires bornées pour l'ordre s'appelle le dual modéré de E.

On appelle dual pour l'ordre de E, le sous-espace vectoriel $E^+ = K^* - K^*$. On a toujours $E^+ \subset \bar{E}$. Dans le cas où E est filtrant et vérifie la propriété de décomposition (en particulier s'il est réticulé) alors $\bar{E} = E^+$.

(A. M) et (A. L) espaces : [13], [14]

Un <u>(A. M) espace</u> est un espace de Banach réticulé dont la norme p vérifie :

$$|y| \leq |x| \Rightarrow p(y) \leq p(x)$$
$$p[\sup(x, y)] = \sup[p(x), p(y)] \qquad \forall x, y > 0 .$$

On dit que c'est un <u>(A. M) espace avec unité</u>, s'il existe $u > 0$ tel que $[-u, u]$ soit la boule unité.

Un <u>(A. L) espace</u> est un espace de Banach réticulé dont la norme p vérifie :

$$|y| \leq |x| \Rightarrow p(y) \leq p(x)$$
$$p(x+y) = p(x) + p(y) \qquad \forall x, y > 0 .$$

C'est un (A. L) espace avec <u>unité faible</u> si de plus, il existe un élément $e > 0$ tel que : $\inf(x, e) > 0$, $\forall x > 0$.

Concernant ces espaces on démontre les résultats suivants : ([13] et [14], [24], [23]).

Le dual fort d'un (A. L) espace est un (A. M) avec unité et le dual fort d'un (A. M) espace est un (A.L) espace.

Théorème de Kakutani

Si $E \neq \{0\}$ est un (A. M) espace avec unité, alors E est isomorphe à l'espace $C_{\mathbb{R}}(X)$ des fonctinns continues sur un espace compact X.

Si E est un (A. L) espace alors il est isomorphe à un espace $L^1(\mu)$ où μ est une mesure de Radon positive sur un espace localement compact. Cet espace peut être choisi compact si E possède une unité faible.

Espaces localement plein et localement solide

Un e. l. c. sera dit localement plein ou à cône normal (ou encore possède une topologie normale) s'il admet un système fondamental de voisinages de O pleins. Il sera dit localement solide (Locally convex lattice dans [20]) ou que sa topologie est absolument normale s'il possède un système fondamental de voisinages de O solides.

Proposition [20] :

Si E est un espace vectoriel topologique ordonné par un cône K les propriétés suivantes sont équivalentes

1°) K est normal

2°) Il existe un système fondamental de voisinages de O formé d'ensembles V tels que : $0 \leq x \leq y$ et $y \in V \Rightarrow x \in V$.

3°) Pour tout voisinage V de O , il existe un voisinage W de O tel tel que $0 \leq x \leq y \in W \Rightarrow x \in V$.

Théorème [0] et [20] :

Si E est un e. l. c. réticulé, alors les propriétés suivantes sont équivalentes.

1°) E est localement solide

2°) E est à cône normal et $x \to |x|$ est continue

3°) $x \to |x|$ est uniformément continue

4°) Il existe une famille $(p_\alpha)_{\alpha \in I}$ de semi-normes solides, (telles que $|x| < |y| \Rightarrow p_\alpha(x) \leq p_\alpha(y)$) , engendrant la topologie.

=========

CHAPITRE I

PROLONGEMENT DES APPLICATIONS LINEAIRES AU COMPLETE POUR L'ORDRE

Dans ce chapitre nous examinerons d'abord quelques problèmes liés au complété pour l'ordre d'un espace vectoriel ordonné, notamment celui du prolongement d'une application linéaire positive d'un espace ordonné à son complété. Pour cela nous introduisons une condition (P) qui permet de construire ce prolongement et qui donne une condition nécessaire et suffisante pour qu'il soit complètement réticulant.

Ensuite nous définissons une structure d'ordre sur toute limite projective d'espaces vectoriels ordonnés et nous démontrons que l'ordre obtenu est complet dans le cas où ces espaces sont complets et où les applications de transition sont complètement réticulantes.

=========

Soit E un espace vectoriel ordonné par un cône K. Dans le cas où E n'est pas complet pour l'ordre, on montre qu'on peut toujours le considérer, s'il est archimédien, comme un sous-espace ordonné d'un espace complet. D'une manière plus précise :

Théorème

Etant donné E un espace vectoriel ordonné archimédien tel que $E = K-K$, il existe un espace vectoriel réticulé OE unique à un isomorphisme d'ordre près tel que :

1) OE est complet pour l'ordre.

2) Il existe φ linéaire injective $E \to OE$.

3) Si $x, y \in E$ $x \leq y \Leftrightarrow \varphi(x) \leq \varphi(y)$.

4) Si A est une partie de E admettant une borne supérieure dans E

$$\varphi(\sup A) = \sup \varphi(A).$$

5) $\forall \hat{x} \in OE$, $\hat{x} = \inf\{\varphi(x) \mid \varphi(x) \geq \hat{x}, x \in E\}$
$= \sup\{\varphi(x) \mid \varphi(x) \leq \hat{x}, x \in E\}$

On dit que OE est le compété pour l'ordre de E. La démonstration de ce théorème se trouve dans [20].

En topologie comme en bornologie quand on construit le complété topologique ou bornologique d'un espace E, les morphismes (applications linéaires continues ou bornées) se prolongent de façon unique au complété de E. Dans le cas d'un espace ordonné, jusqu'à maitenant on ne sait pas prolonger en général les morphismes pour l'ordre, c'est-à-dire les applications linéaires positives, au complété pour l'ordre.

On se propose dans la suite d'examiner ce problème qui se posera de façon naturelle dans plusieurs questions : par exemple quand il s'agira de construire une bornologie sur le complété pour l'ordre d'un e.b.c. ordonné.

Pour cela on introduit d'abord un type particulier d'applications qui s'adapte bien au prolongement.

Applications complètement réticulantes

Définition (1.1.)

Soient E et F deux espaces vectoriels ordonnés. Une application linéaire f de E dans F est dite complètement réticulante si, pour toute partie A de E telle que $\sup A$ existe on a

$$\sup f(A) = f(\sup A) .$$

Proposition (1.2.)

Soient E et F deux espaces vectoriels ordonnés, f une application linéaire de E dans F, alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

1) f est complètement réticulante.
2) Pour toute partie A de E telle que $\inf A$ existe, alors $\inf f(A) = f(\inf A)$.
3) Pour toute partie A telle que $\inf A = 0$ alors $\inf f(A) = 0$.
4) Pour toute partie A telle que $\sup A = 0$ alors $\sup f(A) = 0$.

1) et 2) sont évidemment équivalents, ainsi que 3) et 4).
2) entraîne 3), montrons que 3) entraîne 2). Soit A, telle que $a = \inf A$ existe, donc $\inf(A-a) = 0$ d'où $\inf[f(A)-f(a)] = 0$, c'est-à-dire $\inf f(A) = f(a)$.

Il est immédiat que le composé de deux applications complètement réticulantes est complètement réticulante. Il est clair qu'une forme linéaire complètement réticulante est régulière, c'est-à-dire que pour toute famille $(x_i)_i$ filtrante, telle que $\inf x_i = 0$ on a $\lim f(x_i) = 0$.

Dans le cas où E et F sont réticulés, une application complètement réticulante est en particulier réticulante. Par conséquent son noyau est un idéal pour l'ordre. Dans le cas où E est complet pour l'ordre on a un résultat plus précis :

Proposition (1.3.)

Si E est un espace vectoriel réticulé, complet pour l'ordre, F un espace vectoriel réticulé et f une application complètement réticulante de E dans F, alors le noyau de f est une bande de E.

Si $N = \operatorname{Ker} f$, on sait déjà que N est un idéal pour l'ordre, il suffit donc de démontrer que si A est une partie de N majorée dans E alors $\sup A$ appartient à N, ce qui est évident puisque $f(\sup A) = \sup f(A) = 0$.

Exemples d'applications complètement réticulantes

1°) $\varphi : E \to OE$ est complètement réticulante.

2°) si B est une bande d'un espace vectoriel réticulé complet E, le projecteur P_B est complètement réticulant (cela vient du fait que $P_B(x) \leq x \quad \forall x \geq 0$).

3°) Si B est une bande d'un espace vectoriel réticulé complet E, l'injection canonique de B dans E est complètement réticulante.

4°) Si f est une application linéaire positive telle que $f \leq g$ où g est une application complètement réticulante alors f l'est aussi.

Prolongement d'une application linéaire au complété pour l'ordre

Soient E un espace vectoriel ordonné archimédien filtrant, F un espace vectoriel ordonné complet pour l'ordre et f une application linéaire positive de E dans F. Existe-t-il une application $\tilde{f}$ positive de OE dans F qui prolonge d'une manière unique f ?

D'après le théorème sur le complété pour l'ordre cité au début de ce chapitre on sait que, quel que soit $\hat{x}$ appartenant à OE, on a

$$\begin{aligned}\hat{x} &= \sup \{ \varphi(x) \mid x \in E , \ \varphi(x) \leq \hat{x} \} \\ &= \inf \{ \varphi(x) \mid x \in E , \ \varphi(x) \geq \hat{x} \}\end{aligned}$$

Il est donc tout à fait naturel de définir l'application $\tilde{f}$ soit par :

$$g(\hat{x}) = \sup \{ f(x) \mid x \in E , \ \varphi(x) \leq \hat{x} \}$$

(cette borne supérieure existe puisque F est complet pour l'ordre).

soit par :

$$h(\hat{x}) = \inf \{ f(x) \mid x \in E , \ \varphi(x) \geq \hat{x} \}$$

En général il n'est pas vrai que $g(\hat{x}) = h(\hat{x})$, si f est uniquement positive ; ce qui va nous amener à introduire une condition supplémentaire sur f.

Pour l'instant, considérons l'application g. Il est clair que g prolonge f et que g est positive.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $\quad g(\lambda \hat{x}) = \lambda g(\hat{x})$ si $\lambda \geq 0$

$\qquad\qquad\qquad\quad g(\lambda \hat{x}) = \lambda h(\hat{x})$ si $\lambda \leq 0$.

Soient $\hat{x}$ et $\hat{y}$ appartenant à OE :

$$\begin{aligned} g(\hat{x}+\hat{y}) &= \sup \{ f(z) \mid \varphi(z) \leq \hat{x}+\hat{y} , \ z \in E \} \\ g(\hat{x})+g(\hat{y}) &= \sup \{ f(x) \mid \varphi(x) \leq \hat{x} , \ x \in E \} + \sup \{ f(y) \mid \varphi(y) \leq \hat{y} , \ y \in E \} \\ &= \sup \{ f(x+y) \mid \varphi(x) \leq \hat{x} \text{ et } \varphi(y) \leq \hat{y} \} \end{aligned}$$

donc $g(\hat{x}) + g(\hat{y}) \leq g(\hat{x}+\hat{y})$, l'égalité n'étant pas vérifiée en général.

Toutefois on constate que les deux parties

$$A = \{ z \in E \mid \varphi(z) \leq \hat{x}+\hat{y} \} \quad \text{et} \quad B = \{ x+y \mid \varphi(x) \leq \hat{x} \text{ et } \varphi(y) \leq \hat{y} \}$$

admettent le même ensemble de majorants dans E : en effet tout majorant de A ou de B est majorant de $\hat{x}+\hat{y}$ dans OE et inversement. Ce qui nous amène à la :

Définition (1.4.)

On dira que l'application f vérifie la condition (P) si

$$\text{Maj. } A = \text{Maj. } B \Rightarrow \text{Maj. } f(A) = \text{Maj. } f(B)$$

(Maj. A désignant l'ensemble des majorants de A).

Remarquons que si E et F sont complets pour l'ordre, l'application $f : E \to F$ vérifie (P) si et seulement si f est complètement réticulante et que le composé de deux applications qui vérifient (P) vérifie encore (P).

Dans le cas où f vérifie la condition (P) nous allons montrer que g est linéaire et que $g = h$.

En effet
$$g(\hat{x}+\hat{y}) = \sup\{f(A)\} = \inf\{\text{Maj. } (f(A))\}$$
$$g(\hat{x})+g(\hat{y}) = \sup\{f(B)\} = \inf\{\text{Maj. } (f(B))\}$$

g étant additive et positivement homogène est donc linéaire et

$$g(\hat{x}) = -g(-\hat{x}) = h(\hat{x}) .$$

Proposition (1. 5.)

Si f vérifie (P) elle admet un prolongement $\tilde{f}$ complètement réticulant unique.

D'après ce qui précède nous avons construit un prolongement $\tilde{f}$ de f à OE de la façon suivante :

$$\tilde{f}(\hat{x}) = \sup\{f(x) \mid \varphi(x) \leq \hat{x} , \ x \in E\} .$$

Montrons que $\tilde{f}$ est complètement réticulante :

Soit $(\hat{a}_\alpha)_\alpha$ une famille majorée d'éléments de OE, soit $\hat{a} = \sup_\alpha \hat{a}_\alpha$.

Par définition on a : $\hat{a} = \sup\{\varphi(x) \mid \varphi(x) \leq \hat{a} , \ x \in E\}$

et $\forall\alpha$ $\hat{a}_\alpha = \sup\{\varphi(x_\alpha) \mid \varphi(x_\alpha) \leq \hat{a}_\alpha , \ x_\alpha \in E\}$

d'où
$$\tilde{f}(\hat{a}) = \sup\{f(x) \mid x \in B\} \quad \text{où} \quad B = \{x \in E \mid \varphi(x) \leq \hat{a}\}$$

et
$$\tilde{f}(\hat{a}_\alpha) = \sup\{f(x) \mid x \in B_\alpha\} \quad \text{où} \quad B_\alpha = \{x \in E \mid \varphi(x) \leq \hat{a}_\alpha\}$$

donc
$$\sup_\alpha \tilde{f}(\hat{a}_\alpha) = \sup\{f(x) \mid x \in \bigcup_\alpha B_\alpha\} .$$

Les deux parties B et $\bigcup_\alpha B_\alpha$ ont même ensemble de majorants ; en effet :

$$\operatorname{Maj}_E(\bigcup_\alpha B_\alpha) = \operatorname{Maj}_E(\sup_{OE} \bigcup_\alpha B_\alpha) = \operatorname{Maj}_E \hat{a} = \operatorname{Maj}_E B$$

L'application f vérifiant (P) il s'en suit que

$$\operatorname{Maj}[f(\bigcup_\alpha B_\alpha)] = \operatorname{Maj}[f(B)]$$

F étant complet on a donc :

$$\sup[f(\bigcup_\alpha B_\alpha)] = \sup f(B)$$

c'est-à-dire
$$\tilde{f}(\sup_\alpha \hat{a}_\alpha) = \sup_\alpha \tilde{f}(\hat{a}_\alpha) .$$

Si f_1 est un prolongement positif de f, soit $\hat{x} \in$ OE :

$$h(\hat{x}) = \inf\{f(x) \mid \varphi(x) \geq \hat{x}\} \geq f_1(\hat{x}) \geq \sup\{f(x) \mid \varphi(x) \leq \hat{x}\} = g(\hat{x})$$

f vérifiant (P), $g = h$ d'où $f_1 = \tilde{f}$.

