UNIVERSITE DE LYON

ILTE DES SCIENCES

Henri BUCHWALTER

TOPOLOGIES, BORNOLOGIES ET COMPACTOLOGIES

THESE SC. MATH. LYON. 1968. N°515

Ce travail est divisé en trois parties, la première étant largement indépendante des deux suivantes. Pour l'analyse détaillée de leur contenu nous renvoyons aux introductions correspondantes (p.1, p.37 et p.64). Donnons cependant une brève idée de leur substance.

La première partie est une étude axiomatique des espaces à bornés convexes de Waelbroeck appelés ici espaces vectoriels bornologiques convexes. L'accent est essentiellement mis sur les rapports entre cette théorie et celle des espaces localement convexes, en particulier en ce qui concerne la dualité.

La deuxième partie est une étude des espaces nommés ici compactologiques. La structure vectorielle est provisoirement abandonnée mais la dualité est exprimée par les rapports "ensemble-algèbre" d'une part et "topologie-compactologie" d'autre part. L'occasion est ainsi offerte d'inventorier les propriétés d'une nouvelle classe d'espaces topologiques complètement réguliers, dits compactologiquement replets, qui ne sont pas sans rappeler les Q-espaces de Hewitt.

La troisième partie développe une étude compactologique des structures vectorielles. Pour le cas des espaces de Banach une théorie catégorique permet l'introduction de deux types d'adjonction de foncteurs qui mènent à des propriétés de commutation aux limites droites ou gauches. Le cas des espaces localement convexes complets est ensuite traité en liaison avec la théorie des espaces compactologiques convexes réguliers. La technique est principalement un passage aux limites projectives et aux limites inductives convenables.

A quelques détails près la première partie a déjà été publiée (1965, référence bibliographique B7), de même que le premier chapitre de la troisième partie (1966, référence B8). La deuxième partie est nouvelle, ainsi que le second chapitre de la troisième partie.

Notations particulières.

1. Précisons une fois pour toutes que tous les espaces vectoriels admettent indifféremment pour corps de base, noté K, soit le corps C des nombres complexes, soit le corps R des nombres réels.

2. Pour toute application linéaire $u : E \longrightarrow F$ entre deux espaces vectoriels, la notation keru désigne le sous-espace vectoriel $u^{-1}(o)$, tandis que la notation Keru désigne l'injection $keru \longrightarrow E$.

3. Enfin le signe ∎ indique la fin d'une preuve.

J'exprime ma plus vive gratitude à M. le Doyen ZAMANSKY qui, malgré sa charge, a bien voulu accepter de venir à Lyon juger ce travail.

Je suis extrêmement reconnaissant à M. le Doyen BRACONNIER, auprès de qui j'ai constamment trouvé un appui compréhensif, d'avoir consenti à présider le jury.

Je remercie également M. le Professeur COMBET pour ses encouragements amicaux et pour sa participation au jury.

J'adresse à M. le Professeur WAELBROECK, dont le nom est fréquemment cité, le témoignage de mon admiration pour son œuvre mathématique. Sans certaine conférence faite un après-midi de printemps à Lyon sur les espaces "farfelogiques" (voir W2) ce travail n'aurait sans doute pas vu le jour.

§§§§§§

TABLE DES MATIERES

§§§§§§

PREMIERE PARTIE : TOPOLOGIES ET BORNOLOGIES VECTORIELLES

INTRODUCTION.

Dans cette première partie on réunit les résultats connus et des résultats nouveaux concernant les espaces vectoriels bornologiques. On introduit d'abord la catégorie $\mathbb{BOR}$ des espaces bornologiques, puis la catégorie $\mathbb{EVB}$ des espaces vectoriels munis d'une bornologie compatible avec leur structure vectorielle. On dit qu'un evb est séparé lorsque tout sous-ev borné est nul et l'on montre qu'il n'existe qu'une seule bornologie vectorielle séparée sur un ev de dimension finie. La catégorie $\mathbb{EBC}$ est celle des espaces vectoriels bornologiques dans lesquels l'enveloppe disquée d'un borné est bornée. Ceux de ces espaces qui possèdent une base dénombrable de bornés (dits ebc dénombrables) jouent un rôle analogue à celui des elc métrisables en théorie des elc; en particulier on obtient pour les ebc dénombrables et complets un théorème du graphe fermé et un théorème des isomorphismes qui forment le pendant des théorèmes classiques de Banach.

On définit ensuite deux foncteurs, l'un $B : \mathbb{ELC} \longrightarrow \mathbb{EBC}$ et l'autre $T : \mathbb{EBC} \longrightarrow \mathbb{ELC}$,et l'on montre que B est adjoint à droite à T ainsi que les égalités TBT = T et BTB = B, qui amènent naturellement à définir les elc bornologiques et les ebc topologiques. On introduit ensuite une notion plus restrictive de séparation appelée régularité: un ebc E est dit régulier si l'elc TE est séparé. L'essentiel est de voir que les foncteurs B et T opèrent encore entre les catégories $\mathbb{EBCR}$ des ebc réguliers et $\mathbb{ELCS}$ des elc séparés.

La suite du travail est consacrée à la dualité. Le point de vue classique consiste à considérer le dual d'un elc séparé comme un autre elc séparé en le munissant de telle ou telle topologie (faible, forte, de Mackey...) ,mais il apparaît que parmi ces topologies aucune ne s'impose vraiment. On montre ici qu'en fait le dual E' d'un elc séparé E est naturellement un ebc régulier lorsqu'on choisit d'appeler bornées les parties équicontinues. Inversement le dual F^+ d'un ebc régulier F est muni d'une structure d'elc séparé obtenue avec la topologie de la convergence uniforme sur les parties bornées de F. Ainsi, dans tous les cas, voisinages de o et bornés s'échangent par polarité.

Signalons que le dual ebc (resp: elc) d'un elc (resp: ebc) est toujours complet, ce qui donne deux bonnes généralisations du fait que le dual d'un espace normé est un espace de Banach. Une notion plus forte encore que celle d'ebc régulier est celle d'ebc polaire: un ebc est dit polaire lorsqu'il est déjà régulier et tel de plus que le bipolai de tout borné est encore borné. On ne restreint pas ainsi vraiment la théorie car, pour tout elc E, les ebc E' et BE sont polaires. Par contr on recueille l'avantage de pouvoir compléter un tel ebc, ce qu'on ne sait pas faire en général pour un ebc régulier.

Bien entendu la dualité conduit immédiatement à l'étude de la réflexivité correspondante, dite ici réflexivité bornologique. Un elc séparé E est b-réflexif lorsque E coïncide avec son b-bidual $(E')^{+}$. Cette notion, plus restrictive que la semi-réflexivité habituelle, présente les avantages suivants: d'une part elle est équivalente à la semi-réflexivité pour les elc métrisables ou les espaces DF, d'autre part un elc b-réflexif est toujours complet alors qu'un elc réflexif peut ne pas l'être comme l'a montré Kōmura. Deux caractérisations des elc b-réflexifs E sont données: l'une en terme de semi-réflexivité lorsque le dual fort E'_{β} est bornologique, l'autre en terme de complétu suivant un argument de Köthe. Pour les ebc réguliers la propriété de réflexivité bornologique généralise la réflexivité habituelle pour les espaces normés; elle s'exprime exactement par l'analogue du théorè de Mackey-Arens. Enfin on termine par la recherche de conditions permettant d'affirmer qu'un elc (ou un ebc) est b-réflexif en même temps que son b-bidual et par diverses applications.

CHAPITRE 1 : ESPACES VECTORIELS BORNOLOGIQUES.

1.1. Espaces bornologiques.

Bornologies. Une bornologie sur un ensemble X est la donnée d'une famille $\mathcal{B}$ de parties de X, dites bornées, vérifiant l'axiome:

(B) $\mathcal{B}$ est un recouvrement de X, héréditaire, stable par réunion finie.

On construit immédiatement une catégorie, notée BOR et dite catégorie

des espaces bornologiques, en choisissant pour objets les ~~couples $(X,\mathcal{B})$~~ formés d'un ensemble X et d'une bornologie $\mathcal{B}$ sur X, et pour morphismes les applications $f : (X_1,\mathcal{B}_1) \longrightarrow (X_2,\mathcal{B}_2)$, dites bornées, transformant toute partie de $\mathcal{B}_1$ en une partie de $\mathcal{B}_2$.

Ordre sur les bornologies. Sur un même ensemble X une bornologie $\mathcal{A}$ est dite plus fine qu'une bornologie $\mathcal{B}$ lorsque $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$, soit encore lorsque l'application identique 1_X de X est un morphisme de $(X,\mathcal{A})$ dans $(X,\mathcal{B})$.

Il est clair que la relation de finesse structure l'ensemble de toutes les bornologies sur X en un treillis achevé. En particulier la bornologie la moins fine sur X, dite bornologie grossière, est celle pour laquelle X est lui-même borné, tandis que la bornologie la plus fine sur X, dite bornologie discrète, n'admet pour bornés que les parties finies de X.

Bornologie initiale. Soient X un ensemble et $f_i : X \longrightarrow X_i$ une famille non vide I d'applications de X dans des espaces bornologiques $(X_i,\mathcal{B}_i)$. Sur X la bornologie la moins fine rendant bornées toutes les applications f_i, dite bornologie initiale associée aux f_i, admet pour bornés les parties de X contenues dans un ensemble $B = \bigcap_{i\in I} f_i^{-1}(B_i)$, où chaque B_i est borné dans X_i.

Bornologie induite. La bornologie initiale associée à l'injection canonique $j : M \longrightarrow X$ d'une partie M d'un espace bornologique X est dite bornologie induite sur M. Ses bornés sont les traces sur M des bornés de X, ou encore les bornés de X contenus dans M.

Bornologie produit. Sur un produit $X = \prod_{i\in I} X_i$ d'une famille non vide I d'espaces bornologiques $(X_i,\mathcal{B}_i)$ la bornologie initiale associée aux projections canoniques $p_i : X \longrightarrow X_i$, dite bornologie produit, admet pour bornés les parties contenues dans un borné "élémentaire" $B = \prod_{i\in I} B_i$, produit de parties bornées.

La catégorie BOR ne fournit pas une structure suffisamment digne d'intérêt et nous arrêterons là les développements la concernant.

1.2. Espaces vectoriels bornologiques.

Rappelons que le corps de base de tous les espaces vectoriels qui vont intervenir est le corps des réels ou le corps des complexes et qu'il est muni de la structure bornologique associée à sa valeur absolue. Nous le désignons par K, appelant Δ son disque unité.

Bornologies vectorielles. Une bornologie $\mathcal{B}$ sur un espace vectoriel (noté ev dans la suite) E est dite vectorielle, ou compatible avec la structure vectorielle, lorsque les applications $(\lambda,x)\longrightarrow\lambda x$ de $K\times E$ dans E et $(x,y)\longrightarrow x+y$ de $E\times E$ dans E sont bornées. Il est facile de constat que la famille $\mathcal{B}$ doit vérifier l'axiome:

(BV) $\left\{\begin{array}{l}\mathcal{B}\text{ est un recouvrement de E, héréditaire, stable par homothétie,}\\ \text{somme vectorielle, et passage à l'enveloppe équilibrée.}\end{array}\right.$

On construit la catégorie, notée $\mathbb{E}$VB et dite catégorie des espaces vectoriels bornologiques (evb dans la suite) en prenant comme morphismes les applications linéaires et bornées. Dans un evb il existe un système fondamental de bornés formé de parties équilibrées.

EXEMPLE. L'evb BE associé à un evt E. Soit E un espace vectoriel topologique (evt). Les parties de E bornées au sens vectoriel topologique forment une bornologie vectorielle sur E. Notons BE l'evb associé; on sait qu'il vérifie la condition de dénombrabilité suivante:

(D) $\left\{\begin{array}{l}\text{Pour qu'une partie de E soit bornée il suffit que chacune de}\\ \text{ses suites extraites soit bornée.}\end{array}\right.$

Bornologie initiale. Soit E un ev et soit f_i: $E\longrightarrow E_i$ une famille non vide I d'applications linéaires de E dans des evb E_i. Sur E la bornologie initiale associée aux f_i est vectorielle. Elle définit donc une structure initiale dans la catégorie $\mathbb{E}$VB. En particulier tout sous-ev M d'un evb E est un sous-evb de E lorsqu'on le munit de la bornologie induite, et tout produit bornologique d'evb est un evb, qui est le produit correspondant dans la catégorie $\mathbb{E}$VB.

Bornologie quotient. Soient E un evb et H un sous-ev de E. L'espace quotient E/H peut être muni d'une bornologie vectorielle unique, la plus fine parmi celles rendant bornée la surjection canonique φ : $E\longrightarrow E/H$, et dont les bornés sont les parties de E/H contenues dans l'image par φ de quelque partie bornée de E.

1.3. Convergence bornologique.

On introduit une notion de convergence pour les suites d'un evb E, dite convergence bornologique ou convergence de Mackey et notée $\xrightarrow{b}$.

(1.3.1) DEFINITION. Dans un evb E une suite (x_n) converge bornologiquement vers un point x, ce que l'on note $x_n\xrightarrow{b}x$, lorsqu'il existe un borné B et une suite (ε_n) de scalaires tendant vers o tels que $x_n-x\in\varepsilon_n B$ pour tout n.

Comme il est loisible de choisir B équilibré, on peut supposer que la suite (ε_n) est positive et décroissante vers o.

Les propriétés essentielles de la convergence bornologique sont résumées dans la proposition suivante:

(1.3.2) PROPOSITION.

a) Soit E un evb. Si $x_n\xrightarrow{b}x$, si $y_n\xrightarrow{b}y$ dans E et si $\lambda_n\longrightarrow\lambda$ dans K, alors $x_n+y_n\xrightarrow{b}x+y$ et $\lambda_n x_n\xrightarrow{b}\lambda x$.

b) Soit F un autre evb. Si u : $E\longrightarrow F$ est un morphisme et si $x_n\xrightarrow{b}x$ dans E alors $u(x_n)\xrightarrow{b}u(x)$ dans F.

c) Soit F un evb vérifiant la condition (D). Pour qu'une application linéaire u : $E\longrightarrow F$ soit bornée il faut et il suffit qu'elle reste bornée sur toute suite bornée de E.

d) Enfin soit F un evt. Pour qu'une application linéaire u $E\longrightarrow F$ soit bornée il faut et il suffit qu'elle reste bornée sur toute suite de E convergeant bornologiquement vers o.

(1.3.3) COROLLAIRE. Pour qu'une forme linéaire sur un evb E soit bornée il faut et il suffit qu'elle reste bornée sur toute suite de E convergeant bornologiquement vers o.

1.4. Parties b-fermées d'un evb.

La convergence bornologique permet la définition de parties "fermées".

Nous dirons qu'une partie H d'un evb E est <u>b-fermée</u> (ou bornologiquement fermée) si les conditions $x_n \in H$ et $x_n \xrightarrow{b} x$ impliquent $x \in H$. Par une vérification immédiate on obtient:

(1.4.1) <u>PROPOSITION</u>.
a) Dans un evb E une réunion finie et une intersection quelconque de parties b-fermées sont des parties b-fermées.
b) Soient F un autre evb et $u : E \longrightarrow F$ un morphisme. L'image réciproque par u d'une partie b-fermée de F est une partie b-fermée de E.

(1.4.2) <u>THEOREME</u>. Pour qu'une forme linéaire f sur un evb E soit bornée il faut et il suffit que son noyau kerf soit b-fermé.

<u>PREUVE</u>. La condition est nécessaire d'après (1.4.1.b) puisque $\{o\}$ est b-fermé dans K. Réciproquement supposons kerf b-fermé. On peut supposer f non nulle et choisir $e \in E$ tel que $f(e)=1$. Si f était non bornée il existerait un borné équilibré A de E tel que f(A) soit une partie équilibrée et non bornée de K, ce qui impliquerait $f(A)=K$. On pourrait construire une suite $a_n \in A$ telle que $f(a_n)=n$ et la suite $x_n=e-a_n/n$ serait dans kerf et convergerait bornologiquement vers e qui n'appartient pas à kerf, ce qui est absurde. ∎

1.5. <u>Espaces vectoriels bornologiques séparés</u>.

Un evb E est dit <u>séparé</u> si toute suite bornologiquement convergente de E a une limite <u>unique</u>. Il revient au même de dire que E ne possède aucun sous-ev borné non nul, ou encore que E ne possède aucune droite bornée. On constate aisément:

(1.5.1) <u>PROPOSITION</u>.
a) Un sous-espace d'un evb séparé est séparé.
b) Un produit d'evb est séparé si et seulement si chacun de ses facteurs l'est.
c) Pour qu'un evb quotient E/H soit séparé il faut et il suffit que H soit un sous-ev b-fermé de E.

<u>PREUVE</u>. Démontrons seulement c). La condition nécessaire se ramène, compte tenu de (1.4.1.b) à prouver que dans un evb séparé F le sous-ev nul est b-fermé, ce qui est immédiat. Pour la réciproque soit $\varphi : E \longrightarrow E/H$ la surjection canonique et soit $K\varphi(x)$ une droite bornée de E/H. Il existe donc un borné A de E tel que $Kx \subset A+H$, ce qui implique $x \in A/n + H$ pour tout n et prouve que x est limite bornologique d'une suite de points de H. Si H est b-fermé alors $x \in H$ et $\varphi(x)=o$ ce qui montre bien que E/H est séparé. ∎

(1.5.2) <u>COROLLAIRE 1</u>. Pour qu'un evb E soit séparé il faut et il suffit que $\{o\}$ soit b-fermé dans E.

(1.5.3) <u>COROLLAIRE 2</u>. Les sous-ev b-fermés d'un evb E sont exactement les noyaux des morphismes de E dans des evb séparés.

(1.5.4) <u>COROLLAIRE 3</u>. Tout evb séparé de dimension 1 est isomorphe au corps K des scalaires.

<u>PREUVE</u>. Si E est algébriquement égal à Ke, $e \neq o$, l'application linéaire $\lambda e \longrightarrow \lambda$ est bijective, bornée car son noyau $\{o\}$ est b-fermé dans E et telle enfin que sa réciproque $\lambda \longrightarrow \lambda e$ soit aussi bornée. ∎

<u>Evb séparés de dimension finie</u>. La généralisation de (1.5.4) au cas de la dimension finie quelconque va s'obtenir en introduisant la notion tout à fait auxiliaire au demeurant d'evb <u>presque-complet</u>. Un evb E est dit presque-complet lorsque toute suite bornologiquement de Cauchy est bornologiquement convergente. On vérifie aisément que tout sous-ev b-fermé d'un evb presque-complet est presque-complet et que, réciproquement, tout sous-ev presque-complet d'un evb séparé est b-fermé.

(1.5.5) <u>THEOREME</u>. Tout evb séparé de dimension finie n est isomorphe à l'evb produit K^n.

<u>PREUVE</u>. Le théorème étant vrai pour n=1, raisonnons par récurrence sur n. Soit $(e_k)_{1 \leq k \leq n}$ une base de E. Tout $x \in E$ s'écrit $x = \sum_k f_k(x) e_k$ où les f_k sont les formes linéaires coordonnées. Fixons k : le noyau $\ker f_k$ est un sous-evb de E, de dimension n-1 et séparé donc, par l'hypothèse de récurrence, isomorphe à K^{n-1} et par conséquent (évident) presque-complet. Mais alors $\ker f_k$ est b-fermé dans E, car E est séparé, donc f_k est bornée. L'application $f=(f_k)_{1 \leq k \leq n}$ de E dans K^n est donc une bijection bornée et sa réciproque est trivialement bornée. ∎

1.6. La topologie $\mathcal{T}$ sur un evb.

La proposition (1.4.1) montre que les parties b-fermées d'un evb E sont les parties fermées d'une topologie $\mathcal{T}$ sur E. Bien que $\mathcal{T}$ ne soit pas vectorielle en général, elle possède cependant des propriétés dignes d'attention:

(1.5.1) PROPOSITION.

a) Soient E et F deux evb et u : $E \longrightarrow F$ un morphisme. Alors u est continu pour les topologies $\mathcal{T}(E)$ et $\mathcal{T}(F)$.
b) La topologie $\mathcal{T}$ sur E rend continues les translations et les homothéties de E ainsi que l'application $\lambda \longrightarrow \lambda a$ de K dan E pour tout a de E.
c) L'origine de E possède une base de voisinages formée d'ensembles équilibrés et absorbants. L'evb E est séparé si et seulement si $\mathcal{T}$ est une topologie accessible.
d) Toute suite bornologiquement convergente dans E est conve gente pour $\mathcal{T}$ vers la même limite. De façon précise $\mathcal{T}$ est la topologie la plus fine sur E parmi celles qui sont moins fi que la pseudo-topologie de la convergence bornologique.
e) Pour qu'une forme linéaire u sur E soit $\mathcal{T}$-continue il fau et il suffit qu'elle soit bornée.

PREUVE. L'assertion a) provient de (1.4.1.b). L'assertion b) est cons quence de a) sauf en ce qui concerne les translations de E pour lesquelles une vérification immédiate s'impose. Tout voisinage de o W pour $\mathcal{T}$ est absorbant d'après b) et il s'agit de prouver qu'il conti un ouvert équilibré contenant o. Soit V le noyau équilibré de W; c'es l'ensemble des $x \in E$ tels que $\Delta x \subset W$, et déjà $o \in V$. Montrons que $F = \complement V$ es fermé pour $\mathcal{T}$, c'est-à-dire b-fermé; si $x_n \in F$ et si $x_n \xrightarrow{b} x$ prouvons $x \in$ Puisque $x_n \notin V$ il existe $\lambda_n \in \Delta$ tel que $\lambda_n x_n \notin W$. En extrayant au besoin une sous-suite, Δ étant compact, on peut supposer que la suite (λ_n) es convergente vers $\lambda \in \Delta$. Supposons W ouvert ce qui est loisible; on a $\lambda_n \longrightarrow \lambda$ et $x_n \xrightarrow{b} x$ d'où il suit, par une vérification simple, $\lambda_n x_n \xrightarrow{b} \lambda$ ce qui implique $\lambda x \notin W$ et par conséquent $x \notin V$. La fin de c) est conséquence de (1.5.2). Pour prouver d) soit $x_n \xrightarrow{b} o$; si x_n n'était pas co vergente vers o pour $\mathcal{T}$ il existerait un voisinage équilibré V pour

et une sous-suite n_k tels que $x_{n_k} \notin V$; choisissant V ouvert la condition $x_{n_k} \xrightarrow{b} o$ implique $o \notin V$ ce qui est absurde. Si maintenant $\mathcal{S}$ est une topologie sur E telle que toute suite bornologiquement convergente soit $\mathcal{S}$-convergente vers la même limite, il est facile de vérifier que toute partie $\mathcal{S}$-fermée est b-fermée autrement dit $\mathcal{T}$-fermée, ce qui montre que $\mathcal{S}$ est moins fine que $\mathcal{T}$. Enfin d) traduit à la fois a) et (1.4.2) car si u est $\mathcal{T}$-continue alors keru est $\mathcal{T}$-fermé donc b-fermé. ∎

REMARQUE. $\mathcal{T}$ n'étant pas vectorielle, l'origine de E n'admet généralement pas de système fondamental de voisinages fermés et la topologie $\mathcal{T}$ n'est en général ni séparée ni uniformisable.

CHAPITRE 2 : ESPACES VECTORIELS BORNOLOGIQUES CONVEXES.

1. La catégorie EBC.

Il convient maintenant d'étudier de façon détaillée les evb dont la bornologie est stable par passage à l'enveloppe convexe et du même coup à l'enveloppe disquée. Dans toute la suite l'enveloppe disquée (convexe équilibrée) d'une partie A d'un ev E est notée $\Gamma(A)$. Ces evb "convexes" sont nommés ici espaces (vectoriels) bornologiques convexes et notés ebc. Ils forment une catégorie EBC, sous-catégorie pleine de la catégorie EVB. Il est facile de vérifier qu'une bornologie $\mathcal{B}$ sur un ev E doit, pour être vectorielle convexe, satisfaire à l'axiome:

$$\text{(BVC)} \quad \begin{cases} \mathcal{B} \text{ est un recouvrement de } E, \text{héréditaire et tel que pour tous} \\ A \in \mathcal{B}, B \in \mathcal{B} \text{ et } \lambda \in K \text{ on ait } \lambda\Gamma(A \cup B) \in \mathcal{B}. \end{cases}$$

Il est clair qu'un ebc possède un système fondamental de bornés formé de disques.

EXEMPLE. Si E est un espace localement convexe (elc) l'espace bornologique associé BE est un ebc qui est séparé si et seulement si E est un elc séparé.

Bornologie initiale. La connaissance des bornés pour une bornologie initiale sur un ev E, associée à des applications linéaires $f_i : E \longrightarrow E_i$

dans des ebc E_i, montre que E est un ebc. Ainsi un sous-espace d'un ebc est un ebc et un produit d'ebc est un ebc.

<u>Bornologie quotient</u>. Il est bien clair qu'un quotient E/H d'un ebc E est encore un ebc.

<u>Bornologie somme directe</u>. Soit $E = \bigoplus_{i\in I} E_i$ un ev somme directe d'une famille non vide I d'ebc E_i. Il existe sur E une bornologie vectorie convexe unique, la plus fine parmi celles rendant bornées les injecti canoniques $j_i : E_i \longrightarrow E$. Les bornés de E sont les parties de E contenu dans l'enveloppe disquée d'une réunion finie d'images de bornés des espaces E_i. Un système fondamental de bornés de E est donc formé des ensembles $B = \Gamma(\bigcup_{i\in J} j_i B_i)$ où J est une partie finie quelconque de I et, pour chaque $i\in J$, B_i est un borné de E_i.

Il est facile de voir que E est séparé si et seulement si chaque E_i est séparé.

Il suit de là que la catégorie $\mathbb{E}$BC admet des noyaux, des conoyaux, des limites projectives et des limites inductives : c'est donc une catégorie complète.

2.2. <u>Le treillis des disques d'un espace vectoriel</u>.

L'ensemble des disques d'un ev E est évidemment un treillis, d'ailleu achevé, pour l'ordre d'inclusion. Pour deux disques A et B on a $A\wedge B = A\cap B$ et $A\vee B = \Gamma(A\cup B)$.
A chaque disque A de E on associe le sous-ev $E_A = \bigcup_{\lambda>0} \lambda A$, engendré par A, que l'on munit de la semi-norme jauge de A:

$$p_A(x) = \operatorname*{Inf}_{\substack{x\in\lambda A\\ \lambda>0}} \lambda$$

et l'on sait que A est coincé entre la boule unité ouverte et la boule unité fermée de E_A.

Rappelons enfin que, dans la catégorie $\mathbb{S}$N des espaces semi-normés, av morphismes de boules, le produit $E\times F$ de deux espaces semi-normés (E,

et (F,q) est muni de la semi-norme produit $p\times q$:

$$(p\times q)(x,y) = \operatorname{Max}\left[p(x),q(y)\right]$$

tandis que la somme directe $E\oplus F$ est munie de la semi-norme somme $p\oplus q$:

$$(p\oplus q)(x,y) = p(x) + q(y)$$

de sorte que les deux espaces semi-normés $E\times F$ et $E\oplus F$, bien qu'algébriquement égaux, ne sont pas isomorphes dans la catégorie $\mathbb{S}$N. Ils sont cependant isomorphes en tant qu'elc puisque leurs semi-normes sont manifestement équivalentes.
Fixons deux disques A et B de E. Puisque les espaces E_A et E_B s'injectent dans l'espace $E_{A\vee B} = E_A + E_B$ il existe une surjection canonique $(x,y) \longrightarrow x+y$ de $E_A \oplus E_B$ sur $E_{A\vee B}$ qui identifie donc algébriquement $E_{A\vee B}$ à un quotient de $E_A\oplus E_B$. De même $E_{A\wedge B} = E_A\cap E_B$ s'envoie dans E_A et E_B donc il existe une injection canonique $x \longrightarrow (x,x)$ de $E_{A\wedge B}$ dans $E_A\times E_B$ qui identifie $E_{A\wedge B}$ à un sous-espace de $E_A\times E_B$. Cela étant, on a par une vérification de pur calcul:

(2.2.1) <u>PROPOSITION</u>. L'espace semi-normé $E_{A\vee B}$ est un quotient semi-normé de la somme directe $E_A\oplus E_B$ et l'espace semi-normé $E_{A\wedge B}$ est un sous-espace semi-normé du produit $E_A\times E_B$, ce qui se traduit encore par les égalités:

$$p_{A\vee B}(z) = \operatorname*{Inf}_{\substack{z=x+y\\ x\in E_A,\, y\in E_B}} \left[p_A(x) + p_B(y)\right] \quad \text{pour } z\in E_{A\vee B}$$

$$p_{A\wedge B}(x) = \operatorname{Max}\left[p_A(x), p_B(x)\right] \quad \text{pour } x\in E_{A\wedge B}.$$

L'effet d'une application linéaire se manifeste par:

(2.2.2) <u>PROPOSITION</u>. Soient E et F deux ev, $u : E \longrightarrow F$ une application linéaire, A un disque de E. L'espace semi-normé $F_{u(A)}$ est isométrique au quotient E_A/N où $N = (\ker u)\cap E_A$.

D'ailleurs on peut généraliser à la fois (2.2.2) et la première par de (2.2.1) avec le résultat suivant:

(2.2.3) PROPOSITION. Soient E et F deux ev, $u : E \longrightarrow F$ une applicatio linéaire, G' le graphe de la fonction $-u$, A un disque de E et B un disque de F. L'espace semi-normé $F_{u(A)\vee B}$ est isométriq au quotient $(E_A \oplus F_B)/N$ où $N = G' \cap (E_A \oplus F_B)$.

PREUVE. L'application $(x,y) \longrightarrow u(x)+y$ est une surjection de $E_A \oplus F_B$ sur $F_{u(A)\vee B}$ dont le noyau est précisément N, de sorte qu'on a déjà l'isomorphisme algébrique. L'isométrie provient d'un calcul évident

Disques particuliers d'un espace vectoriel. On peut classer les dis A d'un ev E selon les propriétés de l'espace semi-normé E_A. C'est a que l'on dira dans la suite que le disque A est normant, complétant, réflexif, souslinien, suivant respectivement que E_A est normé, normé e complet, réflexif, normé complet et séparable. Dire que A est normant signifie encore que A ne contient aucune droite. Enfin en suivant u suggestion de L. Waelbroeck, nous dirons que deux disques A et B de E sont associés lorsque le disque $A\vee B$ est normant, et la caractérisati qui suit s'avère nécessaire:

(2.2.4) PROPOSITION. Pour que les disques A et B de E soient associ il faut et il suffit que le sous-espace $E_{A\wedge B}$ soit fermé dan le produit $E_A \times E_B$.

PREUVE. Pour que $E_{A\vee B}$ soit normé donc séparé il faut et il suffit, d'après (2.2.1), que ce soit le quotient de la somme directe $E_A \oplus E_B$ par un sous-ev fermé. Le noyau de l'application $(x,y) \longrightarrow x+y$ s'ident à la "seconde bissectrice" de l'espace $E_A \oplus E_B$. Par ailleurs, dans l'injection canonique $x \longrightarrow (x,x)$ de $E_{A\wedge B}$ dans $E_A \times E_B$, l'espace $E_{A\wedge B}$ s'identifie à la "bissectrice" de $E_A \times E_B$. Le résultat est donc consé quence immédiate du fait que l'application $(x,y) \longrightarrow (x,-y)$ est un is morphisme topologique de $E_A \times E_B$ sur $E_A \oplus E_B$. ∎

Comme conséquence de (2.2.4) et de la stabilité des espaces de Ban

(resp: réflexifs, sousliniens) par passage aux sous-espaces fermés et aux quotients par des sous-espaces fermés, on obtient:

(2.2.5) THÉORÈME. Soient A et B deux disques complétants (resp: réflexifs, sousliniens) de E. Les assertions suivantes sont équivalentes:

a) Les disques A et B sont associés.

b) Le disque $A\vee B$ est complétant (resp: réflexif, souslinien).

c) Le disque $A\wedge B$ est complétant (resp: réflexif, souslinien).

(2.2.6) THÉORÈME. Soient E et F deux ev, $u : E \longrightarrow F$ une application linéaire, A un disque complétant (resp: réflexif, souslinien) de E. Pour que le disque $u(A)$ de F soit complétant (resp: réflexif, souslinien) il faut et il suffit qu'il soit normant.

Sur un théorème de Grothendieck.

Il est maintenant tentant d'appliquer ces résultats pour retrouver sous une forme très générale un théorème de Grothendieck (G3 p.16):

(2.2.7) THÉORÈME. Soient (B_n) une suite de disques complétants d'un ev E et A un disque complétant de E associé à tous les disques B_n. On suppose $A \subset \bigcup B_n$. Alors A est absorbé par l'un des disques B_n.

PREUVE. Avec (2.2.5) on voit que $H_n = E_{A\wedge B_n}$ est, pour tout n, un espace de Banach. L'injection $j_n : H_n \longrightarrow E_A$ est une application linéaire et continue et l'hypothèse $A \subset \bigcup B_n$ montre que $E_A = \bigcup j_n(H_n)$. Ainsi l'espace de Banach E_A apparaît comme une réunion dénombrable de sous-ev, de sorte que l'un d'entre eux, soit $j_m(H_m)$, est non maigre. Mais alors j_m est une application linéaire injective continue, d'image non maigre, entre deux espaces de Banach. C'est donc un isomorphisme topologique, d'où l'existence d'un scalaire $\mu > 0$ tel que $A \cap B_m \supset \mu A$. ∎

2.3. Les ebc complets.

Dans un ebc séparé E deux disques bornés A et B sont toujours associ puisque le disque $A \vee B$ est borné, donc normant. Le théorème (2.2.5) montre donc que les familles $\mathcal{B}_c$, $\mathcal{B}_r$, $\mathcal{B}_s$ des parties de E contenues dans un disque borné respectivement complétant, réflexif, souslinien, définissent des bornologies ~~sur~~ E plus fines que la bornologie initiale $\mathcal{B}$. Il suffit de remarquer pour s'en assurer tout à fait que tout disque borné de E qui est enveloppe disquée d'une partie finie de E est à la fois réflexif et souslinien d'après (1.5.5).

(2.3.1) DEFINITION. On dit qu'un ebc séparé E est complet lorsque $\mathcal{B} = \mathcal{B}_c$; qu'il est réflexif lorsque $\mathcal{B} = \mathcal{B}_r$ et qu'il est souslinien lorsque $\mathcal{B} = \mathcal{B}_s$.

Laissant de côté pour l'instant les ebc réflexifs ou sousliniens, on voit que les ebc complets forment une classe très stable car:

(2.3.2) PROPOSITION.
a) Soient E un ebc complet et H un sous-ev b-fermé de E. Alor H et E/H sont des ebc complets.
b) Un produit, une somme directe d'ebc complets est un ebc complet.
c) Une limite projective d'ebc complets est complète. Une limite inductive d'ebc complets est complète pourvu qu'elle soit séparée.

Les ebc complets se rencontrent fréquemment en pratique. Un critère commode est fourni avec:

(2.3.3) PROPOSITION. La bornologie canonique d'un elc séparé et sem complet est complète. Plus généralement tout disque borné e semi-complet (en particulier tout disque borné complet) d'u elc séparé est complétant.

Introduisons maintenant les définitions suivantes: on dit qu'un dis que A d'un ebc E est associé à la bornologie de E lorsque A est ass cié à tout disque borné de E. Il suffit d'ailleurs que A soit assoc à tout disque borné de E choisi dans un système fondamental de born

On dit encore que deux bornologies convexes $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sur un même ev E sont associées lorsque tout disque borné de l'une est associé à l'autre. L'ensemble des bornologies convexes de E est structuré en treillis car il est clair que la borne supérieure $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$ (resp: la borne inférieure $\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$) admet pour système fondamental de disques bornés les disques $A \wedge B$ (resp: les disques $A \vee B$) où A et B sont des disques bornés quelconques de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ respectivement. Bien entendu le treillis des bornologies convexes sur E n'est pas un sous-treillis du treillis de toutes les bornologies. On voit donc que $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont associées si et seulement si la bornologie $\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$ est séparée. Cela étant:

(2.3.4) PROPOSITION. Soient E un ev et $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux bornologies convexes complètes associées sur E. Alors les bornologies $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$ et $\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$ sont complètes.