Porposition (1. 6.)

Pour qu'une application linéaire positive f de E dans F (avec toujours les mêmes hypothèses sur E et F) admette un prolongement complètement réticulant f_1 à OE il est nécessaire et suffisant que f vérifie (P).

La condition est suffisante d'après la proposition précédente, montrons qu'elle est nécessaire.

Soient A et B deux parties de E telles que $\operatorname{Maj}_E A = \operatorname{Maj}_E B$, d'après la définition de OE, il est clair que $\sup_{OE} A = \sup_{OE} B$.

f_1 étant un prolongement complètement réticulant de f on a $\sup f_1(A) = \sup f_1(B)$, c'est-à-dire $\sup f(A) = \sup f(B)$ et donc $\operatorname{Maj} f(A) = \operatorname{Maj} f(B)$.

Exemples :

1) L'application canonique $\varphi : E \to OE$, vérifie par construction la condition (P).

2) Si F est un idéal pour l'ordre d'un espace vectoriel réticulé E, alors l'injection canonique : $i : F \to E$ vérifie (P).

Soient A et B deux parties de F telles que $\underset{F}{\mathrm{Maj}}\, A = \underset{F}{\mathrm{Maj}}\, B$.
Il s'agit de démontrer que $\underset{E}{\mathrm{Maj}}\, A = \underset{E}{\mathrm{Maj}}\, B$.
Soient $a \in A$, $b \in B$, $c = \inf(a,b) \in F$.
$A_1 = A-c$ et $B_1 = B-c$ sont telles que $\underset{F}{\mathrm{Maj}}\, A_1 = \underset{F}{\mathrm{Maj}}\, B_1$. On s'est ainsi ramené à deux parties A_1 et B_1 de F telles que tous les éléments de $\mathrm{Maj}\, A_1$ et $\mathrm{Maj}\, B_1$ soient positifs. Montrons que $\underset{E}{\mathrm{Maj}}\, A_1 = \underset{E}{\mathrm{Maj}}\, B_1$, ce qui entraînera $\underset{E}{\mathrm{Maj}}\, A = \underset{E}{\mathrm{Maj}}\, B$.

Soient $x \in \underset{E}{\mathrm{Maj}}\, A_1$, $y \in \underset{F}{\mathrm{Maj}}\, A_1$; on a

$$0 \leq \inf(x,y) \leq y \in F$$

donc $\inf(x,y) \in F$ et c'est un élément de $\underset{F}{\mathrm{Maj}}\, A_1 = \underset{F}{\mathrm{Maj}}\, B_1$ d'où x appartient à $\underset{E}{\mathrm{Maj}}\, B_1$.

Proposition (1.7.)

Soient E et F deux espaces vectoriels archimédiens filtrants, f une application de E dans F. Une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe $\tilde{f}$ complètement réticulante telle que le diagramme suivant soit commutatif est que f vérifie la condition (P)

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi_E"'] & F \arrow[d, "\varphi_F"] \\ OE \arrow[r, "\tilde{f}"] & OF \end{tikzcd}$$

Le prolongement $\tilde{f}$ existe si et seulement si l'application $\varphi_F \circ f$ de E dans OF admet un prolongement à OE. D'après la proposition précédente une condition nécessaire et suffisante pour cela est que $\varphi_F \circ f$ vérifie la condition (P) et il est clair que $\varphi_F \circ f$ vérifie (P) si et seulement si f vérifie (P).

Proposition (1.8.)

Soient E un espace vectoriel réticulé archimédien, F un espace vectoriel archimédien filtrant. Si f est une application linéaire injective de E dans F vérifiant la condition (P) alors $\tilde{f}$ est injective.

$\forall \hat{x} \in OE \qquad \tilde{f}(\hat{x}) = \tilde{f}(\hat{x}^+) - \tilde{f}(\hat{x}^-)$

$\tilde{f}$ étant complètement réticulante :

$$\tilde{f}(\hat{x}^+) = [\tilde{f}(\hat{x})]^+ \quad \text{et} \quad \tilde{f}(\hat{x}^-) = [\tilde{f}(\hat{x})]^-$$

donc $\tilde{f}(\hat{x}) = 0 \Leftrightarrow \tilde{f}(\hat{x}^+) = 0$ et $\tilde{f}(\hat{x}^-) = 0$.

Pour montrer que $\tilde{f}$ est injective, il suffit donc de montrer que pour tout $\hat{x} > 0$ on a $\tilde{f}(\hat{x}) > 0$.

Or si $\hat{x} > 0$, il existe $x \in E$ tel que $0 < x < \hat{x}$; en effet : il existe $y \in E$, $y \leq \hat{x}$ et y non négatif, donc $0 < y^+ \leq \hat{x}$.

$0 < x < \hat{x} \Rightarrow f(x) \leq \tilde{f}(\hat{x})$ et f étant injective $f(x) > 0$ donc $\tilde{f}(\hat{x}) > 0$.

Corollaire (1.9.)

1°) Si E est un espace vectoriel réticulé archimédien, E_1 un sous-espace réticulé de E tel que l'injection canonique $E_1 \to E$ vérifie (P) alors OE_1 est contenu dans OE.

2°) Si E_1 est un idéal pour l'ordre de E, OE_1 est un idéal pour l'ordre de OE.

1°) découle immédiatement de la proposition précédente.

Pour 2°) on sait que l'application identique $i : E_1 \to E$ vérifie (P) puisque E_1 est un idéal pour l'ordre. Donc d'après 1°) OE_1 est contenu dans OE. Montrons que c'est un idéal pour l'ordre.

Soit $|\hat{y}| \leq |\hat{x}|$ avec $\hat{x} \in OE_1$

$i : OE_1 \to OE$ étant complètement réticulante donc réticulante

$$|\hat{x}|_{OE} = |\hat{x}|_{OE_1}$$

$|\hat{x}| \in OE_1$ donc $|\hat{x}| = \inf \{u \in E_1 \mid u \geq |\hat{x}|\}$.

$$\hat{y}^+ = \sup\{ v \in E \mid v \leq \hat{y}^+\} = \sup \{v \in E \mid v \geq 0 \ , \ v \leq \hat{y}^+ \}$$

$$0 \leq v \leq \hat{y}^+ \leq |\hat{x}| \leq u \ , \ v \in E \ , \ u \in E_1 \text{ idéal pour l'ordre}$$

de E donc $v \in E_1$.

$$\hat{y}^+ = \sup \{ v \in E_1 \mid v \geq 0 \ , \ v \leq \hat{y}^+ \}$$

(Cette borne supérieure étant la même dans OE_1 et OE vu que l'application i est complètement réticulante).

Ceci prouve que $\hat{y}^+$ appartient à OE_1, on montrerait de la même manière que $\hat{y}^- \in OE_1$ donc $\hat{y} = \hat{y}^+ - \hat{y}^-$ aussi.

Limite projective d'espaces vectoriels ordonnés

Soit $(E_i)_{i \in I}$ une famille arbitraire d'espaces vectoriels ordonnés et K_i le cône des positifs de E_i. Alors l'espace vectoriel produit $\prod_i E_i$ est un espace vectoriel ordonné par le cône $K = \prod_i K_i$.

Si maintenant la famille $(E_i)_i$ forme un système projectif à l'aide d'applications $\pi_{ij} : E_j \to E_i$ (pour $i \leq j$) positives, l'espace vectoriel $E = \varprojlim E_i$ muni de l'ordre induit par celui de l'espace produit $\prod_i E_i$ est appelé la <u>limite projective ordonnée</u> des espaces E_i.

Une application linéaire f d'un espace vectoriel ordonné F dans E est positive si et seulement si les applications $f_i = \pi_i \circ f$ de F dans E_i sont positives. Et si $f_i : F \to E_i$ est un système projectif d'applications linéaires positives, il existe une application linéaire positive unique f telle que $f_i = \pi_i \circ f \quad \forall i$.

Proposition (1.10)

Soit E un espace limite projective ordonnée d'un système projectif (E_i , π_{ij}) d'espaces vectoriels ordonnés.

1) Si chaque E_i est archimédien, il en est de même de E

2) Si E_i est réticulé $\forall i$, alors E est réticulé si les applications π_{ij} sont réticulantes.

De plus une application f de F dans E où F est un espace réticulé, est réticulante si et seulement si les applications $f_i = \pi_i \circ f$ le sont.

La propriété 1°) découle immédiatement du fait qu'un produit d'espaces archimédiens est archimédien, ainsi que tout sous-espace d'un espace archimédien.

$\prod_i E_i$ est réticulé si et seulement si chaque E_i est réticulé. Soient x et y dans $E = \varprojlim E_i$. Si $x = (x_i)_i$, $y = (y_i)_i$, alors dans $\prod_i E_i$ on a $\sup(x, y) = (\sup(x_i, y_i))_i$ et on vérifie facilement que cet élément appartient à E lorsque les π_{ij} sont réticulantes.

Si f est une application de F dans E (F réticulé), soit $x \in F$
$f(x) = (f_i(x))_i$, d'où

$$|f(x)| = (|f_i(x)|)_i \text{ , comme } f(|x|) = (f_i(|x|))_i$$

$|f(x)| = f(|x|)$ si et seulement si les f_i sont réticulantes.

<u>Proposition (I. 11)</u>

Si $E = \varprojlim E_i$, où chaque E_i est un espace vectoriel ordonné complet pour l'ordre et si les applications π_{ij} sont complètement réticulantes alors E est complet pour l'ordre.

De plus une application linéaire f de F dans E , où F est un espace vectoriel ordonné complet pour l'ordre, est complètement réticulante si et seulement si les applications $f_i = \pi_i \circ f$ le sont.

$\prod_i E_i$ est complet pour l'ordre si et seulement si E_i l'est.

Soit A une partie majorée de E . Dans $\prod_i E_i$, A admet une borne supérieure et on a $\sup A = (\sup(\pi_i A))_i$. On vérifie facilement que si les π_{ij} sont complètement réticulantes cette borne supérieure appartient à E .

Si f est une application de F dans E (F complet pour l'ordre) ; soit A une partie de F majorée, soit $a = \sup A$.

On a $\quad f(a) = (f_i(a))_i$

$$\sup[f(A)] = \sup_{x \in A} f(x) = (\sup_{x \in A} [f_i(x)])_i = [\sup f_i(A)]_i$$

donc $f(a) = \sup[f(A)]$ si et seulement si les f_i sont complètement réticulantes.

=========

CHAPITRE II

ESPACES VECTORIELS BORNOLOGIQUES ORDONNES

Nous introduisons et étudions dans cette partie deux classes d'espaces vectoriels bornologiques ordonnés : les e. b. c. pleins et les e. b. c. solides. Ces espaces possèdent des propriétés de permanence très satisfaisantes.

Nous démontrons deux théorèmes caractérisant leur structure : tout e. b. c. plein est limite inductive d'espaces semi-normés pleins et tout e. b. c. solide est limite inductive d'espaces semi-normés solides.

Les e. b. c. solides possèdent des propriétés de dualité avec les e. l. c. localement solides : par exemple, si E est un e. b. c. solide (resp. un e. l. c. localement solide), alors son dual bornologique $E^{\times}$ (resp. topologique E') est un e. l. c. localement solide (resp. e. b. c. solide). De plus si E est un e. b. c. solide (resp. e. l. c. localement solide) alors TE (resp. BE) est un e. l. c. localement solide (resp. e. b. c. solide).

Pour les e. b. c. pleins les résultats sont différents ; on a seulement la propriété que si E est un e. l. c. localement plein alors BE est plein. Il n'est pas vrai en général que si E est un e. b. c. plein, TE soit un e. l. c. localement plein. Cela montre donc qu'il existe plus d'e. b. c. pleins que d'e. l. c. localement pleins.

=========

I. - ESPACES VECTORIELS BORNOLOGIQUES ORDONNES PLEINS

Définition (2. 1. 1.)

Soit E un ensemble bornologique muni d'un ordre. La bornologie de E sera dite pleine si E admet un système fondamental de bornés pleins.

On dira alors que E est un ensemble bornologique plein.

Les propositions suivantes sont immédiates :

Proposition (2. 1. 2.)

E est un ensemble bornologique plein si et seulement si l'enveloppe pleine de tout borné est bornée.

Proposition (2. 1. 3.)

Soit E un ensemble ordonné muni d'une base de bornologie $\mathcal{B}$. Alors les parties $[B]$, $B \in \mathcal{B}$, définissent une bornologie $\mathcal{B}'$ qui est la plus fine des bornologies pleines moins fines que $\mathcal{B}$.

Proposition (2. 1. 4.)

Si E est un ensemble bornologique plein, alors toute partie bornée pour l'ordre est bornée.

En effet soient $a \leq b$; il existe un borné plein B tel que $\{a,b\} \subset B$. donc $[a,b] \subset B$.

Corollaire (2. 1. 5.)

Soit E un ensemble ordonné filtrant. La bornologie de l'ordre est la plus fine des bornologies pleines de E.

Soit E un espace vectoriel muni d'un ordre compatible avec la structure d'espace vectoriel de E. Soit K le cône des positifs de E. Si A est convexe (resp. équilibrée) alors on sait que $[A] = (A+K) \cap (A-K)$ est convexe (resp. équilibrée).

Définition (2. 1. 6.)

Soit $(E,\mathcal{B})$ un e. v. b. muni d'un ordre compatible avec la structure d'espace vectoriel de E. On dira que la bornologie $\mathcal{B}$ est une bornologie pleine si $\mathcal{B}$ admet un système fondamental de bornés pleins. Dans ce cas on dira que E est un e. v. b. plein ou que le cône K est b-normal.

Il est clair qu'une condition nécessaire et suffisante pour que $(E,\mathcal{B})$ soit un e. v. b. plein est que l'enveloppe pleine de tout bornée soit bornée.

Proposition (2. 1. 7.)

Soit $(E,\mathcal{B})$ un e. b. c. muni d'un ordre compatible avec la structure d'espace vectoriel. E est un e. b. c. plein si et seulement si E admet un système fondamental de bornés formé de disques pleins.

Ceci résulte du fait que l'enveloppe pleine d'un disque est un disque.

Proposition (2. 1. 8.)

Soit E un espace vectoriel ordonné filtrant. La bornologie de l'ordre est la plus fine des bornologies d'e. b. c. plein de E.

Remarquons que si $(E,\mathcal{B})$ est un e. b. c. muni d'un ordre compatible avec la structure d'espace vectoriel de E, les parties $[B]$, $B \in \mathcal{B}$, définissent une bornologie $\mathcal{B}'$ qui est la plus fine des bornologies d'e. b. c. plein moins fines que $\mathcal{B}$.

Proposition (2. 1. 9.)

Soit $(E,\mathcal{B})$ un e. b. c. muni d'un ordre compatible avec la structure d'espace vectoriel. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1) E est un e. b. c. plein
2) Il existe une base de bornés $\mathcal{B}_1$ telle que :

$$\forall B \in \mathcal{B}_1 , \quad 0 \leq x \leq y \in B \Rightarrow x \in B .$$

3) $\forall B \in \mathcal{B}$, il existe $B' \in \mathcal{B}$ tel que :

$$0 \leq x \leq y \in B \Rightarrow x \in B' .$$

Il est immédiat que 1) $\Rightarrow$ 2) (il suffit de prendre pour $\mathcal{B}_1$ une base de disques bornés pleins).

2) entraîne 3), il suffit de prendre pour B' un borné de $\mathcal{B}_1$ contenant B.

Montrons que 3) entraîne 1) : soit B un borné disqué de E, il existe $B_1 \in \mathcal{B}$ tel que $B - B \subset B_1$. D'après 3) il existe $B_2 \in \mathcal{B}$ tel que $0 \leq x \leq y \in B_1 \Rightarrow x \in B_2$ (on peut toujours choisir $B_2 \supset B_1$). Nous avons donc $B \subset B - B \subset B_1 \subset B_2$. Soit $B_3 \in \mathcal{B}$ tel que $B_2 + B_2 \subset B_3$. Nous allons montrer que l'enveloppe pleine de B est contenue dans B_3. Soit $z \in [B]$, il existe donc $x, y \in B$ avec $x \leq z \leq y$

$$z = (z-x) + x \;,\quad 0 \leq z-x \leq y-x \in B-B \subset B_1 \Rightarrow z-x \in B_2$$

$$x \text{ et } (z-x) \in B_2 \text{ donc } z \in B_2 + B_2 \subset B_3 \;,\quad \text{c'est-à-dire } [B] \subset B_3 \,.$$

Proposition (2. 1. 10)

Le dual bornologique $E^{\times}$ d'un e. b. c. plein est contenu dans le dual modéré $\bar{E}$. Si E est filtrant et possède la propriété de décomposition alors $E^{\times} \subset E^{+}$.

La première affirmation résulte du fait que la bornologie $\mathcal{B}$ de E est moins fine que la bornologie de l'ordre. La deuxième est immédiate car si E est filtrant et vérifie la propriété de décomposition $\bar{E} = E^{+}$.

Théorème (2. 1. 11)

Soit E un e. l. c. localement plein, alors BE est un e. b. c. plein.

Ceci résulte du cor. 2, p. 216 [24].

En revanche il n'est pas vrai en général que si E est un e. b. c. plein alors TE est un e. l. c. localement plein. Cela provient du fait que l'enveloppe convexe d'une union de parties pleines n'est pas nécessairement pleine.

Contre-exemple :

Soit E un espace vectoriel ordonné filtrant tel que $E^{+} \neq \bar{E}$ (on donnera un exemple plus loin). Muni de la bornologie de l'ordre E est un e. b. c. plein. Si TE était un e. l. c. localement plein on aurait $\bar{E} = (TE)' \subset E^{+}$ (prop. 1. 21 p. 72 [20]). Comme on a toujours $E^{+} \subset \bar{E}$, on en déduirait $\bar{E} = E^{+}$.

Exemple d'espace ordonné filtrant tel que $\bar{E} \neq E^{+}$ (6. 10 [17])

On considère un espace vectoriel ordonné filtrant E qui contient une partie A convexe dont l'adhérence dans E pour la topologie localement convexe la plus fine contient O et telle que A soit absorbant. (On peut prendre pour E, $L^{\frac{1}{2}}(\mu)$ où μ est la mesure de Lebesgue sur $[0,1]$ pour A l'ensemble $\{f \in E \,,\ f \geq 1 \text{ p. p.}\}$). A l'aide de la partie A on construit un cône C et une fonction réelle positive p définie sur C de la façon suivante :

$$C = \{tx \,,\ t \geq 0 \,,\ x \in A\} \quad \text{et} \quad p(x) = \sup\{t \geq 0 \,,\ x \in tA\}$$

Si $E_1 = \mathbb{R} \times E$ est ordonné par le cône :

$$C_1 = \{(t,x) \mid x \in C \text{ et } t + p(x) \geq 0\}$$

alors $E_1^{+} \neq \bar{E}_1$ car on vérifie que la forme linéaire $\Phi(t,x) = t$ appartient à $\bar{E}_1$ mais non à E_1^{+}.

Définition (2. 1. 12)

Un espace semi-normé plein est un espace vectoriel muni d'un ordre compatible avec la structure d'espace vectoriel et d'une semi-norme p vérifiant :

$$0 \leq x \leq y \Rightarrow p(x) \leq p(y) .$$

Une telle semi-norme sera dite pleine.

Signalons la propriété suivante :

Proposition (2. 1. 13)

Si A est un disque plein d'un espace vectoriel ordonné E, la jauge p_A de A fait de E_A un espace semi-normé plein.

On en déduit immédiatement le théorème suivant :

Théorème (2. 1. 14)

Un e. b. c. plein est limite inductive (bornologique) d'espaces semi-normés pleins.

En effet $E = \varinjlim E_B$, B parcourant une base de bornés formée de disques pleins.

Propriétés de permanence

Proposition (2. 1. 15)

Soit E un e. b. c. plein

1°) Si F est un sous-espace vectoriel de E, F muni de la bornologie et de l'ordre induits par E est un e. b. c. plein.

2°) Si F est un sous-espace vectoriel plein de E, $E/_F$ muni de la bornologie et de l'ordre quotient est un e. b. c. plein.

3°) Soit $(E_\alpha)_{\alpha \in I}$ une famille d'e. b. c. munis d'ordres compatibles avec la structure d'espace vectoriel, alors $\prod_\alpha E_\alpha$ muni de l'ordre et de la bornologie produit est un e. b. c. plein si et seulement si E_α est un e. b. c. plein $\forall \alpha \in I$.

4°) Soit $(E_\alpha)_{\alpha \in I}$ une famille d'e. b. c. munis d'ordres compatibles avec la structure d'espace vectoriel, alors $\bigoplus_\alpha E_\alpha$ muni de l'ordre et de la bornologie somme directe est un e. b. c. plein si et seulement si E_α est un e. b. c. plein $\forall \alpha \in I$.

5°) Une limite projective d'e. b. c. pleins est un e. b. c. plein.

1°) est immédiat.

2°) F étant un sous-espace vectoriel plein de E, $\varphi(K)$ où φ est la surjection canonique : $E \to E/_F$ est un cône donc définit bien un ordre sur $E/_F$ et il est clair que si B est un borné plein de E, $\varphi(B)$ est un borné plein de E/F.

3°) résulte immédiatement du fait que si $\forall \alpha \in I$, B_α est une partie pleine de E_α alors $\prod_\alpha B_\alpha$ est plein et si B est un borné plein de E, alors $\pi_\alpha(B)$ est plein dans E_α, $\forall \alpha$.

4°) Si $\oplus_\alpha E_\alpha$ est un e. b. c. plein, E_α est un e. b. c. plein car il peut être considéré comme un sous-espace bornologique de $\oplus E_\alpha$.

Si E_α est un e. b. c. plein $\forall \alpha \in I$, un borné de $\oplus E_\alpha$ est un borné d'un espace $E_J = \prod_{i \in J} E_i$ (où J est une partie finie de I) , son enveloppe pleine est bornée dans E_J donc dans $\oplus E_\alpha$.

5°) Résulte immédiatement de 1°) et 3°).

II. - ESPACES VECTORIELS BORNOLOGIQUES RETICULES SOLIDES

Définition (2. 2. 1)

Soit E un espace vectoriel réticulé muni d'une bornologie $\mathcal{B}$ d'e. v. b. . On dira que la bornologie $\mathcal{B}$ est une bornologie solide si $\mathcal{B}$ admet un système fondamental de bornés solides. Dans ce cas on dira que E est un e. v. b. solide.

Il est immédiat que E est un e. v. b. solide si et seulement si l'enveloppe solide de tout borné est bornée.

Proposition (2. 2. 2)

Soit E un e. b. c. muni d'un ordre réticulé. E est un e. b. c. solide si et seulement si E admet un système fondamental de bornés formé de disques solides.

Ceci résulte du fait que l'enveloppe convexe d'une partie solide est encore solide.

Un e. b. c. solide étant en particulier un e. b. c. plein toute partie de E bornée pour l'ordre est bornée pour la bornologie. Si E est un espace vectoriel réticulé, la bornologie de l'ordre est la plus fine des bornologies d'e. b. c. solides de E (en effet les $[-x,+x]$, $x > 0$, forment une base de la bornologie de l'ordre).

Remarquons que si $(E,\mathcal{B})$ est un e. b. c. muni d'un ordre réticulé, les parties $s(B)$, $B \in \mathcal{B}$, définissent une bornologie solide $\mathcal{B}'$ qui est la plus fine des bornologies d'e. b. c. solides moins fines que $\mathcal{B}$.

Proposition (2. 2. 3)

Soit $(E,\mathcal{B})$ un e. b. c. muni d'un ordre réticulé. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

a) L'application $x \to x^+$ est bornée de E dans E .

b) L'application $x \to x^-$ est bornée de E dans E .

c) L'application $x \to |x|$ est bornée de E dans E .

d) L'application $(x, y) \to \sup(x, y)$ de $E \times E$ dans E est bornée.

e) L'application $(x, y) \to \inf(x, y)$ de $E \times E$ dans E est bornée.

Il est immédiat que a) $\Leftrightarrow$ b) $\Leftrightarrow$ c) et d) $\Leftrightarrow$ e) , a) $\Leftrightarrow$ d) se déduit de $\sup(x, y) = (x-y)^+ + y$.

Les applications définies ci-dessus sont appelées applications de réticulation.

Définition (2. 2. 4)

Si $(E,\mathcal{B})$ est un e. b. c. ordonné par un cône K, on dira que K est un b-cône si la famille $(B \cap K - B \cap K)_{B \in \mathcal{B}}$ constitue une base de bornologie de $\mathcal{B}$.

Cette notion n'est rien d'autre que la notion duale de celle de cône normal en théorie des e. l. c. ordonnés comme le prouve le théorème suivant.

Théorème (2. 2. 5)

1°) Si E est un e. b. c. ordonné par un b-cône K alors $E^{\times}$ muni de la topologie de la convergence uniforme sur les bornés de E est un e. l. c. ordonné par un cône normal.

2°) Si E est un e. l. c. ordonné par un cône normal K alors E' muni de la bornologie équicontinue est un e. b. c. ordonné par un b-cône et réciproquement.

Sur $E^{\times}$ dual de l'e. b. c. E un système fondamental de voisinages de O pour la topologie de la convergence uniforme sur les bornés de E est formé par les ensembles $(B \cap K)^{\circ}$ (puisque K est un b-cône) quand B parcourt une base de bornologie de E. Vérifions que les $(B \cap K)^{\circ}$ sont pleins : si $f \in E^{\times}$ est telle que $g \leq f \leq h$ avec g et h dans $(B \cap K)^{\circ}$ alors on a $|g(x)| \leq 1$ et $|h(x)| \leq 1$, $\forall x \in B \cap K$ d'où $|f(x)| \leq 1$ $\forall x \in B \cap K$, c'est-à-dire $f \in (B \cap K)^{\circ}$.

Pour la deuxième partie du théorème, voir cor. 1, p. 219 [24].

Exemple :

Si E est un espace vectoriel ordonné filtrant, dans E muni de la bornologie de l'ordre, le cône K est un b-cône.

E étant filtrant, les intervalles $[-x,+x]$, $x > 0$, forment une base pour la bornologie de l'ordre et on a $\forall x > 0$, $[-x,+x] \subset [0,x] - [0,x]$ puisque tout $y \in [-x,x]$ s'écrit $y = \frac{1}{2}(y+x) - \frac{1}{2}(x-y)$.

Proposition (2. 2. 6)

Soit $(E,\mathcal{B})$ un e. b. c. muni d'un ordre réticulé si $x \to x^+$ est bornée alors K est un b-cône.

$x \to x^+$ étant bornée, $x \to x^-$ l'est aussi.

Soit $B \in \mathcal{B}$, $B^+ = \{x^+, x \in B\}$ et $B^- = \{x^-, x \in B\}$ sont bornés, il existe $B'' \in \mathcal{B}$ tel que $B^+ \cup B^- \subset B'' \cap K$ alors $B \subset B^+ - B^- \subset B'' \cap K - B'' \cap K$.

Théorème (2. 2. 7)

Si $(E,\mathcal{B})$ est un e. b. c. muni d'un ordre réticulé, les propriétés suivantes sont équivalentes :

1°) E est un e. b. c. solide.

2°) E est un e. b. c. plein et les applications de réticulation sont bornées.

3°) E est un e. b. c. plein et le cône K est un b-cône.

4°) $x \to x^+$ est uniformément bornée (c'est-à-dire : $\forall B \in \mathcal{B}$, $\exists B' \in \mathcal{B} \mid x-y \in B \Rightarrow x^+ - y^+ \in B'$).

2°) ⇒ 1°) soit B un disque borné, soit $x \in B$ et $|y| \leq |x|$. L'application $x \to |x|$ étant bornée, il existe un borné B_1 que l'on peut supposer disqué plein (E étant un e.b.c. plein) tel que $x \in B \Rightarrow |x| \in B_1$.

$$|y| \leq |x| \Leftrightarrow -|x| \leq y \leq |x| \quad \text{d'où } y \in B_1 ,$$

B_1 contient donc l'enveloppe solide de B, ce qui prouve que E est un e.b.c. solide.

1°) ⇒ 4°) soit $B \in \mathcal{B}$, si $x-y \in B$, $|x^+-y^+| \leq |x-y| \in s(B)$, $s(B)$ est un borné solide donc $x^+-y^+ \in s(B)$.

4°) ⇒ 3°) $x \to x^+$ étant uniformément bornée, $x \to x^+$ est bornée donc, d'après (2.2.6) K est un b-cône.

Montrons que E est un e.b.c. plein :

Soit $B \in \mathcal{B}$, il existe $B' \in \mathcal{B}$ tel que $x-y \in B \Rightarrow x^+ - y^+ \in B'$. Soient $0 \leq y \leq x \in B$

$$x = y-(y-x) \in B \Rightarrow y = y^+ -(y-x)^+ \in B'$$

ceci prouve que E est un e.b.c. plein d'après (2.1.9).

3°) ⇒ 2°) soit $B \in \mathcal{B}$, il existe un disque plein $B' \in \mathcal{B}$ tel que $B \subset B' \cap K - B' \cap K$, d'où si $x \in B$ il existe x_1 et $x_2 \in B' \cap K$ tels que $x = x_1 - x_2$. On a donc $0 \leq x^+ \leq x_1$ et $0 \leq x^- \leq x_2$ d'où B' étant plein, x^+ et $x^- \in B'$. Ceci prouve que les applications $x \to x^+$ et $x \to x^-$ sont bornées.

Corollaire (2.2.8)

Si E est un e.b.c. solide séparé, alors le cône K est b-fermé.

Soit $(x_n)_n \in K$, $x_n \xrightarrow{b} x_o$.

Il existe donc B disque borné solide tel que :

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists N : n \geq N \Rightarrow x_n - x_o \in \varepsilon B \Rightarrow |x_n - x_o| \in \varepsilon B$.

On a $|x_n^- - x_o^-| \leq |x_n - x_o|$ d'où $x_n^- - x_o^- \in B$, $x_n^- = 0$ donc $x_o^- \in \varepsilon B$, $\forall \varepsilon > 0$, E étant séparé $x_o^- = 0$ donc $x_o \geq 0$.