PREUVE. Il suffit d'appliquer le théorème (2.2.5). ∎

2.4. Les ebc dénombrables.

On dit qu'un ebc est dénombrable lorsqu'il possède un système fondamental dénombrable de disques bornés. Le théorème (2.2.7) a donc pour conséquence immédiate:

(2.4.1) THEOREME. Soit E un ebc dénombrable et complet. Tout disque complétant de E, associé à la bornologie de E, est borné.

(2.4.2) COROLLAIRE 1. Soit E un ev muni de deux bornologies convexes complètes $\mathcal{B}$ et $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}$ étant supposée dénombrable. Si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{D}$ sont associées alors $\mathcal{B}$ est plus fine que $\mathcal{D}$, soit $\mathcal{B} \subset \mathcal{D}$.

(2.4.3) COROLLAIRE 2. Sur un ev E les bornologies convexes complètes dénombrables sont minimales parmi les bornologies convexes complètes.

(2.4.4) COROLLAIRE 3. Sur un ev E deux bornologies convexes complètes et dénombrables sont identiques dès qu'elles sont associées.

Ces résultats se complètent par l'obtention d'un théorème du graphe b-fermé qui va mener directement à un théorème des isomorphismes et où, bien entendu, les ebc dénombrables et complets ont le rôle le plus important:

(2.4.5) PROPOSITION. Soient E et F deux ebc et $u : E \longrightarrow F$ une application linéaire. Pour que le graphe G de u soit b-fermé dans $E \times F$ il faut et il suffit que, pour tout disque borné A de E, le disque $u(A)$ soit associé à la bornologie de F.

PREUVE. Le graphe G de u est b-fermé si et seulement si le graphe G de $-u$ est b-fermé. La proposition est donc un corollaire de (2.2.3) et du fait que, pour deux disques bornés A de E et B de F, l'espace semi-normé $(E \times F)_{A \times B}$ est isométrique à l'espace semi-normé produit $E_A \times F_B$, lui-même topologiquement isomorphe à l'espace semi-normé $E_A \oplus F_B$. ∎

On tire de là:

(2.4.6) THEOREME (du graphe b-fermé). Soient E un ebc complet, F un ebc dénombrable et complet, $u : E \longrightarrow F$ une application linéaire. Pour que u soit bornée il faut et il suffit que son graphe G soit b-fermé dans $E \times F$.

PREUVE. La condition est évidemment nécessaire. Réciproquement si G est b-fermé tout disque borné A de E a une image $u(A)$ qui est un disque associé à la bornologie de F d'après (2.4.5). En particulier $u(A)$ est normant et, comme il est loisible de supposer A complétant, $u(A)$ est lui-même complétant d'après (2.2.6). Alors $u(A)$ est un disque complétant de F associé à la bornologie de F; il est donc borné dans F d'après (2.4.1). ∎

(2.4.7) COROLLAIRE 1. Soient E un ebc dénombrable et complet et F un ebc complet. Toute application linéaire $u : E \longrightarrow F$ bijective et bornée est un isomorphisme.

(2.4.8) COROLLAIRE 2. Soit E un ebc complet. S'il existe dans E un disque borné absorbant A, E est un espace de Banach.

PREUVE. On peut supposer A complétant et dans ce cas l'injection canonique $E_A \longrightarrow E$ est bijective, car A est absorbant, et bornée donc un isomorphisme d'après (2.4.7). ∎

. Parties b-boréliennes d'un ebc.

On voit aisément que dans un ebc E une partie H est b-fermée si et seulement si, pour tout disque borné A de E, la partie $H \cap E_A$ est fermée dans l'espace semi-normé E_A. Cela signifie encore que la topologie $\mathcal{T}(E)$, introduite en (1.6), est exactement la topologie limite inductive des topologies des espaces E_A. On est donc en droit de proposer par analogie la définition suivante:

(2.5.1) DEFINITION. Dans un ebc E on dit qu'une partie H est bornologiquement borélienne (b-borélienne) lorsque, pour tout disque borné A de E, la partie $H \cap E_A$ est borélienne dans l'espace semi-normé E_A.

Désignons par $E(\mathcal{T})$ l'espace E muni de la topologie $\mathcal{T}(E)$. Puisque les applications $E_A \longrightarrow E(\mathcal{T})$ sont continues, toute partie borélienne de $E(\mathcal{T})$ est b-borélienne dans E. La réciproque est généralement fausse. Elle est cependant "presque" vraie dans un cas particulier intéressant.

(2.5.2) THEOREME. Soit E un ebc dénombrable et souslinien. Alors les parties b-boréliennes de E sont exactement les parties boréliennes de E pour toute topologie séparée sur E (vectorielle ou non) moins fine que $\mathcal{T}(E)$.

PREUVE. Soient $\mathcal{J}$ une telle topologie et $E(\mathcal{J})$ l'espace E muni de $\mathcal{J}$. Les applications $E_A \longrightarrow E(\mathcal{J})$ étant continues, toute partie $\mathcal{J}$-borélienne de E est b-borélienne. Réciproquement soit H une partie b-borélienne de E. Pour tout disque borné souslinien A de E, l'espace de Banach E_A est séparable, donc polonais, donc lusinien. Comme $H \cap E_A$ est une partie borélienne de E_A, le sous-espace $H \cap E_A$ de E_A est lusinien (Bourbaki: B4 §6 n°7 th3). En considérant la notion d'espace topologique souslinien ou lusinien au sens de Schwartz, c'est-à-dire sans hypothèse de métrisabilité, on voit que $H \cap E_A$, muni de la topologie induite par $E(\mathcal{J})$ moins fine que celle induite par E_A, est encore un espace lusinien. L'espace $E(\mathcal{J})$ étant séparé cela signifie encore que $H \cap E_A$ est une partie borélienne de $E(\mathcal{J})$ (loc. cit. §6 n°7 lemme 7) donc H est borélienne dans $E(\mathcal{J})$ puisque E est de plus dénombrable. ∎

On sait (voir par exemple Kelley-Namioka: K2 ch3-10.4) que dans un evt E, pour toute partie approchable A (c'est-à-dire vérifiant la condition de Baire, ou encore égale à un ouvert à un ensemble maigre près) l'ensemble (A-A) est un voisinage de o pourvu que A soit non maigre. Comme l'ensemble des parties approchables de E est une tribu contenant les fermés de E, toute partie borélienne de E est approchabl[e]. En particulier dans un evt qui est un espace de Baire tout disque borélien absorbant est non maigre, donc un voisinage de o. En appliqua[nt] ceci aux espaces E_A associés à un ebc E, on obtient le théorème suivant, lié de près au théorème de Banach-Steinhaus:

(2.5.3) THEOREME. Dans un ebc séparé E tout disque b-borélien absorbant absorbe tout disque borné complétant.

(2.5.4) COROLLAIRE. Dans un ebc complet tout disque absorbant b-fermé est bornivore.

2.6. Les foncteurs T et B.

Le foncteur B. En associant à tout elc E l'ebc BE dont les bornés sont les bornés de E au sens vectoriel topologique, on définit un foncteur B : ELC$\longrightarrow$EBC, puisque toute application linéaire continue entre deux elc est bornée.

Le foncteur T. Sur un ebc E plaçons la topologie localement convexe la plus fine rendant bornés (au sens topologique) les bornés de E. Les voisinages de o pour cette topologie sont donc les parties de E contenant un disque bornivore. Désignons par TE l'elc ainsi défini. C'est d'ailleurs la limite inductive, dans la catégorie ELC, des espac[es] semi-normés E_A lorsque A décrit l'ensemble des disques bornés de E. A ce titre elle est moins fine que la topologie $\mathcal{T}(E)$. On vérifie immédiatement que, pour toute application bornée entre deux ebc, l'ima[ge] réciproque d'un disque bornivore est un disque bornivore, ce qui prou[ve] bien que T est un foncteur EBC$\longrightarrow$ELC.
On peut d'ailleurs affaiblir quelque peu la définition des voisinage[s] de o pour TE car:

(2.6.1) PROPOSITION. Pour qu'une semi-norme p sur E soit continue pour la topologie TE il faut et il suffit que p tende vers o sur toute suite bornologiquement convergente vers o.

Autrement dit les voisinages de o de l'elc TE sont les parties de E contenant un disque absorbant toute suite bornologiquement convergente vers o.

PREUVE. Il suffit de voir qu'un disque V de E qui n'absorbe pas un disque borné A de E n'absorbe pas non plus une suite convenable (x_n) qui converge bornologiquement vers o. Si, pour tout n, on a $A \not\subset n^2V$ il existe une suite $a_n \in A$ telle que $a_n \notin n^2V$; la suite $x_n = a_n/n$ répond aux conditions exigées. ∎

La comparaison entre les topologies $\mathcal{T}(E)$ et TE se fait avec:

(2.6.2) PROPOSITION.
a) La topologie $\mathcal{T}(E)$ (resp: TE) est la topologie (resp: localement convexe) la plus fine rendant continues les injections $E_A \longrightarrow E$ pour tout disque borné A de E.
b) La topologie TE est aussi la topologie localement convexe la plus fine parmi celles qui sont moins fines que $\mathcal{T}(E)$.
c) Les topologies $\mathcal{T}(E)$ et TE ont les mêmes semi-normes et les mêmes formes linéaires continues.

PREUVE. L'assertion a) est un simple rappel et provient des définitions de $\mathcal{T}(E)$ et TE. L'assertion c) est conséquence immédiate de (2.6.1) et b) se déduit facilement de c). ∎

Relations entre les foncteurs T et B. Etant donné un elc E la topologie de TBE est plus fine que celle de E, de sorte qu'on a un morphisme 1_E: TBE$\longrightarrow$E, où 1_E est l'application identique de E. De même étant donné un ebc E la bornologie de BTE est moins fine que celle de E et l'on a le morphisme 1_E : E$\longrightarrow$BTE. Les relations importantes et évidentes sont:

(2.6.3) PROPOSITION. TBT = T et BTB = B.

(2.6.4) PROPOSITION. Le foncteur B est adjoint à droite au foncteur T.

PREUVE. Il suffit de vérifier l'égalité $Hom_{EBC}(E,BF) = Hom_{ELC}(TE,F)$ pour tout ebc E et tout elc F. Si u : TE$\longrightarrow$F est un morphisme alors u : BTE$\longrightarrow$BF est aussi un morphisme donc a fortiori u : E$\longrightarrow$BF.

Si v : $E \longrightarrow BF$ est un morphisme alors aussi v : $TE \longrightarrow TBF$ donc a for
v : $TE \longrightarrow F$,ce qui termine la démonstration. ∎

(2.6.5) <u>COROLLAIRE</u>. Le foncteur B commute aux noyaux et aux limite
projectives et le foncteur T commute aux conoyaux et aux
limites inductives.

<u>Elc bornologiques et ebc topologiques</u>. Les elc tels que E = TBE so exactement les elc appelés classiquement bornologiques. Gardons le cette dénomination et appelons <u>ebc topologiques</u> les ebc E tels que E = BTE. Il est clair que,pour tout elc E,l'ebc BE est topologique et l'elc TBE est bornologique. De même,pour tout ebc E, l'elc TE e bornologique et l'ebc BTE topologique.

<u>EXEMPLES</u>.

<u>Ex1</u>. <u>Si E est un ebc complet</u>, <u>TE est un elc bornologique e tonnelé</u>.Car tout tonneau U de TE est un disque absorbant b-fermé de E,donc absorbe tout disque borné de E d'après (2.5.4) ce qui signifie que U est un voisinage de o de TE.

<u>Ex2</u>. <u>Si E est un ebc topologique dénombrable</u>, <u>TE est un espace DF bornologique</u> (et tonnelé si E est complet). Car TE est déjà infratonnelé et admet un système fondamental dénombrable de parties bornées puisque BTE = E.

<u>Ex3</u>. <u>Si E est un elc séparé et semi-complet</u>, <u>BE est un ebc complet et topologique</u>.

2.7. <u>Les ebc réguliers</u>.

Jusqu'à présent nous ne nous sommes pas préoccupés de questions de séparation . On sait qu'un elc est séparé si et seulement si l'ebc BE correspondant est séparé,car toute droite bornée de E est conte dans l'adhérence de l'origine. La situation n'est malheureusement pas aussi favorable pour un ebc . En effet un ebc E peut être sépa (même complet,même dénombrable) sans que l'elc TE soit séparé. Il peut même se faire que TE ait un dual nul. Divers contre-exemples ont été donnés parmi lesquels citons ceux de Waelbroeck (W1) et de Foias-Marinescu (F1). On peut donc proposer la définition:

(2.7.1) <u>DEFINITION</u>. Un ebc E est dit régulier lorsque l'elc TE
correspondant est séparé.

Les ebc réguliers sont appelés t-séparés dans (P7);cette nouvelle dénomination est cependant mieux adaptée. Un critère simple de régularité,d'application fréquente,est le suivant:

(2.7.2) <u>PROPOSITION</u>. Une condition nécessaire et suffisante pour
qu'un ebc E soit régulier est qu'il existe sur E une topologie localement convexe séparée rendant topologiquement bornés les bornés de E.

Nous verrons dans la suite que les ebc réguliers se rencontrent souvent en pratique. On voit déjà que,pour tout elc E,l'ebc BE est régulier si et seulement si il est séparé,de sorte que tout ebc topologique séparé est régulier. En désignant par ELCS la catégorie des elc séparés et par EBCR celle des ebc réguliers,on voit que T est un foncteur covariant $EBCR \longrightarrow ELCS$ tandis que B est un foncteur covariant $ELCS \longrightarrow EBCR$.

. <u>Dualité</u>.

<u>Le dual d'un elc séparé</u>. Notons comme d'habitude par E' le dual topologique d'un elc séparé E. On sait que sur E' il n'existe pas de topologie canoniquement associée à la topologie de E mais une pluralité de topologies allant de la topologie faible $\sigma(E',E)$ à la topologie forte $\beta(E',E)$. Par contre si l'on appelle bornés dans E' les parties équicontinues de E',on obtient une bornologie vectorielle convexe sur E' bien attachée à la topologie de E puisque les bornés de E' sont alors les parties de E' contenues dans le polaire d'un voisinage de o de E. Dans toute la suite de cette <u>première</u> partie le symbole E' désignera le dual de E muni de sa bornologie équicontinue.

(2.8.1) <u>THEOREME</u>.Pour tout elc séparé E le dual E' est un ebc régulier et complet.

<u>PREUVE</u>. Toute partie équicontinue de E' étant contenue dans une partie équicontinue disquée faiblement compacte le critère (2.7.2) prouve la régularité de E' et l'ex3 de (2.6) sa complétude. ∎

(2.8.2) <u>COROLLAIRE</u>. Le dual E' d'un elc métrisable est un ebc régulier dénombrable et complet.

<u>Comparaison entre E' et le dual fort E'_β</u>. Il s'agit de comparer le elc TE' et E'_β et les ebc E' et BE'_β. Pour soulager les notations qualifions d'<u>équivore</u> toute partie de E' absorbant les parties équicontinues. Les disques équivores de E' forment donc une base de voisinages de o de l'elc TE'.

(2.8.3) <u>PROPOSITION</u>. Pour que $E' = BE'_\beta$ il faut et il suffit que E soit un elc infratonnelé.

(2.8.4) <u>PROPOSITION</u>. Sur E' la topologie TE' est plus fine que la topologie forte $\beta(E',E)$. Cependant, pour tout voisinage de disque W dans TE', le bipolaire $W^{\circ\circ}$ est un voisinage de o fort.

<u>PREUVE</u>. La première partie est évidente, puisque tout voisinage fort absorbe les parties fortement bornées donc est équivore. Réciproquement, si W est un disque équivore de E', son polaire W° dans E est borné dans E, de sorte que son bipolaire $W^{\circ\circ}$ est un voisinage fort.

(2.8.5) <u>COROLLAIRE</u>. Pour que $TE' = E'_\beta$ il faut et il suffit que tout disque équivore de E' contienne un disque équivore faiblement fermé.

Chacune des conditions $BE'_\beta = E'$ ou $TE' = E'_\beta$ entraîne l'une ou l'autre des deux conditions <u>équivalentes</u> $TBE'_\beta = TE'$ ou $BTE' = BE'_\beta$. Disons dans ce cas que E est un elc <u>hypotonnelé</u>. Puisque les ebc BE'_β et BTE' vérifient tous deux la condition (D) de (1.2), ils sont identiques dès qu'ils ont les mêmes suites bornées; et il suffit pour cela que toute suite fortement bornée de E' soit bornée dans BTE'. Donc:

(2.8.6) <u>THEOREME</u>.

a) Pour que E soit hypotonnelé (c'est-à-dire pour que $TE'=TBE'_\beta$ ou encore que $BE'_\beta=BTE'$) il faut et il suffit que tout disque équivore de E' absorbe toute suite fortement bornée. En particulier si toute suite fortement bornée de E' est équicontinue (ce qui est déjà le cas si E est infratonnelé) alors E est hypotonnelé.

b) Si E est hypotonnelé alors TE' est exactement l'elc bornologique associé à E'_β. Par conséquent, pour que $TE'=E'_\beta$ il faut et il suffit que E'_β soit bornologique.

(2.8.7) <u>COROLLAIRE 1</u>. Si E est un espace DF alors $TE'=E'_\beta$.

<u>PREUVE</u>. Car E est déjà hypotonnelé et E'_β est bornologique puisque c'est un espace de Fréchet. ∎

<u>REMARQUE</u>. On sait, d'après Grothendieck (G4 : Rque 8) qu'il existe des espaces DF n'ayant pas la topologie de Mackey. A fortiori existe-t-il des espaces hypotonnelés n'ayant pas la topologie de Mackey donc non infratonnelés.

(2.8.8) <u>COROLLAIRE 2</u>. Si E est un elc métrisable alors TE' est un espace DF bornologique et complet (donc tonnelé). Pour que $TE'=E'_\beta$ il faut et il suffit que E soit distingué.

<u>PREUVE</u>. D'après (G4 : th 6) tout disque équivore de E' contient un disque équivore <u>fortement</u> fermé. Cela implique classiquement, E'_β étant complet, que TE' est complet. Enfin on sait, toujours d'après (G4 : th 7) que E'_β est bornologique si et seulement si E est distingué. ∎

<u>Le dual d'un ebc régulier</u>. Soit maintenant E un ebc régulier. Désignons par E^+ son dual, c'est-à-dire l'ev des formes linéaires bornées sur E. On sait qu'une forme linéaire sur E est bornée si et seulement si elle est $\mathcal{C}(E)$-continue, ou encore si et seulement si elle est TE-continue. Autrement dit on a l'égalité <u>algébrique</u> $E^+=(TE)'$. Dire que E est régulier c'est donc exactement dire que E et E^+ sont en dualité séparante. Puisque chaque borné de E est évidemment faiblement borné relativement à la dualité (E,E^+), on peut considérer sur E^+ la topologie de la convergence uniforme sur les bornés de E, admettant pour base de voisinages de o les polaires des disques bornés de E. Il est facile de voir que E^+, ainsi topologisé, est même complet. Donc:

(2.8.9) <u>THEOREME</u>. Pour tout ebc régulier E le dual E^+ est un elc séparé et complet.

On peut maintenant préciser l'égalité algébrique $E^+=(TE)'$ en:

(2.8.10) PROPOSITION. Pour tout ebc régulier E on a l'égalité bornologique:

$$B(E^+) = (TE)'$$

PREUVE. Un borné B de $B(E^+)$ est absorbé par le polaire A° de tout borné A de E, donc B° absorbe $A^{\circ\circ}$ et aussi A; ainsi B° est un disque bornivore de E, donc un voisinage de o de l'elc TE, et B, contenu dans $B^{\circ\circ}$, est un borné de $(TE)'$. Réciproquement tout borné de $(TE)'$ est contenu dans le polaire V° d'un disque bornivore V de E, de sorte que V° est absorbé par le polaire A° de tout disque borné A de E, ce qui signifie que V° est borné dans $B(E^+)$. ∎

Les ebc polaires. La notion d'ebc régulier est encore un peu trop générale relativement aux questions de dualité. Nous introduisons ici une classe particulière d'ebc réguliers, qui contiennent suffisamment de bornés.

(2.8.11) DEFINITION. On dit qu'un ebc E est polaire lorsqu'il est déjà régulier et tel de plus que le bipolaire (relativement à la dualité (E,E^+)) de chacun de ses bornés soit borné.

(2.8.12) PROPOSITION. Pour tout elc séparé E les ebc BE et E' sont polaires. En particulier tout ebc séparé topologique est polaire.

PREUVE. C'est bien évident pour BE. Pour E' il suffit de voir que toute partie équicontinue disquée, fermée pour $\sigma(E',E)$, est a fortiori fermée pour $\sigma(E',(E')^+)$. ∎

(2.8.13) PROPOSITION. Soit E un ebc polaire. Si E^+ est un elc bornologique alors E est un ebc topologique. En particulier tout ebc polaire dénombrable est topologique.

PREUVE. D'après (2.8.10) on a $B((BTE)^+) = (TBTE)' = (TE)' = B(E^+)$, ce qui prouve que les elc E^+ et $(BTE)^+$ sont algébriquement égaux avec les mêmes bornés. Comme la topologie de $(BTE)^+$ est plus fine que celle de E^+, l'hypothèse sur E^+ garantit l'égalité topologique $E^+=(BTE)^+$, ce qui signifie encore que tout borné de BTE est contenu

dans le bipolaire d'un borné de E. On a donc E=BTE puisque E est polaire. Le reste de la proposition est évident car, si E est dénombrable, E^+ est un espace de Fréchet. ∎
On obtient l'analogue convenable de la propriété assurant que tout elc métrisable est bornologique.

REMARQUE. Il peut se faire que E soit un ebc topologique sans que E^+ soit un elc bornologique. Si F est par exemple un espace de Fréchet non distingué, l'ebc E=BF est topologique mais $E^+=F'_\beta$ n'est pas bornologique.

Complétion d'un ebc polaire. Le problème général de la complétion d'un ebc séparé, même régulier, n'est pas résolu. La difficulté essentielle provient du fait que si A et B sont deux disques normants et bornés d'un ebc E, tels que $A\subset B$, l'injection canonique $E_A \to E_B$ ne se laisse pas prolonger en une injection $\hat{E}_A \to \hat{E}_B$ entre les complétés, de sorte que l'espace E ne peut généralement pas être identifié à un sous-espace, et a fortiori à un sous-ebc, de l'ebc $\hat{E}$ construit comme limite inductive des espaces de Banach $\hat{E}_A$. Nous allons voir que cette difficulté s'élimine lorsque E est supposé polaire.

(2.8.14) LEMME. Soit E un ebc régulier et soient A et B deux disques bornés de E tels que $A=A^{\circ\circ}$ et $A\subset B$. L'injection canonique $E_A \to E_B$ se prolonge en une injection $\hat{E}_A \to \hat{E}_B$.

PREUVE. La condition $A=A^{\circ\circ}$ signifie que A est faiblement fermé dans E, ce qui implique facilement que A est un disque fermé de l'espace E_B et a fortiori que A est égal à la boule unité de E_A. Il suit de là que sur l'espace E_A la topologie de E_A et celle, moins fine, induite par E_B vérifient la condition de voisinages fermés. On en tire, soit en faisant une démonstration directe facile, soit en utilisant un résultat de Robertson (R2 : 4), que l'application $\hat{E}_A \to \hat{E}_B$ est une injection. ∎

(2.8.15) THEOREME. Soit E un ebc polaire et soit $\mathcal{A}$ l'ensemble des disques bornés et faiblement fermés de E. L'espace $\hat{E}$, limite inductive dans la catégorie $\mathbb{E}$BC, des espaces de Banach $\hat{E}_A$ lorsque A décrit $\mathcal{A}$, est un ebc régulier et complet contenant E comme sous-ebc. Les elc E^+ et $(\hat{E})^+$ sont identiques et, plus généralement, l'injection canonique $E \to \hat{E}$ est solution du problème universel des applications linéaires et bornées de E dans des ebc réguliers et complets.

PREUVE. Il est clair que les espaces $\hat{E}_A$ forment un système inductif monique filtrant croissant, ce qui veut dire que, pour $A \subset B$, l'application $\hat{E}_A \to \hat{E}_B$ est injective et bornée comme on voit avec le lemme. On peut donc définir $\hat{E}$ comme il est dit, ce qui donne déjà un ebc complet. L'application canonique $j : E \to \hat{E}$ est évidemment linéaire injective et bornée. Toute forme linéaire et bornée sur E, étant continue sur chaque E_A, se laisse prolonger de façon unique en une forme linéaire bornée sur $\hat{E}$, ce qui prouve l'égalité algébrique des elc E^+ et $(\hat{E})^+$. Mais ces elc sont même topologiquement égaux car leurs voisinages de o respectifs sont les disques $A°$ et $(\hat{A})°$, évidemment égaux par raison de prolongement. Ainsi E est déjà faiblement dense dans $\hat{E}$. Par ailleurs $A \subset E \cap \hat{A}$ de façon évidente et l'égalité $A° = (\hat{A})°$ fournit l'inclusion $E \cap \hat{A} \subset A°°$, de sorte que $A = E \cap \hat{A}$ puisque $A \in \mathcal{A}$. On voit ici que E est exactement un sous-ebc de $\hat{E}$. Montrons maintenant que $\hat{E}$ est régulier. L'espace $F = TE$ est un elc séparé dont le dual F' est algébriquement égal à E^+; puisque $A = A°°$, on voit que tout disque $A \in \mathcal{A}$ est faiblement fermé dans F donc aussi fermé dans F; il en résulte que l'injection $E_A \to F$ se prolonge en une injection $\hat{E}_A \to \hat{F}$, où $\hat{F}$ est l'elc complété de F; autrement dit $\hat{E}$ est contenu dans $\hat{F}$ et la topologie (localement convexe séparée) de $\hat{F}$ induit sur $\hat{E}$ une topologie rendant bornés les bornés $\hat{A}$ de $\hat{E}$, ce qui démontre que $\hat{E}$ est régulier. Enfin, pour toute application linéaire et bornée $u : E \to G$ de E dans un ebc régulier complet G, il existe un prolongement $\hat{u} : \hat{E} \to G$ qui est unique car, G étant régulier, $\hat{u}$ est faiblement continue et E est faiblement dense dans $\hat{E}$. ∎

REMARQUE. Il ne paraît pas possible de démontrer que $\hat{E}$ est polaire. Pour tout disque $A \in \mathcal{A}$ on a bien $A = E \cap \hat{A} = A°° = E \cap A°\hat{°}$, en désignant par $A°\hat{°}$ le bipolaire de A dans $\hat{E}$, mais il ne semble pas que l'on puisse tirer de là l'égalité $\hat{A} = A°\hat{°}$, qui prouverait que $\hat{A}$ est faiblement fermé dans $\hat{E}$, ni même une inclusion du type $A°\hat{°} \subset \hat{B}$ pour B borné de E, qui suffirait pour prouver que $\hat{E}$ est polaire.
Dans la suite l'ebc $\hat{E}$ sera dit le complété de l'ebc polaire E.

La bornologie $\mathcal{B}_o$ d'un ebc régulier. Soit $\mathcal{B}$ la bornologie d'un ebc régulier E. Les parties de E qui sont contenues dans l'enveloppe disquée faiblement fermée, pour la dualité (E, E^+), d'une suite bornologiquement convergente vers o forment une bornologie $\mathcal{B}_o$; soit E_o l'ebc correspondant. Si E est polaire, $\mathcal{B}_o$ est plus fine que $\mathcal{B}$, mais dans le cas général $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}_o$ peuvent être incomparables. Elles ont cependant un certain nombre de propriétés communes. Déjà les elc TE et TE_o sont identiques, comme on voit avec (2.6.1) en remarquant que les voisinages de o pour TE peuvent être choisis disqués faiblement fermés. Les duals E^+ et E_o^+ sont algébriquement égaux et sont des elc ayant les mêmes bornés puisque $B(E^+) = (TE)'$ et $B(E_o^+) = (TE_o)'$. On tire de tout ceci que E_o est un ebc polaire.
Toute suite bornologiquement convergente vers o dans E converge aussi bornologiquement vers o dans E_o (la réciproque étant évidente si E est polaire) : car si $x_n \in \varepsilon_n B$ où $B \in \mathcal{B}$ et $\varepsilon_n \downarrow 0$, on peut poser $\alpha_n = \sqrt{\varepsilon_n}$ et voir que l'enveloppe disquée faiblement fermée A de la suite x_n/α_n est un borné de E_o tel que $x_n \in \alpha_n A$. Ainsi $(E_o)_o = E_o$ et il est inutile d'itérer le processus. Une conséquence intéressante est que, lorsque E est polaire, les ebc E et E_o, ayant les mêmes suites bornologiquement convergentes vers o, sont simultanément complets.
En résumé:

(2.8.16) PROPOSITION. Pour tout ebc régulier E soit E_o l'ebc dont les bornés sont les parties de E contenues dans l'enveloppe disquée faiblement fermée d'une suite convergeant bornologiquement vers o. L'ebc E_o est polaire et l'on a les égalités $TE = TE_o$; $B(E^+) = B(E_o^+)$; $(E_o)_o = E_o$. De plus si E est polaire les ebc E et E_o sont simultanément complets.

(2.8.17) COROLLAIRE. Le dual E^+ d'un ebc régulier E est un elc séparé et complet lorsqu'on le munit de la topologie de la convergence uniforme sur les suites de E convergeant bornologiquement vers o.

PREUVE. Ce n'est autre que (2.8.9) appliqué à l'ebc E_o. ∎

Si E est un ebc polaire les duals E^+ , E_o^+ , $(\hat{E})^+$, $(\hat{E})_o^+$ sont algébriquement égaux et ont d'ailleurs les mêmes bornés comme il résulte de (2.8.15) et (2.8.16). Cette remarque permet de démontrer le résultat important suivant:

(2.8.18) THEOREME. Soit E un ebc polaire. Sur E^+ la topologie de la convergence uniforme sur les suites de E convergeant bornologiquement vers o est compatible avec la dualité $(E^+,\hat{E})$.

PREUVE. Il est facile de voir que les suites de E et celles de $\hat{E}$ convergeant bornologiquement vers o définissent la même topologie sur $E^+=(\hat{E})^+$ ce qui nous ramène, en remplaçant E par $\hat{E}$, à supposer E régulier et complet. Il suffit donc, avec le théorème de Mackey, de prouver que tout disque $A\in\mathcal{B}_o$ est faiblement relativement compact. On peut supposer que A est l'enveloppe disquée faiblement fermée d'une suite (x_n) convergeant vers o dans un espace de Banach E_B où B est un disque borné convenable de E. La suite (x_n) est donc relativement compacte dans E_B et son enveloppe disquée fermée C (dans E_B) y est compacte. La topologie faible $\sigma(E,E^+)$ induisant sur E_B une topologie séparée moins fine que celle d'espace de Banach (car B est faiblement borné dans E), ces deux topologies coïncident sur C. Ainsi $A=C$ et A est faiblement compacte, ce qui suffit. ∎

(2.8.19) COROLLAIRE 1. Pour tout ebc polaire complet E on a l'égalité bornologique $(E_o^+)'=E_o$.

PREUVE. L'égalité algébrique est conséquence du théorème et l'égalité bornologique de la polarité de E. ∎

(2.8.20) COROLLAIRE 2. Soit E un elc séparé. Le dual E' est dense dans l'elc $(BE)_o^+$.

PREUVE. L'ebc $F=BE$ est polaire, E' est un sous-ev de F_o^+, et $(F_o^+)'=\hat{F}$ d'après le théorème. Il suffit donc de voir que si un élément $\hat{x}$ de $\hat{F}$ s'annule sur E' alors il est nul. On peut supposer $\hat{x}\in\hat{F}_B=\hat{E}_B$ où B est un disque borné faiblement fermé (pour $\sigma(E,E')$) dans E. Il existe donc une suite $x_n\in E_B$ telle que $x_n\longrightarrow\hat{x}$ dans $\hat{E}_B$. La suite (x_n) converge faiblement vers o dans E, car pour tout $x'\in E'$ la suite $\langle x_n,x'\rangle$ converge vers $\langle\hat{x},x'\rangle=o$. C'est aussi une suite de Cauchy dans E_B, de sorte que, B étant faiblement fermé dans E, il est facile de voir que, en fait, elle converge même vers o dans E_B, d'où $\hat{x}=o$. ∎

On peut en déduire la caractérisation des elc bornologiques donnée par Köthe (K5 th 1):

(2.8.21) COROLLAIRE 3. Soit E un elc séparé, espace de Mackey (c'est-à-dire ayant la topologie $\tau(E,E')$). Pour que E soit bornologique il faut et il suffit que son dual E' soit complet pour la topologie de la convergence uniforme sur les suites de E convergeant bornologiquement vers o.

PREUVE. La condition est nécessaire d'après (2.8.17) car E', topologisé comme on a dit, n'est autre que F_o^+ avec $F=BE$. Elle est aussi suffisante car E' ainsi topologisé est alors complet et partout dense dans F_o^+, donc $E'=F^+$ algébriquement, ce qui implique classiquement, E étant espace de Mackey, qu'il est bornologique. ∎

2.9. Réflexivité bornologique.

Le b-bidual d'un elc séparé. Le dual E' d'un elc séparé E est un ebc polaire et complet dont le dual $(E')^+$ est un elc séparé et complet. Nous dirons que $(E')^+$ est le bidual bornologique (ou b-bidual) de E et, lorsque $E=(E')^+$, que E est bornologiquement réflexif (ou b-réflexif).
Dans le cas général on a $E\subset(E')^+$; d'ailleurs E est un sous-espace topologique de $(E')^+$ puisque la topologie de $(E')^+$ est celle de la convergence uniforme sur les parties équicontinues de E'. Comme on a l'égalité algébrique $(E')^+=(TE')'$ et que la topologie de TE' est plus fine que la topologie forte $\beta(E',E)$, on voit que le bidual $E''=(E'_\beta)'_\beta$ est contenu dans le b-bidual $(E')^+$. Désignons par E''_e le bidual E'' topologisé au sens de Grothendieck (G2), c'est-à-dire avec la topologie de la convergence uniforme sur les parties équicontinues de E'; il est clair que E''_e devient ainsi un sous-espace topologique de $(E')^+$. Et, comme $(E')^+$ est complet, on obtient en résumé:

(2.9.1) PROPOSITION. Soit E un elc séparé. On a les inclusions topologiques:

$$E\subset\hat{E}_{E''_e}\subset(E')^+ .$$

Le sous-espace algébrique E'' de $(E')^+$ se caractérise facilement. Ce n'est autre que la réunion $\bigcup B^{\circ\circ}$ des bipolaires dans $(E')^+$ des disques bornés B de E. Il suit de là que l'espace $\hat{E}\cap E''_e$ est égal à la réunion $\bigcup B^{\circ\hat{\circ}}$ des bipolaires <u>dans $\hat{E}$</u> des disques bornés B de E. Mais la topologie de $\hat{E}$ étant compatible avec la dualité $(\hat{E},E')$, les disques $B^{\circ\hat{\circ}}$ sont les adhérences dans $\hat{E}$ des disques bornés de E. Par ce raisonnement simplifié on retrouve un résultat récent de A.Robert (R1 prop 2.1.5):

(2.9.2) <u>THEOREME</u>. Pour que l'elc séparé E soit quasi-complet il faut et il suffit que $E=\hat{E}\cap E''_e$.

Le résultat qui va suivre donne un cas où il y a coïncidence du bidual E''_e et du b-bidual $(E')^+$.