Théorème (2.2.9)

Soit $(E,\mathcal{B})$ un e.b.c. solide. Le dual bornologique $E^\times$ est un idéal pour l'ordre de E^+.

Soit $f \in E^\times$, $\mathcal{B}$ étant moins fine que la bornologie de l'ordre $E^\times \subset E^+ = \overline{E}$ d'où $f = f^+ - f^-$. Nous allons montrer que si $g \in E^+$ avec $|g| \leq |f|$ alors $g \in E^\times$, ce qui prouvera en particulier que f^+ et $f^- \in E^\times$. Soit B un disque borné solide, il existe $A \geq 0$ tel que $|f(x)| \leq A$, $\forall x \in B$.

Si $x \in B$, $|g(x)| \leq |g|(|x|) \leq |f|(|x|) = \sup_{|y| \leq |x|} f(y)$.

B étant solide $y \in B$ d'où $|g(x)| \leq A$.

Théorème (2.2.10)

1°) Soit E un e.l.c. localement solide, alors BE est un e.b.c. solide.

2°) Soit E un e.b.c. solide, alors TE est un e.l.c. localement solide.

1°) Soit $\mathcal{V}$ un système fondamental de voisinages de 0 dans E formé de disques solides. On obtient une base de bornés de BE en considérant les $\bigcap_{\mathcal{V}} \lambda_V V$ qui sont des disques solides comme intersection de disques solides.

2°) Soit $\mathcal{B}$ une base de bornologie de E formée de disques solides. On obtient un système fondamental de voisinages de 0 dans TE en considérant les parties $V = \Gamma\,(\bigcup_B \lambda_B B)$, $\bigcup_B \lambda_B B$ est solide comme réunion de solides et V enveloppe convexe d'une partie solide est un disque solide.

Le théorème précédent nous permet d'obtenir comme corollaire, entre autres, un résultat de YAU-CHUEN-WONG [25].

Corollaire (2.2.11)

Un e.l.c. bornologique E (resp. un e.b.c. topologique) ordonné est localement solide (resp. solide) si et seulement si BE (resp. TE) est solide (resp. localement solide).

Si E est un e.l.c. non bornologique il n'est pas vrai en général que E est localement solide dès que la bornologie de E est solide (c'est-à-dire que BE est un e.b.c. solide).

Exemple [25]

Soit $E = L^1(\mu)$ (où μ est la mesure de Lebesgue sur $[0,1]$) muni de sa norme et de son ordre usuels. On sait que $E' = L^\infty(\mu)$ et que l'enveloppe solide de toute partie $\sigma(E,E')$ - bornée dans E est encore $\sigma(E,E')$-bornée et que E muni de la topologie $\sigma(E,E')$ n'est pas bornologique. Donc E est un e.l.c. non bornologique tel que BE soit un e.b.c. solide. Mais E n'est pas localement solide. En effet : la suite $(f_n)_n$ définie par

$$f_n(t) = \sin n\pi t \qquad (t \in [0,1])$$

est faiblement convergente vers 0 alors que la suite $(|f_n|)_n$ ne l'est pas.

Maintenant nous allons démontrer un théorème qui met en évidence d'une manière précise la dualité existant entre les e.l.c. localement solides et les e.b.c. solides.

Théorème (2.2.12)

1°) Soit E un e.l.c. localement solide, son dual E' muni de la bornologie équicontinue est un e.b.c. solide.

2°) Soit E un e.b.c. solide, son dual $E^\times$ muni de la topologie de la convergence uniforme sur les bornés de E est un e.l.c. localement solide.

La démonstration résulte immédiatement du fait que E' (resp. $E^\times$) est un idéal pour l'ordre de E^+ et que si A est une partie solide d'un espace vectoriel réticulé E, son polaire A° dans E^+ est encore solide (cor. 1.5. p. 212 [24]).

Définition (2.2.13)

Un espace semi-normé solide est un espace vectoriel muni d'un ordre réticulé et d'une semi-norme p telle que :

$$|y| \leq |x| \Rightarrow p(y) \leq p(x).$$

Rappelons le résultat suivant :

Proposition (2. 1. 14)

1°) Soit A un disque solide d'un espace vectoriel réticulé E, la jauge p_A de A fait de E_A un espace semi-normé solide.

2°) Un espace semi-normé E, muni d'un ordre réticulé est un espace semi-normé solide si et seulement si sa boule unité est solide.

De cette proposition on déduit immédiatement le théorème suivant :

Théorème (2. 1. 15)

Un e. b. c. solide E est limite inductive (bornologique) d'espaces semi-normés solides.

En effet, $E = \varinjlim E_B$, B parcourant une base de bornés formée de disques solides.

Propriétés de permanence.

Proposition (2. 1. 16)

Soit E un e. b. c. solide.

1°) si F est un sous-espace vectoriel réticulé de E, F muni de la bornologie et de l'ordre induits par E, est un e. b. c. solide.

2°) Si F est un idéal pour l'ordre de E, $E/_F$ muni de la bornologie et de l'ordre quotient est un e. b. c. solide.

3°) Soit $(E_\alpha)_{\alpha \in I}$ une famille d'e. b. c. munis d'ordres réticulés alors $\prod_\alpha E_\alpha$ muni de l'ordre et de la bornologie produit est un e. b. c. solide si et seulement si E_α est un e. b. c. solide $\forall \alpha \in I$.

4°) Soit $(E_\alpha)_{\alpha \in I}$ une famille d'e. b. c. munis d'ordres réticulés alors $\oplus_\alpha E_\alpha$ muni de l'ordre et de la bornologie somme directe est un e. b. c. solide si et seulement si E_α est un e. b. c. solide $\forall \alpha \in I$.

5°) Une limite projective d'e. b. c. solides est un e. b. c. solide.

1°) est immédiat.

2°) F étant un idéal pour l'ordre de E, $\varphi(K)$, où φ est la surjection canonique $E \to E/_F$, est un cône définissant sur $E/_F$ une structure d'espace vectoriel réticulé et il est clair que si B est un borné solide de E, $\varphi(B)$ est un borné solide de $E/_F$.

3°) résulte immédiatement du fait que si $\forall \alpha \in I$, B_α est une partie solide de E_α alors $\prod_\alpha B_\alpha$ est solide et si B est un borné solide de E, alors $\pi_\alpha(B)$ est solide dans E_α $\forall \alpha$.

4°) Si $\oplus E_\alpha$ est un e. b. c. solide, E_α est un e. b. c. solide car il peut être considéré comme un sous-espace vectoriel de $\oplus_\alpha E_\alpha$.

Si E_α est un e. b. c. solide $\forall \alpha \in I$, un borné de $\oplus_\alpha E_\alpha$ est un borné d'un espace $E_J = \prod_{i \in J} E_i$ (où J est une partie finie de I) ; son enveloppe solide est bornée dans E_J donc dans $\oplus_\alpha E_\alpha$.

5°) résulte immédiatement de 1°) et 3°).

=========

CHAPITRE III

COMPLETION POUR L'ORDRE ET COMPLETION BORNOLOGIQUE DANS LES E. B. C. RETICULES

Si E est un e. b. c. réticulé solide, désignons respectivement par OE et $\hat{E}$ les complétés de E pour l'ordre et la bornologie. Deux problèmes se posent alors de façon naturelle : comment construire un ordre sur $\hat{E}$ et une bornologie sur OE qui induisent respectivement sur E son ordre et sa bornologie de départ.

Dans une première partie nous montrons d'abord que pour tout e. b. c. séparé réticulé solide $(E,\mathcal{B})$, OE peut être muni d'une bornologie réticulée solide dont la restriction à E est $\mathcal{B}$. Nous étudions le cas particulier de la bornologie de l'ordre en montrant que sur OE la bornologie de l'ordre et la bornologie de complété pour l'ordre coïncident. Nous donnons une condition suffisante pour que E soit b-dense dans OE (ce qui n'est pas vrai en général même pour un espace normé).

Dans une seconde partie nous considérons un e. b. c. réticulé E possédant un système fondamental $\mathcal{B}$ de bornés solides tel que, si $B \subset B' \in \mathcal{B}$, alors les espaces normés E_B et $E_{B'}$ sont à normes faiblement concordantes et nous montrons que son complété bornologique $\hat{E}$ peut être muni d'un ordre réticulé prolongeant celui de E de telle façon que $\hat{E}$ s'écrive comme limite inductive d'espaces de Banach réticulés solides.

I. - COMPLETION POUR L'ORDRE D'UN E. B. C. RETICULE SOLIDE.

Dans [13] NISHIURA examine le problème de la complétion pour l'ordre en liaison avec la complétion topologique dans le cas d'un espace normé réticulé solide E (le complété pour l'ordre OE de l'espace E existe puisque tout espace normé solide est archimédien).

NISHIURA montre qu'il est possible de munir OE d'une structure d'espace normé réticulé solide, en prolongeant la norme de E à OE de la façon suivante : $\forall \hat{x} \in OE$, comme on sait que $\hat{x} = \inf\{x \in E \,,\, x \geq \hat{x}\}$ on pose :

$$\tilde{p}(\hat{x}) = \inf \{p(x) \,,\, x \geq |\hat{x}| \} .$$

Il obtient le théorème principal suivant :

si E est un espace de Banach réticulé solide, il en est de même de OE .

D'une manière plus générale, si E est un e. l. c. localement solide, son complété pour l'ordre OE peut être muni d'une topologie d'e. l. c. localement solide par prolongement des semi-normes qui définissent la topologie de E .

Dans ce qui suit on se propose d'examiner le problème général suivant : comment construire sur le complété pour l'ordre OE d'un e. b. c. réticulé solide, une bornologie naturelle prolongeant celle de E .

Ainsi on généralise le théorème précité de NISHIURA.

Théorème (3. 1. 1.)

Soit E un e. b. c. séparé réticulé solide, alors il existe sur OE, complété pour l'ordre de E , une bornologie réticulée solide telle que E soit un sous-espace bornologique de OE .

Soit $\mathcal{B}$ une base de bornologie de E formée de disques solides. Donc $E = \varinjlim E_B = \bigcup_{B\in\mathcal{B}} E_B$ où chaque E_B est un espace normé réticulé solide. E étant séparé pour $\mathcal{B}$, l'est a fortiori pour la bornologie de l'ordre donc est archimédien. Désignons par OE le complété pour l'ordre de E, par OE_B celui de E_B. D'après NISHIURA, chaque espace OE_B peut être muni d'une structure d'espace normé réticulé solide prolongeant celle de E_B.

Pour construire une structure d'e. b. c. réticulé solide sur OE, nous allons montrer que le système d'espaces vectoriels $(OE_B)_{B\in\mathcal{B}}$ est un système inductif bornologique pour des applications convenables et que OE est la limite inductive algébrique de ce système ; il suffira alor de munir OE de la bornologie limite inductive de celles des OE_B pour conclure.

1°) <u>La famille</u> $(OE_B)_{B\in\mathcal{B}}$ <u>forme un système inductif algébrique</u>

Soient B, $B' \in \mathcal{B}$ tels que $B \subset B'$ et $\pi_{BB'}$ l'application canonique : $E_B \to E_{B'}$. Cette application vérifie la condition (P) parce que B étant solide, E_B est un idéal pour l'ordre de E donc a fortiori de $E_{B'}$ (voir exemples de prop. (1. 6)). Donc $\pi_{BB'}$ admet un prolongement $\tilde{\pi}_{BB'}$ tel que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{tikzcd} E_B \arrow[r, "\pi_{BB'}"] \arrow[d, "\varphi_B"'] & E_{B'} \arrow[d, "\varphi_{B'}"] \\ OE_B \arrow[r, "\tilde{\pi}_{BB'}"'] & OE_{B'} \end{tikzcd}$$

$\tilde{\pi}_{BB'}$ est complètement réticulante et injective (d'après (1. 7) et (1. 8)).

De plus si $B \subset B' \subset B''$, comme $\pi_{BB'} \circ \pi_{B'B''} = \pi_{BB''}$ on en déduit. que $\tilde{\pi}_{BB'} \circ \tilde{\pi}_{B'B''} = \tilde{\pi}_{BB''}$, enfin $\tilde{\pi}_{BB} = \mathrm{Id.}\ \forall B$.

2°) <u>Le système précédent est un système inductif bornologique.</u>

Il suffit de démontrer que les application $\tilde{\pi}_{BB'}$ sont bornées. Ceci résulte du lemme général suivant :

<u>Lemme (3. 1. 2.)</u>

Soient E_1 et E_2 deux espaces vectoriels normés réticulés solides; si $f : E_1 \to E_2$ est une application linéaire continue vérifiant la condition (P) alors $\tilde{f} : OE_1 \to OE_2$ est continue et de plus $\|\tilde{f}\| = \|f\|$.

Soient B_1 et B_2 les boules unités de E_1 et E_2. Soit $\hat{x} \in OE_1$:

$$\tilde{p}_2[\tilde{f}(\hat{x})] = \inf\{p_2(y) \mid y \in E_2 \text{ et } y \geq |\tilde{f}(\hat{x})|\}.$$

Si $z \in E_1$ avec $z \geq |\hat{x}|$, on a :

$$f(z) \geq \tilde{f}(|\hat{x}|) = |\tilde{f}(\hat{x})|$$

car $\tilde{f}$ est complètement réticulante.

D'où :

$$\tilde{p}_2[\tilde{f}(\hat{x})] \leq \inf\{p_2[f(z)] \mid z \in E_1 \text{ et } z \geq |\hat{x}|\}$$
$$\leq \|f\| . \inf\{p_1(z) \mid z \in E_1 \text{ et } z \geq |\hat{x}|\}$$

c'est-à-dire

$$\tilde{p}_2[\tilde{f}(\hat{x})] \leq \|f\| . p_1(\hat{x}).$$

Donc $\qquad \|\tilde{f}\| \leq \|f\|$.

Il est immédiat que $\|\tilde{f}\| \geq \|f\|$ par construction de $\tilde{f}$ d'où $\|\tilde{f}\| = \|f\|$.

3°) $OE = \varinjlim OE_B$ (algébriquement)

B étant solide, E_B est un idéal pour l'ordre de E, donc l'application canonique $\pi_B : E_B \to E$ vérifie la condition $(\mathbb{P})$ et par conséquent se prolonge en une application $\tilde{\pi}_B : OE_B \to OE$, complètement réticulante et injective. D'où $\bigcup OE_B \subset OE$ algébriquement et ordinalement.

Soit $\hat{x} \in OE$, $\hat{x} \geq 0$, comme $\hat{x} = \inf\{x \in E \mid x \geq \hat{x}\}$ il existe $y \in E$, $y \geq \hat{x}$. Soit $B \in \mathcal{B}$ tel que $y \in E_B$. D'après le corollaire (1.9) OE_B est un idéal pour l'ordre de OE donc :

$$0 \leq \hat{x} \leq y \in OE_B \Rightarrow \hat{x} \in OE_B .$$

D'où $\quad OE = \bigcup\limits_B OE_B$.

4°) Bornologie solide sur OE .