(2.9.3) <u>PROPOSITION</u>. Soit E un elc séparé hypotonnelé tel que son dual fort E'_β ait la topologie de Mackey $\tau(E',E'')$. Les assertions suivantes sont équivalentes:
a) E'_β est bornologique.
b) $E'_\beta=TE'$.
c) $E''_e=(E')^+$.

<u>PREUVE</u>. On a a$\Leftrightarrow$b d'après (2.8.6) puisque E est hypotonnelé et b$\Rightarrow$c car $(E')^+=(TE')'$ de toute façon. Si $E''_e=(E')^+$ les espaces E'_β et TE', algébriquement égaux à E', ont des topologies compatibles avec la dualité (E',E'') ce qui implique bien l'égalité $E'_\beta=TE'$ à cause de l'hypothèse sur E'_β puisque la topologie TE' est plus fine que la topologie forte de E'. Ainsi c$\Rightarrow$b. ∎

On tire de là deux conséquences intéressantes:

(2.9.4) <u>COROLLAIRE 1</u>. Soit E un elc métrisable tel que E'_β ait la topologie de Mackey. Sont équivalentes:
a) E'_β est bornologique.
b) E est distingué.
c) $E''=(E')^+$.

<u>REMARQUE</u>. On ignore si, en général, le dual fort E'_β d'un elc métrisable a toujours la topologie de Mackey. De toute façon cette condition est impliquée par a) ou b) de sorte que, si E est distingué, alors $E''=(E')^+$. Cependant l'exemple classique de Köthe, traité par Grothendieck (G4 p.88), fournit le cas d'un elc métrisable (non

distingué) tel que $E''\neq(E')^+$.
La seconde conséquence est une application du théorème (2.9.2) de A.Robert. Elle donne une généralisation simultanée d'un résultat de Grothendieck sur les espaces DF (G4:cor 2 de prop 5) et de la proposition (2.3.1) de A.Robert (R1).

(2.9.5) <u>COROLLAIRE 2</u>. Soit E un elc hypotonnelé tel que son dual fort E'_β soit bornologique (autrement dit E est tel que $E'_\beta=TE'$). Alors E est complet dès qu'il est quasi-complet.

<u>PREUVE</u>. Supposons E quasi-complet, donc $E=\hat{E}\cap E''_e$ avec (2.9.2). L'hypothèse sur E donne $E''_e=(E')^+$ avec (2.9.3) d'où $E=\hat{E}$. ∎

Enfin citons pour mémoire, en conséquence de (2.8.7):

(2.9.6) <u>COROLLAIRE 3</u>. Si E est un espace DF alors $(E')^+=E''_e$.

Les résultats (2.8.16...19) vont permettre la description de $(E')^+$ en terme de complétion. Remarquons d'abord que dans l'ebc E' une suite (x'_n) est bornologiquement convergente vers o si et seulement si elle converge uniformément vers o sur un voisinage convenable de l'origine dans E. Cela étant:

(2.9.7) <u>THEOREME</u>. Le b-bidual $(E')^+$ d'un elc séparé E est algébriquement identique au complété de E pour la topologie c_0 de la convergence uniforme sur les suites de E' convergeant bornologiquement vers o.

<u>PREUVE</u>. Plaçons sur $(E')^+$ la topologie c_0. On obtient l'elc $(E')^+_0$, égal à l'elc $(E'_0)^+$ avec les notations de (2.8.16), et qui est complet d'après (2.8.17). Il reste à voir que E est dense dans $(E'_0)^+$, ce qui est conséquence immédiate, avec Hahn-Banach, de (2.8.19) puisque E' est un ebc polaire et complet. ∎

<u>La b-réflexivité pour les elc séparés</u>. Rappelons qu'un elc E séparé est dit b-réflexif lorsque $E=(E')^+$. Il est clair avec (2.9.1) qu'un tel elc est déjà complet et semi-réflexif. De façon plus précise:

(2.9.8) <u>THEOREME</u>.
a) Si E est b-réflexif il est complet, hypotonnelé, semi-réflexif et son dual fort E'_β est bornologique.

b) Réciproquement si E est hypotonnelé et semi-réflexif et si E'_β est bornologique alors E est b-réflexif.

PREUVE. L'assertion a) provient de (2.9.1) pour une partie; l'égalité $TE'=E'_\beta$, qui donne le reste, vient du fait que la topologie TE' est alors compatible avec la dualité (E',E) donc coïncide nécessairement avec $\tau(E',E)$ et par conséquent aussi avec $\beta(E',E)$. Réciproquement l'hypothèse sur E implique $E'_\beta=TE'$ donc $(E')^+=E''_e=E$. ∎

REMARQUE. Ainsi tout elc b-réflexif est nécessairement complet. Ceci montre que la b-réflexivité, notion plus forte que la semi-réflexivité est par là moins pathologique. En effet on sait, avec l'exemple de Kōmura (K3 : 5), qu'il existe des espaces de Montel (donc réflexifs) et cependant non complets, donc a fortiori non b-réflexifs. D'ailleurs

(2.9.9) PROPOSITION. Soit E un elc séparé hypotonnelé et semi-réflexif. Pour que E soit b-réflexif il faut et il suffit que son dual fort E'_β soit bornologique.

PREUVE. Il suffit de voir que, E étant semi-réflexif, son dual fort E'_β est tonnelé donc a la topologie de Mackey et d'appliquer (2.9.3). ∎

(2.9.10) COROLLAIRE. Si E est métrisable ou bien si E est un espace DF alors E est b-réflexif si et seulement si il est semi-réflexif.

PREUVE. Si E est métrisable et semi-réflexif on sait qu'il est distingué donc E'_β est bornologique. Si E est espace DF voir (2.9.6). ∎

A la suite de (2.9.7) on a le critère évident:

(2.9.11) THEOREME. Un elc séparé E est b-réflexif si et seulement si il est complet pour la topologie c_o de la convergence uniforme sur les suites de E' convergeant bornologiquement vers o.

On déduit de là deux informations dont la première n'est autre que la proposition 9 de Köthe (K5) et dont la seconde généralise la proposition 10 de la même référence.

(2.9.12) COROLLAIRE 1. Un elc métrisable E est réflexif si et seulement si il est complet pour la topologie c_o de la convergence uniforme sur les suites de E' convergeant bornologiquement vers o.

(2.9.13) COROLLAIRE 2. Un espace DF (en particulier un espace normé) est semi-réflexif si et seulement si il est complet pour la topologie de la convergence compacte sur son dual fort.

PREUVE. Si E est espace DF toute suite fortement bornée est équicontinue. Il suit facilement de là que E' et BE'_β ont les mêmes suites bornologiquement convergentes vers o et, E'_β étant espace de Fréchet, ce sont d'ailleurs les suites convergentes (topologiquement) vers o dans E'_β. On termine avec le théorème de Banach-Dieudonné. ∎

La b-réflexivité pour les ebc réguliers. Pour tout ebc régulier E appelons b-bidual de E l'ebc polaire et complet $(E^+)'$. Nous dirons que E est b-réflexif lorsque E est bornologiquement égal à $(E^+)'$. Dans le cas général on a évidemment $E\subset(E^+)'$, à cause de la régularité de E, mais E n'est un sous-ebc de $(E^+)'$ que si E est polaire. Puisque les bornés de $(E^+)'$ sont relativement compacts pour la topologie faible $\sigma((E^+)',E^+)$, on voit que, si E est b-réflexif, il possède un système fondamental de disques bornés qui sont faiblement compacts. Réciproquement, si tout borné A de E est contenu dans un borné B disqué faiblement compact, alors B est fermé dans $(E^+)'$ pour la topologie $\sigma((E^+)',E^+)$ donc égal à son bipolaire dans $(E^+)'$, ce qui prouve facilement l'égalité bornologique $E=(E^+)'$. On a donc:

(2.9.14) THEOREME (Mackey-Arens). Pour qu'un ebc régulier E soit b-réflexif il faut et il suffit qu'il admette un système fondamental de bornés formé de disques faiblement compacts.

(2.9.15) COROLLAIRE 1. Un ebc réflexif E est nécessairement polaire et complet. Il admet même un système fondamental de bornés qui sont complets dans l'elc TE.

PREUVE. Car tout disque faiblement compact de E est faiblement complet donc aussi complet dans TE. ∎

(2.9.16) COROLLAIRE 2. Un ebc régulier et réflexif (voir définition (2.3.1)) est b-réflexif.

PREUVE. Il suffit de prouver que tout disque borné et réflexif A de E est contenu dans un disque borné faiblement compact. Or l'espace de Banach E_A étant réflexif sa boule unité $\bar{A}$ est compacte pour la topologie faible $\sigma(E_A, E_A')$ donc aussi pour la topologie séparée moins fine $\sigma(E_A, E^+)$ car E est régulier et E^+ s'envoie dans E_A' par l'application de restriction des formes linéaires à E_A. En résumé $\bar{A}$ est un disque faiblement compact de E et l'égalité $\bar{A} = \bigcap_{\lambda>1} \lambda A$ assure qu'il est borné dans E. ∎

Dualité et b-réflexivité. Il est clair que la b-réflexivité est stable par dualité c'est-à-dire que le dual d'un elc (resp: ebc) b-réflexif est un ebc (resp: elc) b-réflexif. Par ailleurs on sait (K2: 20.5) que, sous certaines conditions (E quasi-complet et possédant la topologie de Mackey) un elc E est réflexif si et seulement si son dual fort E_β' l'est. On peut établir ici des résultats analogues.

(2.9.17) PROPOSITION. Soit E un elc séparé et complet. Pour que E soit b-réflexif il faut et il suffit que son dual E' soit un ebc b-réflexif.

PREUVE. La condition étant nécessaire supposons E' b-réflexif. Alors $(E')^+ = \hat{E}$ car E est un sous-espace de $(E')^+$ dense dans $(E')^+$ puisque le dual de $(E')^+$ n'est autre que E'. L'hypothèse de complétude de E garantit donc l'égalité $E = (E')^+$. ∎

(2.9.18) PROPOSITION. Soit E un ebc régulier admettant un système fondamental de disques bornés qui sont complets dans l'elc TE. Pour que E soit b-réflexif il faut et il suffit que E^+ soit un elc b-réflexif.

PREUVE. Déjà l'hypothèse sur E implique que E est polaire et complet. Supposons E^+ b-réflexif et posons $F=(E^+)'$. Alors $F^+=E^+$. Il suit de là que les elc TE et TF ont même dual avec les mêmes parties équicontinues puisque $(TE)'=B(E^+)=B(F^+)=(TF)'$. On en tire que TE est un sous-elc de TF. Par ailleurs les bornés de F sont exactement les bipolaires $B^{\circ\circ}$ dans $F=(E^+)'$ des bornés B de E, comme il résulte de la définition de $(E^+)'$. Puisqu'on peut choisir B disqué et complet

dans TE, alors B est fermé dans TF ce qui suffit pour démontrer l'égalité $B=B^{\circ\circ}$ et partant l'égalité E=F. ∎

En rassemblant (2.9.17) et (2.9.18) on obtient:

(2.9.19) PROPOSITION. Soit E un ebc régulier admettant un système fondamental de disques bornés qui sont complets dans l'elc TE. Pour que E soit b-réflexif il faut et il suffit que son b-bidual $(E^+)'$ le soit.

(2.9.20) PROPOSITION. Soit E un elc séparé et complet tel que la topologie TE' admette une base de voisinages de o formée de disques fortement fermés. Pour que E soit b-réflexif il faut et il suffit que son b-bidual $(E')^+$ le soit.

PREUVE. La condition sur E implique qu'il existe dans E' un système fondamental de bornés qui sont complets dans TE': en effet toute partie équicontinue disquée faiblement fermée de E' est faiblement compacte, donc faiblement complète, donc fortement complète et a fortiori, grâce à la condition, complète dans TE'. ∎

La condition imposée à E est en particulier vérifiée lorsque E est métrisable d'après Grothendieck (G4 : th5), ou bien lorsque E est hypotonnelé et E_β' est bornologique car alors $TE'=E_\beta'$. Donc:

(2.9.21) COROLLAIRE 1. Pour qu'un espace de Fréchet E soit réflexif il faut et il suffit que son b-bidual $(E')^+$ le soit.

PREUVE. Les espaces E et $(E')^+$ étant tous deux des espaces de Fréchet la b-réflexivité coïncide pour eux avec la réflexivité. ∎

REMARQUE. Ce résultat est à rapprocher de celui affirmant que E est réflexif si et seulement si son bidual E" l'est (K4 : §29.2.4). Il en diffère dans la mesure où E" et $(E')^+$ sont a priori distincts, ce qui peut être le cas si E n'est pas supposé distingué.

(2.9.22) COROLLAIRE 2. Soit E un espace DF infratonnelé et complet. Pour que E soit réflexif il faut et il suffit que son bidual E" soit semi-réflexif.

PREUVE. Pour E réflexivité équivaut à semi-réflexivité, donc à b-réflexivité. Puisque $(E')^+ = E''_e = E''$ on voit que $(E')^+$ est aussi un espace DF, donc pour E" semi-réflexivité équivaut à b-réflexivité. Enfin l'égalité $TE' = E'_\beta$ assure que la condition de (2.9.20) est satisfaite, ce qui suffit. ∎

REMARQUE. Dans le cas où E est espace DF non infratonnelé on ignore si $(E')^+$ est espace DF et même seulement si $(E')^+$ est hypotonnelé, ce qui suffirait pourtant pour démontrer, E étant complet, l'équivalence de semi-réflexivité entre E et E".

§§§§§

DEUXIEME PARTIE : TOPOLOGIES ET COMPACTOLOGIES

INTRODUCTION.

Dans cette seconde partie, et plus loin dans la troisième, on étudie une nouvelle structure, celle des espaces compactologiques qui sont des espaces bornologiques spécialisés pour lesquels il existe un système fondamental de bornés munis de topologies qui les rendent compacts. Introduite pour la première fois par Waelbroeck (W2 et W3) dans un cadre vectoriel pour établir un théorème de dualité en caractérisant la catégorie duale de celle des elc complets, elle est susceptible d'une extension assez large. En fait la dualité échange objets topologiques (espaces topologiques, elc, algèbres topologiques localement convexes) et objets compactologiques (espaces compactologiques, espaces vectoriels compactologiques convexes, algèbres compactologiques convexes).
Le premier pas vers la dualité s'annonce en associant à chaque espace compactologique $\mathfrak{X}$ l'algèbre localement convexe complète $C(\mathfrak{X})$ de ses fonctions "continues" et à chaque algèbre localement convexe unitaire commutative A l'espace compactologique $\mathcal{G}(A)$ des caractères de A. Lorsque $C(\mathfrak{X})$ sépare $\mathfrak{X}$ on dit que $\mathfrak{X}$ est régulier. Le point nouveau ici est précisément atteint lorsqu'on structure le spectre d'une algèbre localement convexe en espace compactologique et non pas en espace topologique. Dans cet esprit on caractérise les espaces compactologiques (réguliers) et les algèbres localement convexes (limites projectives de C^*-algèbres commutatives) qui sont des objets duaux.

Les relations entre la catégorie $\mathbb{T}S$ des espaces topologiques fonctionnellement séparés et la catégorie $\mathbb{C}R$ des espaces compactologiques réguliers se font à travers deux foncteurs $c : \mathbb{C}R \to \mathbb{T}S$ et $\gamma : \mathbb{T}S \to \mathbb{C}R$, adjoints l'un de l'autre et tels que $c\gamma c = c$ et $\gamma c \gamma = \gamma$. Ce qui permet la définition d'une classe d'espaces topologiques : les espaces de Kelley ou k-espaces, largement étudiés dans la littérature. Le cheminement est évidemment analogue à celui qui conduit aux elc bornologiques à partir des foncteurs T et B de la première partie.
L'introduction des structures vectorielles se fait au chapitre 3 de

façon sommaire puisque la question sera reprise dans la troisième partie. Cependant nous montrons que le théorème de dualité de Banach-Waelbroeck s'insère parfaitement dans la théorie générale esquissée ici.

Le chapitre 4 est consacré plus spécialement aux espaces topologiques. Alors que précédemment on attachait à chaque espace compactologique une algèbre topologique et à chaque algèbre topologique un espace compactologique, on associe maintenant à chaque espace topologique T l'algèbre $\mathcal{C}(T)$ de ses fonctions continues structurée en algèbre compactologique convexe, et à chaque acc $\mathcal{A}$ son spectre $G(\mathcal{A})$ qui est un espace topologique complètement régulier. Ce point de vue permet une étude nouvelle des espaces de fonctions continues sur un espace topologique complètement régulier. On sait en effet que jusqu'à maintenant le seul point de vue assez général est algébrique et c'est celui choisi par Gillman-Jerison (G1), où l'espace $\mathcal{C}(T)$ est étudié en tant qu'anneau ordonné, le corps des scalaires étant réel. On peut aussi considérer $\mathcal{C}(T)$ comme une algèbre localement convexe avec pour topologie celle de la convergence compacte sur T, mais cette optique n'est fructueuse que pour les espaces de Kelley.

Les espaces topologiques intéressants sont alors les espaces complètement réguliers T isomorphes à leur réplétion compactologique $\tilde{T}=G\mathcal{C}(T)$; appelons les c-replets en utilisant une terminologie suggérée par Bourbaki (B5 : §4 ex.17 p.85). Ils sont caractérisés comme étant exactement les espaces $G(\mathcal{A})$, spectres topologiques des acc quelconques $\mathcal{A}$. Leurs propriétés sont voisines de celles des "Q-spaces" de Hewitt (H1) appelés encore "realcompact spaces" par Gillman-Jerison et espaces replets par Bourbaki. D'ailleurs tout espace replet est c-replet. Néanmoins une différence subsiste puisque la classe des espaces c-replets est plus stable que celle des espaces replets : toute limite projective d'espaces c-replets est c-replète de même que toute somme topologique de tels espaces. De plus on démontre explicitement qu'un espace paracompact est c-replet. Enfin la comparaison entre espaces replets et c-replets se termine par la preuve qu'il est "pratiquement" impossible de mettre en évidence un espace c-replet qui ne soit pas replet. L'existence d'un tel espace est en effet équivalente à celle d'un cardinal mesurable. On débouche ainsi sur une question d'axiomatique de la théorie des

ensembles puisqu'il paraît probable actuellement que l'axiome d'existence d'un tel cardinal, lié à l'axiome d'existence d'un cardinal fortement inaccessible, est indépendant des axiomes habituels (y compris l'axiome du choix) de la théorie.

CHAPITRE 1 : ESPACES COMPACTOLOGIQUES.

1.1. Espaces compactologiques.

(1.1.1) DEFINITION. On appelle espace compactologique la donnée d'un ensemble $\mathfrak{X}$ et d'une famille $\mathcal{K}$ de parties de $\mathfrak{X}$ telle que :

a) $\mathcal{K}$ est un recouvrement filtrant croissant de $\mathfrak{X}$.

b) Tout $K\in\mathcal{K}$ est muni d'une topologie compacte (séparée) τ_K de telle façon que, pour $K\subset L$ et $L\in\mathcal{K}$ l'injection $K\rightarrow L$ soit continue, ce qui équivaut à l'égalité $\tau_L/K=\tau_K$.

c) Si $K\in\mathcal{K}$ et si H est une partie de K alors l'adhérence $\bar{H}$ de H dans K, munie de la topologie induite par K, est un élément de $\mathcal{K}$.

Nous dirons que les parties de $\mathcal{K}$ sont les "compacts" de $\mathfrak{X}$. Il est clair que tout ensemble réduit à un point est "compact" et que la réunion de deux "compacts" est "compacte". En particulier les parties de $\mathfrak{X}$ contenues dans un "compact" (variable) forment sur $\mathfrak{X}$ une bornologie. Mais le point de vue compactologique est bien entendu plus précis que le point de vue bornologique.

On construit immédiatement une catégorie $\mathbb{C}$ dont les objets sont les espaces compactologiques en choisissant comme morphismes les applications $f : \mathfrak{X}\rightarrow\mathcal{Y}$ qui envoient continûment les "compacts" de $\mathfrak{X}$ dans des "compacts" de $\mathcal{Y}$. Nous désignerons par $\mathbb{K}$ la catégorie des espaces compacts, qui apparaît donc comme une sous-catégorie pleine de $\mathbb{C}$.

Foncteur γ. En associant à tout espace topologique séparé T la famille $\mathcal{K}$ de ses parties compactes, on obtient un espace compactologique, noté γT, et γ est en fait un foncteur covariant de la catégorie $\mathbb{TS}_0$ des espaces topologiques séparés dans la catégorie $\mathbb{C}$.

<u>Foncteur c</u>. En plaçant sur un espace compactologique $\mathfrak{X}$ la topologie finale associée à toutes les injections $K \longrightarrow \mathfrak{X}$, où K décrit $\mathcal{K}$, on obtient un espace topologique $c\mathfrak{X}$ et c est un foncteur covariant de la catégorie $\mathfrak{C}$ dans la catégorie $\mathfrak{T}$ des espaces topologiques.

<u>Espaces de Kelley</u>. Si T est un espace topologique séparé, l'espace $c\mathcal{T}T$ est aussi séparé et l'application $1_T : c\mathcal{T}T \longrightarrow T$ est continue. On dit que T est un espace de Kelley (A1 ; K1 ; P2) lorsque $c\mathcal{T}T=T$. Autrement dit T est un espace de Kelley lorsqu'il possède la topologie la plus fine compatible avec ses compacts. Le critère suivant est évident :

(1.1.2) <u>PROPOSITION</u>. Pour qu'un espace topologique séparé T soit un espace de Kelley il faut et il suffit que, pour tout espace séparé S et toute application $f : T \longrightarrow S$, f soit en réalité continue dès que ses restrictions aux compacts de T sont continues.

(1.1.3) <u>COROLLAIRE</u>. Les espaces localement compacts et les espaces métrisables sont des espaces de Kelley. Dans la catégorie $\mathfrak{TS}$ tout espace muni d'une topologie finale d'espaces de Kelley est lui-même un espace de Kelley.

1.2. <u>Espaces compactologiques réguliers</u>.

Désignons par $C(\mathfrak{X})$ l'algèbre des fonctions complexes sur l'espace compactologique $\mathfrak{X}$ dont les restrictions aux "compacts" de $\mathfrak{X}$ sont continues. C'est évidemment l'espace $Hom_{\mathfrak{C}}(\mathfrak{X},C)$, où le corps des complexes C est muni de sa compactologie canonique.

(1.2.1) <u>DEFINITION</u>. On dit que $\mathfrak{X}$ est régulier lorsqu'il est séparé par l'algèbre $C(\mathfrak{X})$.

Un bon critère de régularité est donné par :

(1.2.2) <u>THEOREME</u>. Relativement à un espace compactologique $\mathfrak{X}$ les assertions suivantes sont équivalentes :

a) $\mathfrak{X}$ est régulier.

b) Il existe sur $\mathfrak{X}$ une topologie complètement régulière induisant sur chaque "compact" K de $\mathfrak{X}$ la topologie τ_K.

c) Pour tout $K\in\mathcal{K}$ l'application canonique de restriction $C(\mathfrak{X}) \longrightarrow C(K)$ est surjective.

d) Pour tout couple de "compacts" disjoints H et K de $\mathfrak{X}$, il existe une fonction $f\in C(\mathfrak{X})$ telle que $o\leqslant f\leqslant 1$, $f=o$ sur H et $f=1$ sur K.

<u>PREUVE</u>. $a \Longrightarrow b$: Soit $\mathcal{C}$ la topologie sur $\mathfrak{X}$ la moins fine rendant continues toutes les fonctions de $C(\mathfrak{X})$; elle est séparée d'après a) et uniformisable ; de plus elle rend continues les injections $K \longrightarrow \mathfrak{X}$ puisque précisément chaque $f\in C(\mathfrak{X})$ est continue sur chaque $K\in\mathcal{K}$, donc $\mathcal{C}|_K=\tau_K$. $b \Longrightarrow c$: Fixons $\varphi\in C(K)$ et soit $\mathcal{C}'$ une topologie sur $\mathfrak{X}$ vérifiant b) et donnant $\check{\mathfrak{X}}$ comme compactifié de Stone-Čech de $\mathfrak{X}$; alors K est un compact de $\check{\mathfrak{X}}$ donc, par le théorème d'Urysohn, il existe un prolongement $\check{f}$ de φ qui est continu sur $\check{\mathfrak{X}}$; la fonction f, restriction de $\check{f}$ à l'espace $\mathfrak{X}$, est donc bien dans $C(\mathfrak{X})$ et prolonge φ (elle est même bornée). $c \Longrightarrow d$: Soit φ la fonction continue sur le "compact" $H\cup K$ et définie par $\varphi=o$ sur H et $\varphi=1$ sur K ; d'après c) c'est la restriction d'une fonction $f\in C(\mathfrak{X})$ qu'on peut supposer réelle ; par une troncature évidente on se ramène à $o\leqslant f\leqslant 1$. Enfin $d \Longrightarrow a$: Il suffit de prendre $H=\{x\}$ et $K=\{y\}$ pour deux points $x\neq y$ de $\mathfrak{X}$. ∎

(1.2.3) <u>COROLLAIRE</u>. Tout espace compactologique dénombrable (c'est-à-dire admettant un système fondamental dénombrable de "compacts") est régulier.

<u>PREUVE</u>. Soit (K_n) une suite exhaustive croissante de "compacts" de $\mathfrak{X}$. Soient H et K deux "compacts" disjoints ; on peut supposer $H\cup K\subset K_1$. Le théorème d'Urysohn assure l'existence d'une fonction $\varphi_1\in C(K_1)$ telle que $\varphi_1=o$ sur H et $\varphi_1=1$ sur K. De proche en proche on construit une suite $\varphi_n\in C(K_n)$ telle que φ_{n+1} prolonge φ_n. La fonction f, bien définie par la condition de prolonger chaque φ_n, est évidemment un élément de $C(\mathfrak{X})$ tel que $f=o$ sur H et $f=1$ sur K. ∎

1.3. <u>Espaces topologiques fonctionnellement séparés</u>.

Désignons par $\mathcal{C}(T)$ l'algèbre des fonctions complexes continues sur l'espace topologique T. On dit que T est <u>fonctionnellement séparé</u> lorsqu'il est séparé par $\mathcal{C}(T)$. De façon évidente :

(1.3.1) PROPOSITION. Pour que T soit fonctionnellement séparé il faut et il suffit que, pour tout couple de compacts H et K disjoints de T, il existe une fonction $f \in \mathcal{C}(T)$ telle que $0 \leqslant f \leqslant 1$, $f=0$ sur H et $f=1$ sur K.

(1.3.2) COROLLAIRE. Tout espace topologique fonctionnellement séparé est régulier. Tout espace complètement régulier est fonctionnellement séparé.

1.4. Retour sur les foncteurs c et γ.

Désignons par $\mathbb{CR}$ la catégorie des espaces compactologiques réguliers et par $\mathbb{FS}$ celle des espaces topologiques fonctionnellement séparés. On va voir que c et γ opèrent entre les catégories $\mathbb{CR}$ et $\mathbb{FS}$ car :

(1.4.1) PROPOSITION. Si $\mathfrak{X}$ est régulier alors $c\mathfrak{X}$ est fonctionnellement séparé. Si T est fonctionnellement séparé alors γT est régulier.

PREUVE. Elle est évidente puisque $\mathcal{C}(c\mathfrak{X})=C(\mathfrak{X})$ et $\mathcal{C}(T)\subset C(\gamma T)$. ∎

Dorénavant nous considérerons c comme un foncteur $c : \mathbb{CR} \to \mathbb{FS}$ et γ comme un foncteur $\gamma : \mathbb{FS} \to \mathbb{CR}$. Il suit de là que l'on peut introduire les foncteurs $c\gamma$ et γc et obtenir des morphismes évidents $c\gamma T \to T$ et $\mathfrak{X} \to \gamma c \mathfrak{X}$. La conséquence en est :

(1.4.2) PROPOSITION. $c\gamma c=c$ et $\gamma c \gamma = \gamma$.

PREUVE. Car on a les successions de morphismes :

$$c\mathfrak{X} \to c(\gamma c\mathfrak{X})=c\gamma(c\mathfrak{X}) \to c\mathfrak{X} \quad \text{et} \quad \gamma T \to \gamma c(\gamma T)=\gamma(c\gamma T) \to \gamma T. \blacksquare$$

REMARQUE. Il suit de là que si $\mathfrak{X}$ est régulier l'espace $c\mathfrak{X}$ est un espace de Kelley fonctionnellement séparé dont la topologie est plus fine qu'une topologie complètement régulière (d'après (1.2.2)), mais rien ne permet d'affirmer que $c\mathfrak{X}$ est complètement régulier.

Enfin on a le résultat, facile à vérifier en comparant les ensembles $\mathrm{Hom}_{\mathbb{FS}}(c\mathfrak{X},T)$ et $\mathrm{Hom}_{\mathbb{CR}}(\mathfrak{X},\gamma T)$:

(1.4.3) PROPOSITION. Le foncteur c est adjoint à gauche au foncteur

CHAPITRE 2 : ESPACES COMPACTOLOGIQUES ET ALGEBRES LOCALEMENT CONVEXES.

2.1. Le spectre d'une algèbre localement convexe.

Précisons immédiatement que les algèbres localement convexes utilisées ici sont supposées, une fois pour toutes, commutatives, unitaires, séparées et à produit séparément continu. Pour une telle algèbre A on appelle caractère de A toute forme linéaire (complexe) multiplicative unitaire et continue, et l'on désigne par $\mathcal{G}(A)$ l'espace des caractères de A. Evidemment $\mathcal{G}(A)\subset A'$, où A' est le dual de l'elc A. On va munir $\mathcal{G}(A)$ d'une structure compactologique :

(2.1.1) LEMME. Toute partie équicontinue faiblement compacte de A' coupe $\mathcal{G}(A)$ suivant une partie faiblement compacte.

PREUVE. Soit H une telle partie équicontinue et soit $K=H\cap\mathcal{G}(A)$. Il est immédiat que K est faiblement fermée dans H puisqu'une limite faible de caractères de H est une forme linéaire multiplicative unitaire, et aussi continue car H est équicontinue, donc un caractère. ∎

(2.1.2) PROPOSITION. Les parties équicontinues faiblement fermées (ou faiblement compactes) de $\mathcal{G}(A)$, munies de la topologie faible $\sigma(A',A)$, structurent $\mathcal{G}(A)$ en espace compactologique régulier.

PREUVE. Il suffit de voir que $\mathcal{G}(A)$ est régulier. Or ceci est évident puisque la topologie $\sigma(A',A)$ est complètement régulière.

2.2. L'algèbre localement convexe d'un espace compactologique.

L'algèbre $C(\mathfrak{X})$ d'un espace compactologique $\mathfrak{X}$ peut être aisément topologisée. Il est en effet tout indiqué de placer sur $C(\mathfrak{X})$ la topologie de la convergence "compacte" sur $\mathfrak{X}$. La définition de $C(\mathfrak{X})$ montre immédiatement que $C(\mathfrak{X})$ est ainsi la limite projective, dans la catégorie $\mathbb{ELC}$, des algèbres de Banach $C(K)$ lorsque K décrit $\mathcal{K}$. Le fait que chaque algèbre $C(K)$ est une C^*-algèbre commutative donne l'existence sur $C(\mathfrak{X})$ d'une involution $f \to \bar{f}$ et d'un système fondamental de semi-normes $\|f\|_K = \sup_{x\in K}|f(x)|$ telles que $\|fg\|_K \leqslant \|f\|_K\|g\|_K$ et

$\|f\bar{f}\|_K = \|f\|_K^2$. Autrement dit avec le langage de E.Michael (M2) et R.M.Brooks (B6), $C(\mathfrak{X})$ est une $*$-algèbre multiplicativement localement convexe commutative et complète.

(2.2.1) PROPOSITION. Soit $\mathfrak{X}$ un espace compactologique. La topologie de la convergence "compacte" sur $\mathfrak{X}$ fait de $C(\mathfrak{X})$ une $*$-algèbre multiplicativement localement convexe commutative et complète, limite projective de C^*-algèbres commutatives.

2.3. Les théorèmes de Gelfand.

Ainsi à tout espace compactologique on associe un objet dual $C(\mathfrak{X})$ qui est une algèbre localement convexe, et à toute algèbre localement convexe A un objet dual $\mathcal{G}(A)$ qui est un espace compactologique. Il importe donc de comparer les espaces compactologiques $\mathfrak{X}$ et $\mathcal{G}C(\mathfrak{X})$ et les algèbres A et $C\mathcal{G}(A)$.

La transformation de Dirac. A tout élément x de $\mathfrak{X}$ associons la fonction $\hat{x} : C(\mathfrak{X}) \longrightarrow C$, définie par $\hat{x}(f)=f(x)$. L'application $x \longrightarrow \hat{x}$ est évidemment la transformation de Dirac. Alors :

(2.3.1) PROPOSITION. Pour tout $x \in \mathfrak{X}$ on a $\hat{x} \in \mathcal{G}C(\mathfrak{X})$ et la transformée de Dirac est un morphisme $\mathfrak{X} \longrightarrow \mathcal{G}C(\mathfrak{X})$ de la catégorie $\mathbb{C}$.

PREUVE. Déjà $\hat{x}$ est évidemment une forme linéaire multiplicative unitaire sur $C(\mathfrak{X})$ et si $f_i \longrightarrow f$ dans $C(\mathfrak{X})$ alors, $\{x\}$ étant "compact", on a bien $f_i(x) \longrightarrow f(x)$; donc $\hat{x}$ est un caractère de $C(\mathfrak{X})$. Supposons maintenant $x_i \longrightarrow x$ dans un "compact" K de $\mathfrak{X}$; alors $\hat{x}_i$ reste dans le polaire V_K° où $V_K=\{f, \|f\|_K \leq 1\}$, donc $\hat{K}$ reste contenu dans le "compact" $V_K^\circ \cap \mathcal{G}C(\mathfrak{X})$ de $C(\mathfrak{X})$; de plus $f(x_i) \longrightarrow f(x)$ pour chaque $f \in C(\mathfrak{X})$ donc $\hat{x}_i \longrightarrow \hat{x}$ dans le "compact" $V_K^\circ \cap \mathcal{G}C(\mathfrak{X})$. ∎

(2.3.2) THEOREME. Soit $\mathfrak{X}$ un espace compactologique. Les assertions suivantes sont équivalentes :

a) $\mathfrak{X}$ est régulier.

b) La transformée de Dirac est injective.

c) La transformée de Dirac est un isomorphisme de la catégorie $\mathbb{C}$ (ou de la catégorie $\mathbb{C}R$).

PREUVE. Il est clair que $a \Longleftrightarrow b$ et que, d'après (2.1.2), $c \Longrightarrow a$. Il reste à voir $a \Longrightarrow c$. Pour cela supposons $\mathfrak{X}$ régulier et montrons qu'alors tout "compact" de $\mathcal{G}C(\mathfrak{X})$ est image d'un "compact" de $\mathfrak{X}$. Un "compact" de $\mathcal{G}C(\mathfrak{X})$ est fixé par la donnée d'un "compact" K de $\mathfrak{X}$ et d'un scalaire $M>0$ et est formé des caractères u tels que $|u(f)| \leq M$ si $\|f\|_K \leq 1$. Or, $\mathfrak{X}$ étant régulier, le morphisme canonique d'algèbres $j_K : C(\mathfrak{X}) \longrightarrow C(K)$ est surjectif et $u \in \ker j_K$ pour tout caractère u précédent. Il suit de là que chaque tel caractère u est en réalité défini par un caractère u_K de l'algèbre $C(K)$, et comme K est compact, u_K est en fait l'image $\hat{x}$ d'un point $x \in K$, ce qui suffit pour voir qu'on peut supposer $M=1$ et démontrer l'égalité $\hat{K}=V_K^\circ \cap \mathcal{G}C(\mathfrak{X})$. Ainsi la transformée de Dirac est une bijection qui échange continûment (donc bicontinûment) les "compacts" de $\mathfrak{X}$ et ceux de $\mathcal{G}C(\mathfrak{X})$; c'est donc bien un isomorphisme de la catégorie $\mathbb{C}R$. ∎

La transformée de Gelfand. Soit A une algèbre localement convexe. La transformée de Gelfand associe à tout $a \in A$ la fonction $\hat{a}$ définie sur $\mathcal{G}(A)$ par $\hat{a}(u)=u(a)$. Alors :

(2.3.3) PROPOSITION. Pour tout $a \in A$ on a $\hat{a} \in C\mathcal{G}(A)$ et la transformée de Gelfand est un morphisme $A \longrightarrow C\mathcal{G}(A)$ d'algèbres localement convexes.

PREUVE. Pour voir $\hat{a} \in C\mathcal{G}(A)$ fixons un "compact" H de $\mathcal{G}(A)$; si $u_i \longrightarrow u$ dans H alors $u_i \longrightarrow u$ dans l'elc A'_σ donc en particulier $u_i(a) \longrightarrow u(a)$ et $\hat{a}(u_i) \longrightarrow \hat{a}(u)$ d'où $\hat{a} \in C\mathcal{G}(A)$. Il est clair que la transformée de Gelfand est un morphisme (unitaire) d'algèbres et il reste à vérifier sa continuité. Or $a_i \longrightarrow a$ dans A signifie encore $a_i \longrightarrow a$ uniformément sur toute partie équicontinue de A' donc implique $\hat{a}_i \longrightarrow \hat{a}$ uniformément sur tout "compact" de $\mathcal{G}(A)$, soit $\hat{a}_i \longrightarrow \hat{a}$ dans $C\mathcal{G}(A)$. ∎

On a vu en (2.2.1) que l'algèbre $C\mathcal{G}(A)$ est assez particulière, de sorte qu'on ne peut espérer l'existence d'un isomorphisme entre A et $C\mathcal{G}(A)$ qu'en imposant à A d'être une $*$-algèbre multiplicativement localement convexe complète, limite projective de C^*-algèbres commutatives. On va voir que ces conditions sont exactement suffisantes, ce qui donne une généralisation du théorème classique de Gelfand sur les C^*-algèbres commutatives.

(2.5.4) <u>THEOREME</u>. Soit A une algèbre localement convexe (commutative, unitaire, séparée,...), munie d'une involution $*$ et admettant un système fondamental filtrant $\mathcal{P}$ de semi-normes p vérifiant, pour tous $x,y\in A$, les conditions :

$$p(xy)\leqslant p(x)p(y) \quad \text{et} \quad p(xx^*)=(p(x))^2.$$

Alors la transformation de Gelfand réalise un isomorphisme de A sur une sous-algèbre topologique partout dense de l'algèbre complète $C\mathcal{G}(A)$. Pour que ce soit un isomorphisme de A sur $C\mathcal{G}(A)$ il faut et il suffit qu'en plus A soit complète.

<u>PREUVE</u>. Désignons par $\mathcal{V}$ la base de filtre formée des boules $V=B_p(1)$ associées aux semi-normes $p\in\mathcal{P}$. Alors $V.V\subset V$ pour tout $V\in\mathcal{V}$, de sorte que l'espace semi-normé A_V est en fait une algèbre semi-normée, ce qui permet facilement de voir que l'espace de Banach $\hat{A}_V$ (séparé-complété de A_V) est une algèbre de Banach commutative unitaire, l'application canonique $\pi_V : A\longrightarrow\hat{A}_V$ étant un morphisme d'algèbres. La condition $p(xx^*)=(p(x))^2$ implique la condition $p(x)=p(x^*)$, donc l'égalité $V=V^*$, de sorte que l'involution $*$ se transporte à l'algèbre A_V et par continuité à l'algèbre $\hat{A}_V$. Ainsi $\hat{A}_V$ est une C^*-algèbre commutative unitaire, puisque sa norme $\|.\|$, déduite de p, vérifie la condition $\|xx^*\|=\|x\|^2$, et l'application $\pi_V : A\longrightarrow\hat{A}_V$ est un $*$-morphisme. Il suit de là que $\hat{A}_V$ s'identifie, d'après le théorème classique de Gelfand, à l'algèbre $C(\mathcal{G}_V)$ où $\mathcal{G}_V$ est le spectre (compact) de $\hat{A}_V$.

Fixons $V\in\mathcal{V}$ et déterminons $\mathcal{G}_V$. Le morphisme $\pi_V : A\longrightarrow\hat{A}_V$ donne par transposition évidente une application $j_V : \mathcal{G}_V\longrightarrow\mathcal{G}(A)$, d'ailleurs injective puisque $\pi_V(A)$ est dense dans $\hat{A}_V$. Or les ensembles $V^\circ\cap\mathcal{G}(A)$ forment une base de "compacts" de $\mathcal{G}(A)$. Cela étant prouvons l'égalité

$V^\circ\cap\mathcal{G}(A)=j_V(\mathcal{G}_V)$: si $u\in\mathcal{G}_V$ alors, u étant de norme 1, on a $u(\hat{V})\subset\Delta$ où $\hat{V}$ est la boule unité de $\hat{A}_V$ et Δ le disque unité du corps des complexes, donc $j_V(u)\in V^\circ$; réciproquement tout caractère u de A tel que $u\in V^\circ$ envoie V dans Δ, donc par prolongement continu, $\hat{V}$ dans Δ, ce qui prouve $u\in j_V(\mathcal{G}_V)$. Ainsi les ensembles $j_V(\mathcal{G}_V)$ forment une base de "compacts" de $\mathcal{G}(A)$. Si l'on remarque maintenant que sur chaque $\mathcal{G}_V$ la topologie (compacte) est celle de la convergence simple sur $\hat{A}_V$, on voit que c'est aussi celle de la convergence simple sur $\pi_V(A)$ (car $\mathcal{G}_V$ est équicontinu dans le dual $(\hat{A}_V)'$ et $\pi_V(A)$ est dense dans $\hat{A}_V$). Il suit de là que j_V est un isomorphisme entre l'espace compact $\mathcal{G}_V$ et le "compact" $V^\circ\cap\mathcal{G}(A)$ de l'espace compactologique $\mathcal{G}(A)$. Identifiant alors j_V à une injection canonique, on voit que les compacts $\mathcal{G}_V$ forment une base de "compacts" de $\mathcal{G}(A)$. Il en résulte, de façon évidente, que l'algèbre $C\mathcal{G}(A)$ n'est autre que la limite projective, dans la catégorie ELC par exemple, des C^*-algèbres $C(\mathcal{G}_V)$. Autrement dit $C\mathcal{G}(A)$ est isomorphe à la limite projective des algèbres $\hat{A}_V$ et l'on reconnaît dans ce dernier espace le complété $\hat{A}$ de l'elc A, ce qui termine la démonstration. ∎

<u>CHAPITRE 3</u> : <u>ESPACES VECTORIELS COMPACTOLOGIQUES CONVEXES</u>.

3.1. <u>Espaces vectoriels compactologiques convexes</u>.

On introduit maintenant une structure vectorielle sur les espaces compactologiques. La convexité s'avérant nécessaire pour toutes les questions de dualité, on choisit comme définition :

(3.1.1) <u>DEFINITION</u>. On appelle espace (vectoriel) compactologique convexe (ecc) la donnée d'un espace vectoriel $\mathfrak{X}$ muni d'une compactologie $\mathcal{K}$ telle que :

a) $\mathcal{K}$ admet un système fondamental de disques K dont la topologie τ_K est localement convexe.

b) Pour tout disque $K\in\mathcal{K}$ l'application $(\lambda,x)\longrightarrow\lambda x$ de ΔK dans K est continue.

c) pour tous disques H et K de $\mathcal{K}$ il existe un disque $L\in\mathcal{K}$ tel que $H+K\subset L$, l'application $(x,y)\longrightarrow x+y$ de $H\times K$ dans L étant de plus continue.

En choisissant évidemment comme morphismes entre deux ecc les applications linéaires qui sont des morphismes compactologiques, on obtient une catégorie ECC. L'étude précise de cette catégorie sera l'objet de la troisième partie de ce travail. Pour l'instant, remarquons que l'on peut définir le dual $\mathfrak{X}^*$ d'un ecc $\mathfrak{X}$ comme étant l'ev $\mathrm{Hom}_{ECC}(\mathfrak{X},\mathbb{C})$ des formes linéaires sur $\mathfrak{X}$ dont les restrictions aux "compacts" de $\mathfrak{X}$ sont continues. Muni de la topologie de la convergence "compacte" sur $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{X}^*$ apparaît comme un elc complet, sous-espace fermé de l'algèbre localement convexe complète $C(\mathfrak{X})$. Ainsi :

(3.1.2) PROPOSITION. Le dual $\mathfrak{X}^*$ d'un ecc $\mathfrak{X}$ est un elc séparé complet.

Ce qui amène immédiatement à la définition :

(3.1.3) DEFINITION. On dit qu'un ecc $\mathfrak{X}$ est régulier (dans la catégorie ECC) lorsqu'il est séparé par son dual $\mathfrak{X}^*$.

Si $\mathfrak{X}$ est un ecc régulier, l'espace compactologique sous-jacent est évidemment régulier. La réciproque est généralement fausse.

REMARQUE. Les ecc ont été introduits pour la première fois par Waelbroeck dans (W2). La question a été reprise récemment par le même auteur dans (W3) où les ecc sont étudiés sous le nom de "cb-spaces".

2. Les ecc réguliers et la dualité.

Désignons par ECCR la catégorie des ecc réguliers. Un critère simple de régularité est le suivant :

(3.2.1) PROPOSITION. Pour que l'ecc $\mathfrak{X}$ soit régulier il faut et il suffit qu'il existe sur $\mathfrak{X}$ une topologie localement convexe séparée induisant sur chaque "compact" K de $\mathfrak{X}$ la topologie τ_K.

PREUVE. Si $\mathfrak{X}$ est ecc régulier la topologie séparée $\sigma(\mathfrak{X},\mathfrak{X}^*)$ convient. Réciproquement si $\mathcal{T}$ est une telle topologie alors le dual $(\mathfrak{X}_{\mathcal{T}})'$ est contenu dans $\mathfrak{X}^*$ de sorte que $\mathfrak{X}^*$ sépare $\mathfrak{X}$. ∎

Les foncteurs $\bar{\gamma}$ et $\bar{c}$. Si E est un elc séparé (dont la catégorie est notée ELCS), la donnée des disques compacts de E (qui forment bien une famille filtrante car l'enveloppe disquée de deux disques compacts de E est encore compacte) définit un ecc, noté $\bar{\gamma}E$, ce qui introduit un foncteur $\bar{\gamma}$: ELCS$\longrightarrow$ECCR. Si E est quasi-complet, on a $\bar{\gamma}E=\gamma E$. Réciproquement si $\mathfrak{X}$ est un ecc régulier, la topologie $\bar{c}(\mathfrak{X})$ localement convexe la plus fine sur $\mathfrak{X}$ rendant continues toutes les injections $K\longrightarrow\mathfrak{X}$, où K décrit $\mathcal{K}$, définit un elc séparé $\bar{c}\mathfrak{X}$ et $\bar{c}$ est un foncteur ECCR$\longrightarrow$ELCS. D'ailleurs, de même qu'en (1.4), on peut voir aisément les égalités $\bar{c}\bar{\gamma}\bar{c}=\bar{c}$ et $\bar{\gamma}\bar{c}\bar{\gamma}=\bar{\gamma}$. On dira donc dans la suite que l'elc E est un espace de Kelley (en tant qu'elc) lorsque $\bar{c}\bar{\gamma}E=E$.

La dualité. On a vu que le dual $\mathfrak{X}^*$ d'un ecc $\mathfrak{X}$ est un elc complet. Dualement le dual E' d'un elc E, muni de la compactologie dite équicontinue, où les "compacts" sont les disques équicontinus faiblement compacts, est en fait un ecc régulier. Il convient de remarquer ici que le point de vue compactologique est bien différent du point de vue bornologique. En particulier le dual $(E')^*$ de l'ecc E' est complet de même que le b-bidual $(E')^+$ de E, mais ce n'est en général qu'un sous-espace de ce b-bidual. D'ailleurs le théorème de complétion de Grothendieck prouve assez que $(E')^*$ n'est autre que le complété $\hat{E}$ de E (comparer avec (I.2.9.7)). Mais ce résultat va se retrouver ici de façon particulièrement simple et se compare aux théorèmes de Gelfand (2.3.2) et (2.3.4).

(3.2.2) THEOREME. (Banach-Grothendieck-Waelbroeck)

a) Pour tout ecc régulier $\mathfrak{X}$ on a $\mathfrak{X}=(\mathfrak{X}^*)'$.

b) Pour tout elc séparé E on a $\hat{E}=(E')^*$.

PREUVE. Posons $\mathcal{Y}=(\mathfrak{X}^*)'$. Les "compacts" de $\mathcal{Y}$ sont les bipolaires $K^{\circ\circ}$ dans $\mathcal{Y}$ des "compacts" K de $\mathfrak{X}$ que l'on peut choisir disqués, la régularité de $\mathfrak{X}$ impliquant l'inclusion $\mathfrak{X}\subset\mathcal{Y}$). Il suit de là que $K^{\circ\circ}$ est l'adhérence de K pour la topologie $\sigma(\mathcal{Y},\mathfrak{X}^*)$; mais K étant disqué et compact pour τ_K, est aussi compact pour $\sigma(\mathcal{Y},\mathfrak{X}^*)$, d'où les égalités $K=K^{\circ\circ}$ et $\mathfrak{X}=\mathcal{Y}$. Soit maintenant E un elc séparé ; il est clair que c'est un sous-elc de l'elc séparé et complet $(E')^*$. Mais le dual de $(E')^*$ coïncide avec E' d'après la partie a) du théorème, ce qui prouve, avec Hahn-Banach, la densité de E dans $(E')^*$. ∎

CHAPITRE 4 : ESPACES TOPOLOGIQUES ET ALGEBRES COMPACTOLOGIQUES.

4.1. Algèbres compactologiques convexes.

(4.1.1) DEFINITION. On appelle algèbre compactologique convexe (acc) une algèbre commutative unitaire $\mathcal{A}$ munie d'une compactologie vectorielle convexe telle que le produit de $\mathcal{A}$ soit un morphisme relativement à chaque variable.

Le spectre de $\mathcal{A}$ est l'espace $G(\mathcal{A})$ des caractères de $\mathcal{A}$ c'est-à-dire des formes linéaires multiplicatives unitaires qui sont des morphismes compactologiques. On considère $G(\mathcal{A})$ comme une partie fermée du dual topologisé $\mathcal{A}^*$ de l'ecc $\mathcal{A}$, ce qui revient à placer sur $G(\mathcal{A})$ la topologie de la convergence "compacte" sur $\mathcal{A}$. Donc :

(4.1.2) PROPOSITION. Le spectre $G(\mathcal{A})$ d'une acc $\mathcal{A}$ est un espace topologique complètement régulier, complet pour une structure uniforme compatible avec sa topologie.

4.2. L'acc $\mathcal{C}(T)$ des fonctions continues sur un espace topologique T.

On va munir l'algèbre $\mathcal{C}(T)$ d'une structure compactologique. Cela est possible en vertu du :

(4.2.1) LEMME. Soit H une partie équicontinue et simplement bornée de $\mathcal{C}(T)$. Alors l'enveloppe disquée simplement fermée $\bar{\Gamma}(H)$ de H dans l'espace produit C^T est simplement compacte et contenue dans $\mathcal{C}(T)$.

PREUVE. C'est une conséquence facile du théorème de Tychonov et des propriétés des parties équicontinues. ∎

(4.2.2) DEFINITION. Les disques équicontinus et simplement compacts de $\mathcal{C}(T)$ stucturent $\mathcal{C}(T)$ en acc régulière.

Dans le cas où T est un espace de Kelley, on peut introduire l'acc $\mathcal{C}(T)$ d'une manière plus classique selon :

(4.2.3) PROPOSITION. Soit T un espace topologique de Kelley. Alors on a les égalités compactologiques $\mathcal{C}(T)=\gamma C(\gamma T)=\bar{\gamma}C(\gamma T)$.

PREUVE. On a déjà l'égalité algébrique $\mathcal{C}(T)=C(\gamma T)$ puisque T est espace de Kelley et aussi l'égalité compactologique $\gamma C(\gamma T)=\bar{\gamma}C(\gamma T)$ puisque $C(\gamma T)$ est un elc complet. Un "compact" H de $\mathcal{C}(T)$ étant équicontinu et simplement compact est aussi compact dans $C(\gamma T)$ car sur H la topologie de la convergence simple et celle de la convergence compacte coïncident. Réciproquement montrons que tout compact H de $C(\gamma T)$ est un "compact" de $\mathcal{C}(T)$. Il est clair que H est déjà simplement compact et il reste à prouver qu'il est équicontinu. Or $C(\gamma T)$ est la limite projective des espaces $C(K)$ lorsque K décrit l'ensemble des compacts de T. Il suit de là que les parties H_K formées des restrictions des fonctions de H aux compacts K de T sont compactes dans $C(K)$, donc équicontinues dans $C(K)$ d'après le théorème d'Ascoli. Désignons, par abus de notation, par j l'application définie sur T par $t \longrightarrow \hat{t}$ où $\hat{t}$ est considéré comme un élément de l'algèbre de Banach $C(H)$; ainsi $j : T \longrightarrow C(H)$. On sait que H est équicontinue si et seulement si j est une application continue et c'est ce qu'on va s'attacher à démontrer maintenant. Les applications analogues $j_K : K \longrightarrow C(H_K)$ sont continues puisque H_K est équicontinue dans $C(K)$. Par ailleurs la surjection continue $\pi_K : H \longrightarrow H_K$ définit de façon évidente une application continue $\tilde{\pi}_K : C(H_K) \longrightarrow C(H)$ et il est clair que le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[r, "j"] & C(H) \\
K \arrow[u] \arrow[r, "j_K"] & C(H_K) \arrow[u, "\tilde{\pi}_K"']
\end{tikzcd}$$

est commutatif. Ceci signifie que j a ses restrictions aux compacts K de T qui sont continues, donc j est bien continue puisque T est un espace de Kelley, ce qui achève la démonstration. ∎

4.3. Les espaces compactologiquement replets.

On est maintenant tout naturellement amené à comparer les espaces topologiques T et $G\mathcal{C}(T)$. Avant d'aborder cette étude il convient de faire la différence entre les éléments $u\in G\mathcal{C}(T)$, que nous appellerons caractères compactologiques de $\mathcal{C}(T)$ et les caractères algébriques de $\mathcal{C}(T)$, qui sont les formes linéaires multiplicatives unitaires et dont l'ensemble sera désigné provisoirement par $g\mathcal{C}(T)$. Dans cet ordre d'idées on a déjà :

(4.3.1) LEMME 1. Soit $u\in g\mathcal{C}(T)$ un caractère algébrique de $\mathcal{C}(T)$. Alors :

a) Pour toute fonction $f\in\mathcal{C}(T)$ on a :

1° $u(f)\in f(T)$; en particulier $u(f)\geqslant o$ si $f\geqslant o$.

2° $u(\bar{f})=\overline{u(f)}$.

3° $u(|f|)=|u(f)|$.

b) Pour toute suite $(f_n)_{n\geqslant 1}$ de fonctions continues sur T, il existe un point $t\in T$ tel que $u(f_n)=f_n(t)$ pour tout $n\geqslant 1$.

PREUVE. Si f ne s'annule pas, la fonction $1/f$ est continue sur T, d'où il suit $u(f)\neq o$. Si l'on avait $u(f)\notin f(T)$, la fonction $g=f-u(f)$ ne s'annulerait pas bien que $u(g)=o$ d'où 1°. On en tire que $u(f)$ est réel lorsque f est réelle, d'où facilement 2° et 3°. Pour prouver b) posons successivement :

$$g_n=|f_n-u(f_n)| \quad ; \quad h_n=2^{-n}g_n(1+g_n)^{-1} \quad ; \quad k_N=\sum_1^N h_n \quad ; \quad k=\sum_1^\infty h_n \ .$$

Alors $u(g_n)=o$ et $u(h_n)=o$ donc $u(k_N)=o$. De plus k est une fonction continue et $u(k)=o$ d'après a.1°, car $|u(k)|\leqslant 2^{-N}$ pour tout N puisque $\|k-k_N\|\leqslant 2^{-N}$. Toujours d'après a.1° il existe donc $t\in T$ tel que $k(t)=o$, de sorte que $g_n(t)=o$, soit précisément $u(f_n)=f_n(t)$, pour tout n. ∎

(4.3.2) LEMME 2. Soit u un caractère compactologique de $\mathcal{C}(T)$. Soit $(f_i)_{i\in I}$ une famille équicontinue et simplement bornée de fonctions $f_i\in\mathcal{C}(T)$ telles que $f_i\geqslant o$ et $u(f_i)=o$ pour tout i. Alors la fonction $f=\operatorname{Sup}_{i\in I} f_i$ est continue et $u(f)=o$.

PREUVE. Remarquons déjà que, pour deux fonctions continues f et g telles que $f\geqslant o$, $g\geqslant o$ et $u(f)=u(g)=o$, la fonction

$$h=\operatorname{Sup}(f,g)=\frac{1}{2}(f+g+|f-g|)$$

est telle que $u(h)=o$ d'après le lemme 1 ; de plus il est facile de voir que, pour deux points t et t_o de T, on a :

$$|h(t)-h(t_o)|\leqslant \operatorname{Max}\left[|f(t)-f(t_o)|, |g(t)-g(t_o)|\right].$$

Ceci implique que, pour toute partie finie J de I, la fonction $f_J=\operatorname{Sup}_{i\in J} f_i$ vérifie $u(f_J)=o$ et admet en chaque point t_o de T un module de continuité majoré par le module de continuité

$$\omega_I(t_o,t)=\operatorname{Sup}_{i\in I}|f_i(t)-f_i(t_o)|$$

de la famille équicontinue $(f_i)_{i\in I}$. Il suit de là que la fonction f, qui est définie sur T puisque la famille $(f_i)_{i\in I}$ est simplement bornée et qui n'est autre que la limite simple des fonctions f_J – lorsque J décrit l'ordonné filtrant des parties finies de I, a aussi un module de continuité majoré par $\omega_I(t_o,.)$. En particulier f est continue et la famille formée de la fonction f et des fonctions f_J est équicontinue et simplement bornée. Comme u est un caractère compactologique, les conditions $u(f_J)=o$ impliquent $u(f)=o$. ∎

(4.3.3) LEMME 3. Soient u un caractère compactologique de $\mathcal{C}(T)$ et H un "compact" de $\mathcal{C}(T)$. Alors il existe un point $t\in T$ tel que $u(f)=f(t)$ pour toute $f\in H$.

PREUVE. Le module de continuité de la fonction $g=|f-u(f)|$ est majoré par celui de f, de sorte qu'en remplaçant H par l'ensemble des fonctions g on obtient une partie équicontinue de $\mathcal{C}(T)$ qui est aussi simplement bornée, puisque u est borné sur H, et simplement fermée (vérification immédiate utilisant la compacité simple de H). Autrement dit on se ramène à supposer que les fonctions f de H sont telles que $f\geqslant o$ et $u(f)=o$, et l'on voit qu'il faut prouver (et cela suffit) que, dans ces conditions, il existe un point $t\in T$ où s'annulent toutes les fonctions f de H. Or par le lemme 2, la fonction $h=\operatorname{Sup}_{f\in H} f$ est continue et telle que $u(h)=o$, donc il existe, d'après le lemme 1, un point $t\in T$ annulant h, ce qui entraîne bien $f(t)=o$ pour toutes les fonctions f de H. ∎

<u>La transformation de Dirac</u>. Pour tout espace topologique T, désignons pour simplifier par $\widetilde{T}$ l'espace topologique (complètement régulier) $\widetilde{T}=G\mathcal{C}(T)$. A tout point $t\in T$ associons la fonction $\hat{t}$, définie sur $\mathcal{C}(T)$ par $\hat{t}(f)=f(t)$. Il est clair que $\hat{t}$ est un caractère compactologique de $\mathcal{C}(T)$. L'application $j : t \longrightarrow \hat{t}$ de T dans $\widetilde{T}$ est la transformation de Dirac.

(4.3.4) <u>THEOREME</u>.

a) La transformation de Dirac j est une application continue de T dans $\widetilde{T}$ dont l'image jT est partout dense dans $\widetilde{T}$.
b) Pour que j soit injective il faut et il suffit que T soit fonctionnellement séparé.
c) Pour que j soit un homéomorphisme de T sur le sous-espace partout dense jT de $\widetilde{T}$, il faut et il suffit que T soit complètement régulier.

<u>PREUVE</u>. Si $t_i \longrightarrow t$ dans T alors, pour tout "compact" H de $\mathcal{C}(T)$ on a $\hat{t}_i \longrightarrow \hat{t}$ uniformément sur H puisque H est équicontinu, donc j est bien continue. La densité de jT dans $\widetilde{T}$ est une conséquence évidente du lemme 3, d'où l'assertion a). L'assertion b) est évidente, de même que la condition nécessaire de l'assertion c). Supposons maintenant T complètement régulier, donc fonctionnellement séparé, et identifions le au sous-espace partout dense jT de $\widetilde{T}$. La topologie propre de T est a priori plus fine que celle induite par $\widetilde{T}$ (car j est continue), mais elle est aussi moins fine car ce n'est autre que la topologie de la convergence simple sur $\mathcal{C}(T)$, évidemment moins fine que celle de la convergence "compacte". ∎

<u>Cas des espaces complètement réguliers</u>. Avant de donner les propriétés de T et $\widetilde{T}$ lorsque T est complètement régulier, remarquons que la théorie exposée ici est, sur beaucoup de points, analogue à la théorie des espaces "realcompact" (ou Q-espaces) de Hewitt (H1) telle qu'on peut aussi la trouver dans Gillman-Jerison (G1), à cela près qu'on passe ici des fonctions réelles aux fonctions complexes mais c'est sans importance. Rappelons sommairement qu'à tout espace complètement régulier T on associe l'espace topologique complètement régulier υT (lire upsilon), qui est l'espace $g\mathcal{C}(T)$ des caractères algébriques de $\mathcal{C}(T)$ muni de la topologie de la convergence simple sur $\mathcal{C}(T)$, tandis que le compactifié Stone-Čech $\check{T}$ de T peut s'interpréter comme l'espace des caractères de l'algèbre de Banach $C^{\infty}(T)$ des fonctions continues et bornées sur T. Les principaux résultats sont :

a) υT est un sous-espace topologique (partout dense) de $\check{T}$, complet pour la structure uniforme de la convergence simple sur $\mathcal{C}(T)$.
b) T s'identifie, par l'intermédiaire de la transformation de Dirac, à un sous-espace topologique partout dense de υT ; autrement dit υT apparaît comme le complété de T pour la structure uniforme de la convergence simple sur $\mathcal{C}(T)$. On écrira : $T \subset \upsilon T \subset \check{T}$.
c) Les algèbres $\mathcal{C}(T)$ et $\mathcal{C}(\upsilon T)$ sont <u>algébriquement</u> isomorphes et les algèbres de Banach $C^{\infty}(T)$ et $C^{\infty}(\upsilon T)$ sont isométriques, ce qui implique les égalités (ou isomorphismes) topologiques: $\upsilon(\upsilon T)=\upsilon T$ et $(\upsilon T)^{\vee}=\check{T}$.
d) Les espaces T (complètement réguliers) tels que $T=\upsilon T$ sont dits Q-espaces par Hewitt et "realcompact spaces" par Gillman-Jerison. Utilisons la terminologie de Bourbaki (E5 §4 ex.17 p.85) en disant qu'un tel espace est <u>replet</u>. Tout espace de Lindelöf est replet.
e) L'espace υT et l'application $j : T \longrightarrow \upsilon T$ constituent la solution du problème universel des applications continues de T dans des espaces replets quelconques. On dira donc, toujours en suivant Bourbaki, que υT est la <u>réplétion</u> de T.

Cela étant, on a, en supposant toujours T complètement régulier :

(4.3.5) <u>THEOREME</u>.

a) T s'identifie, par l'intermédiaire de la transformation de Dirac, à un sous-espace dense de $\widetilde{T}$, de sorte que $\widetilde{T}$ apparaît comme le complété de T pour la structure uniforme de la convergence "compacte" sur $\mathcal{C}(T)$. En particulier, pour que $T=\widetilde{T}$ il faut et il suffit que T soit complet pour cette structure uniforme.
b) Les algèbres $\mathcal{C}(T)$ et $\mathcal{C}(\widetilde{T})$ sont <u>compactologiquement</u> isomorphes et les algèbres de Banach $C^{\infty}(T)$ et $C^{\infty}(\widetilde{T})$ sont isométriques. On a donc les égalités topologiques :

$(\tilde{T})^{\sim}=\tilde{T}$; $\upsilon(\tilde{T})=\upsilon(\upsilon T)=\upsilon T$; $(\tilde{T})^{\vee}=(\upsilon T)^{\vee}=\check{T}$.

c) L'espace topologique $\tilde{T}$ est un sous-espace topologique (partout dense) de υT, donc aussi de $\check{T}$. En particulier tout espace replet vérifie $T=\tilde{T}=\upsilon T$.

PREUVE. L'assertion a) provient de (4.3.4) et du fait que $\tilde{T}$ est complet pour la stucture uniforme considérée (d'après (4.1.1) et (4.1.2)). La transformation de Dirac $j : T \longrightarrow \tilde{T}$, identifiée à une injection canonique, donne immédiatement un morphisme compactologique de restriction $\alpha : \mathcal{C}(\tilde{T}) \longrightarrow \mathcal{C}(T)$. On définit l'application $\beta : \mathcal{C}(T) \longrightarrow \mathcal{C}(\tilde{T})$ par $(\beta f)(u)=u(f)$; pour tout "compact" H de $\mathcal{C}(T)$, on a, pour $f \in H$ et $u,v \in \tilde{T}$:

$$|(\beta f)(u)-(\beta f)(v)|=|(u-v)(f)| \leqslant d_H(u,v)$$

où d_H est précisément un écart de la structure uniforme de $\tilde{T}$, de sorte que βH est équicontinu dans $\mathcal{C}(\tilde{T})$; comme βH est aussi simplement borné dans $\mathcal{C}(\tilde{T})$ (car $(\beta f)(u) \in u(H)$ pour toute $f \in H$, et que l'application β est simplement continue sur H), on voit que β est un morphisme compactologique. Enfin $\alpha\beta=1$ car $(\alpha\beta f)(\hat{t})=(\beta f)(\hat{t})=\hat{t}(f)=f(t)$, et $\beta\alpha=1$ puisque, pour $\tilde{f} \in \mathcal{C}(\tilde{T})$, les fonctions $\beta\alpha\tilde{f}$ et $\tilde{f}$ sont deux prolongements continus de la fonction $f=\alpha\tilde{f} \in \mathcal{C}(T)$; le résultat provient donc de la densité de T dans $\tilde{T}$. On a ainsi déjà l'isomorphisme compactologique de $\mathcal{C}(T)$ sur $\mathcal{C}(\tilde{T})$, et si l'on remarque que le prolongement $\tilde{f}=\beta f$ d'une fonction $f \in \mathcal{C}(T)$ est tel que $\tilde{f}(\tilde{T})=f(T)$ d'après (4.3.1), on obtient l'isométrie des algèbres de Banach $C^{\infty}(T)$ et $C^{\infty}(\tilde{T})$. Le reste du théorème est une conséquence évidente de ce qui vient d'être dit. ∎

REMARQUE. L'assertion a) est à rapprocher à la fois du théorème (3.2.2.b) relatif aux elc et du théorème (2.3.4) relatif aux $*$-algèbres multiplicativement localement convexes.

Les espaces compactologiquement replets (c-replets). Pour poursuivre l'analogie avec la théorie de Hewitt, introduisons la définition :

(4.3.6) DEFINITION. Un espace complètement régulier T est dit compactologiquement replet (c-replet) lorsque $T=\tilde{T}$.

(4.3.7) PROPOSITION. Soit T un espace complètement régulier.

a) L'espace $\tilde{T}$ est c-replet.

b) Toute application continue q de T dans un espace c-replet S possède un unique prolongement continu $\tilde{q} : \tilde{T} \longrightarrow S$; autrement dit le couple $(\tilde{T},j)$ est solution du problème universel des applications continues de T dans les espaces c-replets.

c) Deux espaces c-replets sont homéomorphes si et seulement si leurs algèbres de fonctions continues sont compactologiquement isomorphes.

PREUVE. Les assertions a) et c) sont évidentes. Quant à l'assertion b), c'est une conséquence du fait plus général que toute application continue $q : T \longrightarrow S$, où S est seulement supposé complètement régulier, se prolonge de façon unique en une application continue $\tilde{q} : \tilde{T} \longrightarrow \tilde{S}$. ∎

Pour tout espace complètement régulier T, on dira que $\tilde{T}$ est la réplétion compactologique (ou c-réplétion) de T.

Comme exemples d'espaces c-replets, citons :

(4.3.8) THEOREME.

a) Tout espace replet est c-replet.

b) Tout espace paracompact est c-replet.

c) Soit T un espace de Kelley complètement régulier. On suppose que l'elc complet $C(\gamma T)$, qui n'est autre que l'espace $\mathcal{C}(T)$ muni de la topologie de la convergence compacte sur T, est un elc de Kelley. Alors T est un espace c-replet.

d) Les espaces c-replets sont exactement les spectres $G(\mathcal{A})$ des algèbres compactologiques convexes .

PREUVE. L'assertion a) est évidente car $T \subset \tilde{T} \subset \upsilon T=T$ lorsque T est replet. Démontrons c) : on sait déjà, avec (4.2.3), que $\mathcal{C}(T)=\gamma C(\gamma T)$ et l'hypothèse sur $C(\gamma T)$ montre que $\tilde{T}=G\gamma C(\gamma T)$ est un ensemble égal à $\mathcal{G}C(\gamma T)$. Or γT est un espace compactologique régulier d'après (1.4.1), donc, d'après (2.3.2), $\mathcal{G}C(\gamma T)$ s'identifie avec γT. En résumé T et $\tilde{T}$ sont égaux, donc topologiquement égaux puisque T est supposé complètement régulier. Démontrons d) : il suffit pour cela de prouver que tout espace $T=G(\mathcal{A})$ est c-replet. Déjà T est complètement régulier et il est complet pour la structure uniforme $\mathcal{U}$ de la

convergence "compacte" sur $\mathcal{A}$. Posons $\tilde{\mathcal{A}}=\mathcal{C}(T)$; il existe un morphisme compactologique évident $\mathcal{A}\longrightarrow\tilde{\mathcal{A}}$ (qui peut ne pas être injectif si $\mathcal{A}$ n'est pas séparée par son espace de caractères $G(\mathcal{A})$), ce qui prouve que sur T la structure uniforme $\tilde{\mathcal{U}}$ de la convergence "compacte" sur $\tilde{\mathcal{A}}=\mathcal{C}(T)$ est plus fine que la structure uniforme $\mathcal{U}$. Mais $\mathcal{U}$ et $\tilde{\mathcal{U}}$ sont toutes deux compatibles avec la topologie de T (car T est sous-espace de $\tilde{T}$), et T est complet pour $\mathcal{U}$, ce qui implique qu'il est complet aussi pour $\tilde{\mathcal{U}}$, c'est-à-dire qu'il est c-replet d'après (4.3.5.a).
Démontrons enfin b). Soit T un espace paracompact (il est donc déjà complètement régulier) et soit $u\in\tilde{T}$; pour prouver l'égalité $T=\tilde{T}$, il suffit, comme on l'a vu au début de la démonstration de (4.3.3), de montrer qu'il existe un point $t\in T$ tel que la condition "$f\geqslant o$ et $u(f)=o$" implique $f(t)=o$ (pour $f\in\mathcal{C}(T)$ bien entendu). Raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe, pour tout $t\in T$, une fonction $f_t\in\mathcal{C}(T)$ telle que $f_t\geqslant o$, $u(f_t)=o$ et $f_t(t)>o$. Il existe alors, pour tout $t\in T$, un voisinage ouvert U_t de t tel que $f_t(s)>o$ pour tout $s\in U_t$. Puisque T est paracompact il existe un recouvrement ouvert localement fini $(\omega_i)_{i\in I}$ plus fin que le recouvrement ouvert $(U_t)_{t\in T}$. Soit $i\longrightarrow t(i)$ une fonction de I dans T telle que $\omega_i\subset U_{t(i)}$ pour tout i ; posons $g_i=f_{t(i)}$, de sorte que $g_i\in\mathcal{C}(T)$, $g_i\geqslant o$, $u(g_i)=o$ et $g_i(s)>o$ pour tout $s\in\omega_i$. Soit maintenant $(\varphi_i)_{i\in I}$ une partition continue de l'unité subordonnée au recouvrement $(\omega_i)_{i\in I}$. Posons $h_i=g_i\varphi_i$, d'où $h_i\geqslant o$ et $u(h_i)=o$. Le recouvrement ouvert (ω_i) étant localement fini, il est facile de voir que la famille $(h_i)_{i\in I}$ est équicontinue et simplement bornée dans $\mathcal{C}(T)$. Posons $h=\operatorname{Sup}_{i\in I} h_i$; on sait d'après (4.3.2) que h est continue et telle que $u(h)=o$. Montrons enfin la contradiction en prouvant que l'on a $h(t)>o$ pour tout $t\in T$; en effet, pour t fixé dans T, il existe un indice $i\in I$ tel que $\varphi_i(t)>o$, car $\sum_{i\in I}\varphi_i=1$, d'où nécessairement $t\in\omega_i$, car le support de φ_i est contenu dans ω_i, et $h(t)\geqslant g_i(t)\varphi_i(t)>o$. ∎

(4.3.9) COROLLAIRE. Tout espace discret est c-replet. Tout espace métrisable est c-replet.