Munissons OE de la bornologie limite inductive des espaces OE_B . Ainsi OE devient un e. b. c. réticulé. Montrons qu'il est solide : OE admet comme base de bornologie les parties $\tilde{B}$ qui sont les boules unités des OE_B . On sait que $\tilde{B}$ est une partie solide de OE_B ; comme OE_B est un idéal pour l'ordre de OE , $\tilde{B}$ est donc solide dans OE .

Montrons enfin que E est un sous-espace vectoriel bornologique de OE . Il suffit de montrer que , $\forall B \in \mathcal{B}$, $\tilde{B} \cap E$ est un borné de E .

Soit $\hat{x} \in \tilde{B} \cap E$. Puisque $\hat{x} \in OE_B$, il existe $y \in E_B$ tel que : $|\hat{x}| \leq y$. Vu que E_B est un idéal pour l'ordre de E et que $\hat{x} \in E$, alors $\hat{x} \in E_B$. Donc :

$$p_B(\hat{x}) = \tilde{p}_B(\hat{x}) \leq 1$$

ce qui montre que $\tilde{B} \cap E$ est borné dans E_B donc dans E .

Exemple : Etude de la bornologie de l'ordre.

Théorème (3. 1. 3.)

Soit E un espace vectoriel réticulé archimédien. Alors sur OE la bornologie de l'ordre et la bornologie prolongeant la bornologie de l'ordre de E (définie à l'aide de (3. 1. 1.) coïncident.

La bornologie de l'ordre admet comme système fondamental de bornés les intervalles solides B_x où $B_x = [-x, +x]$ avec $x > 0$.

E_{B_x} est muni de la norme p_x , jauge de B_x :

si $y \in E_{B_x}$, $\qquad p_x(y) = \inf\{\lambda > 0 \mid |y| \leq \lambda x\}$.

Soit OE_{B_x} muni de la norme $\tilde{p}_x$. Si $\hat{z} \in OE_{B_x}$

$$\tilde{p}_x(\hat{z}) = \inf\{p_x(y) \mid y \in E_{B_x} , \; y \geq |\hat{z}|\}$$

$$\tilde{p}_x(\hat{z}) \leq 1 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists y \in E_{B_x} , \; y \geq |\hat{z}| \text{ et } p_x(y) < (1+\varepsilon) ,$$

d'où : $\qquad |\hat{z}| \leq y \leq (1+\varepsilon)x$.

donc : $\qquad |\hat{z}| \leq (1+\varepsilon)x \quad \forall \varepsilon > 0$.

OE étant archimédien, on en déduit que $|\hat{z}| \leq x$. La boule unité de OE_{B_x} est donc l'intervalle $[-x, x]$ dans OE . Ce qui démontre le théorème.

Proposition (3. 1. 4.)

Si E est un e. b. c. réticulé possédant un système fondamental de bornés solides complétants alors son complété pour l'ordre est un e. b. c. réticulé solide complet pour la bornologie.

Soit $\mathcal{B}$ un système fondamental de bornés solides complétants. Alors $E = \varinjlim E_B$ est un e. b. c. réticulé solide et d'après le théorème (3. 1. 1.) $OE = \varinjlim OE_B$. De plus chaque OE_B est un Banach réticulé solide d'après [18], donc OE possède un système fondamental de bornés solides complétants et par suite est complet pour la bornologie.

En général E n'est pas b-dense dans OE même si E est un espace normé [18] ; nous allons donner une condition suffisante pour que E soit b-dense dans son complété pour l'ordre.

Proposition (3. 1. 5.)

Si E est un e. b. c. réticulé admettant un système fondamental $\mathcal{B}$ de bornés solides tels que $\forall B \in \mathcal{B}$, l'espace E_B vérifie la condition suivante :

$$(R)\begin{cases}\text{Pour toute famille filtrante inférieurement } (x_\alpha)_{\alpha\in I} \text{ telle que} \\ \inf\limits_{\alpha\in I} x_\alpha = 0 \text{ dans } E_B \text{ alors } \inf\limits_{\alpha\in I} p_B(x_\alpha) = 0\end{cases}$$

alors E est b-dense dans OE.

Démontrons d'abord que si l'espace E_B vérifie la condition (R) il en est de même de OE_B.

Soit $(\hat{y}_\alpha)_{\alpha\in I}$ une famille filtrante inférieurement d'éléments de OE_B telle que $\inf\limits_\alpha \hat{y}_\alpha = 0$.

Pour tout $\alpha \in I$, on a :

$$\hat{y}_\alpha = \inf\{x \in E_B \mid x \geq \hat{y}_\alpha\}$$

d'où si $\qquad A = \{x \in E_B \mid \exists \alpha \in I \text{ avec } x \geq \hat{y}_\alpha\}$

alors $\quad \inf A = \inf\limits_\alpha \hat{y}_\alpha = 0$.

De plus A est une famille filtrante inférieurement, donc $\inf\limits_{x\in A} p_B(x) = 0$ d'après la condition (R) sur E_B.

Si $\tilde{p}_B$ désigne la norme sur OE_B prolongeant p_B on a par construction :

$$\tilde{p}_B(\hat{y}_\alpha) = \inf\{p_B(x) \mid x \in E_B,\ x \geq \hat{y}_\alpha\}$$

d'où :

$$\inf_\alpha \tilde{p}_B(\hat{y}_\alpha) = \inf_{x\in A} p_B(x) = 0.$$

Donc OE_B vérifie (R).

Nous allons en déduire que E_B est dense dans OE_B : il suffit de montrer que tout $\hat{x} > 0$ dans OE_B est limite d'une famille d'éléments de E_B.

On a $\qquad \hat{x} = \inf\{x_\alpha \in E_B \mid x_\alpha \geq \hat{x}\}$.

La famille $(x_\alpha)_\alpha$ est filtrante inférieurement puisque E_B est réticulé et vérifie

$$\inf_\alpha (x_\alpha - \hat{x}) = 0 \quad , \quad \text{donc} \quad \inf_\alpha p_B(x_\alpha - \hat{x}) = 0 .$$

ce qui montre que $\hat{x}$ appartient à l'adhérence de E_B dans OE_B.

Corollaire (3. 1. 6.)

Si E est un e. b. c. réticulé solide, bornologiquement complet et vérifiant la condition (R) alors E est complet pour l'ordre.

E étant bornologiquement complet est un sous-espace b-fermé de OE, d'où $OE = E$ d'après le théorème précédent.

II. - ORDRE SUR LE COMPLETE BORNOLOGIQUE D'UN E. B. C. RETICULE

Si E est un espace vectoriel normé réticulé solide, soit $\hat{E}$ son complété pour la norme. Il est possible de définir sur $\hat{E}$ un ordre prolongeant celui de E qui en fait un espace normé réticulé solide ([20] et [24]) : il suffit de prendre pour cône de $\hat{E}$ l'adhérence du cône de E. L'application canonique $\varphi : E \to \hat{E}$ est continue et réticulante mais en général elle n'est pas complètement réticulante comme le montre l'exemple suivant dû à NISHIURA [18].

Soit E l'ensemble des suites bornées réelles muni de la norme $\|\{x_n\}\| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x_n|}{n^2} + \overline{\lim_n} |x_n|$, et de l'ordre usuel. On montre dans [18] que le complété pour la norme de E est la somme directe des deux espaces :

$$E_1 = \{(x_n)_n \mid \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x_n|}{n^2} < \infty\}$$

et $E_2 = C(\check{\mathbb{N}} - \mathbb{N})$ espace des fonctions continues sur $\check{\mathbb{N}}-\mathbb{N}$ ($\check{\mathbb{N}}$ est le compactifié de Stone-Čech de $\mathbb{N}$).

Si $(X_p)_p$ désigne la suite d'éléments de E définie par : $X_p = (x_n^p)_n$ avec $x_n^p = 1$ si $n > p$ et $x_n^p = 0$ si $n \leq p$. Alors on a

$$\varphi(\inf_p X_p) = \varphi(0) = 0 \neq \inf_p \varphi(X_p).$$

Cet exemple montre aussi qu'un espace normé réticulé solide complet pour l'ordre n'est pas nécessairement complet pour la topologie (c'est le cas de E).

Si E est maintenant un e. b. c. réticulé solide aux normes faiblement concordantes, soit $\hat{E}$ son complété bornologique. Nous nous proposons dans la suite de répondre affirmativement au problème suivant : Peut-on définir sur $\hat{E}$ un ordre prolongeant celui de E qui lui confère une structure d'e. b. c. réticulé ? Ainsi nous généralisons les résultats obtenus jusque là pour le cas d'un espace normé.

Proposition (3. 2. 1.)

Soient E et F deux espaces vectoriels normés réticulés solides, $f : E \to F$ une application continue réticulante. Alors l'application $\hat{f} : \hat{E} \to \hat{F}$ est encore réticulante.

On a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f} & F \\ \downarrow & & \downarrow \\ \hat{E} & \xrightarrow{\hat{f}} & \hat{F} \end{array}$$

Soit $\hat{x} \in \hat{E}$, alors $\hat{x} = \lim_{n \to \infty} x_n$ où $(x_n)_n$ est une suite d'éléments de E.

Comme l'application $x \to |\hat{x}|$ est continue dans E alors $|\hat{x}| = \lim_n |x_n|$

d'où : $\hat{f}(\hat{x}) = \lim_n f(x_n)$

et : $\hat{f}(|\hat{x}|) = \lim_n f(|x_n|) = \lim_n |f(x_n)|$

car f est réticulante.

L'application $y \to |y|$ étant continue dans $\hat{F}$

$$|\hat{f}(\hat{x})| = \lim_n |f(x_n)| \quad \text{d'où} \quad |\hat{f}(\hat{x})| = \hat{f}(|\hat{x}|).$$

Corollaire (3. 2. 2.)

Avec les mêmes hypothèses que dans (3. 2. 1.) sur E et F, si $f : E \to F$ est une application linéaire continue réticulante injective et si E et F sont à normes faiblement concordantes, alors $\hat{f} : \hat{E} \to \hat{F}$ est injective, réticulante.

Corollaire (3. 2. 3.)

Soient E et F deux espaces vectoriels normés réticulés solides tels que $E \subset F$ ordinalement, c'est-à-dire que l'ordre de E est induit par celui de F ; si l'application canonique $i : E \to F$ est continue avec E et F à normes faiblement concordantes alors $\hat{E} \subset \hat{F}$ ordinalement.

Ceci découle de (3. 2. 2.) et du fait général suivant : si l'application canonique $i : E \to F$ est réticulante alors l'ordre de F induit celui de E ; en effet si $x \geq 0$ il est évident que $i(x) \geq 0$ dans F, inversement si $i(x) \geq 0$ dans F, $i(x) = |i(x)| = i(|x|)$, donc $x = |x|$ dans E.

Théorème (3. 2. 4.)

Soit E un e. b. c. réticulé possédant un système fondamental $\mathcal{B}$ de bornés solides tels que si $B \subset B'$, B et $B' \in \mathcal{B}$, E_B et $E_{B'}$ sont à normes faiblement concordantes ; alors le complété bornologique $\hat{E}$ de E peut être muni d'une structure d'ordre canonique prolongeant celle de E, telle que $\hat{E}$ devienne un e. b. c. réticulé limite inductive d'espaces de Banach réticulés solides, l'injection canonique $E \to \hat{E}$ étant réticulante.

Si $B \in \mathcal{B}$, l'espace E_B est normé réticulé solide donc son complété pour la norme $\hat{E}_B$ peut être muni d'un ordre réticulé prolongeant celui de E_B, le rendant solide.

Si $B \subset B'$ sont deux bornés de $\mathcal{B}$, $E_B \subset E_{B'}$ ordinalement, donc, d'après le corollaire (3. 2. 3.) $\hat{E}_B$ est contenu dans $\hat{E}_{B'}$ ordinalement. Comme $\hat{E} = \bigcup_B \hat{E}_B$, on définit un ordre sur $\hat{E}$ de la façon suivante :

$$\hat{x} \geq \hat{y} \text{ dans } \hat{E} \text{ si et seulement si } \hat{x} \geq \hat{y} \text{ dans un } \hat{E}_B .$$

Il est clair que $\hat{E} = \varinjlim \hat{E}_B$, avec $\hat{E}_B$ espace de Banach réticulé solide $\forall B \in \mathcal{B}$, et que l'injection canonique $E \to \hat{E}$ est réticulante car les applications $E_B \to E_{B'}$ le sont.

Remarque : Pour définir un ordre sur le complété bornologique $\hat{E}$ de l'e. b. c. réticulé E, on aurait pu considérer par analogie avec ce qui se passe dans les e. l. c., la b-fermeture dans $\hat{E}$ du cône K de E mais cette notion n'est pas aussi maniable qu'en topologie.

Toutefois, à l'aide du théorème (3. 2. 4.) on a le résultat suivant :

Proposition (3. 2. 5.)

Dans les hypothèses du théorème (3. 2. 4.), si $\hat{E}$ est muni de l'ordre canonique prolongeant celui de E, alors il admet pour cône des positifs la b-fermeture de K dans $\hat{E}$.

Par construction de l'ordre de $\hat{E}$ on a

$$\hat{K} = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} (\overline{K \cap E_B})_{\hat{E}_B} \subset \bar{K}$$

où $\hat{K}$ est le cône des positifs de $\hat{E}$.

Mais $\hat{K}$ est b-fermé :

$$\text{si } \hat{x}_n \in \hat{K} \quad \text{et} \quad \hat{x}_n \xrightarrow{b} \hat{x} \text{ dans } \hat{E}$$

alors il existe $B \in \mathcal{B}$ tel que $\hat{x}_n \to \hat{x}$ dans $\hat{E}_B$. Vu que $\hat{x}_n$ est positif dans $\hat{E}_B$ $\forall n$ et que $\hat{E}_B$ est un espace normé solide alors $\hat{x}$ est positif dans $\hat{E}_B$ donc dans $\hat{E}$.

=========

CHAPITRE IV

ETUDE DES APPLICATIONS LINEAIRES BORNEES

L'objet de ce chapitre est l'étude du point de vue ordre et bornologie de l'espace $L_b(E,F)$ des applications linéaires bornées d'un e. b. c. ordonné dans un autre. Nous définissons d'abord un ordre sur $L_b(E,F)$ et toute la première partie consiste à démontrer que dans certaines conditions l'espace $L_b(E,F)$ est réticulé et complet pour l'ordre. Pour arriver à ce résultat nous examinons d'abord le cas particulier où E et F sont munis de la bornologie de l'ordre. Ensuite nous passons au cas général en supposant que E est muni d'un b-cône.

Dans une seconde partie nous démontrons que sous certaines hypothèses $L_b(E,F)$ est un e. b. c. réticulé solide quand on le munit de la bornologie naturelle.

Le théorème principal de la dernière partie donne une condition suffisante pour que le dual bornologique d'un e. b. c. ordonné coïncide avec son dual modéré.

I. - PROPRIETES DE L'ORDRE DE L'ESPACE $L_b(E,F)$

Si E et F sont deux e. b. c. ordonnés, nous désignerons par $L_b(E,F)$ l'espace vectoriel des applications linéaires bornées de E dans F et par $\mathcal{K}$ l'ensemble des applications linéaires bornées positives.

Proposition (4. 1. 1.)

L'ensemble $\mathcal{K}$ est un cône dans $L_b(E,F)$ dans chacun des cas suivants

a) Si le cône K de E est tel que $K-K$ soit b-dense dans E et si F est séparé.

b) Si E est filtrant.

Dans tous les cas il est immédiat que $\mathcal{K}+\mathcal{K}\subset\mathcal{K}$ et $\lambda\mathcal{K}\subset\mathcal{K}$ $\forall\lambda\geq 0$. De plus si $f\in\mathcal{K}\cap(-\mathcal{K})$ alors $f=0$ sur $K-K$, donc sur E si E est filtrant ou sur la b-fermeture de $K-K$ si F est séparé.

Dans toute la suite nous supposerons que E est filtrant ou réticulé, donc $\mathcal{K}$ sera toujours un cône et nous considèrerons $L_b(E,F)$ muni de l'ordre défini par $\mathcal{K}$.

Nous nous proposons maintenant d'étudier $L_b(E,F)$ en tant qu'espace vectoriel ordonné.

Nous allons d'abord examiner le cas particulier suivant : E et F sont des espaces vectoriels ordonnés munis de la bornologie de l'ordre. Dans ce cas l'espace $L_b(E,F)$ coïncide avec $L^b(E,F)$ espace vectoriel des applications linéaires bornées pour l'ordre.

Théorème (4. 1. 2.)

Si E est un espace vectoriel ordonné filtrant, vérifiant la propriété de décomposition et F un espace vectoriel ordonné complet pour l'ordre, alors $L^b(E,F)$ est un espace vectoriel réticulé complet pour l'ordre.

Ce théorème est démontré dans le cas où E est réticulé et $F = R$ dans [5] ou dans [20] dans le cas où E et F sont réticulés (F étant complet pour l'ordre), mais les démonstrations faites sont encore valables dans le cas considéré ici, même si E et F ne sont pas réticulés puisqu'elles reposent sur la propriété du corollaire 9 de [5] dont l'énoncé est équivalent à la propriété de décomposition.

Passons maintenant au cas général où les bornologies des espaces considérés ne sont pas forcément celles de l'ordre.

Théorème (4. 1. 3.)

Soit E un e. b. c. ordonné par un b-cône et possédant la propriété de décomposition, F un e. b. c. plein complet pour l'ordre; alors l'espace $L_b(E,F)$ est complet pour l'ordre.

Il est clair que E est filtrant puisqu'il est ordonné par un b-cône donc $L_b(E,F)$ est un espace vectoriel ordonné d'après (4. 1. 1.).

Soit $(T_\alpha)_{\alpha\in I}$ une famille d'éléments de $L_b(E,F)$ telle que $T_\alpha \leq T \in L_b(E,F)$ $\forall\alpha \in I$.

Soit $x \geq 0$; pour chaque décomposition $x = x_1+x_2+\ldots+x_n$ $(x_k \geq 0)$, $\forall k = 1,2,\ldots,n$; choisissons un indice $\alpha_k \in I$; alors :

$$\sum_{k=1}^{n} T_{\alpha_k}(x_k) \leq \sum_{k=1}^{n} T(x_k) = T(x)$$

F étant complet pour l'ordre, la famille

$$\{\sum_{k=1}^{n} T_{\alpha_k}(x_k) \ ; \ x = \sum_{k=1}^{n} x_k \ , \ x_k \geq 0 \ , \ k \to \alpha_k\}$$

admet une borne supérieure $S(x)$.

On démontre facilement en suivant une méthode analogue à celle de [5] que S est additive sur K et positivement homogène. E étant filtrant S se prolonge d'une manière unique en une application linéaire S de E dans F. Il est clair que S est la borne supérieure de la famille $(T_\alpha)_{\alpha\in I}$ dans $\mathcal{L}(E,F)$. Montrons que $S \in L_b(E,F)$:

K étant un b-cône il suffit de montrer que S est bornée sur les ensembles $(B\cap K)_B$.

Soit $x \in B\cap K$, alors :

$0 \leq (T-S)(x) \leq (T-T_{\alpha_0})(x) \in B_1$ borné plein de F puisque $T-T_{\alpha_0}$ est bornée, donc $(T-S)(B\cap K) \subset B_1$. Ce qui montre que $T-S$ est bornée et par suite S est bornée.

Remarque :

Pour voir que S est bornée on a été amené à démontrer que toute application linéaire f telle que $0 \leq f \leq g \in L_b(E,F)$ appartient à $L_b(E,F)$. D'une manière plus précise $L_b(E,F)$ est un sous-espace vectoriel plein de $\mathcal{L}(E,F)$.

Corollaire (4. 1. 4.)

Si E et F sont deux e. b. c. réticulés solides, F étant complet pour l'ordre, alors $L_b(E,F)$ est un espace vectoriel ordonné complet pour l'ordre.

Corollaire (4. 1. 5.)

Dans les hypothèses du théorème précédent l'espace vectoriel $\mathcal{K}-\mathcal{K}$ est réticulé complet pour l'ordre.

Proposition (4. 1. 6.)

Soient E un e. b. c. ordonné par un b-cône et possédant la propriété de décomposition (en particulier si E est un e. b. c. solide), F un e. b. c. plein complet pour l'ordre. Alors le cône $\mathcal{K}$ engendre $L_b(E,F)$ si et seulement si $L_b(E,F)$ est un idéal pour l'ordre de $L^b(E,F)$.

La condition étant évidemment suffisante, montrons qu'elle est nécessaire.

Si $\mathcal{K}$ engendre $L_b(E,F)$, d'après le corollaire (4. 1. 5.) $L_b(E,F)$ est réticulé, donc $L_b(E,F) \subset L^b(E,F)$ puisque toute application linéaire positive est bornée pour l'ordre.

Soient $|S| \leq |T|$ avec $S \in L^b(E,F)$ et $T \in L_b(E,F)$ alors $-|T| \leq S \leq |T|$.

$L_b(E,F)$ étant réticulé $|T|$ et $-|T| \in L_b(E,F)$ qui est un sous-espace plein de $\mathcal{L}(E,F)$ d'après la remarque précédente donc $S \in L_b(E,F)$.

Dans la proposition précédente on a supposé que $\mathcal{K}$ engendre $L_b(E,F)$; dans ce qui suit nous allons donner quelques exemples où cette hypothèse est vérifiée.

Proposition (4. 1. 7.)

Soient E un e. b. c. plein muni d'un b-cône et possédant la propriété de décomposition, F un espace ordonné complet pour l'ordre muni de la bornologie de l'ordre, alors $\mathcal{K}$ engendre $L_b(E,F)$.

Puisque E est plein tout borné pour l'ordre est un borné de E d'où $L_b(E,F) \subset L^b(E,F)$.

Soit $f \in L_b(E,F)$, alors $f = f^+ - f^-$ dans $L^b(E,F)$, montrons que $f^+ \in L_b(E,F)$. E étant muni d'un b-cône il suffit de montrer que pour tout borné plein B de E, $f^+(B \cap K)$ est un borné de F. f étant bornée, $f(B \cap K)$ est contenu dans un intervalle $[a,b]$. Soit $x \in B \cap K$, alors $f^+(x) = \sup_{0 \leq y \leq x} f(y) \in [a,b]$ car, B étant plein, $\forall y$ tel que $0 \leq y \leq x$ on a $f(y) \in [a,b]$.

Corollaire (4. 1. 8.)

Si E est un e. b. c. solide, F vérifiant les mêmes hypothèses que dans la proposition, alors $\mathcal{K}$ engendre $L_b(E,F)$.

On retrouve ainsi le fait que toute forme linéaire bornée sur un e. b. c. solide E est différence de deux formes linéaires bornées positives.

II. - PROPRIETES BORNOLOGIQUES DE L'ESPACE $L_b(E,F)$.

Théorème (4. 2. 1.)

> Soient E un e. b. c. plein ordonné par un b-cône et possédant la propriété de décomposition, F un espace vectoriel réticulé complet pour l'ordre muni de la bornologie de l'ordre. Alors l'espace $L_b(E,F)$ muni de la bornologie naturelle est un e. b. c. solide complet pour l'ordre et pour la bornologie.

D'après (4. 1. 5.) et (4. 1. 7.), l'espace $L_b(E,F)$ est un espace vectoriel réticulé complet pour l'ordre. F étant muni de la bornologie de l'ordre est complet bornologiquement donc $L_b(E,F)$ muni de la bornologie naturelle est complet bornologiquement. On va montrer dans ce qui suit que c'est un e. b. c. solide.

Soit H un borné naturel de $L_b(E,F)$. Montrons que son enveloppe solide $s(H)$ est encore un borné naturel. Pour cela, E possédant un b-cône, il suffit de montrer que pour tout borné plein B de E, $s(H)[B\cap K]$ est borné dans F.

Par hypothèse, il existe $a > 0$ dans F tel que $T(B\cap K)\subset [-a,+a]$ $\forall T\in H$, d'où $|T|(B\cap K)\subset [-2a,2a]$; en effet si $x\in B\cap K$

$$|T|(x) = \sup_{\substack{x=y+z \\ y,z\geq 0}} T(y-z).$$

B étant plein et $0\leq y\leq x$, $0\leq z\leq x$ alors $y,z\in B\cap K$, donc

$$T(y) - T(z) \in T(B\cap K - B\cap K) \subset [-2a,2a].$$

D'où : $\quad |T|(x) \in [-2a,2a]$.

Si $|S| \leq |T|$ avec $T\in H$, on a $\forall x\in B\cap K$

$$-|T|(x) \leq S(x) \leq |T|(x)$$

donc $S(x)\in[-2a,2a]$ et par suite $s(H)[B\cap K]\subset[-2a,2a]$.

Corollaire (4. 2. 2.)

> Si E est un e. b. c. solide, F un e. v. r. complet pour l'ordre muni de sa bornologie de l'ordre, alors $L_b(E,F)$ est un e. b. c. réticulé solide complet pour l'ordre et la bornologie.

On en déduit que $E^{\times}$, dual bornologique d'un e. b. c. solide est un e. b. c. réticulé solide quand on le munit de la bornologie naturelle. Ce résultat se retrouve aussi de la façon suivante : $E^{\times} = (TE)'$, dual topologique de l'e. l. c. localement solide TE, est un e. b. c. réticulé solide quand on le munit de la bornologie équicontinue (2. 1. 12) ; or celle-ci coïncide avec la bornologie naturelle de $E^{\times}$ ([10]).

III. - DUAL BORNOLOGIQUE ET DUAL MODERE

On se propose dans la suite de trouver des conditions suffisantes pour que toute application linéaire positive de E dans F soit bornée. Ce qui nous permettra d'obtenir une condition suffisante pour que le dual bornologique d'un e. b. c. ordonné coïncide avec le dual modéré.

Proposition (4. 3. 1.)

Si E est un e. b. c. ordonné par un b-cône, alors pour toute suite $x_n \xrightarrow{b} 0$, il existe deux suites $(y_n)_n$ et $(z_n)_n$ d'éléments de K telles que

$$x_n = y_n - z_n \quad \text{et} \quad y_n (\text{resp. } z_n) \xrightarrow{b} 0 .$$

Si $(x_n)_n$ converge bornologiquement vers 0, cela signifie qu'il existe un borné B et une suite de scalaires $\varepsilon_n \to 0$ tels que : $x_n \in \varepsilon_n B$ $\forall n$. Comme K est un b-cône il existe un borné B' tel que $B \subset (B' \cap K) - B' \cap K)$; d'où l'existence de deux suites $(y_n)_n$ et $(z_n)_n$ d'éléments de K telles que $x_n = y_n - z_n$ avec y_n et z_n dans $\varepsilon_n B'$, c'est-à-dire bornologiquement convergentes vers 0.

Proposition (4. 3. 2.)

Si E est un e. b. c. dénombrable ordonné, les deux conditions suivantes sont équivalentes :

1°) Le cône K est un b-cône.

2°) Pour toute suite $x_n \xrightarrow{b} 0$, il existe deux suites $(y_n)_n$ et $(z_n)_n$ d'éléments de K telles que $x_n = y_n - z_n$ et y_n (resp. $z_n) \xrightarrow{b} 0$.

1°) $\Rightarrow$ 2°) d'après ce qui précède.

2°) $\Rightarrow$ 1°) : Supposons que K n'est pas un b-cône. Il existe donc un borné B tel que $B \not\subset n(B_n \cap K - B_n \cap K)$ pour tout n, $(B_n)_n$ étant une base de bornologie de E telle que $B_n \subset B_{n+1}$. D'où il existe une suite

$x_n \in B$ telle que $x_n \notin n(B_n \cap K - B_n \cap K)$ $\forall n$. La suite $u_n = \frac{x_n}{n}$ converge bornologiquement vers 0. Cependant il n'existe pas de suites $(y_n)_n$ et $(z_n)_n$ d'éléments positifs convergeant bornologiquement vers 0 et telles que $u_n = y_n - z_n$; en effet cela entraînerait l'existence d'un borné B_{n_o} et d'une suite de scalaires positifs $\varepsilon_n \to 0$ tels que :

$$y_n \in \varepsilon_n B_{n_o} , \quad z_n \in \varepsilon_n B_{n_o} \quad \forall n .$$

Donc $x_n \in n\,\varepsilon_n (B_{n_o} \cap K - B_{n_o} \cap K)$, ce qui n'est pas.

Théorème (4. 3. 3.)

Soient E un e. b. c. complet ordonné par un b-cône K, b-fermé, F un e. b. c. dénombrable et plein. Alors toute application linéaire positive de E dans F est bornée.

Soit $u : E \to F$ une application linéaire positive. Si u n'est pas bornée, il existe un borné B de E tel que $u(B) \not\subset n B_n$ $\forall n$, où $(B_n)_n$ est une base de bornologie de F formée d'ensembles disqués pleins tels que $B_n \subset B_{n+1}$ $\forall n$. D'où il existe une suite $(a_n)_n$ d'éléments de B tels que $u(a_n) \notin n B_n$, $\forall n$. Donc la suite $x_n = \frac{a_n}{n} \in \frac{B}{n}$, converge bornologiquement vers 0 dans E et $u(x_n) \notin B_n$, $\forall n$. La suite $\sqrt{n}\, x_n \xrightarrow{b} 0$ donc, d'après (4. 3. 1.), $\sqrt{n}\, x_n = y_n - z_n$, $y_n \geq 0 \xrightarrow{b} 0$, $z_n \geq 0 \xrightarrow{b} 0$. On peut supposer que $(y_n)_n$ et $(z_n)_n$ convergent vers 0 dans le même espace de Banach $E_{B'}$.

Soit $(\varepsilon_n)_n$ une série convergente de scalaires positifs. Alors $\forall p$ il existe $y_{n_p} \in \varepsilon_p B'$ et $z_{n_p} \in \varepsilon_p B'$ avec $n_p > n_{p-1}$ puisque y_n et $z_n \to 0$ dans $E_{B'}$.

Les séries de terme général $(y_{n_p})_p$ et $(z_{n_p})_p$ convergent dans $E_{B'}$ respectivement vers y et z puisqu'elles vérifient le critère de Cauchy.