REMARQUES.

Rque 1. Pour le cas des espaces paracompacts, le théorème précise un résultat cité par Bourbaki (B4 §4 Ex.19 p.102) selon lequel tout espace paracompact est complet pour sa structure uniforme universelle (cf B4 §1 Ex.5 p.21).
Rque 2. L'égalité $G\mathcal{C}G(\mathcal{A})=G(\mathcal{A})$ pour toute acc $\mathcal{A}$, obtenue par le théorème, et l'égalité $\mathcal{C}G\mathcal{C}(T)=\mathcal{C}(T)$ de (4.3.5.b), démontrée pour tout espace complètement régulier mais valable dans le cas général, montrent que G et $\mathcal{C}$ sont en réalité des foncteurs contravariants de "dualité" (entre des catégories faciles à mettre en place) tels que $\mathcal{C}G\mathcal{C}=\mathcal{C}$ et $G\mathcal{C}G=G$.
Rque 3. Il existe des espaces complètement réguliers T qui ne sont pas c-replets. Pour en obtenir des exemples, rappelons qu'un espace topologique T est dit weierstrassien dans la terminologie de Bourbaki (B4 §1 Ex.22 p.27) ou pseudo-compact dans celle de Gillman-Jerison (Gl 1.4) lorsque toute fonction $f\in\mathcal{C}(T)$ est bornée. L'espace W des ordinaux strictement inférieurs au premier ordinal non dénombrable, muni de la topologie d'ordre, est par exemple un espace localement compact, normal, weierstrassien et non compact. Alors :

(4.3.10) PROPOSITION. Soit T un espace complètement régulier weierstrassien non compact. Alors T n'est pas c-replet et $\tilde{T}=\upsilon T=\check{T}$.

PREUVE. Puisque $\mathcal{C}(T)=\mathcal{C}(\tilde{T})$ il est clair que $\tilde{T}$ est aussi complètement régulier et weierstrassien. Comme $\tilde{T}$ est complet pour une structure uniforme compatible avec sa topologie, et qu'un espace complètement régulier weierstrassien est précompact pour toute telle structure uniforme, on voit que $\tilde{T}$ est compact. Ainsi $\tilde{T}=(\tilde{T})^{\vee}=\check{T}$. Enfin $\check{T}=\upsilon T$ puisque $\mathcal{C}(T)=C^{\infty}(T)$. ∎

Les questions de stabilité relatives aux espaces c-replets sont résolues par :

(4.3.11) PROPOSITION.
a) Tout sous-espace fermé d'un espace c-replet est c-replet.
b) Tout produit d'espaces c-replets est c-replet.
c) Toute limite projective topologique d'espaces c-replets est un espace c-replet.

PREUVE. Démontrons a) : Soit T fermé dans un espace X c-replet. L'espace T est déjà complètement régulier. Soit $i : T \to X$ l'injection canonique. Elle détermine par transposition un morphisme compactologique $\mathcal{C}(X) \to \mathcal{C}(T)$. Il s'ensuit que sur T la structure uniforme $\tilde{\mathcal{U}}$ induite par celle de la convergence "compacte" sur $\mathcal{C}(T)$ est plus fine que la structure uniforme $\mathcal{U}$ induite par celle de la convergence "compacte" sur $\mathcal{C}(X)$. Comme toutes deux sont compatibles avec la topologie de T, et comme T est complet pour $\mathcal{U}$ (car T est fermé dans X et $X=\tilde{X}$ est complet pour $\mathcal{U}$), il est complet pour $\tilde{\mathcal{U}}$, donc c-replet.
Démontrons maintenant b), d'où découlera aussitôt c). Soit $T=\prod_{i\in I} T_i$, où chaque T_i est c-replet. Déjà T est complètement régulier. Chaque projection canonique $p_i : T \to T_i$ se prolonge en une application continue $\tilde{p}_i : \tilde{T} \to T_i$, de sorte qu'il existe une application continue $\tilde{p} : \tilde{T} \to T$ telle que $p_i \tilde{p} = \tilde{p}_i$ pour tout $i\in I$. On en déduit immédiatement l'égalité $\tilde{p}j=1$ (j est l'injection $T \to \tilde{T}$) puis par densité de T dans $\tilde{T}$, l'égalité $j\tilde{p}=1$, d'où l'égalité $T=\tilde{T}$. ∎

(4.3.12) COROLLAIRE. Soit X un espace topologique séparé et soit $(T_i)_{i\in I}$ une famille de sous-espaces c-replets de X. On suppose la famille I non vide. Alors l'espace $T=\bigcap_{i\in I} T_i$ est c-replet.

PREUVE. Il est facile de vérifier que T, muni de la topologie induite par X, est en fait la limite projective des espaces T_i. ∎

REMARQUES

Rque 1. On pourra comparer ces résultats avec les résultats analogues de Gillman-Jerison (Gl 8.9, 8.10 et 8.11) relatifs aux espaces replets.

Rque 2. Soit R le corps des réels. Si I est un ensemble non dénombrable, on sait (voir par exemple Bourbaki (B4 §4 Ex.13) ou Stone (S4)) que l'espace produit R^I n'est pas normal. On obtient donc là encore un espace c-replet non normal.

Du côté des limites inductives il n'y a pas de résultat général. Citons néanmoins la proposition suivante, qui n'a pas d'analogue dans la théorie de Hewitt des espaces replets :

(4.3.13) PROPOSITION. Soit $(T_i)_{i\in I}$ une famille non vide d'espaces complètement réguliers. Alors leur somme topologique $T=\sum_{i\in I} T_i$ est un espace topologique complètement régulier dont la c-réplétion $\tilde{T}$ s'identifie à la somme topologique des c-réplétions $\tilde{T}_i$ des espaces T_i. En particulier, une somme topologique d'espaces c-replets est c-replète.

PREUVE. Déjà T est un espace séparé, et il est complètement régulier, en effet si F est un fermé de T et si $x\notin F$, alors il existe un indice i tel que $x\in T_i$ et une fonction continue f_i sur T_i telle que $f_i(x)=1$ et $f_i=0$ sur le fermé $F\cap T_i$ de T_i ; en prolongeant f_i par o en dehors de T_i on obtient une fonction continue f sur T telle que $f(x)=1$ et $f=0$ sur F. Désignons maintenant par q_i l'injection canonique $T_i \to T$, qui se prolonge en une application continue $\tilde{q}_i : \tilde{T}_i \to \tilde{T}$, ce qui permet de construire une application continue $\tilde{q} : \sum \tilde{T}_i \to \tilde{T}$ rendant commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd}
T_i \arrow[r, "q_i"] \arrow[d, "j_i"'] & T=\sum T_i \arrow[d, "j"] \\
\tilde{T}_i \arrow[r, "\tilde{q}_i"] \arrow[d] & \tilde{T} \\
\sum \tilde{T}_i \arrow[ur, "\tilde{q}"'] &
\end{tikzcd}$$

On va prouver que $\tilde{q}$ est un homéomorphisme, ce qui démontrera la proposition. L'application $\tilde{q}_i$ est définie par l'égalité $\tilde{q}_i(u_i)(f)=u_i(f|_{T_i})$ pour tout $u_i\in\tilde{T}_i$ et toute $f\in\mathcal{C}(T)$, ce qui prouve que chaque $\tilde{q}_i$ est injective car l'application $f \to f|_{T_i}$ est une surjection de $\mathcal{C}(T)$ sur $\mathcal{C}(T_i)$. De plus l'égalité $\tilde{q}_i(u_i)=\tilde{q}_j(u_j)$ pour $u_i\in\tilde{T}_i$ et $u_j\in\tilde{T}_j$ implique nécessairement $i=j$ (et par conséquent $u_i=u_j$) car, en désignant par 1_i la fonction caractéristique de T_i (qui est bien continue sur T) on a $u_i(1_i|_{T_i})=1=u_j(1_i|_{T_j})$ donc $1_i|_{T_j}\neq 0$ et $i=j$. Ainsi $\tilde{q}$ est injective.

Montrons maintenant que $\tilde{q}$ est surjective. Pour cela fixons $u\in\tilde{T}$. Pour toute $f\in\mathscr{C}(T)$ la famille des fonctions $f_J=\sum_{i\in J} f1_i$ est manifestement équicontinue et simplement bornée lorsque J décrit l'ensemble des parties finies de I. De plus $f=\sum_{i\in I} f1_i$ est la limite simple des fonctions f_J, de sorte que $u(f)=\sum_i u(f1_i)$. En particulier pour $f=1$ on a $1=\sum_i u(1_i)$, ce qui implique l'existence d'un indice $i\in I$ tel que $u(1_i)\neq o$, d'où nécessairement les égalités $u(1_i)=1$ et $u(1_j)=o$ pour $j\neq i$. Autrement dit il existe un indice $i\in I$ tel que $u(f)=u(f1_i)$ pour toute $f\in\mathscr{C}(T)$. Désignons maintenant, pour toute $f_i\in\mathscr{C}(T_i)$, par $\bar{f}_i$ la fonction continue sur T obtenue en prolongeant f_i par 1 en dehors de T_i ; il est clair que lorsque f_i décrit un "compact" de $\mathscr{C}(T_i)$, la fonction $\bar{f}_i$ décrit un "compact" de $\mathscr{C}(T)$, ce qui permet de montrer que l'application $f_i \longrightarrow u(\bar{f}_i)=u(\bar{f}_i 1_i)$ est en réalité un caractère compactologique $u_i\in\tilde{T}_i$. Comme on a donc $u(f)=u_i(f|_{T_i})$ pour toute $f\in\mathscr{C}(T)$, on voit que précisément $u=\tilde{q}_i(u_i)$, ce qui prouve que <u>$\tilde{q}$ est surjective</u>. Il reste à voir que $\tilde{q}$ est un homéomorphisme. Dire que $u^\alpha \longrightarrow u$ dans $\tilde{T}$ lorsque α décrit un ensemble ordonné A, c'est exactement dire, d'après (4.3.5.c), que $u^\alpha(f)\longrightarrow u(f)$ pour chaque $f\in\mathscr{C}(T)$; on peut supposer $u=\tilde{q}_i(u_i)$ pour un indice i fixé et un caractère $u_i\in\tilde{T}_i$, de sorte que $u^\alpha(1_i)\longrightarrow 1$, ce qui implique nécessairement $u^\alpha(1_i)=1$ pour $\alpha\geqslant\alpha_o$ et prouve en même temps que u^α est l'image $\tilde{q}_i(u_i^\alpha)$ d'un caractère $u_i^\alpha\in\tilde{T}_i$. Comme $u_i^\alpha(f|_{T_i})\longrightarrow u_i(f|_{T_i})$ pour toute $f\in\mathscr{C}(T)$, on a aussi $u_i^\alpha(f_i)\longrightarrow u_i(f_i)$ pour toute $f_i\in\mathscr{C}(T_i)$, autrement dit $u_i^\alpha\longrightarrow u_i$ dans $\tilde{T}_i$ donc aussi $u_i^\alpha\longrightarrow u_i$ dans la somme $\sum \tilde{T}_i$, ce qui termine la démonstration. ∎

<u>Comparaison entre réplétion et c-réplétion</u>. Pour les besoins de cette comparaison rappelons qu'un cardinal $\mathfrak{m}$ est dit <u>mesurable</u> (voir par exemple (Gl) Ch.12) lorsqu'il existe un espace discret T, de cardinal $\mathfrak{m}$, et une mesure positive dénombrablement additive μ sur la tribu $\mathfrak{P}(T)$ de toutes les parties de T, ne prenant que les valeurs o et 1, et telle que $\mu(T)=1$ et $\mu(\{t\})=o$ pour tout $t\in T$. On ignore s'il existe ou non des cardinaux mesurables et il semble probable que l'axiome d'existence d'un tel cardinal puisse être rajouté à la théorie des ensembles sans contradiction. D'ailleurs tout cardinal mesurable est fortement inaccessible, de sorte que la question est liée (sans être identique) à l'existence de cardinaux fortement inaccessibles. La liaison avec la théorie présentée ici s'amorce avec la proposition suivante :

(4.3.14) <u>PROPOSITION</u>. Soit T un espace complètement régulier tel que $\mathrm{card}T$ soit non mesurable. Alors $\tilde{T}=\upsilon T$.

<u>PREUVE</u>. Posons $\mathfrak{m}=\mathrm{card}T$ et $\aleph_o=\mathrm{card}N$. On peut supposer $\mathfrak{m}$ infini (sinon $T=\tilde{T}=\upsilon T=\check{T}$) de sorte que le cardinal de $\mathscr{C}(T)$ est inférieur ou égal à $2^{\aleph_o\mathfrak{m}}$, donc à $2^{\mathfrak{m}}$ puisque $\aleph_o\mathfrak{m}=\mathfrak{m}$. Alors $\mathrm{card}\tilde{T}\leqslant 2^{2^{\mathfrak{m}}}$ et par suite $\mathrm{card}\tilde{T}$ est aussi non mesurable. Or $\tilde{T}$ est un espace complètement régulier complet pour une structure uniforme compatible avec sa topologie ; l'hypothèse sur $\mathrm{card}\tilde{T}$ garantit donc, par un théorème profond de Shirota (S2) (voir aussi (Gl) th.15.20), que $\tilde{T}$ est un espace replet. ∎

(4.3.15) <u>THEOREME</u>. Pour qu'il existe un espace complètement régulier T tel que $\tilde{T}\neq\upsilon T$ il faut et il suffit qu'il existe un cardinal mesurable.

<u>PREUVE</u>. Si $\tilde{T}\neq\upsilon T$ alors $\mathrm{card}T$ est mesurable d'après la proposition. Réciproquement si $\mathfrak{m}$ est un cardinal mesurable, tout espace discret T de cardinal $\mathfrak{m}$ est c-replet d'après (4.3.9) et n'est pas replet d'après Gillman-Jerison (Gl 12.2), donc $T=\tilde{T}\neq\upsilon T$. ∎

On voit maintenant mieux en quoi la notion d'espace c-replet, quoique moins simple a priori que celle d'espace replet, peut apparaître comme plus naturelle et moins pathologique. On pourra s'en convaincre en rappelant par exemple les résultats sur la paracompacité et les sommes topologiques, et en comparant le corollaire (4.3.9) aux théorèmes 12.2 et 15.24 de Gillman-Jerison (Gl).

§§§§§§

TROISIEME PARTIE : TOPOLOGIES ET COMPACTOLOGIES VECTORIELLES

INTRODUCTION.

Dans cette troisième partie nous revenons à l'étude, esquissée dans la seconde partie, des espaces vectoriels compactologiques convexes, mais ici le travail sera fait de façon beaucoup plus "catégorique", en liaison avec le théorème de dualité de Banach-Grothendieck-Waelbroeck, qui introduit naturellement les elc complets dans la question. Le premier chapitre étudie la catégorie $\mathbb{B}$ des espaces de Banach (notés X, Y,...) avec morphismes de boules et sa duale, la catégorie $\mathbb{W}$ des espaces de Waelbroeck (notés $\mathfrak{X}, \mathcal{Y}, \ldots$). En fait nous reprenons, tout au début, une partie des résultats de Waelbroeck concernant les "dual Banach balls" (W2 et W3) en les démontrant quelque peu différemment. Le jeu des catégories duales $\mathbb{B}$ et $\mathbb{W}$ permet la construction de certains espaces d'applications linéaires $I(\mathfrak{X},Y)\in\mathbb{B}$ et $\mathcal{L}(X,\mathcal{Y})\in\mathbb{W}$, qui définissent en réalité des bifoncteurs $I : \mathbb{W}\times\mathbb{B}\longrightarrow\mathbb{B}$ et $\mathcal{L} : \mathbb{B}\times\mathbb{W}\longrightarrow\mathbb{W}$. A ces bifoncteurs "fondamentaux" sont associés deux types d'adjonction de foncteurs, appelés I-adjonction et $\mathcal{L}$-adjonction auxquels on rattache des propriétés de commutation qui semblent nouvelles. La dualité amène ensuite aux produits tensoriels $\hat{\hat{\otimes}}$ et $\hat{\otimes}$ d'espaces de Banach, ainsi qu'à des produits tensoriels $\bar{\bar{\otimes}}$ et $\bar{\otimes}$ d'espaces de Waelbroeck, dont les propriétés sont essentiellement déduites des propriétés de commutation précitées. Il en résulte encore l'introduction d'applications particulières $\mathfrak{X}\longrightarrow Y$, dites nucléaires, et $X\longrightarrow\mathcal{Y}$, dites intégrales, qui diffèrent légèrement des applications nucléaires et intégrales définies par Grothendieck dans (G3). On a en effet ici le souci de respecter la nature (elc ou ecc) des espaces qui interviennent. En particulier nous montrons la symétrie parfaite des propriétés de ces applications. Enfin un dernier paragraphe reprend le problème classique d'approximation en l'interprétant fonctoriellement. Nous donnons une condition de commutation, en apparence plus faible que celles rencontrées jusqu'ici, pour qu'un espace de Banach possède la propriété d'approximation.

Le second chapitre est consacré à l'étude de la catégorie $\mathbb{ELCC}$ des elc complets (notés encore X, Y,...) et de sa duale, la catégorie

$\mathbb{ECCR}$ des ecc réguliers (notés $\mathfrak{X}, \mathcal{Y}, \ldots$). Ce faisant on est amené à reparler des elc de Kelley, et leurs propriétés sont examinées en détail. Le résultat le plus surprenant semble être que tout produit d'elc de Kelley complets est un elc de Kelley, alors qu'on sait que même un produit de deux espaces topologiques de Kelley peut ne pas être un espace de Kelley. Une remarque curieuse termine ce paragraphe en montrant qu'il existe, sommairement parlant, la même différence entre elc (complets) bornologiques ou de Kelley et entre espaces topologiques complètement réguliers (de Kelley) replets ou c-replets.

La suite du chapitre traite des bifoncteurs fondamentaux I et $\mathcal{L}$ construits à partir de limites projectives d'espaces de Banach et de limites inductives d'espaces de Waelbroeck. On obtient, de même qu'au premier chapitre, les produits tensoriels $\hat{\hat{\otimes}}$ et $\hat{\otimes}$ d'elc complets et des produits tensoriels $\bar{\bar{\otimes}}$ et $\bar{\otimes}$ d'ecc réguliers. Les notions d'application nucléaire $\mathfrak{X}\longrightarrow Y$ et d'application intégrale $X\longrightarrow\mathcal{Y}$ se dégagent de la même façon, en respectant le caractère propre des espaces facteurs. Il est remarquable que l'espace $I^1(\mathfrak{X},Y)$ (resp : $\mathcal{L}^1(X,\mathcal{Y})$) des applications nucléaires de $\mathfrak{X}$ dans Y (resp : des applications intégrales de X dans $\mathcal{Y}$) soit muni d'une structure d'elc complet (resp : d'ecc régulier), mais il est gênant que cette théorie catégorique n'ait pas encore permis l'introduction de notions semblables pour les applications d'un elc dans un autre (ou d'un ecc régulier dans un autre). Cette lacune est comblée par la définition d'applications nucléantes et d'applications intégrantes de X dans Y. Une application $f : X\longrightarrow Y$ est dite nucléante (resp : intégrante) lorsque, pour tout ecc régulier $\mathfrak{Z}$, elle définit un morphisme $I(\mathfrak{Z},X)\longrightarrow I^1(\mathfrak{Z},Y)$ (resp : un morphisme $\mathcal{L}(Y,\mathfrak{Z})\longrightarrow\mathcal{L}^1(X,\mathfrak{Z})$). Mais de même que les espaces vectoriels de morphismes ne sont pas structurés en objets de $\mathbb{ELCC}$ ou objets de $\mathbb{ECCR}$, on ne place aucune structure autre que vectorielle sur les espaces d'applications nucléantes ou les espaces d'applications intégrantes. On donne enfin quelques propriétés intéressantes de ces applications et l'on examine sommairement leur incidence sur le problème de l'approximation ainsi que sur la théorie des espaces nucléaires. En particulier nous montrons qu'un espace complet Y est nucléaire si et seulement si l'application identique 1_Y est soit nucléante soit intégrante.

CHAPITRE 1 : LA DUALITE ENTRE ESPACES DE BANACH ET ESPACES DE WAELBROECK.

1.1. La catégorie $\mathbb{B}$ des espaces de Banach.

Objets et morphismes. Les objets de $\mathbb{B}$ sont les couples (X,A) formés d'un espace de Banach X et de sa boule unité (fermée) A. Les morphismes $u : (X,A) \to (Y,B)$ sont les applications linéaires de X dans Y telles que $u(A) \subset B$. Autrement dit l'ensemble $Hom(X,Y)$ est exactement la boule unité de l'espace de Banach des applications linéaires continues de X dans Y. Il est donc naturel de considérer sur $Hom(X,Y)$ la structure disquée associée. Ainsi, pour deux morphismes $u,v : X \to Y$ et pour deux scalaires λ et μ tels que $|\lambda|+|\mu| \leq 1$, on définit le morphisme $\lambda u+\mu v : X \to Y$. On aperçoit qu'avec ce choix des morphismes la catégorie $\mathbb{B}$ n'est pas additive ; mais on se rendra compte dans la suite que la structure disquée de $Hom(X,Y)$ offre des avantages comparables à ceux d'une structure de groupe abélien.

EXEMPLE. Soit H un sous-ev fermé d'un espace de Banach X. Il est clair que l'injection canonique $H \to X$ et la surjection canonique $X \to X/H$ sont des morphismes de la catégorie $\mathbb{B}$.

Monomorphismes. Epimorphismes. Isomorphismes. La catégorie $\mathbb{B}$ admet l'objet nul, noté O, égal à l'espace (o). Donc, dans $Hom(X,Y)$, l'égalité $u=v$ est équivalente à l'égalité $\frac{1}{2}(u-v)=o$. D'où, comme dans une catégorie abélienne, un morphisme $u : X \to Y$ est un monomorphisme (resp : un épimorphisme) lorsque, pour tout morphisme $v : Z \to X$ (resp : $v : Y \to Z$) la condition $uv=o$ (resp : $vu=o$) est équivalente à la condition $v=o$. On tire de là aisément :

(1.1.1) PROPOSITION. Pour qu'un morphisme $u : X \to Y$ soit un monomorphisme (resp : un épimorphisme) il faut et il suffit qu'il soit injectif (resp : que le sous-espace $u(X)$ soit dense dans Y). Pour que u soit un isomorphisme il faut et il suffit que ce soit une isométrie surjective.

REMARQUE. Ici apparaît tout l'intérêt de ce choix des morphismes. En effet deux espaces de Banach isomorphes dans $\mathbb{B}$ pourront être algébriquement confondus avec identification de leurs normes. Ainsi, chaque fois que nous construirons un espace de Banach X, défini à un isomorphisme près comme solution d'un problème universel de la catégorie $\mathbb{B}$, nous serons sûrs que X, ainsi que sa norme, se détermineront sans aucune ambiguïté.

Noyau. Conoyau. Image. Coimage. Tout morphisme de $\mathbb{B}$ $u : X \to Y$ admet un noyau et un conoyau. Il est immédiat que $Keru$ est l'injection canonique $u^{-1}(o) \to X$ et $Cokeru$ la surjection canonique $Y \to Y/\overline{uX}$. On peut définir l'image et la coimage de u par :

$$Imu=Ker(Cokeru) : \overline{uX} \to Y$$

$$Coimu=Coker(Keru) : X \to X/u^{-1}(o)$$

ce qui conduit tout naturellement à la décomposition canonique d'un morphisme dans la catégorie $\mathbb{B}$ selon :

(1.1.2) PROPOSITION. Pour tout morphisme $u : X \to Y$ il existe un bimorphisme unique $\tilde{u} : X/u^{-1}(o) \to \overline{uX}$ tel que $u=Imu.\tilde{u}.Coimu$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "Coimu"'] & Y \\ X/u^{-1}(o) \arrow[r, "\tilde{u}"] & \overline{uX} \arrow[u, "Imu"'] \end{tikzcd}$$

Morphismes stricts. On dit comme d'habitude que u est un morphisme strict si et seulement si le bimorphisme $\tilde{u}$ est un isomorphisme. La caractérisation suivante est immédiate :

(1.1.3) PROPOSITION. Soient X et Y deux espaces de Banach, de boules ouvertes respectives $\mathring{A}$ et $\mathring{B}$. Pour qu'un morphisme $u : X \to Y$ soit strict il faut et il suffit que :

a) $u(X)$ soit fermé dans Y.

b) $u(\mathring{A})=\mathring{B}\cap u(X)$.

(1.1.4) COROLLAIRE. Pour que u soit un épimorphisme strict (épistrict) il faut et il suffit que $u(\mathring{A})=\mathring{B}$. En particulier un épistrict est surjectif.

Pour que u soit un monomorphisme strict (monostrict) il faut et il suffit que ce soit une isométrie.

En particulier, pour tout morphisme u, Keru et Imu sont des monostricts tandis que Cokeru et Coimu sont des épistricts.

REMARQUE. Le théorème de Baire-Banach permet, comme on sait, d'améliorer la caractérisation des épistricts. Nous retrouverons ce point comme conséquence du théorème de dualité de Waelbroeck (1.2.12).

Produits directs et sommes directes. Le choix des morphismes implique que $\mathbb{B}$ est une catégorie complète à droite et à gauche. Une démonstration standard fournit :

(1.1.5) PROPOSITION. Soit I un ensemble quelconque non vide et soit $(X_i)_{i\in I}$ une famille d'espaces de Banach indexée par I.

a) Le produit $P=\prod X_i$ est exactement l'espace vectoriel des familles $\bar{x}=(x_i)_{i\in I}$, où $x_i\in X_i$ pour tout $i\in I$, telles que $\operatorname{Sup}_{i\in I}\|x_i\| < +\infty$, muni de la norme

$$\|\bar{x}\|_P = \operatorname{Sup}_{i\in I}\|x_i\| .$$

b) La somme $S=\sum X_i$ est exactement l'espace vectoriel des familles $\bar{x}=(x_i)_{i\in I}$, où $x_i\in X_i$ pour tout $i\in I$, telles que $\sum_{i\in I}\|x_i\| < +\infty$, muni de la norme

$$\|\bar{x}\|_S = \sum_{i\in I}\|x_i\| .$$

REMARQUES.

Rque 1. La catégorie $\mathbb{B}$ n'étant pas additive, le produit $X\prod Y$ diffère de la somme $X\Sigma Y$, notée quelquefois $X\oplus Y$, puisque sur ces deux espaces algébriquement égaux les normes ne sont pas les mêmes. La même distinction avait été faite entre la semi-norme produit et la semi-norme somme de deux semi-normes.

Rque 2. Lorsque tous les X_i sont égaux à un même espace X, on reconnaît dans le produit $P=X^I$ l'espace des familles bornées d'éléments de X, noté habituellement $\ell^\infty_I(X)$, et dans

la somme $S=X^{(I)}$ l'espace des familles absolument sommables d'éléments de X, noté habituellement $\ell^1_I(X)$. Lorsque X est le corps des scalaires K (R ou C) on notera plus simplement $K^I=\ell^\infty_I$ et $K^{(I)}=\ell^1_I$.

Foncteurs et bifoncteurs. Etant donnés deux espaces de Banach (X,A) et (Y,B), on dit qu'une application $u : A \longrightarrow B$ est disquée lorsque, pour tout couple (x,y) de points de A et tout couple (λ,μ) de scalaires tels que $|\lambda|+|\mu|\leqslant 1$, on a l'égalité $u(\lambda x+\mu y)=\lambda u(x)+\mu u(y)$. En particulier si $\bar{u} : X \longrightarrow Y$ est un morphisme, sa restriction u à A est une application disquée. Nous allons voir que les applications disquées s'obtiennent toutes de cette façon puisque :

(1.1.6) LEMME. Soit $u:A\longrightarrow B$ une application disquée. Alors u se prolonge de façon unique en un morphisme $\bar{u} : X\longrightarrow Y$.

PREUVE. Tout x de X s'écrit $x=\lambda a$ pour $a\in A$. En posant $\bar{u}(x)=\lambda u(a)$, on constate qu'on définit correctement une application $\bar{u} : X\longrightarrow Y$ car l'égalité $\lambda a=\lambda' a'$ entraîne, à supposer $|\lambda|\leqslant|\lambda'|$ et $\lambda'\neq 0$ (si $x\neq 0$), l'égalité $a'=(\lambda/\lambda')a$ donc l'égalité $\lambda' u(a')=\lambda u(a)$. L'application $\bar{u}$ est homogène de façon évidente. Enfin si $x=\lambda a$ et $y=\mu b$ sont deux points de X, avec a et b dans A, on peut écrire :

$$x+y = (|\lambda|+|\mu|)\left(\frac{\lambda a}{|\lambda|+|\mu|} + \frac{\mu b}{|\lambda|+|\mu|} \right)$$

ce qui assure la linéarité de $\bar{u}$. Comme $\bar{u}$ prolonge trivialement u, c'est bien un morphisme de X dans Y. ∎

De la même manière on peut dégager la notion d'application bidisquée, c'est-à-dire d'application du produit $A\times B$ dans la boule C d'un troisième espace de Banach Z qui soit disquée par rapport à chacune des variables. On montre alors sans peine qu'une application bidisquée $u : A\times B\longrightarrow C$ se prolonge de façon unique en une application bilinéaire $\bar{u} : X\times Y\longrightarrow Z$.

Cela étant nous imposerons à tout foncteur $F : \mathbb{B}\longrightarrow\mathbb{B}$, covariant ou contravariant de conserver les structures disquées, de même que sur une catégorie additive on ne retient que les foncteurs additifs. De façon précise nous imposerons à l'application $F : u\longrightarrow F(u)$ de

Hom(X,Y) dans Hom(F(X),F(Y)) (pour le cas F covariant) d'être disquée. De même nous imposerons à tout bifoncteur qu'il induise sur les ensembles de morphismes une application bidisquée.

1.2. La catégorie $\mathcal{W}$ des espaces de Waelbroeck.

La catégorie $\mathcal{W}$ a été introduite par Waelbroeck dans (W2) et (W3) où les objets de $\mathcal{W}$ sont appelés "dual Banach balls". Nous reprenons ici rapidement l'étude de $\mathcal{W}$, en modifiant la notion de morphismes. On peut d'ailleurs remarquer que la notion d'espace de Banach n'est pas différente de celle de disque borné complétant d'un ebc ; dualement la notion d'espace de Waelbroeck apparaît comme celle de disque "compact" d'un ecc.

La catégorie $\mathcal{W}$. Les objets de $\mathcal{W}$ sont les triplets $(\mathfrak{X}, \mathcal{A}, \tau_{\mathcal{A}})$ où $\mathfrak{X}$ est un espace vectoriel, $\mathcal{A}$ un disque absorbant de $\mathfrak{X}$, et $\tau_{\mathcal{A}}$ une topologie sur $\mathcal{A}$ vérifiant :

a) $\mathcal{A}$ est compact pour $\tau_{\mathcal{A}}$.
b) Pour tout $a \in \mathcal{A}$ l'application $x \longrightarrow \frac{a+x}{2}$ de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{A}$ est continue pour $\tau_{\mathcal{A}}$.
c) L'origine admet dans $\mathcal{A}$ une base de voisinages discués.

Nous dirons que $\mathcal{A}$ est la boule compacte de $\mathfrak{X}$. Les morphismes entre deux objets de $\mathcal{W}$ sont les applications disquées et continues entre leurs boules compactes.
Puisque $\mathcal{A}$ est $\tau_{\mathcal{A}}$-compacte, il existe sur $\mathcal{A}$ une unique structure uniforme $\mathcal{U}_{\mathcal{A}}$ compatible avec $\tau_{\mathcal{A}}$. Les résultats de Waelbroeck garantissent que $\mathcal{U}_{\mathcal{A}}$ est non seulement déterminée par $\tau_{\mathcal{A}}$ mais plus précisément par la base de filtre $\mathcal{V}$ des voisinages disqués de l'origine dans $\mathcal{A}$. En effet, d'après (W2) ou (W3) :

(1.2.1) PROPOSITION. La structure uniforme $\mathcal{U}_{\mathcal{A}}$ admet pour base d'entourages les ensembles U_V associés aux voisinages $V \in \mathcal{V}$ selon

$$(x,y) \in U_V \iff \frac{x-y}{2} \in V$$

On tire de là les corollaires suivants :

(1.2.2) COROLLAIRE 1. Pour qu'une application disquée $u : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ soit un morphisme, il suffit qu'elle soit continue à l'origine de

Pour qu'une partie $H \subset \mathrm{Hom}(\mathfrak{X},\mathfrak{Y})$ soit un ensemble équicontinu d'applications de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{B}$, il suffit qu'elle soit équicontinue à l'origine de $\mathcal{A}$.

(1.2.3) COROLLAIRE 2. Tout voisinage $V \in \mathcal{V}$ absorbe $\mathcal{A}$.

(1.2.4) COROLLAIRE 3. Pour tout couple de scalaires (λ,μ) tels que $|\lambda|+|\mu| \leqslant 1$, l'application $(x,y) \longrightarrow \lambda x+\mu y$ de $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$ dans $\mathcal{A}$ est continue.

(1.2.5) COROLLAIRE 4. L'origine possède dans $\mathcal{A}$ une base de voisinages formée de disques fermés (donc compacts).

PREUVE. Le corollaire 3 implique que dans $\mathcal{A}$ l'adhérence d'un disque est encore un disque. ∎

(1.2.6) COROLLAIRE 5. L'ensemble $\mathrm{Hom}(\mathfrak{X},\mathfrak{Y})$ est muni d'une structure disquée.

PREUVE. Le corollaire 3 implique encore que, pour deux morphismes $u,v : \mathfrak{X} \longrightarrow \mathfrak{Y}$ et pour deux scalaires λ,μ tels que $|\lambda|+|\mu| \leqslant 1$, l'application $\lambda u+\mu v$ est un morphisme. ∎

En conséquence de ce corollaire nous imposerons à tout foncteur de la catégorie $\mathcal{W}$ dans elle-même, de même qu'à tout foncteur de $\mathcal{W}$ dans $\mathcal{B}$ (ou de $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{W}$), d'induire sur les ensembles de morphismes une application disquée.