Puisque le cône K est b-fermé, on a $y \geq y_{n_p}$ et $z \geq z_{n_p}$, $\forall p$.

D'où :

$$-z \leq \sqrt{n_p}\, x_{n_p} = y_{n_p} - z_{n_p} \leq y$$

et donc

$$-\frac{z}{\sqrt{n_p}} \leq x_{n_p} \leq \frac{y}{\sqrt{n_p}} .$$

Ainsi

$$-\frac{1}{\sqrt{n_p}}\, u(z) \leq u(x_{n_p}) \leq \frac{1}{\sqrt{n_p}}\, u(y) .$$

Quand $p \to \infty$ les suites $-\frac{1}{\sqrt{n_p}} u(z)$ et $\frac{1}{\sqrt{n_p}} u(y)$ convergent vers 0 dans un espace $F_{B_{n_o}}$; B_{n_o} étant plein la suite $u(x_{n_p}) \to 0$ dans $F_{B_{n_o}}$, c'est-à-dire qu'il existe une suite λ_n de scalaires positifs $\to 0$ tels que $u(x_{n_p}) \in \lambda_p B_{n_o}$, $\forall p$. Donc il existe un indice n_i assez grand tel que $u(x_{n_i}) \in B_{n_i}$ d'où la contradiction.

Corollaire (4. 3. 4.)

Si E est un e. b. c. complet ordonné par un b-cône K b-fermé alors $E^+ \subset E^\times$.

Corollaire (4. 3. 5.) (Théorème fondamental)

Si E est un e. b. c. réticulé solide complet alors le dual modéré $\overline{E} = E^\times$.

Corollaire (4. 3. 6.)

Si E est un e. l. c. séparé bornologique localement solide semi-complet (toute suite de Cauchy est convergente) alors le dual topologique E' et le dual modéré coïncident.

E étant bornologique $E = TBE$ d'où $E' = (TBE)' = (BE)^\times = \overline{E}$ d'après (4. 3. 5.).

CHAPITRE V

ESPACES DE TYPE L et M
BORNOLOGIES NUCLEAIRES RETICULEES

Dans la première partie de ce chapitre nous étudions une nouvelle classe d'espaces vectoriels bornologiques ordonnés : les espaces de type M. Nous commençons par montrer que sous certaines hypothèses un e. v. b. réticulé est forcément convexe. Ensuite, après avoir fait remarquer le lien qui existe entre les parties réticulées et les (M) semi-normes, nous démontrons le théorème de structure suivant : tout e. b. c. de type M est limite inductive d'espaces M semi-normés. Donc, en quelque sorte, les e. b. c. de type M sont localement des sous-espaces de fonctions continues sur un compact.

Dans une deuxième partie nous définissons les espaces de type L qui forment une autre classe d'espaces vectoriels bornologiques ordonnés, duale de celle des espaces de type M dans le sens suivant : nous montrons (th. 5. 2. 8.) que si E est un e. b. c. de type M (resp. L) alors E^{x} est un e. l. c. de type L (resp. M), et inversement, si E est un e. l. c. de type M (resp. L), alors E' est un e. b. c. de type L (resp. M). Pour ces espaces aussi nous obtenons un théorème de structure montrant que localement les espaces de type L sont des espaces $L^1(\mu)$ de fonctions intégrables.

Enfin, dans une dernière partie nous donnons un théorème fondamental caractérisant en termes d'espaces de type L et de type M les espaces bornologiques nucléaires réticulés solides.

I. - ESPACES VECTORIELS BORNOLOGIQUES DE TYPE M.

Soit E un espace vectoriel réticulé. On dira qu'une partie B de E est réticulée si, quels que soient x et y dans B, alors $\sup(x, y)$ et $\inf(x, y)$ appartiennent à B.

Enveloppe réticulée :

Il est clair qu'une intersection de parties réticulées l'est encore. Par conséquent pour toute partie A, il existe une plus petite partie réticulée $r(A)$ contenant A. On l'obtient de la façon suivante :

Soit A_1 l'ensemble des bornes supérieures des parties finies de A, A_2 l'ensemble des bornes inférieures des parties finies de A_1 ; alors $r(A) = A_2$ (on peut aussi obtenir $r(A)$ en inversant les deux opérations).

Définition (5. 1. 1.)

Si E est un espace vectoriel bornologique muni d'un ordre réticulé, on dira que E satisfait à la condition (M) s'il possède un système fondamental de bornés réticulés.

Remarquons que si E possède un système fondamental de bornés stables pour la borne supérieure, alors il admet aussi un sytème fondamental de bornés stables pour la borne inférieure et inversement. Nous allons montrer que dans ce cas E satisfait à la condition (M).

Proposition (5. 1. 2.)

Si E possède une base $\mathcal{B}$ de bornés stables pour la borne supérieure, alors E vérifie (M).

Soit $\mathcal{B}'$ une base de bornologie de E formée d'ensembles stables pour la borne inférieure. Si B est un borné quelconque de E, il existe $B_1 \in \mathcal{B}$ et $B_2 \in \mathcal{B}'$ tels que $B \subset B_1 \subset B_2$. Il est clair alors que l'enveloppe réticulée $r(B)$ est contenue dans B_2.

Dans toute la suite on va considérer des e. b. c. munis d'un ordre réticulé.

Définition (5. 1. 3.)

Un e. b. c. réticulé sera dit un pseudo M - espace bornologique s'il satisfait à la condition (M) et un M - espace bornologique (ou espace bornologique de type M) s'il est en outre solide.

Proposition (5. 1. 4.)

Un pseudo M - espace bornologique E admet un système fondamental de bornés disqués réticulés.

C'est une conséquence immédiate du lemme suivant.

Lemme (5. 1. 5.)

L'enveloppe réticulée d'une partie convexe (resp. équilibrée) est convexe (resp. équilibrée).

Avec les notations ci-dessus (enveloppe réticulée), démontrons que si A est convexe, A_1 l'est aussi : soient $x = \sup(x_1, \ldots, x_n)$ et $y = \sup(y_1, \ldots, y_m)$ deux éléments de A_1.

$$\forall \lambda \in [0,1] \qquad \lambda x + (1-\lambda) y = \sup[\lambda x_i + (1-\lambda) y_j] \in A_1$$

car A est convexe. On démontrerait de même que A_2 est convexe puisque A_1 l'est.

Si A est équilibrée, montrons que $r(A)$ l'est aussi :

soit $x \in r(A)$, alors $x = \inf(x_1, \ldots, x_n)$

avec $x_i = \sup(x_i^1, \ldots, x_i^{p_i})$, $x_i^j \in A$,

si $\lambda \in [0,1]$, il est clair que $\lambda x \in r(A)$,

si $\lambda \in [-1,0]$ $\lambda x = \sup(\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)$

avec $\lambda x_i = \inf(\lambda x_i^1, \ldots, \lambda x_i^{p_i})$

donc $x \in r(A)$.

Pour introduire la notion de pseudo- M-espace bornologique nous avons supposé que les espaces considérés sont convexes, mais en fait le théorème suivant nous montre que l'hypothèse de convexité est impliquée par la condition (M) dans le cas où le cône est b-normal.

Théorème (5. 1. 6.)

Soit E un espace vectoriel bornologique muni d'un ordre réticulé, de cône K b-normal, vérifiant la condition (M), alors E est un pseudo- M - espace bornologique.

Ce théorème se déduit du résultat plus précis suivant.

Théorème (5. 1. 7.)

Tout espace vectoriel bornologique E, vérifiant les hypothèses du théorème précédent admet un système fondamental de bornés formé d'ensembles solides, convexes et réticulés.

Par conséquent un pseudo M-espace bornologique est un M-espace bornologique si et seulement si le cône K est b-normal.

La démonstration se déduira des lemmes suivants :

Lemme (5. 1. 8.)

L'enveloppe réticulée d'une partie symétrique est symétrique.

La démonstration est immédiate.

Lemme (5. 1. 9.)

L'enveloppe pleine (resp. solide) d'une partie réticulée symétrique est réticulée symétrique.

Soit B réticulée, symétrique. Soit $[B]$ l'enveloppe pleine de B, il est immédiat que $[B]$ est symétrique.

Soient $x, y \in [B]$, il existe donc x_1, x_2, y_1, y_2 dans B tels que :

$$x_1 \leq x \leq x_2 \quad \text{et} \quad y_1 \leq y \leq y_2 ,$$

d'où

$$\sup(x_1, y_1) \leq \sup(x, y) \leq \sup(x_2, y_2)$$

$$\inf(x_1, y_1) \leq \inf(x, y) \leq \inf(x_2, y_2)$$

ce qui entraîne $\sup(x, y)$ et $\inf(x, y) \in [B]$.

Soit $s(B)$ l'enveloppe solide de B, $s(B)$ est bien sûr symétrique.

Soient $x, y \in s(B)$, il existe donc a et b dans B tels que :

$$|x| \leq |a| \quad \text{et} \quad |y| \leq |b|$$

d'où

$$|\sup(x, y)| \leq \sup(|x|, |y|) \leq \sup(|a|, |b|) \in B$$

car $|a|$ et $|b| \in B$; donc $\sup(x, y) \in s(B)$ et il en est de même de $\inf(x, y) = -\sup(-x, -y)$.

Nous venons de voir que l'enveloppe solide et l'enveloppe pleine d'une partie réticulée symétrique le sont encore. Mais il se trouve que ces deux parties coïncident. En effet :

Lemme (5. 1. 10)

Une partie B symétrique, pleine et réticulée est solide.

Soit y tel que $|y| \leq |x|$ avec $x \in B$, c'est-à-dire

$$-|x| \leq y \leq |x|$$

B étant symétrique et réticulée $|x|$ et $-|x| \in B$, B étant pleine on en déduit que $y \in B$.

Lemme (5. 1. 11)

Toute partie B solide et réticulée est convexe.

Soient $x, y \in B$, $\lambda \in [0,1]$

$$|\lambda x+(1-\lambda)y| \leq \lambda|x|+(1-\lambda)|y| \leq \sup(|x|, |y|) \in B$$

d'où $\lambda x + (1-\lambda) y \in B$.

Démonstration du théorème (5. 1. 7)

D'après le lemme (5. 1. 8) E possède un système fondamental $\mathcal{B}$ de bornés symétriques réticulés. Soit $B \in \mathcal{B}$, l'enveloppe pleine $[B]$ est bornée car K est b-normál, c'est donc un borné réticulé symétrique plein d'après le lemme (5. 1. 9), par conséquent solide d'après le lemme (5. 1. 10) et convexe d'après le lemme (5. 1. 11).

Définition (5. 1. 12)

Soit E un espace vectoriel réticulé. On appelle (M)-semi-norme, une semi-norme p solide vérifiant la propriété :

$$x, y \geq 0 \Rightarrow p[\sup(x, y)] = \sup[p(x), p(y)].$$

Proposition (5. 1. 13)

1°) Soit B un disque solide réticulé, alors sa jauge p_B est une (M) semi-norme.

2°) Une semi-norme est un (M) semi-norme si et seulement si sa boule unité est solide et réticulée.

Pour 1°) on sait déjà que si B est un disque solide alors p_B est solide. Il suffit de montrer que si $x, y \geq 0$, alors

$$p_B[\sup(x, y)] \leq \sup[p_B(x), p_B(y)].$$

Soit $\lambda > \sup[p_B(x), p_B(y)]$, on a $x \in \lambda B$ et $y \in \lambda B$, B étant solide, on en déduit : $\sup(x, y) \in \lambda B$, d'où : $p_B[\sup(x, y)] < \lambda$.

Pour 2°) on sait déjà que p est solide si et seulement si sa boule unité B est solide. Si p est une (M)-semi-norme, soient $x, y \in B$ solide d'où $|x|, |y| \in B$.

$$p[\sup(|x|, |y|)] = \sup[p(|x|), p(|y|)] \leq 1,$$

d'où : $\sup(|x|, |y|) \in B$ et donc $\sup(x, y)$ puisque

$$|\sup(x, y)| \leq \sup(|x|, |y|).$$

Si B est solide réticulée, $p = p_B$ est une (M) semi-norme d'après 1°).

On en déduit le :

Théorème (5. 1. 14)

Un espace M-bornologique est limite inductive d'espaces M-semi-normés.

Exemples :

1°) Un espace vectoriel réticulé muni de la bornologie de l'ordre est un espace M-bornologique.

2°) Tout (A-M) espace, en particulier tout espace $C(X)$ de fonctions continues sur un compact X, est un espace M-bornologique.

3°) Si E est un M-espace topologique [12], c'est-à-dire si E admet un système fondamental de voisinages réticulés solides, alors BE est un M-espace bornologique.

En effet, si $\mathcal{V}$ est un sytème fondamental de voisinages de 0 disqués, solides, réticulés, on obtient un sytème fondamental de bornés de BE de la forme $B = \bigcap_{\mathcal{V}} \lambda_v V$ et il est clair que B est un disque solide réticulé.

II. - ESPACES VECTORIELS BORNOLOGIQUES DE TYPE L. DUALITE ENTRE LES ESPACES DE TYPE L ET DE TYPE M.

Nous allons introduire une notion duale de la notion de partie réticulée, ce qui nous permettra de définir une nouvelle classe d'espaces vectoriels bornologiques solides possédant une structure duale de celle des espaces de type M.

Définitions (5. 2. 1.) (voir [21])

1°) Une partie convexe solide B d'un espace vectoriel réticulé E est dite intégrale si les relations $x > 0$, $y > 0$ et $x+y \in B$ entraînent l'existence de $\alpha > 0$, $\beta > 0$ avec $\alpha+\beta \leq 1$ tels que $x \in \alpha B$ et $y \in \beta B$.

2°) Une semi-norme est dite additive si elle est additive sur le cône des positifs. Une (L) semi-norme est une semi-norme additive et solide.

Proposition (5. 2. 2.)

1°) Soit B un disque intégral, alors sa jauge p_B est une (L) semi-norme.

2°) Une semi-norme est une (L) semi-norme si et seulement si sa boule unité est intégrale.

Pour 1°) on sait déjà que B étant un disque solide sa jauge p_B est solide. Pour montrer que p_B est additive il suffit de montrer que $x > 0$, $y > 0$ avec $p_B(x+y) = 1$ entraîne $p_B(x) + p_B(y) \leq 1$.

$$p_B(x+y) = 1 \Rightarrow \forall \lambda > 1 \quad x+y \in \lambda B:$$

Il existe donc α et $\beta > 0$, $\alpha+\beta = 1$ tels que $x \in \lambda \alpha B$ et $y \in \lambda \beta B$. On a $p_B(x) \leq \lambda \alpha$, $p_B(y) \leq \lambda \beta$ donc $p_B(x) + p_B(y) \leq \lambda$, $\forall \lambda > 1$, d'où

$$p_B(x) + p_B(y) \leq 1 .$$

Pour 2°) on sait déjà que p est solide si et seulement si sa boule unité est solide.

Si p est additive, soient $x, y > 0$ avec $x+y \in B$ donc $p(x) + p(y) = p(x+y) \leq 1$ et $x \in p(x) B$, $y \in p(y) B$ d'où B est intégrale.