Les topologies T_c et $T_{\bar{c}}$ sur un espace de Waelbroeck. L'introduction de topologies particulières sur un espace de Waelbroeck va permettre la démonstration du théorème essentiel de Waelbroeck, à savoir que les catégories $\mathcal{B}$ et $\mathcal{W}$, sont, à une équivalence près, duales l'une de l'autre.
La topologie $T_{\bar{c}}$ est par définition la topologie localement convexe la plus fine sur $\mathfrak{X}$ rendant continue l'injection $\mathcal{A} \longrightarrow \mathfrak{X}$. On peut facilement caractériser les voisinages de o pour $T_{\bar{c}}$ par :

(1.2.7) LEMME. La topologie $T_{\bar{c}}$ admet pour base de voisinages de o les disques W de $\mathfrak{X}$ tels que, pour tout scalaire $\lambda > o$, il existe un voisinage de o V dans $\mathcal{A}$ vérifiant $V \subset \lambda W$.

La topologie T_c est par définition la topologie la plus fine sur $\mathfrak{X}$ rendant continues les translations et les homothéties de $\mathfrak{X}$ ainsi que l'injection $\mathcal{A} \longrightarrow \mathfrak{X}$. Elle n'est pas a priori localement convexe ni même compatible avec la structure vectorielle de $\mathfrak{X}$. Elle est évidemment plus fine que la topologie $T_{\bar{c}}$.
En fait on peut démontrer du même coup, ce qui est la clé du théorème de Waelbroeck, que les topologies T_c et $T_{\bar{c}}$ sont égales et séparées. On obtient de cette façon l'un des aspects, pour les espaces de Banach, du théorème de Banach-Dieudonné.

(1.2.8) <u>THEOREME</u>. Les topologies T_c et $T_{\bar{c}}$ sont égales et séparées.

<u>PREUVE</u>. Il suffit de prouver que T_c est moins fine que $T_{\bar{c}}$ et que $T_{\bar{c}}$ est séparée. Soit donc U un ouvert non vide pour T_c ; montrons que U est un $T_{\bar{c}}$-voisinage de tout point x qu'il contient. On se ramène à $x=o$ par translation. Nous allons construire un disque W vérifiant la condition de (1.2.7), tel que $W \subset U$ et, pour prouver que $T_{\bar{c}}$ est séparée, il suffit de choisir W ne contenant pas un point donné $a \neq o$ que l'on peut d'ailleurs, par homothétie, supposer dans $\mathcal{A}$. Remarquons déjà que, pour tout scalaire $\lambda > o$, l'ensemble $(\lambda U) \cap \mathcal{A}$ est un ouvert de $\mathcal{A}$ pour $\tau_{\mathcal{A}}$. Cela étant on peut trouver un voisinage de o dans $\mathcal{A}$, soit V_o, choisi disqué fermé (donc compact) tel que $a \notin V_o \subset U$. Posons $K_o = V_o$; le disque compact $\frac{1}{3}K_o$ est contenu dans l'ouvert $(\frac{1}{3}U) \cap \mathcal{A}$ de $\mathcal{A}$ et ne contient pas le point $\frac{a}{3}$. Ce que l'on sait de la structure uniforme de $\mathcal{A}$ permet d'obtenir un voisinage de o dans $\mathcal{A}$, soit V_1, choisi disqué compact, tel que $\frac{a}{3} \notin \frac{1}{3}K_o + \frac{2}{3}V_1 \subset (\frac{1}{3}U) \cap \mathcal{A}$. Le disque $K_1 = \frac{1}{3}K_o + \frac{2}{3}V_1$ est alors compact, contenu dans $\mathcal{A}$ et tel que $a \notin 3K_1 \subset U$. Un processus récurrent évident assure l'existence d'une suite (K_n) de disques compacts de $\mathcal{A}$ et d'une suite (V_n) de voisinages de o dans $\mathcal{A}$, disqués compacts, telles que, pour tout $n \geq o$:

$$a \notin 3^n K_n \subset U \quad \text{et} \quad 3^{n+1}K_{n+1} = 3^n K_n + 2.3^n V_{n+1} .$$

La suite $(3^n K_n)$ étant croissante, la réunion $W = \bigcup 3^n K_n$ est un disque de $\mathfrak{X}$ qui vérifie $a \notin W \subset U$, et il est clair que W vérifie aussi les conditions (1.2.7). ∎

(1.2.9) <u>COROLLAIRE 1</u>. La topologie $T_{\bar{c}}$ induit sur $\mathcal{A}$ exactement la topologie $\tau_{\mathcal{A}}$. Autrement dit un espace de Waelbroeck apparaît comme la donnée d'un disque compact absorbant d'un elc séparé

(1.2.10) <u>COROLLAIRE 2</u>. Soient $(\mathfrak{X},\mathcal{A})$ et $(\mathcal{Y},\mathcal{B})$ deux espaces de Waelbroeck et H un ensemble d'applications disquées de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{B}$. Pour que H soit un ensemble équicontinu il faut et il suffit que H définisse par prolongement linéaire un ensemble équicontinu d'applications linéaires de $\mathfrak{X}_c$ dans $\mathcal{Y}_c$, où $\mathfrak{X}_c$ et $\mathcal{Y}_c$ sont les espaces $\mathfrak{X}$ et $\mathcal{Y}$ munis de leur topologie T_c (ou $T_{\bar{c}}$).

(1.2.11) <u>COROLLAIRE 3</u>. (<u>Banach-Dieudonné</u>). Pour qu'une partie F de $\mathfrak{X}$ soit fermée pour la topologie $T_{\bar{c}}$ il faut et il suffit que, pour tout scalaire $\lambda > o$, l'ensemble $(\lambda F) \cap \mathcal{A}$ soit fermé dans $\mathcal{A}$.

<u>Le théorème de dualité de Waelbroeck</u>. On peut maintenant établir le résultat principal.

(1.2.12) <u>THEOREME</u> (<u>Waelbroeck</u>). La catégorie W est équivalente à la catégorie duale de la catégorie F.

<u>PREUVE</u>. On introduit deux foncteurs contravariants de dualité, l'un $\mathfrak{D} : F \longrightarrow W$, l'autre $D : W \longrightarrow B$ tels que les foncteurs $D\mathfrak{D}$ et $\mathfrak{D}D$ soient isomorphes respectivement aux foncteurs neutres 1_B et 1_W.
Le foncteur $\mathfrak{D}$ associe à tout espace de Banach (X,A) l'espace de Waelbroeck $(X',A')=\mathfrak{D}X$, où X' est le dual de X, A' la boule polaire de A munie de la topologie faible $\sigma(X',X)$. Le foncteur D associe à tout espace de Waelbroeck $(\mathfrak{X},\mathcal{A})$ l'espace de Banach des formes linéaires sur $\mathfrak{X}$ dont la restriction à $\mathcal{A}$ est continue pour $\tau_{\mathcal{A}}$, muni de la norme de la convergence uniforme sur $\mathcal{A}$. Nous noterons $D\mathfrak{X}=\mathfrak{X}^{*}$. Les foncteurs D et $\mathfrak{D}$ opèrent sur les morphismes par transposition.
Pour prouver que $\mathfrak{D}D$ est isomorphe au foncteur neutre 1_W, on utilise l'égalité algébrique $\mathfrak{X}^{*}=(\mathfrak{X}_c)'$ qui prouve, d'après (1.2.8), que $\mathfrak{X}^{*}$ sépare $\mathfrak{X}$, ce qui permet d'immerger $\mathfrak{X}$ dans l'espace $\mathfrak{D}D\mathfrak{X}=(\mathfrak{X}^{*})'$. On prouve ensuite l'isomorphisme entre $\mathfrak{X}$ et $(\mathfrak{X}^{*})'$ par bipolarité comme au théorème (II.3.2.3). Comme cet isomorphisme est fonctoriel en $\mathfrak{X}$ le résultat est acquis. Enfin on montre que le foncteur $D\mathfrak{D}$ est isomorphe au foncteur neutre 1_B car tout espace de Banach est un sous-espace fermé de l'espace $D\mathfrak{D}X=(X')^{*}$; et comme X et $(X')^{*}$ ont le même dual X' en vertu de ce qui a été dit, ils sont égaux. ∎

On aperçoit maintenant que tout espace de Waelbroeck peut être considéré comme le dual d'un espace de Banach, et réciproquement. C'est précisément cette situation qui sera exploitée plus loin pour la construction des produits tensoriels dans les catégories $\mathbb{B}$ et $\mathcal{W}$, et dont les propriétés seront alors conséquences de propriétés catégoriques générales. Mais déjà le théorème de dualité va permettre la description, qui n'a pas été faite jusque là, de la catégorie $\mathcal{W}$.

Description de $\mathcal{W}$. Il est clair que $\mathcal{W}$ est une catégorie complète à gauche et à droite. Elle admet des noyaux et des conoyaux, ainsi que des produits directs et des sommes directes.

Sous-espace. Noyau. Soit M un sous-ev de l'espace de Waelbroeck $\mathfrak{X}$, fermé dans $\mathfrak{X}_c$, c'est-à-dire tel que (Banach-Dieudonné) $M\cap\mathcal{A}$ soit compact dans $\mathcal{A}$. Nous dirons que le triplet $(M, M\cap\mathcal{A}, \tau_{\mathcal{A}}|M\cap\mathcal{A})$, qui est un objet de $\mathcal{W}$, est le sous-espace M. Avec cela, étant donné un morphisme $u : \mathfrak{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ nous voyons immédiatement que $u^{-1}(o)$ est un sous-espace de $\mathfrak{X}$, de sorte que le noyau Keru est donné par

$$\mathrm{Keru} : u^{-1}(o) \longrightarrow \mathfrak{X}$$

d'où l'on déduit l'identité des monomorphismes et des morphismes injectifs dans la catégorie $\mathcal{W}$.

Espace quotient. Conoyau. De même si M est un sous-ev fermé de $\mathfrak{X}_c$, l'application canonique $p : \mathfrak{X} \longrightarrow \mathfrak{X}/M$ est continue sur $\mathcal{A}$ si l'on place sur $\mathcal{A}/M=p(\mathcal{A})$ la topologie quotient. Comme $p(\mathcal{A})$ est alors compact, disqué, absorbant dans $\mathfrak{X}/M$, on voit que le triplet $(\mathfrak{X}/M, p(\mathcal{A}), \tau_{p(\mathcal{A})})$ est un objet de $\mathcal{W}$ que nous noterons plus simplement $\mathfrak{X}/M$ et que nous appellerons espace quotient de $\mathfrak{X}$ par M. Avec cela, tout morphisme $u : \mathfrak{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ admet un conoyau Cokeru donné par

$$\mathrm{Cokeru} : \mathcal{Y} \longrightarrow \mathcal{Y}/\overline{u\mathfrak{X}}$$

où $\overline{u\mathfrak{X}}$ est l'adhérence dans $\mathcal{Y}_c$ du sous-ev $u(\mathfrak{X})$. Ainsi pour que u soit un épimorphisme il faut et il suffit que $u(\mathfrak{X})$ soit dense dans $\mathcal{Y}_c$.

Morphismes stricts. Tout morphisme $u : \mathfrak{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ se décompose selon

$$\begin{array}{ccc}
\mathfrak{X} & \xrightarrow{\quad u \quad} & \mathcal{Y} \\
{\scriptstyle \mathrm{Coimu}=\mathrm{Coker}(\mathrm{Keru})}\downarrow & & \uparrow{\scriptstyle \mathrm{Imu}=\mathrm{Ker}(\mathrm{Cokeru})} \\
\mathfrak{X}/u^{-1}(o) & \xrightarrow{\quad \tilde{u} \quad} & \overline{u\mathfrak{X}}
\end{array}$$

où $\tilde{u}$ est un bimorphisme. Lorsque $\tilde{u}$ est un isomorphisme on dit que u est un morphisme strict. On a la caractérisation :

(1.2.13) PROPOSITION. Pour qu'un morphisme $u : \mathfrak{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ soit strict il faut et il suffit que $u(\mathcal{A})=\mathcal{B}\cap u(\mathfrak{X})$.

PREUVE. Désignons par $\mathcal{A}'=\mathrm{Coim}(\mathcal{A})$ la boule compacte de $\mathfrak{X}/u^{-1}(o)$ et par $\mathcal{B}'=\overline{u(\mathfrak{X})}\cap\mathcal{B}$ celle de $\overline{u\mathfrak{X}}$. Si $\tilde{u}$ est un isomorphisme, il est clair que $\tilde{u}(\mathcal{A}')=\mathcal{B}'$, ce qui implique $u(\mathcal{A})=\overline{u\mathfrak{X}}\cap\mathcal{B}$, d'où nécessairement $u(\mathcal{A})= u(\mathfrak{X})\cap\mathcal{B}$. Réciproquement si u vérifie la condition donnée alors $u(\mathfrak{X})$ est fermé dans $\mathcal{Y}_c$ car (Banach-Dieudonné) son intersection avec $\mathcal{B}$ est compacte dans $\mathcal{B}$. Ainsi $\tilde{u}(\mathcal{A}')=\mathcal{B}'$, ce qui suffit pour prouver que $\tilde{u}$ transforme bicontinûment $\mathcal{A}'$ en $\mathcal{B}'$. ∎

(1.2.14) COROLLAIRE. Les épistricts $u : \mathfrak{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ sont exactement les morphismes tels que $u(\mathcal{A})=\mathcal{B}$. Les monostricts $u : \mathfrak{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ sont exactement les morphismes injectifs tels que $u(\mathcal{A})=\mathcal{B}\cap u(\mathfrak{X})$.

Comme application du théorème de dualité, retrouvons une caractérisation des épistricts dans la catégorie $\mathbb{B}$ des espaces de Banach. Ils correspondent en effet par transposition aux monostricts de $\mathcal{W}$. On relie ainsi par dualité le théorème de Baire-Banach au théorème de Banach-Dieudonné.

(1.2.15) PROPOSITION. Soient (X,A) et (Y,B) deux espaces de Banach. Les épistricts $u : X \longrightarrow Y$ sont exactement les applications linéaires telles que $\overline{u(A)}=B$.

PREUVE. La condition est évidemment nécessaire d'après (1.1.4). Pour voir qu'elle est suffisante, on se contentera de vérifier qu'elle implique que $\mathcal{D}u : Y' \longrightarrow X'$ est un monostrict de $\mathcal{W}$, ce qui est immédiat d'après la caractérisation (1.2.14). ∎

Produit direct. Si $(\mathfrak{X}_i)_{i\in I}$ est une famille (non vide) d'espaces de Waelbroeck on peut affirmer que le produit dans $\mathcal{W}$ n'est autre que l'espace $\mathfrak{X}=\prod\mathfrak{X}_i=(\sum\mathfrak{X}_i^*)'$. En fait on peut définir directement ce produit $\mathfrak{X}$. En effet si $\mathcal{A}_i$ est la boule compacte de $\mathfrak{X}_i$, le produit topologique $\mathcal{A}=\prod\mathcal{A}_i$ est compact et muni d'une topologie localement convexe. Il en résulte que $\prod\mathfrak{X}_i$ s'identifie à l'espace vectoriel $\mathfrak{X}$ engendré par $\mathcal{A}$ dans l'espace vectoriel produit (algébrique) des $\mathfrak{X}_i$.

<u>Somme directe</u>. Il n'est pas aisé de définir directement la somme directe $\sum \mathfrak{X}_i$ d'une famille non vide $(\mathfrak{X}_i)_{i\in I}$ d'espaces de Waelbroeck. Nous nous contenterons d'affirmer son existence par l'égalité

$$\sum \mathfrak{X}_i = (\prod \mathfrak{X}_i^*)' .$$

<u>Le foncteur d'oubli $\mathcal{A}$ et le foncteur $\mathfrak{M}$</u>. Désignons par $\mathbb{K}$ la catégorie des espaces compacts. En associant à tout espace de Waelbroeck $\mathfrak{X}$ sa boule compacte $\mathcal{A}=\mathcal{A}(\mathfrak{X})$ on réalise un foncteur d'oubli $\mathcal{A} : \mathbb{W}\longrightarrow\mathbb{K}$. Inversement en associant à tout espace compact T l'espace de Waelbroeck $\mathfrak{M}(T)$ des mesures sur T, considéré comme le dual de l'espace de Banach $C(T)$ des fonctions continues sur T, on réalise aussi un foncteur $\mathfrak{M} : \mathbb{K}\longrightarrow\mathbb{W}$. L'important est qu'en réalité le foncteur $\mathfrak{M}$ est adjoint à gauche au foncteur $\mathcal{A}$. Pour le voir, désignons par ε l'application de Dirac qui associe à tout $t\in T$ la mesure de Dirac ε_t au point t. Il est bien connu que l'image $\varepsilon(T)$ a son enveloppe disquée partout dense dans la boule compacte $\mathfrak{M}_1(T)$ de l'espace de Waelbroeck $\mathfrak{M}(T)$. Ceci permet de montrer que toute application continue $f : T\longrightarrow\mathcal{A}(\mathfrak{X})$ admet un prolongement <u>unique</u> $\Phi_f : \mathfrak{M}(T)\longrightarrow\mathfrak{X}$ qui est un morphisme de $\mathbb{W}$ rendant commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varepsilon"'] & \mathcal{A}(\mathfrak{X}) \arrow[d] \\ \mathfrak{M}(T) \arrow[r, "\Phi_f"] & \mathfrak{X} \end{tikzcd} .$$

D'ailleurs Φ_f est défini par l'égalité $\Phi_f(\mu)=\int_T f d\mu$ où $\int_T f d\mu$ est l'intégrale faible de f, elle-même définie par transposition selon :

$$\langle \int_T f d\mu, x^* \rangle = \int_T \langle f(t), x^* \rangle d\mu(t)$$

pour tout $x^*\in\mathfrak{X}^*$.

<u>REMARQUE</u>. Si $\mathfrak{M}_1^+(T)$ désigne l'ensemble des mesures positives et de masse ≤ 1 sur T, on obtient aisément les égalités

$$\Phi_f(\mathfrak{M}_1(T)) = \bar{\Gamma}(f(T)) \quad \text{et} \quad \Phi_f(\mathfrak{M}_1^+(T)) = \bar{C}(f(T)).$$

Laissant de côté l'aspect fonctoriel, on voit ainsi qu'il y a correspondance bijective entre f et Φ_f donc $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(T,\mathcal{A}(\mathfrak{X}))=\mathrm{Hom}_{\mathbb{W}}(\mathfrak{M}(T),\mathfrak{X})$ et :

(1.2.16) <u>PROPOSITION</u>. Le foncteur $\mathfrak{M} : \mathbb{K}\longrightarrow\mathbb{W}$ est adjoint à gauche au foncteur d'oubli $\mathcal{A} : \mathbb{W}\longrightarrow\mathbb{K}$.

(1.2.17) <u>COROLLAIRE 1</u>. Le foncteur $\mathcal{A}$ commute aux produits directs et aux noyaux tandis que le foncteur $\mathfrak{M}$ commute aux sommes et aux conoyaux.

On retrouve en particulier que la boule compacte d'un produit $\prod \mathfrak{X}_i$ n'est autre que le produit topologique des boules compactes des espaces facteurs $\mathfrak{X}_i$. On obtient aussi la construction explicite d'une somme directe dans $\mathbb{W}$ dans un cas particulier avec :

(1.2.18) <u>COROLLAIRE 2</u>. Soit $(T_i)_{i\in I}$ une famille (non vide) d'espaces compacts. On désigne par $\sum T_i$ l'espace (localement compact et paracompact) somme topologique des espaces T_i et par $(\sum T_i)^\vee$ le compactifié de Stone-Čech de $\sum T_i$. Alors $(\sum T_i)^\vee$ est la somme directe des espaces compacts T_i dans la catégorie $\mathbb{K}$ et :

$$\sum \mathfrak{M}(T_i) = \mathfrak{M}((\sum T_i)^\vee) .$$

(1.2.19) <u>COROLLAIRE 3</u>. Tout espace de Waelbroeck $\mathfrak{X}$ est quotient d'un espace $\mathfrak{M}(T)$. Il suffit de prendre pour T une partie fermée de la boule compacte $\mathcal{A}$ de $\mathfrak{X}$ telle que $\bar{\Gamma}(T)=\mathcal{A}$. En particulier $\mathfrak{X}$ est un quotient de l'espace $\mathfrak{M}(\mathcal{A})$.

<u>PREUVE</u>. Soit $j : T\longrightarrow\mathcal{A}$ l'application canonique. Le morphisme associé $\Phi_j : \mathfrak{M}(T)\longrightarrow\mathfrak{X}$ envoie la boule compacte de $\mathfrak{M}(T)$ sur une partie compacte et partout dense de $\mathcal{A}$, donc sur $\mathcal{A}$ elle-même, ce qui prouve que Φ_j est un épistrict. ∎

<u>Le foncteur d'oubli A et le foncteur ℓ^1</u>. Par souci de symétrie, rappelons quelques résultats simples sur les espaces de Banach. Le foncteur d'oubli A associe à tout $X\in\mathbb{B}$ sa boule-unité $A=A(X)$ considérée comme un ensemble ; A est donc un foncteur $\mathbb{B}\longrightarrow\mathbb{ENS}$. Inversement soit $\ell^1 : \mathbb{ENS}\longrightarrow\mathbb{B}$ le foncteur qui associe à tout ensemble I l'espace de Banach ℓ^1_I des familles $\bar{\xi}=(\xi_i)_{i\in I}$ sommables. On vérifie sans difficulté que le foncteur ℓ^1 est adjoint à gauche au foncteur d'oubli A, ce qui signifie encore que, pour toute application $f : I\longrightarrow A(X)$, il existe un morphisme <u>unique</u> $\Phi_f : \ell^1_I\longrightarrow X$ rendant commutatif le diagramme :

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varepsilon"'] & A(X) \arrow[d] \\ \ell^1_I \arrow[r, "\Phi_f"] & X \end{tikzcd}$$

où ε est l'application $k \longrightarrow \bar{\varepsilon}_k = (\delta_{ik})_{i\in I}$. D'ailleurs Φ_f est donnée par l'égalité $\Phi_f(\bar{\xi}) = \sum \xi_i f(i)$ pour toute $\bar{\xi} = (\xi_i) \in \ell^1_I$.

REMARQUE. Il n'est peut-être pas inutile de préciser que lorsque I est l'ensemble vide (resp : T le compact vide) l'application vide $f=\emptyset$ a pour associée l'application nulle $O=\Phi_\emptyset$. Ceci impose donc de prendre pour boule unité (resp : pour boule compacte) de l'espace nul l'ensemble vide.

Comme conséquence on retrouve :

(1.2.20) PROPOSITION. Tout espace de Banach est quotient d'un espace ℓ^1_I. Il suffit de prendre pour I une partie quelconque de la boule unité A de X telle que $\bar{\Gamma}(I)=A$. En particulier si X est séparable, c'est un quotient de l'espace $\ell^1 = \ell^1_N$.

REMARQUE. En désignant comme toujours par K le corps des scalaires (R ou C) lu comme espace de Banach, on sait que $\ell^1_I = K^{(I)}$, de sorte que le foncteur ℓ^1 est aussi le foncteur $K^{(\cdot)}$. Cela implique aussi que tout objet de $\mathcal{B}$ est quotient d'une somme directe de droites, autrement dit que K est un générateur de $\mathcal{B}$. Et l'on sait aussi que tout espace de Banach est un sous-espace normé d'un produit K^I (il suffit de choisir pour I une partie faiblement dense de la boule compacte A' de X') donc tout espace de Waelbroeck est le quotient d'une somme directe de droites. On peut aussi donner une démonstration directe de ce dernier point en invoquant (1.2.18) : en effet si I est une partie dense de la boule compacte $\mathcal{A}$ de $\mathfrak{X}$, il existe une surjection $\check{j} : \check{I} \longrightarrow \mathcal{A}$, de sorte que l'application $\Phi_{\check{j}}$ associée est un épistrict de $\mathcal{W}$; or, identifiant l'espace discret I à la somme topologique de ses points $\{i\}$ et l'espace $\mathcal{M}(\{i\})$ au corps des scalaires (lu dans $\mathcal{W}$), on recueille avec (1.2.18) $\mathcal{M}(\check{I}) = K^{(I)}$ dans $\mathcal{W}$. Quoi qu'il en soit :

(1.2.21) PROPOSITION. Le corps des scalaires K (R ou C) avec chacune de ses deux structures est à la fois un générateur des catégories $\mathcal{B}$ et $\mathcal{W}$.

1.3. Les deux bifoncteurs mixtes fondamentaux.

Le bifoncteur L. Etant donnés un espace de Waelbroeck $(\mathfrak{X},\mathcal{A})$ et un espace de Banach (Y,B), on désigne par $L(\mathfrak{X},Y)$ l'espace des applications linéaires $f : \mathfrak{X} \longrightarrow Y$ dont la restriction à $\mathcal{A}$ est continue pour la topologie $\tau_{\mathcal{A}}$ et la topologie de Y. On munit cet espace de la norme de la convergence uniforme sur $\mathcal{A}$, pour laquelle il est complet. Ainsi $L(\mathfrak{X},Y)$ devient un espace de Banach dont la boule unité est formée des applications f telles que $f(\mathcal{A}) \subset B$.
On a donc en fait défini un bifoncteur $L : \mathcal{W} \times \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{B}$, contravariant par rapport au premier indice et covariant par rapport au second. Son action sur les morphismes est évidente et n'est pas détaillée. Lorsqu'on fixe l'espace $\mathfrak{X}$ on obtient un foncteur $L_{\mathfrak{X}} = L(\mathfrak{X},\cdot) : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{B}$.

EXEMPLES. On reconnaît l'égalité $L(\mathfrak{X},K)=\mathfrak{X}^*$ ainsi que l'égalité $L(K,Y)=Y$ qui exprime $L_K = 1_Y$.

Foncteurs L-représentables. L'égalité $L(\mathfrak{X},K)=\mathfrak{X}^*$ démontre que $\mathfrak{X}$ est complètement déterminé lorsqu'on connaît le foncteur $L_{\mathfrak{X}}$. On peut retrouver ce fait par le résultat plus général :

(1.3.1) PROPOSITION. L'ensemble $\mathrm{hom}_{\mathcal{B}}(L_{\mathfrak{X}},L_{\mathcal{Y}})$ des morphismes fonctoriels $L_{\mathfrak{X}} \longrightarrow L_{\mathcal{Y}}$ est en correspondance bijective avec l'ensemble $\mathrm{Hom}_{\mathcal{W}}(\mathcal{Y},\mathfrak{X})$.

PREUVE. A tout morphisme fonctoriel $\varphi : L_{\mathfrak{X}} \longrightarrow L_{\mathcal{Y}}$ on associe le morphisme $U\varphi = \mathcal{D}(\varphi_K)$, et à tout morphisme $u : \mathcal{Y} \longrightarrow \mathfrak{X}$ le morphisme fonctoriel $\Phi u : L_{\mathfrak{X}} \longrightarrow L_{\mathcal{Y}}$ défini par $(\Phi u)_Z = L(u,Z)$ pour tout $Z \in \mathcal{B}$. De façon évidente $U(\Phi u) = \mathcal{D}L(u,K) = \mathcal{D}\mathcal{D}u = u$. L'égalité $\Phi(U\varphi)=\varphi$ va demander plus de mal. Posons $\psi = \Phi(U\varphi)$, donc $\psi_Z = L(\mathcal{D}\varphi_K, Z)$. Pour tout $z' \in Z'$, le diagramme suivant est commutatif, puisque φ est un morphisme fonctoriel :

$$\begin{tikzcd} L(\mathfrak{X},Z) \arrow[r, "\varphi_Z"] \arrow[d, "L(\mathfrak{X}{,}z')"'] & L(\mathcal{Y},Z) \arrow[d, "L(\mathcal{Y}{,}z')"] \\ \mathfrak{X}^* = L(\mathfrak{X},K) \arrow[r, "\varphi_K"] & L(\mathcal{Y},K) = \mathcal{Y}^* \end{tikzcd}$$

ce qui entraîne, pour toute $f \in I(\mathfrak{X},Z)$, l'égalité $z'.\varphi_Z(f)=\varphi_K(z'.f)$; or $\varphi_K(z'.f)=z'.f.\mathfrak{D}\varphi_z=z'.\psi_Z(f)$. Ainsi $\varphi_Z(f)=\psi_Z(f)$ et $\varphi_Z=\psi_Z$. ∎

Rajoutons que les correspondances U et Φ conservent les unités et les produits de morphismes fonctoriels ou de morphismes, de sorte que l'on peut aisément vérifier que U et Φ échangent isomorphismes fonctoriels et isomorphismes.

On tire de 1) la notion de <u>foncteur I-représentable</u>. Un foncteur covariant $F : \mathbb{B} \longrightarrow \mathbb{B}$ est dit I-représentable lorsqu'il est isomorphe à un foncteur $I_{\mathfrak{X}}$. L'espace de Waelbroeck $\mathfrak{X}$ est alors défini à un isomorphisme près.

<u>Foncteurs I-adjoints</u>. Etant donnés deux foncteurs covariants, l'un $\mathcal{F} : \mathbb{W} \longrightarrow \mathbb{W}$, l'autre $G : \mathbb{B} \longrightarrow \mathbb{B}$, on dit que $\mathcal{F}$ et G sont I-adjoints ($\mathcal{F}$ nécessairement à gauche et G à droite) lorsque les bifoncteurs $I(\mathcal{F}(.),.)$ et $I(.,G(.))$ sont isomorphes.

<u>Le bifoncteur $\mathcal{L}$</u>. Etant donnés un espace de Banach (X,A) et un espace de Waelbroeck $(\mathcal{Y},\mathcal{B})$ on désigne par $\mathcal{L}(X,\mathcal{Y})$ l'espace des applications linéaires $f : X \longrightarrow \mathcal{Y}$ qui envoient A dans un homothétique du disque $\mathcal{B}$. Le disque $\mathcal{A}(X,\mathcal{Y})$ formé des fonctions $f \in \mathcal{L}(X,\mathcal{Y})$ telles que $f(A) \subset \mathcal{B}$, muni de la topologie de la convergence simple sur A, est compact (Tychonov) et absorbant dans $\mathcal{L}(X,\mathcal{Y})$. Ainsi $\mathcal{L}(X,\mathcal{Y})$ devient un objet de $\mathbb{W}$, ce qui donne à $\mathcal{L}$ les caractéristiques d'un bifoncteur $\mathbb{B}.\mathbb{W} \longrightarrow \mathbb{W}$ contravariant par rapport au premier indice et covariant par rapport au second. Son action sur les morphismes est claire et n'est pas détaillée.

Lorsqu'on fixe X on obtient le foncteur **covariant** $\mathcal{L}_X = \mathcal{L}(X,.) : \mathbb{W} \longrightarrow \mathbb{W}$.

<u>Foncteur $\mathcal{L}$-représentable</u>. Puisque $\mathcal{L}_Y(K)=Y'$ on voit encore que le foncteur $\mathcal{L}_Y$ détermine l'espace de Banach X. Et comme précédemment :

(1.3.2) <u>PROPOSITION</u>. L'ensemble $\hom_{\mathbb{W}}(\mathcal{L}_X,\mathcal{L}_Y)$ des morphismes fonctoriels $\mathcal{L}_X \longrightarrow \mathcal{L}_Y$ est en correspondance bijective avec l'ensemble $\mathrm{Hom}_{\mathbb{B}}(Y,X)$.

Un foncteur covariant $\mathcal{F} : \mathbb{W} \longrightarrow \mathbb{W}$ est donc dit <u>$\mathcal{L}$-représentable</u> lorsqu'il est isomorphe à un foncteur $\mathcal{L}_X$; l'espace X est alors déterminé par $\mathcal{F}$ à un isomorphisme près.

<u>Foncteurs $\mathcal{L}$-adjoints</u>. Etant donnés deux foncteurs covariants, l'un $F : \mathbb{B} \longrightarrow \mathbb{B}$, l'autre $\mathcal{G} : \mathbb{W} \longrightarrow \mathbb{W}$, on dit que F et $\mathcal{G}$ sont $\mathcal{L}$-adjoints (F nécessairement à gauche et $\mathcal{G}$ à droite) lorsque les bifoncteurs $\mathcal{L}(F(.),.)$ et $\mathcal{L}(.,\mathcal{G}(.))$ sont isomorphes.

<u>Dualité de foncteurs</u>. A tout foncteur $F : \mathbb{B} \longrightarrow \mathbb{B}$ on associe le foncteur $F'=\mathfrak{D}F\mathrm{D} : \mathbb{W} \longrightarrow \mathbb{W}$, dit <u>dual</u> de F. De même tout foncteur $\mathcal{G} : \mathbb{W} \longrightarrow \mathbb{W}$ admet un foncteur dual $\mathcal{G}^*=\mathrm{D}\mathcal{G}\mathfrak{D} : \mathbb{B} \longrightarrow \mathbb{B}$. Si l'on identifie, à un isomorphisme fonctoriel près, les foncteurs $\mathrm{D}\mathfrak{D}$ et $\mathfrak{D}\mathrm{D}$ aux foncteurs neutres $1_{\mathbb{B}}$ et $1_{\mathbb{W}}$ respectivement, on voit que la dualité de foncteurs se calcule selon les formules $(F')^*=F$ et $(\mathcal{G}^*)'=\mathcal{G}$.

L'intérêt de cette notion se résume pour nous en deux types de propositions. D'une part la conservation de chacune des adjonctions par dualité, d'autre part la conservation de propriétés de commutation.

(1.3.3) <u>PROPOSITION</u>. Soient $\mathcal{F} : \mathbb{W} \longrightarrow \mathbb{W}$ et $G : \mathbb{B} \longrightarrow \mathbb{B}$ deux foncteurs I-adjoints et soient $F : \mathbb{B} \longrightarrow \mathbb{B}$ et $\mathcal{G} : \mathbb{W} \longrightarrow \mathbb{W}$ deux foncteurs $\mathcal{L}$-adjoints. Alors les foncteurs $G' : \mathbb{W} \longrightarrow \mathbb{W}$ et $\mathcal{F}^* : \mathbb{B} \longrightarrow \mathbb{B}$ sont I-adjoints tandis que les foncteurs $\mathcal{G}^* : \mathbb{B} \longrightarrow \mathbb{B}$ et $F' : \mathbb{W} \longrightarrow \mathbb{W}$ sont $\mathcal{L}$-adjoints.

<u>PREUVE</u>. Elle est standard et repose sur les isomorphismes (fonctoriels par rapport aux deux variables) des espaces $L(\mathfrak{X},Y)$ et $I(Y',\mathfrak{X}^*)$ d'une part et des espaces $\mathcal{L}(X,\mathcal{Y})$ et $\mathcal{L}(\mathcal{Y}^*,X')$ d'autre part. ∎

(1.3.4) <u>PROPOSITION</u>. Pour qu'un foncteur $F : \mathbb{B} \longrightarrow \mathbb{B}$ commute aux monomorphismes (resp : aux monostricts ; aux épimorphismes ; aux épistricts ; aux produits directs ; aux sommes directes) il faut et il suffit que son foncteur dual $F' : \mathbb{W} \longrightarrow \mathbb{W}$ commute aux épimorphismes (resp : aux épistricts ; aux monomorphismes ; aux monostricts ; aux sommes directes ; aux produits directs).

<u>Les théorèmes de commutation</u>. On sait qu'un foncteur entre deux catégories qui admet un adjoint à gauche (resp : à droite) commute aux limites gauches (resp : aux limites droites). La question importante, et résolue ici, est de savoir si ces propriétés de commutation sont encore vérifiées pour les notions de L-adjonction et $\mathcal{L}$-adjonction. On va voir qu'il n'en est pas exactement ainsi. Toutefois ce qui

subsiste, et qui est presque la totalité de ce que l'on espérait, est suffisant pour commander les principales propriétés des produits tensoriels (dans les catégories $\mathbb{B}$ et $\mathbb{W}$) introduits plus loin. Bien entendu, au delà de ces applications les théorèmes de commutation donnés ont leur intérêt propre. Rassemblons les résultats :

(1.3.5) <u>THEOREME</u> (<u>1er théorème de commutation</u>). Soient $\sigma : \mathbb{W} \longrightarrow \mathbb{W}$ et $G : \mathbb{F} \longrightarrow \mathbb{B}$ deux foncteurs covariants I-adjoints. Alors σ commute aux épimorphismes, aux épistricts et aux sommes directes <u>finies</u> de la catégorie $\mathbb{W}$ tandis que G commute aux monomorphismes, aux monostricts et aux produits <u>finis</u> de la catégorie $\mathbb{F}$. En général σ ne commute pas aux sommes directes infinies, ni G aux produits infinis.

(1.3.6) <u>THEOREME</u> (<u>2nd théorème de commutation</u>). Soient $F : \mathbb{B} \longrightarrow \mathbb{B}$ et $\mathcal{G} : \mathbb{W} \longrightarrow \mathbb{W}$ deux foncteurs covariants $\mathcal{L}$-adjoints. Alors F commute aux épimorphismes, aux épistricts et aux sommes directes quelconques (donc aux limites droites) de la catégorie $\mathbb{B}$ tandis que $\mathcal{G}$ commute aux monomorphismes, aux monostricts et aux produits quelconques (donc aux limites gauches) de la catégorie $\mathbb{W}$.

<u>PREUVE</u>. Elle est longue et se développe en plusieurs parties. Elle nécessite de nouvelles caractérisations (de type mixte) des épimorphismes, épistricts et produits dans les catégories $\mathbb{B}$ et $\mathbb{W}$, et s'appuie essentiellement sur le fait que le corps des scalaires K est <u>à la fois</u> un générateur et un séparateur (Hahn-Banach) des catégories $\mathbb{F}$ et $\mathbb{W}$.

<u>Epimorphismes et épistricts dans $\mathbb{W}$</u>. Soit $u : (\mathfrak{X},\mathcal{A}) \longrightarrow (\mathcal{Y},\mathcal{B})$ un morphisme de $\mathbb{W}$. On sait que u est un épimorphisme si et seulement si $u(\mathfrak{X})$ est dense dans l'espace $\mathcal{Y}_c$ et que c'est un épistrict si et seulement si $u(\mathcal{A}) = \mathcal{B}$. Cela étant, avec le théorème de Hahn-Banach :

(1.3.7) <u>LEMME 1</u>.

a) Si u est un épimorphisme (resp : un épistrict), alors pour tout $Z \in \mathbb{B}$ et toute application $f \in L(\mathcal{Y}, Z)$, la condition $fu = o$ (resp : $\|fu\| \leqslant 1$) entraîne la condition $f = o$ (resp: $\|f\| \leqslant 1$).

b) Réciproquement si, pour toute $f \in \mathcal{Y}^*$, la condition $fu = o$ (resp : $\|fu\| \leqslant 1$) entraîne la condition $f = o$ (resp : $\|f\| \leqslant 1$), alors u est un épimorphisme (resp : un épistrict).

Soient maintenant $\sigma : \mathbb{W} \longrightarrow \mathbb{W}$ et $G : \mathbb{B} \longrightarrow \mathbb{B}$ deux foncteurs I-adjoints, l'adjonction étant réalisée par l'isomorphisme fonctoriel :

$$\theta \ : I(\sigma(.),.) \longrightarrow I(.,G(.)).$$

Montrons que σ commute aux épimorphismes et aux épistricts, ce qui entraîne, d'après (1.3.7) et (1.3.4), que G commute aux monomorphismes et aux monostricts, car le foncteur G' admet le foncteur σ^* pour I-adjoint. Démontrons d'ailleurs seulement la commutation de σ aux épistricts par exemple, la démonstration étant analogue pour la commutation aux épimorphismes. Pour voir que $\sigma(u)$ est un épistrict lorsque $u : \mathfrak{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ est un épistrict de $\mathbb{W}$, utilisons la condition b) du lemme 1 et soit $f \in (\sigma(\mathcal{Y}))^*$ telle que $\|f.\sigma(u)\| \leqslant 1$. L'isomorphisme θ échange les diagrammes ouverts suivants :

$$\begin{tikzcd} \sigma(\mathfrak{X}) \arrow[r, "\sigma(u)"] & \sigma(\mathcal{Y}) \arrow[dl, "f"] \\ K & \end{tikzcd} \quad \text{et} \quad \begin{tikzcd} \mathfrak{X} \arrow[r, "u"] & \mathcal{Y} \arrow[dl, "\tilde{f} = \theta_{\mathcal{Y},K}(f)"] \\ G(K) & \end{tikzcd}$$

et la fonctorialité de θ garantit l'égalité :

$$\theta_{\mathfrak{X},K}(f.\sigma(u)) = \theta_{\mathcal{Y},K}(f).u = \tilde{f}u \quad .$$

Or $\theta_{\mathfrak{X},K}$ et $\theta_{\mathcal{Y},K}$ sont des isométries, de sorte que $\|\tilde{f}u\| \leqslant 1$. Alors, d'après la condition a) du lemme 1, u étant un épistrict, on a $\|\tilde{f}\| \leqslant 1$ et par suite $\|f\| \leqslant 1$, ce qui termine la démonstration. ∎

<u>Produits directs dans $\mathbb{F}$</u>. Le corps K étant un générateur des catégories $\mathbb{B}$ et $\mathbb{W}$, un résultat catégorique général, démontré ici pour $\mathbb{B}$ mais valable tout aussi bien pour $\mathbb{W}$, assure que dans la définition catégorique d'un produit $\prod X_j$, il suffit de limiter la "variable" Z en choisissant pour Z une somme directe de droites $K^{(I)}$.

(1.3.8) <u>LEMME 2</u>. Soient $(X_j)_{j \in J}$ une famille non vide d'espaces de Banach, P un espace de Banach et, pour tout $j \in J$, <u>un morphisme</u> $p_j : P \longrightarrow X_j$. On suppose que, pour tout ensemble I et pour toute famille de morphismes $v_j : K^{(I)} \to X_j$ indexée par J, il existe un morphisme unique $v : K^{(I)} \to P$ tel que $p_j v = v_j$ pour tout $j \in J$. Alors P est (à un isomorphisme près) le produit $\prod_{j \in J} X_j$ dans la catégorie $\mathbb{B}$.

PREUVE. Soit $Z \in \mathbb{P}$ et soit une famille de morphismes $u_j : Z \to X_j$; il s'agit de condenser cette famille en un seul morphisme $u : Z \to P$ tel que $p_j u = u_j$ pour tout $j \in J$. On sait qu'il existe un ensemble I et un épistrict $q : K^{(I)} \to Z$. Soit $v_j = u_j q$. Il existe un morphisme unique $v : K^{(I)} \to P$ tel que $p_j v = v_j$ pour tout j. Il faut prouver que v se factorise de façon unique à travers Z en $v = uq$ avec $u \in Hom(Z,P)$. Soit $Y = q^{-1}(o)$; il existe un ensemble L et un épistrict $r : K^{(L)} \to Y$. La famille des morphismes $w_j = v_j . Ker q . r = u_j . q . Ker q . r = o$ se condense en un seul morphisme $w = v . Ker q . r$, nécessairement nul par conséquent. Comme r est un épimorphisme, on en tire $v . Ker q = o$, ce qui exprime exactement, q étant un épistrict, que v se factorise à travers Z en $v = uq$ avec $u \in Hom(Z,P)$. De plus $p_j uq = p_j v = v_j = u_j q$, d'où $p_j u = u_j$ puisque q est un épimorphisme.

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[rr, "p_j"] & & X_j \\
& Z \arrow[ul, "u"'] \arrow[ur, "u_j"] & \\
& F^{(I)} \arrow[u, "q"] \arrow[uul, "v"] \arrow[uur, "v_j"'] & \\
& Ker q \arrow[u] & \\
& Y \arrow[u, dash] & \\
& K^{(L)} \arrow[u, "r"] \arrow[uuuuul, "w"] \arrow[uuuuur, "w_j"'] &
\end{tikzcd}$$

Enfin l'unicité de u est garantie par celle de $v = uq$ pour la raison (toujours la même) que q est un épimorphisme. ∎

Reprenons maintenant les deux foncteurs L-adjoints $\mathcal{F}$ et G et l'isomorphisme fonctoriel θ. Prouvons que G commute aux produits finis de $\mathbb{B}$, ce qui prouvera bien que $\mathcal{F}$ commute aux sommes directes finies de $\mathbb{W}$ car $\mathcal{F}^{*}$ a les propriétés de G. Soit $P = \prod_{j \in J} X_j$ un produit non vide quelconque dans $\mathbb{B}$. Nous supposons pour l'instant l'ensemble J

quelconque pour apercevoir le point où la condition de finitude intervient. Pour prouver que G(P) est le produit des $G(X_j)$ fixons un ensemble I et une famille de morphismes $v_j : K^{(I)} \to G(X_j)$ indexée par J. Pour tout $i \in I$ soit $h_i : K \to K^{(I)}$ l'injection canonique. Alors $v_{j,i} = v_j . h_i : K \to G(X_j)$ est un morphisme de $\mathbb{B}$, mais K étant lu dans la catégorie $\mathbb{W}$, c'est aussi une application de l'espace $L(K, G(X_j))$. L'isomorphisme θ^{-1}_{K,X_j} permet de remplacer les morphismes $G(p_j)$ et $v_{j,i}$ par le diagramme ci-contre où $\tilde{v}_{j,i} = \theta^{-1}_{K,X_j}(v_{j,i})$ est un élément de $L(\mathcal{F}(K), X_j)$. De plus $\|\tilde{v}_{j,i}\| = \|v_{j,i}\| \leq 1$.

$$\begin{tikzcd}
G(P) \arrow[rr, "G(p_j)"] & & G(X_j) \\
& K^{(I)} \arrow[ul, "v"'] \arrow[ur, "v_j"] & \\
& K \arrow[u, "h_i"] \arrow[uul, "\bar{v}_i"] \arrow[uur, "v_{j,i}"'] &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[rr, "p_j"] & & X_j \\
& \mathcal{F}(K) \arrow[ul, "\tilde{v}_i"] \arrow[ur, "\tilde{v}_{j,i}"'] &
\end{tikzcd}$$

Le problème est donc de savoir maintenant si l'on peut condenser la famille $(\tilde{v}_{j,i})_{j \in J}$ en une seule application $\tilde{v}_i \in L(\mathcal{F}(K), P)$ telle que $p_j . \tilde{v}_i = \tilde{v}_{j,i}$ pour tout $j \in J$. On peut toujours poser $\tilde{v}_i(z) = (\tilde{v}_{j,i}(z))_{j \in J}$ pour tout $z \in \mathcal{F}(K)$. On définit ainsi une application linéaire de $\mathcal{F}(K)$ dans P, qui envoie la boule compacte de $\mathcal{F}(K)$ dans la boule unité de P puisque $\|\tilde{v}_{j,i}\| \leq 1$. Mais pour que $\tilde{v}_i$ appartienne à $L(\mathcal{F}(K), P)$ il faut encore que $\tilde{v}_i$ soit continue sur la boule compacte de $\mathcal{F}(K)$. Or ce que l'on sait c'est seulement que $p_j . \tilde{v}_i = \tilde{v}_{j,i}$ est bien continue sur ce compact, de sorte que le résultat sera acquis chaque fois que la topologie de l'espace de Banach sera le produit des topologies des espaces facteurs X_j. Et ceci n'a lieu que si J est fini. Faisons dorénavant cette hypothèse, ce qui permet d'écrire $\tilde{v}_i \in L(\mathcal{F}(K), P)$. L'isomorphisme $\theta^{-1}_{K,P}$ donne donc une application linéaire $\bar{v}_i \in L(K, G(P))$ et puisque :

$$\|\bar{v}_i\| = \|\tilde{v}_i\| = \sup_{j \in J} \|\tilde{v}_{j,i}\| = \sup_{j \in J} \|v_{j,i}\| \leq 1$$

on voit en fait, en lisant de nouveau K dans la catégorie $\mathbb{B}$, que $\bar{v}_i$ est un morphisme de $\mathbb{B}$. Alors, lorsque $i \in I$, la famille $(\bar{v}_i)$ se condense en un seul morphisme $v : K^{(I)} \longrightarrow G(P)$ tel que $v.h_i = \bar{v}_i$ pour tout $i \in I$. La condition $p_j.\tilde{v}_i = \tilde{v}_{j,i}$ donne (par la fonctorialité de θ) la condition $G(p_j).\bar{v}_i = v_{j,i}$, de sorte que $G(p_j).v.h_i = v_{j,i} = v_j.h_i$ pour tout $i \in I$, d'où l'on tire $G(p_j).v = v_j$ pour tout $j \in J$. Enfin l'unicité de v sous ces conditions résulte aisément de l'unicité de $\tilde{v}_i$, ce qui détermine uniquement chaque $\bar{v}_i$ donc aussi v, et termine la preuve. ∎

Ainsi le premier théorème de commutation est complètement démontré. Dans la suite nous donnerons des exemples de foncteurs G possédant un L-adjoint et ne commutant pas aux produits quelconques de $\mathcal{B}$, ce qui montre que la restriction aux produits finis est bien essentielle.

<u>Epimorphismes et épistricts dans $\mathcal{B}$</u>. La partie "épique" du second théorème de commutation se démontre de la même façon, une fois obtenues les caractérisations suivantes, où $u : (X,A) \longrightarrow (Y,B)$ est un morphisme de $\mathcal{B}$:

(1.3.9) <u>LEMME 3</u>.

a) Si u est un épimorphisme (resp : un épistrict), alors pour tout $(\mathcal{X},\mathcal{C}) \in \mathcal{W}$ et toute application $f \in \mathcal{L}(Y,\mathcal{X})$, la condition $fu=o$ (resp : $(fu)(A) \subset \mathcal{C}$) entraîne la condition $f=o$ (resp : $f(B) \subset \mathcal{C}$).

b) Réciproquement si, pour toute $f \in Y'$, la condition $fu=o$ (resp : $fu \in A'$) entraîne la condition $f=o$ (resp : $f \in B'$), alors u est un épimorphisme (resp : un épistrict).

<u>Produits dans $\mathcal{W}$</u>. La propriété catégorique du lemme 2 étant valable aussi dans la catégorie $\mathcal{W}$, il suffit de reprendre pas à pas la même démonstration que précédemment pour prouver la dernière partie du second théorème de commutation. Mais comme sur la boule compacte $\mathcal{A} = \prod \mathcal{A}_j$ d'un produit $\mathcal{P} = \prod \mathcal{X}_j$, la topologie $\tau_{\mathcal{A}}$ est exactement le produit des topologies $\tau_{\mathcal{A}_j}$ sans que l'on ait à imposer de condition de finitude, le théorème est valable avec toute la généralité désirable.

1.4. <u>Produit tensoriel (projectif) d'espaces de Banach</u>.

Nous utilisons maintenant la dualité des catégories $\mathcal{B}$ et $\mathcal{W}$ pour définir un produit tensoriel sur $\mathcal{B}$. Bien entendu nous retrouvons le produit tensoriel projectif $\hat{\otimes}$ habituel. Néanmoins la forme des définitions choisies va nous inviter à définir dans la suite un produit tensoriel d'espaces de Waelbroeck. De plus l'important est sans doute que les propriétés classiques du produit $\hat{\otimes}$ sont obtenues comme conséquence du second théorème de commutation puisque nous montrons que le foncteur $\hat{\otimes}_Y$ admet le foncteur $\mathcal{L}_Y$ pour $\mathcal{L}$-adjoint.

<u>L'espace de Waelbroeck $\mathcal{B}(X,Y)$</u>. Etant donnés deux espaces de Banach (X,A) et (Y,B) on désigne par $\mathcal{B}(X,Y)$ l'espace des formes bilinéaires continues sur $X \times Y$. On peut munir $\mathcal{B}(X,Y)$ de sa norme habituelle et appeler $\mathcal{A}(X,Y)$ sa boule unité. En fait ce n'est pas cette structure normée qui va nous intéresser, et, de même que sur la boule unité A' du dual X' nous avons placé la topologie faible, nous considérons $\mathcal{A}(X,Y)$ comme un disque topologique avec pour topologie celle de la convergence simple sur $A \times B$ ou sur $X \times Y$ (que nous appellerons dans la suite bi-simple). Ce faisant $\mathcal{A}(X,Y)$ devient un sous-espace fermé du produit topologique $\Delta^{A \times B}$, où Δ est comme toujours le disque unité du corps K. Comme $\mathcal{A}(X,Y)$ est ainsi compact et que la topologie bi-simple est localement convexe et rend continue l'application $(f,g) \longrightarrow \frac{1}{2}(f+g)$, il est clair que $\mathcal{B}(X,Y)$ est un espace de Waelbroeck.

On sait que les produits tensoriels algébriques $X \otimes Y$ et $X' \otimes Y'$ sont en dualité séparante, car X et X', de même que Y et Y', sont en dualité séparante. On en déduit sans difficulté :

(1.4.1) <u>PROPOSITION</u>.

a) $X' \otimes Y' \subset \mathcal{B}(X,Y)$.

b) $X \otimes Y$ et $\mathcal{B}(X,Y)$ sont en dualité séparante.

<u>Le produit tensoriel $X \hat{\otimes} Y$</u>. Nous définissons $X \hat{\otimes} Y$ comme le dual de l'espace de Waelbroeck $\mathcal{B}(X,Y)$. Ainsi on a les formules de dualité :

$$X \hat{\otimes} Y = (\mathcal{B}(X,Y))^{*} \quad \text{et} \quad \mathcal{B}(X,Y) = (X \hat{\otimes} Y)' .$$

Avec cette définition de l'espace de Banach $X \hat{\otimes} Y$ on retrouve immédiatement les propriétés classiques.

En désignant par $\Gamma(A\otimes B)$ l'enveloppe disquée du produit $A\otimes B$ dans l'espace vectoriel $X\otimes Y$ et par $A\hat{\otimes}B$ la boule unité de $X\hat{\otimes}Y$, on montre facilement :

(1.4.2) PROPOSITION.

a) $X\otimes Y$ est un sous-espace dense de $X\hat{\otimes}Y$ et $A\hat{\otimes}B$ coïncide avec l'adhérence $\bar{\Gamma}(A\otimes B)$ de $\Gamma(A\otimes B)$ dans $X\hat{\otimes}Y$.

b) Sur $X\otimes Y$ la norme induite par celle de $X\hat{\otimes}Y$ (dite norme tensorielle) est exactement la jauge du disque absorbant $\Gamma(A\otimes B)$. Elle est donnée par l'expression classique :

$$\|z\|^{\wedge} = \operatorname{Inf} \sum_i \|x_i\| \|y_i\|$$

où la borne inférieure est prise pour toute décomposition finie $z = \sum_i x_i \otimes y_i$.

On tire de là un principe de prolongement :

(1.4.3) PROPOSITION. Soit f une application linéaire de $X\otimes Y$ dans un espace de Waelbroeck $(\mathcal{Z},\mathcal{C})$ telle que $f(A\otimes B)\subset\mathcal{C}$. Il existe une application unique $\bar{f}\in\mathcal{L}(X\hat{\otimes}Y),\mathcal{Z})$ qui prolonge f. De plus $\bar{f}(A\hat{\otimes}B)\subset\mathcal{C}$.

<u>Le foncteur $\mathcal{B}_{X,Y}$</u>. Il associe à tout espace de Waelbroeck $(\mathcal{Z},\mathcal{C})$ l'espace $\mathcal{B}_{X,Y}(\mathcal{Z})=\mathcal{B}(X,Y;\mathcal{Z})$ des fonctions bilinéaires de $X\times Y$ dans $\mathcal{Z}$, qui envoient le produit $A\times B$ dans un homothétique du disque compact $\mathcal{C}$. Cet espace contient comme disque absorbant l'ensemble $\mathcal{A}(X,Y;\mathcal{Z})$ des fonctions f telles que $f(A,B)\subset\mathcal{C}$, sur lequel on place la topologie de la convergence bi-simple, ce qui identifie $\mathcal{A}(X,Y;\mathcal{Z})$ à une partie fermée donc compacte du produit topologique compact $\mathcal{C}^{A\times B}$. Ainsi $\mathcal{B}(X,Y;\mathcal{Z})$ devient un espace de Waelbroeck. En particulier on reconnaît en l'espace $\mathcal{B}(X,Y;K)$ l'espace $\mathcal{B}(X,Y)$ déjà introduit. Comme $\mathcal{B}_{X,Y}$ agit de façon évidente sur les morphismes de la catégorie $\mathbb{W}$, on voit sans peine qu'on a ainsi défini un foncteur covariant de $\mathbb{W}$ dans elle-même. Alors :

(1.4.4) THEOREME. A des isomorphismes fonctoriels près on a :

$$\mathcal{B}_{X,Y} = \mathcal{L}_X.\mathcal{L}_Y = \mathcal{L}_Y.\mathcal{L}_X \quad \text{et} \quad \mathcal{B}_{X,Y} = \mathcal{L}_{X\hat{\otimes}Y}.$$

<u>PREUVE</u>. Les premières égalités traduisent le fait évident que les espaces $\mathcal{B}(X,Y;\mathcal{Z})$ et $\mathcal{B}(Y,X;\mathcal{Z})$ sont isomorphes à l'espace $\mathcal{L}(X,\mathcal{L}(Y,\mathcal{Z}))$, dans des isomorphismes fonctoriels en $\mathcal{Z}$ (et d'ailleurs aussi en X et en Y). La dernière se démontre à l'aide du principe de prolongement (1.4.3) une fois mis en place les morphismes, réciproques l'un de l'autre, $\sigma_{\mathcal{Z}} : \mathcal{B}(X,Y;\mathcal{Z})\longrightarrow\mathcal{L}(X\hat{\otimes}Y,\mathcal{Z})$ et $\tau_{\mathcal{Z}} : \mathcal{L}(X\hat{\otimes}Y,\mathcal{Z})\longrightarrow\mathcal{B}(X,Y;\mathcal{Z})$ par les égalités, pour $f\in\mathcal{B}(X,Y;\mathcal{Z})$ et $g\in\mathcal{L}(X\hat{\otimes}Y,\mathcal{Z})$:

$$\sigma_{\mathcal{Z}}(f)(x\otimes y) = f(x,y) \quad \text{et} \quad \tau_{\mathcal{Z}}(g)(x,y) = g(x\otimes y). \blacksquare$$

<u>REMARQUE</u>. La dernière condition exprime que le foncteur $\mathcal{B}_{X,Y}$ est $\mathcal{L}$-représentable et représenté par l'espace de Banach $X\hat{\otimes}Y$, ce qui est aussi, comme on l'a vu, une condition déterminant complètement (algébriquement et en norme) l'espace $X\hat{\otimes}Y$. On en tire la commutativité et l'associativité du produit tensoriel $\hat{\otimes}$ d'espaces de Banach, puis en faisant $\mathcal{Z}=K$ dans les formules (1.4.4) :

(1.4.5) COROLLAIRE. $\mathcal{B}(X,Y)=\mathcal{L}(X,Y')=\mathcal{L}(Y,X')$.

<u>Le bifoncteur $\hat{\otimes}$ et le foncteur $\hat{\otimes}_Y$</u>. En définissant par prolongement continu un produit tensoriel de morphismes dans la catégorie $\mathbb{B}$, on fait de $\hat{\otimes} : (X,Y)\longrightarrow X\hat{\otimes}Y$ un bifoncteur covariant $\mathbb{B}\times\mathbb{B}\longrightarrow\mathbb{B}$ et de $\hat{\otimes}_Y$ un foncteur covariant $\mathbb{B}\longrightarrow\mathbb{B}$ défini par $\hat{\otimes}_Y(X)=X\hat{\otimes}Y$. Le théorème (1.4.4) peut alors se récrire, en tenant compte de l'isomorphisme (fonctoriel en X et $\mathcal{Z}$) des espaces $\mathcal{L}(X\hat{\otimes}Y,\mathcal{Z})$ et $\mathcal{B}(X,Y;\mathcal{Z})$, sous la forme :

(1.4.6) THEOREME. Les foncteurs $\hat{\otimes}_Y : \mathbb{B}\longrightarrow\mathbb{B}$ et $\mathcal{L}_Y : \mathbb{W}\longrightarrow\mathbb{W}$ sont $\mathcal{L}$-adjoints.

C'est là le résultat le plus intéressant de la théorie. Il va entraîner toutes les propriétés de commutation des produits tensoriels :

(1.4.7) THEOREME. Le foncteur $\hat{\otimes}_Y$ commute aux épimorphismes, aux épistricts et aux sommes directes (plus généralement aux limites droites) de la catégorie $\mathbb{B}$. Le foncteur $\mathcal{L}_Y$ commute aux monomorphismes, aux monostricts et aux produits (donc aux limites gauches) de la catégorie $\mathbb{W}$.

En détaillant quelque peu les résultats relatifs au foncteur $\hat{\otimes}_Y$ on retrouve des théorèmes de Grothendieck.

(1.4.8) PROPOSITION. Les espaces $\ell^1_I(X)\hat{\otimes}Y$ et $\ell^1_I(X\hat{\otimes}Y)$ sont isomorphes dans un isomorphisme qui associe à tout $\bar{x}\otimes y$ l'élément $\bar{z}=(z_i)$ de l'espace $\ell^1_I(X\hat{\otimes}Y)$ donné par $z_i=x_i\otimes y$ si $\bar{x}=(x_i)$. En particulier l'espace $\ell^1_I(X)$ s'identifie au produit tensoriel $\ell^1_I\hat{\otimes}X$.

(1.4.9) PROPOSITION. Soient $u_1 : X_1 \longrightarrow Y_1$ et $u_2 : X_2 \longrightarrow Y_2$ des morphismes de $\mathcal{B}$. Si u_1 et u_2 sont des épimorphismes (resp : des épistricts) il en est de même du morphisme $u_1\hat{\otimes}u_2$.

Application à l'espace $X\hat{\otimes}Y$. Nous savons que tout espace de Banach est un quotient d'un espace ℓ^1_I. Par ailleurs (1.4.8) implique le résultat $\ell^1_I\hat{\otimes}\ell^1_J=\ell^1_{I\times J}$. De sorte que, étant donnés deux espaces de Banach X et Y et des épistricts :

$$\varphi : \ell^1_I \longrightarrow X \qquad \varphi(\bar{\xi})=\sum_I \xi_i x_i \quad \text{et} \quad \psi : \ell^1_J \longrightarrow Y \qquad \psi(\bar{\eta})=\sum_J \eta_j y_j$$

on en déduit un épistrict $\rho=\varphi\hat{\otimes}\psi$:

$$\rho : \ell^1_{I\times J} \longrightarrow X\hat{\otimes}Y \qquad \rho(\bar{\nu})=\sum_{i,j} \nu_{ij} x_i \otimes y_j \ .$$

En conséquence :

(1.4.10) THEOREME (Grothendieck). Pour tout $z\in X\hat{\otimes}Y$ et tout $\varepsilon>0$, il existe deux suites $x_n\in X$ et $y_n\in Y$ telles que $\|x_n\|=1$, $\|y_n\|=1$ et une suite $\bar{\nu}=(\nu_n)\in\ell^1$ telle que :

$$z=\sum \nu_n x_n\otimes y_n \quad \text{et} \quad \|z\|^{\wedge} \leqslant \|\bar{\nu}\|_1+\varepsilon \ .$$

(1.4.11) COROLLAIRE 1. Si X et Y sont séparables, les suites (x_n) et (y_n) peuvent être fixées une fois pour toutes. Dans ces conditions :

$$\|z\|^{\wedge} = \operatorname{Inf}\sum|\nu_n|$$

où la borne inférieure est prise pour toute décomposition $z=\sum \nu_n x_n\otimes y_n$.

Dans le cas où X et Y ne sont plus tous deux séparables, on remarque que le morphisme $\rho : \ell^1_{I\times J} \longrightarrow X\hat{\otimes}Y$ est une application ouverte qui

transforme la boule ouverte de $\ell^1_{I\times J}$ en la boule ouverte de $X\hat{\otimes}Y$. Il suit de là que l'on peut relever tout compact H de $X\hat{\otimes}Y$ en un compact L de $\ell^1_{I\times J}$ (B4 : prop.18), de sorte que la connaissance des compacts d'un espace ℓ^1_I détermine celle des compacts de $X\hat{\otimes}Y$. En omettant les détails on obtient les résultats de Grothendieck, qui apparaissent ainsi comme des corollaires des propriétés catégoriques générales de $\mathcal{L}$-adjonction :

(1.4.12) COROLLAIRE 2. Soit H un compact de $X\hat{\otimes}Y$. Alors il existe deux suites $x_n\in X$ et $y_n\in Y$ vérifiant $\|x_n\|\leqslant 1$, $\|y_n\|\leqslant 1$, $x_n\longrightarrow 0$, $y_n\longrightarrow 0$, et une partie compacte L de ℓ^1 telles que tout $z\in H$ puisse s'écrire $z=\sum \nu_n x_n\otimes y_n$ avec $\bar{\nu}=(\nu_n)\in L$.

1.5. Produit tensoriel (projectif) d'espaces de Waelbroeck.

Il suffit d'opérer symétriquement en échangeant, en quelque sorte, les catégories $\mathcal{B}$ et $\mathcal{W}$. Néanmoins il faudra prendre quelques précautions pour la mise en place de certains isomorphismes.

L'espace de Banach $B(\mathfrak{X},\mathcal{Y})$. Etant donnés deux espaces de Waelbroeck $(\mathfrak{X},\mathcal{A})$ et $(\mathcal{Y},\mathcal{B})$ nous désignons par $B(\mathfrak{X},\mathcal{Y})$ l'espace des formes bilinéaires sur $\mathfrak{X}\times\mathcal{Y}$ dont la restriction au produit $\mathcal{A}\times\mathcal{B}$ est continue, muni de la topologie de la convergence uniforme sur $\mathcal{A}\times\mathcal{B}$. Il est clair que $B(\mathfrak{X},\mathcal{Y})$ est un espace de Banach, sous-espace fermé de l'espace de Banach $C(\mathcal{A}\times\mathcal{B})$ formé des fonctions bi-disquées. Et l'on a comme en (1.4) :

(1.5.1) PROPOSITION.

a) $\mathfrak{X}^*\otimes\mathcal{Y}^*\subset B(\mathfrak{X},\mathcal{Y})$.

b) $\mathfrak{X}\otimes\mathcal{Y}$ et $B(\mathfrak{X},\mathcal{Y})$ sont en dualité séparante.

Le produit tensoriel $\mathfrak{X}\bar{\otimes}\mathcal{Y}$. Nous le définissons comme le dual de l'espace de Banach $B(\mathfrak{X},\mathcal{Y})$. Ainsi :

$$\mathfrak{X}\bar{\otimes}\mathcal{Y} = (B(\mathfrak{X},\mathcal{Y}))' \quad \text{et} \quad B(\mathfrak{X},\mathcal{Y}) = (\mathfrak{X}\bar{\otimes}\mathcal{Y})^* \ .$$

On a alors un théorème de densité :

(1.5.2) PROPOSITION. L'espace vectoriel $\mathfrak{X}\otimes\mathcal{Y}$ est partout dense dans l'elc $(\mathfrak{X}\bar{\otimes}\mathcal{Y})_c$ et la boule compacte de $\mathfrak{X}\bar{\otimes}\mathcal{Y}$, notée $\mathcal{A}\bar{\otimes}\mathcal{B}$, coïncide exactement avec l'adhérence dans $(\mathfrak{X}\bar{\otimes}\mathcal{Y})_c$ de l'enveloppe disquée $\Gamma(\mathcal{A}\otimes\mathcal{B})$.

et un principe de prolongement :

(1.5.3) PROPOSITION. Soit f une application linéaire de $\mathfrak{X}\otimes\mathcal{Y}$ dans un espace de Banach Z, dont la restriction à $\Gamma(\mathcal{A}\otimes\mathcal{B})$ est continue pour la topologie de $\mathcal{A}\bar{\otimes}\mathcal{B}$. Il existe une application linéaire unique $\bar{f}\in L(\mathfrak{X}\bar{\otimes}\mathcal{Y},Z)$ qui prolonge f.

Le foncteur $B_{\mathfrak{X},\mathcal{Y}}$. C'est un foncteur covariant $\mathbb{B}\to\mathbb{B}$. Il associe à tout espace de Banach Z l'espace $B(\mathfrak{X},\mathcal{Y};Z)$ des applications bilinéaires de $\mathfrak{X}\times\mathcal{Y}$ dans Z dont la restriction au compact $\mathcal{A}\times\mathcal{B}$ est continue, muni de la topologie de la convergence uniforme sur $\mathcal{A}\times\mathcal{B}$. Il opère de façon évidente sur les morphismes. Lorsque Z=K on retrouve $B(\mathfrak{X},\mathcal{Y})$.

(1.5.4) THEOREME. A des isomorphismes fonctoriels près on a :

$$B_{\mathfrak{X},\mathcal{Y}} = L_{\mathfrak{X}}.L_{\mathcal{Y}} = L_{\mathcal{Y}}.L_{\mathfrak{X}} \quad \text{et} \quad B_{\mathfrak{X},\mathcal{Y}} = L_{\mathfrak{X}\bar{\otimes}\mathcal{Y}}.$$

PREUVE. Les premières égalités s'obtiennent aisément. Pour voir la seconde mettons en place le morphisme $\tau_Z : L(\mathfrak{X}\bar{\otimes}\mathcal{Y},Z)\to B(\mathfrak{X},\mathcal{Y};Z)$ par $\tau_Z(\varphi)(x,y)=\varphi(x\otimes y)$. La fonctorialité étant immédiate, il suffit de prouver que τ_Z est un isomorphisme. On vérifie tout de suite que τ_Z est une isométrie grâce à la densité de $\Gamma(\mathcal{A}\otimes\mathcal{B})$ dans $\mathcal{A}\bar{\otimes}\mathcal{B}$. Il reste à voir que τ_Z est surjectif. Soit donc $f\in B(\mathfrak{X},\mathcal{Y};Z)$. En posant $g(x\otimes y)=f(x,y)$ on définit une fonction linéaire $g : \mathfrak{X}\otimes\mathcal{Y}\to Z$. Montrons qu'elle se prolonge en une fonction linéaire $\bar{g}\in L(\mathfrak{X}\bar{\otimes}\mathcal{Y},Z)$ qui sera donc telle que $f=\tau_Z(\bar{g})$. Il suffit, avec le principe de prolongement (1.5.3), de vérifier que g est continue sur $\Gamma(\mathcal{A}\otimes\mathcal{B})$ pour la topologie compacte de $\mathcal{A}\bar{\otimes}\mathcal{B}$. Supposons donc $u\to u_o$ dans $\Gamma(\mathcal{A}\otimes\mathcal{B})$. Alors, pour tout $z'\in Z'$, la forme bilinéaire $z'.f$ appartient à $B(\mathfrak{X},\mathcal{Y})$ et définit une forme linéaire $(z'.f)^-$ sur $\mathfrak{X}\bar{\otimes}\mathcal{Y}$ telle que $(z'.f)^-(u)\to(z'.f)^-(u_o)$. Or la restriction à $\mathfrak{X}\otimes\mathcal{Y}$ de $(z'.f)^-$ est précisément $z'.g$. Nous voyons donc que $g(u)\to g(u_o)$ dans Z pour la topologie faible $\sigma(Z,Z')$.

Montrons de là que $g(u)\to g(u_o)$ dans Z. En effet tout provient du fait que $f(\mathcal{A}\times\mathcal{B})$ est un compact H de Z de sorte que $g(\Gamma(\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}))\subset\bar{\Gamma}(H)$. Or $\bar{\Gamma}(H)$ est aussi un compact de Z et, sur tout compact de Z, la topologie faible $\sigma(Z,Z')$ coïncide avec la topologie d'espace de Banach. ∎

REMARQUE. Ce résultat exprime que le foncteur $B_{\mathfrak{X},\mathcal{Y}}$ est L-représentable et représenté par l'espace de Waelbroeck $\mathfrak{X}\bar{\otimes}\mathcal{Y}$, ce qui détermine d'ailleurs complètement cet espace. On en tire aussi la commutativité et l'associativité du produit tensoriel d'espaces de Waelbroeck. Puis en faisant Z=K dans les formules (1.5.4) :

(1.5.5) COROLLAIRE. $B(\mathfrak{X},\mathcal{Y})=L(\mathfrak{X},\mathcal{Y}^*)=L(\mathcal{Y},\mathfrak{X}^*)$.