Si B est un disque intégral, $p = p_B$ est une (L) semi-norme d'après 1°).

Définition (5. 2. 3.)

Un e.b.c. sera dit un (L) espace bornologique (ou espace bornologique de type L) s'il admet un sytème fondamental de bornés intégraux.

De la proposition (5. 2. 2.) on déduit le théorème suivant :

Théorème (5. 2. 4.)

Un espace (L) bornologique est limite inductive d'espaces (L) semi-normés.

On se propose dans la suite de montrer qu'il existe une dualité entre les espaces de type L et les espaces de type M .

Proposition (5. 2. 5.)

Soit B une partie convexe solide d'un espace réticulé E . Si B est intégrale alors son polaire B° dans le dual pour l'ordre E^+ est une partie solide réticulée.

On sait déjà que le polaire d'une partie solide est solide.

Soient x', $y' \in B^\circ$. Il s'agit de montrer que $\sup(x', y') \in B^\circ$, c'est-à-dire que $|\langle \sup(x', y'), z\rangle| \leq 1$, $\forall z \in B$. On a :

$$\begin{aligned} |\langle \sup(x', y'), z\rangle| &\leq \langle |\sup(x', y')|, |z|\rangle \\ &\leq \langle \sup(|x'|, |y'|), |z|\rangle \\ &= \sup_{\substack{x+y=|z| \\ x, y \geq 0}} [\langle |x'|, x\rangle + \langle |y'|, y\rangle] \end{aligned}$$

B étant intégral et $|z| \in B$ (car B est solide), il existe donc $\alpha, \beta > 0$, $\alpha+\beta = 1$ avec $x \in \alpha B$, $y \in \beta B$. De plus $x', y' \in B^\circ \Rightarrow |x'|, |y'| \in B^\circ$. D'où :

$$|\langle |x'|, x\rangle| \leq \alpha \quad \text{et} \quad |\langle |y'|, y\rangle| \leq \beta$$

et donc $$\langle |x'|, x\rangle + \langle |y'|, y\rangle \leq \alpha+\beta = 1 .$$

Par suite $\sup(x', y') \in B^\circ$ et il en est de même de $\inf(x', y')$ puisque $|\inf(x', y')| \leq \sup(|x'|, |y'|)$.

Proposition (5. 2. 6.)

Soit B une partie convexe solide réticulée d'un espace vectoriel réticulé E ; alors son polaire B° dans E^+ est une partie intégrale.

On sait déjà que B° est une partie convexe solide de E^+ .

Soient x' et y' deux formes linéaires positives appartenant à B° .

Alors : $x' \in \alpha B^\circ$ avec $\alpha = \sup_{x \in B} \langle x', x\rangle$

$y' \in \beta B^\circ$ avec $\beta = \sup_{x \in B} \langle y', x\rangle$

B étant réticulée alors

$$\sup_{x \in B} \langle x'+y', x \rangle = \alpha + \beta$$

Donc si $x'+y' \in B^\circ$, on a $x' \in \alpha B^\circ$ et $y' \in \beta B^\circ$, avec $\alpha+\beta \leq 1$.

Définition (5. 2. 7.)

Un e. l. c. E sera dit de type L (ou (L) espace topologique) s'il admet un système fondamental de voisinages de 0 intégraux.

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le théorème de dualité suivant :

Théorème (5. 2. 8.)

1°) Si E est un e. l. c. de type M (resp. L) alors le dual topologique E' muni de la bornologie équicontinue est un e. b. c. de type L (resp. M).

2°) Si E est un e. b. c. de type M (resp. L) alors le dual bornologique $E^{\times}$, muni de la topologie de la convergence uniforme sur les bornés de E est un e. l. c. de type L (resp. M).

1°) Si V est un voisinage de 0 solide, réticulé dans E, on a $V^\circ_{E'} = V^\circ_{E^+} \cap E'$ (où $V^\circ_{E'}$ et $V^\circ_{E^+}$ désignent les polaires de V respectivement dans E' et E^+). D'après la proposition (5. 2. 6.), $V^\circ_{E^+}$ est intégral dans E^+, on en déduit immédiatement que $V^\circ_{E^+} \cap E'$ est intégral dans E' sous treillis de E^+.

Si V est un voisinage de 0 intégral, d'après la proposition (5. 2. 5.) $V^\circ_{E^+}$ est solide réticulé dans E^+, par suite $V^\circ_{E^+} \cap E' = V^\circ_{E'}$ est solide réticulé dans E'.

Etant donné qu'un système fondamental pour la bornologie équicontinue est formé par les polaires des voisinages de 0 dans E, 1°) est complètement démontré.

La démonstration de 2°) est analogue à la précédente.

III. - THEOREME FONDAMENTAL SUR LES ESPACES b-NUCLEAIRES RETICULES.

On se propose dans la suite de donner une caractérisation des espaces bornologiques nucléaires réticulés solides.

Théorème (5. 3. 1.)

1°) Si E est un e. b. c. nucléaire réticulé solide alors E admet un système fondamental de bornés $\mathcal{B}$, tel que, $\forall A \in \mathcal{B}$, E_A soit un (A-M) -espace avec unité et un système fondamental de bornés $\mathcal{B}'$, tel que, $\forall B \in \mathcal{B}'$, E_B soit un (A-L)-espace.

2°) Inversement, si E est un e. b. c. complet de type L et M alors E est un e. b. c. nucléaire.

1°) Nous supposerons d'abord que E est un e. b. c. solide t-séparé nucléaire. D'après [th. 13, p. 119, [10]], $E^{\times}$ est un e. l. c. nucléaire complet, on sait en outre que $E^{\times}$ est un e. l. c. localement solide ; donc, d'après [21], $E^{\times}$ possède un système fondamental de voisinages de 0, $\mathcal{U}$, tel que $\forall U \in \mathcal{U}$, $\widehat{E^{\times}_U}$ soit un (A-L) espace avec unité faible et un système fondamental de voisinages de 0, $\mathcal{V}$, tel que $\forall V \in \mathcal{V}$, $\widehat{E^{\times}_V}$ soit un (A-M) espace.
D'après [10], tout espace b-nucléaire t-séparé est b-réflexif, c'est-à-dire $E = (E^{\times})'$ bornologiquement. Or on sait que le dual topologique d'un e. l. c. de type L (resp. M) est un e. b. c. de type L (resp. M). Si $U \in \mathcal{U}$, $(\widehat{E^{\times}_U})' = (E^{\times})'_{U^\circ} = E_{U^\circ}$ est un (A-M) espace avec unité ; si $V \in \mathcal{V}$, $(\widehat{E^{\times}_V})' = E_{V^\circ}$ est un (A-L) espace.

Dans le cas général nous allons nous ramener à des espaces nucléaires t-séparés.

En effet, si E est un e. b. c. nucléaire solide E s'écrit comme limite inductive d'e. b. c. nucléaires solides t-séparés par le procédé suivant (dû à H. HOGBE-NLEND).

Si B est un borné de E, soit $B = B_o \subset B_1 \subset B'_1 \subset B_2 \subset B'_2 \subset \dots$, une suite de bornés tels que les B_i soient complétants, les B'_i solides et les injections canoniques : $E_{B_i} \to E_{B_{i+1}}$ nucléaires.

Alors l'espace $E(B) = \varinjlim E_{B_i}$ est un e. b. c. nucléaire, solide, dénombrable donc t-séparé car sa bornologie est une bornologie de SILVA (cor. 1, p. 118, [10]). $E(B)$ est donc un e. b. c. possédant un sytème fondamental de bornés A tels que $E(B)_A$ soit un (A-M) espace avec unité et un système fondamental de bornés C tels que $E(B)_C$ soit un (A-L) espace. Il en est de même de $E = \varinjlim E(B)$.

2°) Soit A un borné solide réticulé de E, alors $\hat{E}_A$ est un (A-M) espace ; il existe un borné B intégral contenant A, $\hat{E}_B$ est alors un (A-L) espace.

Si i désigne l'application canonique $\hat{E}_A \to \hat{E}_B$ nous allons voir que ${}^{tt}i$ envoie $(\hat{E}_A)''$ dans $\hat{E}_B$. En effet, on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} \hat{E}_A & \xrightarrow{i} & \hat{E}_B \\ \downarrow{\scriptstyle\alpha} & & \downarrow{\scriptstyle\beta} \\ (\hat{E}_A)'' & \xrightarrow{{}^{tt}i} & (\hat{E}_B)'' \end{array}$$

où α (resp. β) désigne l'injection canonique de $\hat{E}_A$ (resp. $\hat{E}_B$) dans $(\hat{E}_A)''$ (resp. $(\hat{E}_B)''$).

Soit $x'' \in (\hat{E}_A)''$, d'après (th. 8. 5. p. 247 [24]), $\hat{E}_A$ étant un (A-M) espace, $(\hat{E}_A)''$ est égal au sous-espace solide engendré par $\hat{E}_A$. Donc il existe $x > 0$ dans $\hat{E}_A$ tel que $|x''| \leq \alpha(x)$. D'où :

$$|{}^{tt}i(x'')| \leq {}^{tt}i|x''| \leq {}^{tt}i \circ \alpha(x) = \beta \circ i(x) .$$

D'après (th. 8. 6. p. 248 [24]), $\hat{E}_B$ étant un (A-L) espace est un sous-espace solide de $(\hat{E}_B)''$ donc ${}^{tt}i(x'')$ appartient à $\hat{E}_B$.

Ainsi ${}^{tt}i$ envoie $(\hat{E}_A)''$ dans $\hat{E}_B$ donc i est faiblement compacte d'après (lemme 1, p. 13, [9]), ce qui permet déjà d'affirmer que E est un espace infra-Schwarz [11], c'est-à-dire qu'étant donné un borné A' il existe un borné $B' \supset A'$ tel que l'injection $E_{A'} \to E_{B'}$ soit faiblement compacte.

$(\hat{E}_A)''$ est un (A-M) espace avec unité u, donc sa boule unité est de la forme $[-u,u]$, par conséquent son image par l'application positive ${}^{t}t_i$ est bornée au sens de l'ordre. De plus, $\hat{E}_B$ étant un (A-L) espace est isomorphe à un espace $L'(\mu)$ où μ est une mesure de Radon positive sur un espace localement compact. Donc ${}^{t}t_i : (\hat{E}_A)'' \to \hat{E}_B$ est intégrale (d'après th. 11, p. 141 [9]) et par suite i l'est aussi.

Soit maintenant A_1 un borné solide réticulé contenant B et B_1 un borné intégral contenant A_1 ; alors l'application $\hat{E}_{A_1} \to \hat{E}_{B_1}$ est intégrale. Il en est de même de l'application $\hat{E}_A \to \hat{E}_{A_1}$ puisqu'on compose une application continue et une application intégrale. D'après (cor. 1, p. 134, [9]), l'application canonique $\hat{E}_A \to \hat{E}_{B_1}$ qui est la composée de deux applications intégrales est nucléaire.

Soit maintenant un borné complétant C contenant B_1, l'injection canonique $E_A \to E_C$ ($E_A \to \hat{E}_A \to \hat{E}_{B_1} \to E_C$) est encore nucléaire, ce qui prouve que E est nucléaire.

A l'aide de ce qui précède nous pouvons énoncer le théorème de structure suivant :

Théorème (5.3.2.)

Un e.b.c. E réticulé solide est nucléaire si et seulement si il est limite inductive bornologique, d'une part d'espaces de type $C(K)$ et d'autre part d'espaces $L'(\mu)$.

=========

BIBLIOGRAPHIE

[0] N. AGUIRRE. - Espaces vectoriels réticulés [Thèse de 3° cycle, Bordeaux (1970)]

[1] N. BOURBAKI. - Ensembles ordonnés [Théorie des ensembles, chap. III (1963)]

[2] N. BOURBAKI. - Espaces de Riesz [Intégration, chap. II, (1965)]

[3] N. BOURBAKI. - Espaces vectoriels topologiques [chap. I et II, (1966)]

Espaces vectoriels topologiques [chap. III et IV, (1964)].

[4] H. BUCHWALTER. - Espaces vectoriels bornologiques [Pub. Dép. Math. Lyon, Tome 2.1 (1965)].

[5] J. COLMEZ. - Groupes réticulés. Espaces vectoriels réticulés. [cours polycopié, Bordeaux].

[6] R. CRISTESCU. - Sur l'extension de type Dedekind d'un espace réticulé localement convexe bornologique. [Rev. Roum. Maths Pures et Appl. Tome 23, n°9, p. 1293-1296 (1968)]

[7] M.M. DAY. - Normed linear spaces [Springer Verlag. Berlin (1962)]

[8] A. GROTHENDIECK. - Espaces vectoriels topologiques [Pub. Soc. Mat. São Paulo (1964)].

[9] A. GROTHENDIECK. - Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires [Memoirs of American Math. Soc. n° 16,(1955)]

[10] H. HOGBE-NLEND. - Complétion, tenseurs et nucléarité en bornologie [Thèse, Bordeaux, (1969)].

[11] H. HOGBE-NLEND. - [C.R.A.S., t. 270 (1970) p. 1320-1322].

[12] G. J. O. JAMESON. - Topological M-spaces [Math. Zeitschr. 103 (1968), p. 139-150]

[13] S. KAKUTANI. - Concrete Representation of Abstratt (L) . Spaces and the mean Ergodic Theorem [Annals of Math. Vol 42, n° 2, (1941) p. 523-537]

[14] S. KAKUTANI. - Concrete Representation of Abstract (M). Spaces [Annals of Math. Vol. 42, n°4 (1941) p. 994-1024]

[15] L. NACHBIN. - Topology and order [Van Nostrand Mathematical Studies, (1965)]

[16] H. NAKANO. - Linear topologies on semi-ordered linear spaces [J. Pac. Sci. Hukkaido. Univ. Ser. I, 12, p. 87-104 (1963)]

[17] I. NAMIOKA. - Partially ordered linear topological spaces [Memoirs of A. M. S. n° 24 (1961)]

[18] I. NISHIURA. - Completions of Normed Linear Lattices. [Colloquium Mathematicum, vol. 19, 2 (1968) p. 271-275]

[19] F. PERDRIZET. - Sur certains espaces de Banach ordonnés. [Bull. Sc. Math. 92, (1968), p. 129-141]

[20] A. L. PERESSINI. - Ordered topological vector spaces [Harper's series, New-York (1967)]

[21] N. POPA. - Un critère de nucléarité pour des treillis [C. R. A. S., t. 269 (1969) p. 355-356]

[22] G. T. ROBERTS. - Topologies defined by bounded sets [Proc. Cambridge Phil. Soc. Vol. 51, (1955) p. 379-381]

[23] M. ROGALSKI. - Espaces de Banach réticulés ... [Pub. Dép. Math. Orsay (1969)]

[24] H. H. SCHAEFER. - Topological vector spaces [Macmillan, (1966), New-York]

[25] YAU-CHUEN-WONG. - The order bound topology on Riesz-spaces [Proc. Cambridge Phil. Soc. vol. 67, 3 (1970) p. 587-593]

=========

Vu et approuvé,

Bordeaux, le 9 Octobre 1970

Le Doyen de la Faculté des Sciences

J. VALADE