Le bifoncteur $\bar{\otimes}$ et le foncteur $\bar{\otimes}_{\mathcal{Y}}$. Ici encore on définit par prolongement un produit tensoriel de morphismes dans la catégorie $\mathbb{W}$, ce qui fait de $\bar{\otimes}$ un bifoncteur covariant $\mathbb{W}\times\mathbb{W}\to\mathbb{W}$ et, en fixant $\mathcal{Y}$, de $\bar{\otimes}_{\mathcal{Y}} : \mathfrak{X}\to\mathfrak{X}\bar{\otimes}\mathcal{Y}$ un foncteur covariant $\mathbb{W}\to\mathbb{W}$. Et le théorème (1.5.4) peut aussi se récrire.

(1.5.6) THEOREME. Les foncteurs $\bar{\otimes}_{\mathcal{Y}} : \mathbb{W}\to\mathbb{W}$ et $L_{\mathcal{Y}} : \mathbb{B}\to\mathbb{B}$ sont L-adjoints.

D'où les propriétés de commutation :

(1.5.7) THEOREME. Le foncteur $\bar{\otimes}_{\mathcal{Y}}$ commute aux épimorphismes, aux épistricts et aux sommes directes finies de la catégorie $\mathbb{W}$. Le foncteur $L_{\mathcal{Y}}$ commute aux monomorphismes, aux monostricts et aux produits finis de la catégorie $\mathbb{B}$.

(1.5.8) COROLLAIRE. Soient $u_1 : \mathfrak{X}_1\to\mathcal{Y}_1$ et $u_2 : \mathfrak{X}_2\to\mathcal{Y}_2$ des morphismes de la catégorie $\mathbb{W}$. Si u_1 et u_2 sont des épimorphismes (resp : des épistricts), il en est de même de $u_1\bar{\otimes}u_2$.

6. Applications nucléaires et applications intégrales.

Les deux morphismes fonctoriels t et τ. Etant donnés deux espaces de Banach X et Y, on sait que l'espace vectoriel $X\otimes Y$ s'injecte dans l'espace $B(X',Y')$. Traitons ce dernier espace comme l'espace $L(Y',X)$. Cela revient à dire que tout $z=\sum\lambda_i x_i\otimes y_i\in X\otimes Y$ définit un opérateur $u=\tilde{z}\in L(Y',X)$ selon l'égalité $u(y')=\sum\lambda_i\langle y_i,y'\rangle x_i$. On vérifie aussitôt l'inégalité $\|u\| \leqslant \|z\|^\wedge$ de sorte que l'application $X\otimes Y \longrightarrow L(Y',X)$ se prolonge en un morphisme $X\hat{\otimes}Y \longrightarrow L(Y',X)$, mais <u>qui n'est plus a priori injectif</u>. Si l'on fixe l'espace Y, on constate la fonctorialité en X, ce qui garantit l'existence d'un morphisme fonctoriel t détaillé par :

$$t : \hat{\otimes}_Y \longrightarrow L_Y \quad ; \quad t_X : X\hat{\otimes}Y \longrightarrow L(Y',X) \quad ; \quad t_X(x\otimes y)(y') = \langle y,y'\rangle x$$

Symétriquement, étant donnés deux espaces de Waelbroeck, notés X' et Y' et considérés comme duals d'espaces de Banach X et Y, on met en place le morphisme fonctoriel τ avec :

$$\tau : \bar{\otimes}_{Y'} \longrightarrow \mathcal{L}_Y \quad ; \quad \tau_{Y'} : X'\bar{\otimes}Y' \longrightarrow \mathcal{L}(Y,X') \; ; \; \tau_{Y'}(x'\otimes y')(y) = \langle y,y'\rangle x' .$$

La propriété principale de t et τ se résume en :

(1.6.1) <u>PROPOSITION</u>. Les morphismes $t_X : X\hat{\otimes}Y \longrightarrow L(Y',X)$ et $\tau_{Y'} : X'\bar{\otimes}Y' \longrightarrow \mathcal{L}(Y,X')$ sont transposés l'un de l'autre.

<u>PREUVE</u>. On reconnaît dans le dual de $X\hat{\otimes}Y$ l'espace $\mathcal{L}(Y,X')$ et dans le dual de $X'\bar{\otimes}Y'$ l'espace $L(Y',X)$. De plus si $z = x\otimes y$ et $z' = x'\otimes y'$ on a $\langle t_X(z), z'\rangle = \langle z, \tau_{Y'}(z')\rangle = \langle x,x'\rangle\langle y,y'\rangle$. ∎

<u>REMARQUE</u>. On pourrait encore traduire cette propriété en disant que les morphismes fonctoriels t et τ eux-mêmes sont transposés (ou duaux) l'un de l'autre. Car la notion de foncteur dual, dégagée en (1.3) trouve ici un domaine d'application. En effet $(\mathcal{L}_Y)^* = \hat{\otimes}_Y$ et $(L_{Y'})' = \bar{\otimes}_{Y'}$, et l'on passe de $t : \hat{\otimes}_Y \longrightarrow L_{Y'}$ à $\tau : \bar{\otimes}_{Y'} \longrightarrow \mathcal{L}_Y$ par dualité (ou transposition).

<u>Les applications nucléaires et le produit tensoriel $\hat{\hat{\otimes}}$</u>. Rien n'empêche maintenant de décomposer canoniquement le morphisme t_X sous la forme $t_X = \mathrm{Imt}_X . \tilde{t}_X . \mathrm{Coimt}_X$, ce qui met en évidence deux espaces de Banach, l'un qui est le but de Coimt_X et l'autre la source de Imt_X. Comme t_X se réduit à une injection sur $X\otimes Y$, on voit que l'espace source de Imt_X coïncide avec l'adhérence de $X\otimes Y$ dans l'espace $L(Y',X) = B(X',Y')$. On reconnaît donc ici l'espace produit tensoriel ε noté habituellement $X\hat{\hat{\otimes}}Y$.

Quant à l'espace $(X\hat{\otimes}Y)/t_X^{-1}(o)$ muni de sa norme quotient, qui est le but de Coimt_X, nous le noterons $L^1(Y',X)$ en l'identifiant à un espace de fonctions de Y' dans X. Ainsi :

(1.6.2) <u>DEFINITION</u>. On dit que l'espace de Banach $L^1(Y',X)$ est l'espace des applications <u>nucléaires</u> de Y' dans X. Sa norme quotient, dite norme nucléaire, est notée $\|.\|_1$.

On obtient donc la décomposition suivante, où l'on rappelle que p_X est un épistrict, $\tilde{t}_X$ un bimorphisme et r_X un monostrict :

$$\begin{tikzcd}
X\hat{\otimes}Y \arrow[r, "t_X"] \arrow[d, "p_X = \mathrm{Coimt}_X"'] & L(Y',X) \\
L^1(Y',X) \arrow[r, "\tilde{t}_X"] & X\hat{\hat{\otimes}}Y \arrow[u, "r_X = \mathrm{Imt}_X"']
\end{tikzcd}$$

On peut d'ailleurs, ces définitions étant données, constater assez vite que $L^1(.,.)$ et $\hat{\hat{\otimes}}$ sont des bifoncteurs et que, en fixant l'espace Y, les morphismes qui interviennent sont fonctoriels en X, de sorte que l'on obtient en réalité un diagramme fonctoriel commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\hat{\otimes}_Y \arrow[r, "t"] \arrow[d, "p"'] & L_{Y'} \\
L^1_{Y'} \arrow[r, "\tilde{t}"] & \hat{\hat{\otimes}}_Y \arrow[u, "r"']
\end{tikzcd}$$

<u>Les applications intégrales et le produit tensoriel $\bar{\bar{\otimes}}$</u>. En opérant avec le morphisme $\tau_{Y'}$, que l'on décompose dans la catégorie $\mathcal{W}$, on met en évidence deux espaces de Waelbroeck. L'un, source de $\mathrm{Im}\tau_{Y'}$, noté $X'\bar{\bar{\otimes}}Y'$, est exactement l'adhérence de $X'\otimes Y'$ dans l'elc $(\mathcal{L}(Y,X'))_c$ et sa boule compacte est obtenue par intersection avec celle de $\mathcal{L}(Y,X')$. L'autre, but de $\mathrm{Coim}\tau_{Y'}$, est l'espace quotient $(X'\bar{\otimes}Y')/\tau_{Y'}^{-1}(o)$ muni de sa structure d'espace de Waelbroeck quotient et noté $\mathcal{L}^1(Y,X')$.

(1.6.3) <u>DEFINITION</u>. On dit que l'espace de Waelbroeck $\mathcal{L}^1(Y,X')$ est l'espace des applications <u>intégrales</u> de Y dans X'.

Et l'on constate aussi que $\mathcal{L}^1(.,.)$ et $\bar{\bar{\otimes}}$ sont en réalité des bifoncteurs et que l'on a réalisé un diagramme fonctoriel commutatif, <u>exactement dual du précédent</u> d'après (1.6.1) :

$$\begin{tikzcd}
\bar{\bar{\otimes}}_{Y'} \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, "\varpi"'] & \mathcal{L}_Y \\
\mathcal{L}^1_Y \arrow[r, "\tilde{\tilde{\tau}}"] & \bar{\bar{\otimes}}_{Y'} \arrow[u, "\rho"']
\end{tikzcd}$$

La dualité des deux diagrammes traduit en fait les égalités :

(1.6.4) <u>PROPOSITION</u>. $(X\hat{\hat{\otimes}}Y)' = \mathcal{L}^1(Y,X')$ et $(X'\bar{\bar{\otimes}}Y')^* = L^1(Y',X)$.

<u>REMARQUE</u>. La terminologie (applications intégrales, nucléaires) est empruntée à Grothendieck. Les notions introduites ici sont presque les mêmes que celles de Grothendieck comme on va le voir plus loin. Cependant elles sont traduites en respectant la dualité des catégories $\mathbb{B}$ et $\mathbb{W}$. Ce procédé "réhabilite" les applications intégrales et leur fait jouer un rôle exactement symétrique de celui joué par les applications nucléaires. On pourra s'en convaincre au paragraphe suivant et au chapitre 2.

<u>Formes bilinéaires nucléaires et formes bilinéaires intégrales</u>. Les espaces $L^1(Y',X)$ et $\mathcal{L}^1(Y,X')$ sont des espaces d'applications linéaires. Ils sont écrits en détruisant volontairement la symétrie de X et Y, mais l'avantage en est dans l'obtention de tous les foncteurs "en Y" qui s'installent dans les diagrammes. Pour rétablir cette symétrie il suffit de leur faire correspondre des espaces de formes bilinéaires. On aura ainsi l'espace de Banach $B^1(X',Y')$ des formes bilinéaires nucléaires sur $X'\times Y'$ et l'espace de Waelbroeck $\mathcal{B}^1(X,Y)$ des formes bilinéaires intégrales sur $X\times Y$.

<u>L'espace $C(T,X)$</u>. Etant donnés un espace compact T et un espace de Banach X, on désigne par $C(T,X)$ l'espace de Banach des fonctions continues de T dans X, muni de la norme de la convergence uniforme sur T. Evidemment $C(T,K)=C(T)$. On associe à chaque $f\in C(T,X)$ une application $\tilde{f} : X' \longrightarrow C(T)$ en posant $\tilde{f}(x')(t)=\langle f(t),x'\rangle$. On laisse au lecteur le soin de retrouver le résultat bien classique :

(1.6.5) <u>PROPOSITION</u>. $C(T,X) = C(T)\hat{\hat{\otimes}}X = L(X',C(T)) = L(\mathfrak{M}(T),X)$.

(1.6.6) <u>COROLLAIRE</u>. Soient S et T deux espaces compacts. Alors :

$$C(S\times T) = C(S)\hat{\hat{\otimes}}C(T) = L(\mathfrak{M}(S),C(T)).$$

<u>L'espace de Waelbroeck $\mathfrak{M}(T,X')$</u>. L'espace T étant toujours compact, on est en droit, par dualité, de définir un espace (de Waelbroeck) de mesures vectorielles par l'égalité $\mathfrak{M}(T,X') = (C(T,X))'$. Alors :

(1.6.7) <u>PROPOSITION</u>. $\mathfrak{M}(T,X') = \mathfrak{M}(T)\bar{\bar{\otimes}}X' = \mathcal{L}^1(C(T),X') = (C(T,X))'$.

(1.6.8) <u>COROLLAIRE</u>. Soient S et T deux compacts. On a :

$$\mathfrak{M}(S\times T) = \mathfrak{M}(S)\bar{\bar{\otimes}}\mathfrak{M}(T) = \mathcal{L}^1(C(S),\mathfrak{M}(T)).$$

<u>L'espace de Banach $\ell^1_I\hat{\hat{\otimes}}X$</u>. Nous traitons ici ℓ^1_I en espace de Banach, donc son dual ℓ^∞_I en espace de Waelbroeck. Remarquons, comme on le vérifie aisément que les éléments $\bar{\varepsilon}_k=(\delta_{ik})_{i\in I}\in\ell^\infty_I$ constituent une "base" de l'espace de Waelbroeck ℓ^∞_I. On entend par là, en désignant par $\mathcal{A}^\infty_I$ la boule compacte de ℓ^∞_I, que tout $\bar{\xi}=(\xi_i)\in\ell^\infty_I$ s'écrit, dans l'espace topologique $\mathcal{A}^\infty_I$, $\bar{\xi}=\sum\xi_i\bar{\varepsilon}_i$. Il suit de là que toute application $u\in L(\ell^\infty_I,X)$ est complètement déterminée par la famille $\bar{x}=(x_i)$, où $x_i=u(\bar{\varepsilon}_i)$, selon l'égalité $u(\bar{\xi})=\sum\xi_i x_i$, ce qui prouve auxiliairement que la famille (x_i) est sommable dans X, de même que toute famille $(\xi_i x_i)$ pour $\bar{\xi}=(\xi_i)\in\ell^\infty_I$. Réciproquement on peut montrer que toute famille $\bar{x}=(x_i)$ sommable dans X est telle que toute famille $(\xi_i x_i)$ soit aussi sommable dans X pour toute $\bar{\xi}=(\xi_i)\in\ell^\infty_I$. En supprimant les détails (voir par exemple Grothendieck (G3 : I p.90)) on obtient :

(1.6.9) <u>PROPOSITION</u>. L'espace $\ell^1_I\hat{\hat{\otimes}}X$, égal à l'espace $L(\ell^\infty_I,X)$ s'identifie à l'espace des familles $\bar{x}=(x_i)_{i\in I}$ sommables de X, muni de la norme :

$$\|\bar{x}\|^\wedge = \sup_{\substack{J \text{ finie} \\ |\xi_i|=1}} \left\| \sum_{i\in J}\xi_i x_i \right\| = \sup_{x'\in A'} \sum_{i\in I} |\langle x_i,x'\rangle| .$$

On en déduit, grâce à l'interprétation de $\ell^1_I\hat{\otimes}X=\ell^1_I(X)$ comme l'espace des familles <u>absolument</u> sommables de X, que le morphisme canonique $\ell^1_I\hat{\otimes}X \longrightarrow \ell^1_I\hat{\hat{\otimes}}X$ est <u>injectif</u>, ce qui fournit l'égalité $L^1(\ell^\infty_I,X)=\ell^1_I\hat{\otimes}X$, puis par dualité les résultats :

(1.6.10) <u>COROLLAIRE</u>. Soient I et J deux ensembles et X un espace de Banach. On a :

$$\ell^\infty_I\bar{\otimes}X' = \mathcal{L}(\ell^1_I,X') \quad \text{et} \quad \ell^\infty_I\bar{\bar{\otimes}}\ell^\infty_J = \ell^\infty_{I\times J}\ .$$

<u>APPLICATIONS</u>.

<u>Appl 1</u>. <u>Représentation d'une application nucléaire</u>. La définition de $L^1(Y',X)$ et l'expression générale d'un point $z\in X\hat{\otimes}Y$ donnée en (1.4.10) et (1.4.12) montrent que toute application nucléaire $u\in L^1(Y',X)$ est définie par la donnée de suites $x_n\in A$, $y_n\in B$ (on peut même supposer $x_n\longrightarrow 0$ et $y_n\longrightarrow 0$) et $\bar{\nu}=(\nu_n)\in\ell^1$ selon $u(y')=\sum \nu_n\langle y_n,y'\rangle x_n$. De plus, pour tout $\varepsilon>0$, on peut choisir les suites (x_n), (y_n) et $\bar{\nu}$ de façon que $\|u\|_1\leqslant\|\bar{\nu}\|_1+\varepsilon$.

<u>Appl 2</u>. <u>Représentation intégrale de $\mathfrak{X}\bar{\otimes}\mathcal{Y}$</u>. Soient $(\mathfrak{X},\mathcal{A})$ et $(\mathcal{Y},\mathcal{B})$ deux espaces de Waelbroeck. On sait qu'on peut exprimer $\mathfrak{X}$ comme quotient de l'espace de Waelbroeck $\mathfrak{M}(\mathcal{A})$ en mettant en place l'épistrict $\varphi:\mathfrak{M}(\mathcal{A})\longrightarrow\mathfrak{X}$, suffisamment défini par la condition $\varphi(\varepsilon_a)=a$ pour tout $a\in\mathcal{A}$. De même $\psi:\mathfrak{M}(\mathcal{B})\longrightarrow\mathcal{Y}$, $\psi(\varepsilon_b)=b$ pour tout $b\in\mathcal{B}$, est un épistrict. On en déduit, en suivant (1.5.8) et en identifiant $\mathfrak{M}(\mathcal{A})\bar{\otimes}\mathfrak{M}(\mathcal{B})$ et $\mathfrak{M}(\mathcal{A}\times\mathcal{B})$ par l'application $\varepsilon_a\otimes\varepsilon_b\longrightarrow\varepsilon_{a,b}$, puis en appliquant (1.5.8), l'existence d'un <u>épistrict</u> $\rho:\mathfrak{M}(\mathcal{A}\times\mathcal{B})\longrightarrow\mathfrak{X}\bar{\otimes}\mathcal{Y}$ tel que $\rho(\varepsilon_{a,b})=a\otimes b$. Il s'ensuit que le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{A}\times\mathcal{B} & \xrightarrow{\otimes} & \mathcal{A}\bar{\otimes}\mathcal{B} \\
\varepsilon\downarrow & & \downarrow \\
\mathfrak{M}(\mathcal{A}\times\mathcal{B}) & \xrightarrow{\rho} & \mathfrak{X}\bar{\otimes}\mathcal{Y}
\end{array}$$

est commutatif, ce qui identifie nécessairement ρ à l'application $\Phi_\otimes$ définie en (1.2.16) et conduit, en utilisant la remarque associée, à :

(1.6.11) <u>PROPOSITION</u>. L'épistrict $\rho:\mathfrak{M}(\mathcal{A}\times\mathcal{B})\longrightarrow\mathfrak{X}\bar{\otimes}\mathcal{Y}$ donne pour image de toute mesure $\nu\in\mathfrak{M}(\mathcal{A}\times\mathcal{B})$ l'intégrale faible

$$\rho\nu = \int_{\mathcal{A}\times\mathcal{B}} a\otimes b\,d\nu(a,b)\ .$$

En particulier, pour tout élément $z\in\mathcal{A}\bar{\otimes}\mathcal{B}$, il existe une mesure $\nu\in\mathfrak{M}_1(\mathcal{A}\times\mathcal{B})$ telle que $z=\int_{\mathcal{A}\times\mathcal{B}} a\otimes b\,d\nu(a,b)$.

<u>Appl 3</u>. <u>Représentation d'une application intégrale</u>. De ce qui vient d'être dit on tire que toute application intégrale $v\in\mathcal{L}^1(Y,X')$ est définie par (au moins) une mesure $\nu\in\mathfrak{M}(A'\times B')$, positive si l'on veut, selon l'intégrale faible $v(y)=\int_{A'\times B'}\langle y,b'\rangle a'd\nu(a',b')$, autrement dit par l'égalité :

$$\langle x,v(y)\rangle = \int_{A'\times B'}\langle x,a'\rangle\langle y,b'\rangle d\nu(a',b')$$

pour tout $x\in X$ et tout $y\in Y$, la boule compacte de $\mathcal{L}^1(Y,X')$ étant décrite lorsque ν décrit la boule compacte $\mathfrak{M}_1(A'\times B')$ de $\mathfrak{M}(A'\times B')$.

1.7. <u>Propriétés des applications nucléaires et des applications intégrales</u>.

<u>Invariance par transposition</u>. Chaque application nucléaire $u\in L^1(Y',X)$ définit une forme bilinéaire nucléaire sur $Y'\times Y'$. Il est clair que la permutation de X' et Y' établit un isomorphisme d'espaces de Banach entre $B^1(X',Y')$ et $B^1(Y',X')$. Or cette permutation correspond exactement à l'isomorphisme de transposition entre $L^1(Y',X)$ et $L^1(X',Y)$. Donc :

(1.7.1) <u>PROPOSITION</u>. La transposée d'une application nucléaire est encore nucléaire et de même norme nucléaire.

Et de même :

(1.7.2) <u>PROPOSITION</u>. La transposée d'une application intégrale est encore une application intégrale.

<u>Caractère fonctoriel</u>. Nous avons affirmé l'existence de bifoncteurs $L^1(.,.)$ et $\mathcal{L}^1(.,.)$. En fait il faut prouver que l'action sur les morphismes est cohérente. Ce qui se fait ici à partir de la représentation "sérielle" d'une application nucléaire et de la représentation intégrale d'une application intégrale.

(1.7.3) PROPOSITION. Soient $u \in L^1(Y',X)$ une application nucléaire, $v_o \in \mathcal{L}^1(Y_o,X_o')$ une application intégrale, $p : X \to X_o$ et $q : Y \to Y_o$ des morphismes de $\mathbb{B}$, $p' : X_o' \to X'$ et $q' : Y_o' \to Y'$ leurs morphismes transposés :

$$Y_o' \xrightarrow{q'} Y' \xrightarrow{u} X \xrightarrow{p} X_o \quad ; \quad Y \xrightarrow{q} Y_o \xrightarrow{v_o} X_o' \xrightarrow{p'} X'$$

L'application $u_o = puq'$: $Y_o' \to X_o$ est nucléaire et $\|u_o\|_1 \leq \|u\|_1$. L'application $v = p'v_oq$: $Y \to X'$ est intégrale et contenue dans la boule compacte de $\mathcal{L}^1(Y,X')$ lorsque v_o est contenue dans la boule compacte de $\mathcal{L}^1(Y_o,X_o')$.

Application nucléaire-type. Désignons toujours par $\ell^1 \in \mathbb{B}$ et $\ell^\infty \in \mathbb{W}$ les espaces habituels ℓ^1_N et ℓ^∞_N. Soit d l'application diagonale :

$$d : N \to N \times N \quad ; \quad d(n) = (n,n) .$$

On lui associe un morphisme $\delta' : \ell^\infty_{N\times N} \to \ell^\infty$ de la catégorie $\mathbb{W}$, défini par $(\delta'\zeta)_n = \zeta_{n,n}$ si $\zeta = (\zeta_{n,m})$, et par transposition un morphisme $\delta : \ell^1 \to \ell^1_{N\times N}$ de la catégorie $\mathbb{B}$ donné par $(\delta\xi)_{n,m} = \delta_{nm}\xi_n$ si $\xi = (\xi_n)$. Comme $\|\delta\xi\|_1 = \|\xi\|_1$, on voit que δ est un monostrict, donc δ' est un épistrict de $\mathbb{W}$. Désignons par $\bar{\varepsilon}_k = (\delta_{nk})$ les éléments de la base de ℓ^1. On sait que l'espace $\ell^1_{N\times N}$ s'identifie à l'espace $\ell^1 \hat{\otimes} \ell^1$ en associant à tout $\zeta = (\zeta_{n,m})$ l'élément $\sum_{n,m} \zeta_{n,m}\, \bar{\varepsilon}_n \otimes \bar{\varepsilon}_m$. Par ailleurs, l'application canonique $\ell^1 \hat{\otimes} \ell^1 \to \ell^1 \hat{\hat{\otimes}} \ell^1$ étant injective, on peut identifier $\ell^1 \hat{\otimes} \ell^1$ et l'espace $L^1(\ell^\infty,\ell^1)$ comme on a vu en (1.6.9) et (1.6.10). Ainsi l'application diagonale d fournit un monostrict $\Delta : \ell^1 \to L^1(\ell^\infty,\ell^1)$ donné, pour $\xi = (\xi_n) \in \ell^1$, par $\Delta_\xi = \sum \xi_n \bar{\varepsilon}_n \otimes \bar{\varepsilon}_n$ et vérifiant donc, si $\bar{\eta} = (\eta_n) \in \ell^\infty$, les égalités $\Delta_\xi(\bar{\eta}) = \sum \xi_n \eta_n \bar{\varepsilon}_n = (\xi_n\eta_n) = \xi . \bar{\eta}$. Résumons :

(1.7.4) PROPOSITION. Toute suite $\xi \in \ell^1$ définit une application nucléaire $\Delta_\xi \in L^1(\ell^\infty,\ell^1)$ par l'égalité $\Delta_\xi(\bar{\eta}) = \xi . \bar{\eta}$. L'application $\Delta : \ell^1 \to L^1(\ell^\infty,\ell^1)$ est un monostrict.

Une telle application Δ_ξ sera dite application nucléaire-type.

L'intérêt d'une telle application est bien illustré par :

(1.7.5) PROPOSITION. Pour toute application nucléaire $u \in L^1(Y',X)$ il existe des morphismes $p : \ell^1 \to X$, $q : \ell^1 \to Y$ et une application nucléaire-type $\Delta_{\bar{\nu}} : \ell^\infty \to \ell^1$ tels que u se factorise en $u = p.\Delta_{\bar{\nu}}.q'$:

$$\begin{array}{ccc} Y' & \xrightarrow{u} & X \\ {\scriptstyle q'}\downarrow & & \uparrow{\scriptstyle p} \\ \ell^\infty & \xrightarrow{\Delta_{\bar{\nu}}} & \ell^1 \end{array} .$$

Réciproquement une application factorisée de cette manière est bien évidemment nucléaire.

PREUVE. On représente u par l'élément $s = \sum \nu_n x_n \otimes y_n \in X \hat{\otimes} Y$, avec $\|x_n\| \leq 1$, $\|y_n\| \leq 1$ et $\bar{\nu} = (\nu_n) \in \ell^1$. Il suffit alors de définir p et q par les égalités $p(\xi) = \sum \xi_n x_n$ et $q(\bar{\eta}) = \sum \eta_n y_n$ pour vérifier $u = p.\Delta_{\bar{\nu}}.q'$. ∎

Application intégrale-type. La procédure est analogue, à cela près que l'ensemble N est remplacé par un compact quelconque T. L'application diagonale $d : T \to T \times T$, $d(t) = (t,t)$, donne naissance à un morphisme δ' de $\mathbb{B}$ et, par transposition, à un morphisme δ de $\mathbb{W}$ avec :

$$\delta' : C(T\times T) \to C(T) \qquad (\delta' f)(t) = f(t,t)$$

$$\delta : \mathfrak{M}(T) \to \mathfrak{M}(T\times T) \qquad (\delta\mu)(f) = \int_T f(t,t)d\mu(t)$$

On constate aisément que δ' est un épistrict (car toute fonction $g \in C(T)$ se relève en une fonction $f \in C(T\times T)$ de même norme), donc δ est un monostrict. Par ailleurs l'identification des espaces $\mathfrak{M}(T\times T)$ et $\mathfrak{M}(T) \bar{\otimes} \mathfrak{M}(T)$, vue en (1.6.8), se fait en associant à toute mesure $\nu \in \mathfrak{M}(T\times T)$ l'intégrale faible $\int_{T\times T} \varepsilon_s \otimes \varepsilon_t d\nu(s,t)$. De plus $\mathfrak{M}(T) \bar{\otimes} \mathfrak{M}(T)$ est est encore égal à l'espace $\mathcal{L}^1(C(T),\mathfrak{M}(T))$, de sorte que d permet la définition d'un monostrict $\Delta : \mathfrak{M}(T) \to \mathcal{L}^1(C(T),\mathfrak{M}(T))$ par :

$$\Delta_\mu = \int_T \varepsilon_t \otimes \varepsilon_t d\mu(t) \quad \text{et} \quad \Delta_\mu(g) = \int_T \langle g, \varepsilon_t \rangle \varepsilon_t d\mu(t) = \int_T g(t)\varepsilon_t d\mu(t)$$

pour $\mu \in \mathfrak{M}(T)$ et $g \in C(T)$. On reconnaît dans la dernière intégrale la mesure $g.\mu$, d'où :

(1.7.6) <u>PROPOSITION</u>. Toute mesure $\mu\in\mathfrak{M}(T)$ définit une application intégrale $\Delta_\mu\in\mathcal{L}^1(C(T),\mathfrak{M}(T))$ par l'égalité $\Delta_\mu(g)=g.\mu$. L'application $\Delta:\mathfrak{M}(T)\longrightarrow\mathcal{L}^1(C(T),\mathfrak{M}(T))$ est un monostrict.

Une telle application Δ_μ sera dite <u>application intégrale-type</u>. Et :

(1.7.7) <u>PROPOSITION</u>. Pour toute application intégrale $v\in\mathcal{L}^1(Y,X')$ il existe un compact T, des morphismes $p : X\longrightarrow C(T)$, $q : Y\longrightarrow C(T)$ et une application intégrale-type $\Delta_\mu : C(T)\longrightarrow\mathfrak{M}(T)$ tels que v se factorise en $v=p'.\Delta_\mu.q$:

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "q"'] & X' \\ C(T) \arrow[r, "\Delta_\mu"] & \mathfrak{M}(T) \arrow[u, "p'"'] \end{tikzcd}$$

Réciproquement une application factorisée de cette manière est évidemment intégrale.

<u>PREUVE</u>. On détermine v par la donnée d'une mesure μ, positive si l'on veut, sur le disque compact $T=A'\times B'$ selon l'égalité :

$$v(y)=\int_{A'\times B'}\langle y,y'\rangle x'd\mu(x',y')$$

et l'on définit les morphismes p et q par $(px)(x',y')=\langle x,x'\rangle$ et $(qy)(x',y')=\langle y,y'\rangle$. Alors $\langle x,p'.\Delta_\mu.qy\rangle=\int_T px.qy\ d\mu=\langle x,vy\rangle$. ∎

<u>Relations entre applications intégrales et applications nucléaires</u>.
Il existe des relations très symétriques entre ces deux sortes d'applications dont l'étude fait l'objet des deux théorèmes de cet alinéa.

(1.7.8) <u>THEOREME</u>. Soient E,F,G,H des espaces de Banach et $u : E'\longrightarrow F$ une application nucléaire. Pour toute $v\in\mathcal{L}(G,E')$ et toute $w\in\mathcal{L}(F,H')$, l'application $wuv : G\longrightarrow H'$ est intégrale. De plus lorsque $\|u\|_1\leqslant 1$, l'application $\Phi_u : (v,w)\longrightarrow wuv$ du produit $\mathcal{L}(G,E')\times\mathcal{L}(F,H')$ dans $\mathcal{L}^1(G,H')$ est un "morphisme bilinéaire compactologique".

<u>PREUVE</u>. Par la dernière phrase on entend que Φ_u est une application

continue bidisquée du produit $\mathcal{A}(G,E')\times\mathcal{A}(F,H')$ des boules compactes des espaces $\mathcal{L}(G,E')$ et $\mathcal{L}(F,H')$ dans la boule compacte $\mathcal{A}^1(G,H')$ de l'espace $\mathcal{L}^1(G,H')$.
Désignons par A,B,C,D respectivement les boules des espaces de Banach E,F,G,H et par A',B',C',D' leurs boules duales. On peut tout de suite supposer $\|u\|_1<1$, $v(C)\subset A'$ et $w(B)\subset D'$. L'application u est définie par les suites $x_n\in A$, $y_n\in B$ et $\bar{\nu}=(\nu_n)\in\ell^1$ avec $\|\bar{\nu}\|_1<1$. Posons $t'_n=wy_n\in D'$ et $z'_n=v'x_n\in C'$, de sorte qu'il existe une mesure $\mu=\sum\nu_n\varepsilon_{t'_n}\otimes\varepsilon_{z'_n}$ portée par le compact $D'\times C'$ et de masse totale <1. Il est clair que l'application wuv est définie par $(wuv)(z)=\int_{D'\times C'}\langle z,z'\rangle t'd\mu(t',z')$, ce qui montre bien que $\Phi_u(v,w)=wuv\in\mathcal{A}^1(G,H')$.
Il reste à voir que Φ_u est continue sur le produit $\mathcal{A}(G,E')\times\mathcal{A}(F,H')$.
Or la représentation de wuv par la mesure μ se traduit par une factorisation

$$\begin{tikzcd} & & H'\bar{\otimes}G' \arrow[d] \\ \mathcal{L}(G,E')\times\mathcal{L}(F,H') \arrow[urr, "U"] \arrow[rr, "\Phi_u"] & & \mathcal{L}^1(G,H') \end{tikzcd}$$

où la flèche verticale est l'épistrict canonique et où U est définie par $U(v,w)=\int_{D'\times C'}t'\otimes z'd\mu(t',z')=\sum\nu_n t'_n\otimes z'_n$. Il suffit donc de vérifier la propriété pour U en place de Φ_u.
Déjà U envoie $\mathcal{A}(G,E')\times\mathcal{A}(F,H')$ dans la boule compacte $D'\bar{\otimes}C'$ de $H'\bar{\otimes}G'$.
Pour voir la continuité de U il faut vérifier que, pour toute forme bilinéaire $f\in B(H',G')=(H'\bar{\otimes}G')^*$, l'application :

$$(v,w)\longrightarrow\sum\nu_n f(t'_n,z'_n)=\sum\nu_n f(wy_n,v'x_n)$$

est continue sur $\mathcal{A}(G,E')\times\mathcal{A}(F,H')$. Or chaque application :

$$(v,w)\longrightarrow f(wy_n,v'x_n)$$

y est continue. La preuve est donc conséquence de la convergence normale de la série puisque $|\nu_n f(wy_n,v'x_n)|\leqslant\|f\||\nu_n|$. ∎

Etant donné un espace de Banach X, on peut munir son dual X' d'une structure d'espace de Banach. Pour éviter toute confusion, nous noterons alors par $X'_b \in \mathcal{B}$ ce dual. Le bidual $X''=(X'_b)'$ doit donc être lu dans $\mathcal{W}$. Evidemment l'injection canonique $j : X \longrightarrow X''$ est un élément de l'espace $\mathcal{L}(X,X'')$, ce qui fournit le corollaire :

(1.7.9) COROLLAIRE. Soient E,F,G des espaces de Banach et $u : E' \longrightarrow F$ une application nucléaire. Pour toute $v \in \mathcal{L}(G,E')$ l'application $juv : G \longrightarrow F''$ est intégrale. De plus, lorsque $\|u\|_1 \leqslant 1$, l'application $v \longrightarrow juv$ est un morphisme (de $\mathcal{W}$) de l'espace $\mathcal{L}(G,E')$ dans l'espace $\mathcal{L}^1(G,F'')$.

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "v"] \arrow[rrd] & E' \arrow[r, "u"] & F \arrow[d, "j"] \\ & & F'' \end{tikzcd}$$

La propriété analogue avec les applications nucléaires va s'énoncer ainsi :

(1.7.10) THÉORÈME. Soient E,F,H des espaces de Banach et $u : E \longrightarrow F'$ une application intégrale. Pour toute $w \in \mathcal{I}(F',H)$ l'application wu se prolonge en une application nucléaire $f : E'' \longrightarrow H$. De plus, lorsque $u(A) \subset B'$, on peut choisir f pour que $\|f\|_1 \leqslant 1$ chaque fois que $\|w\| \leqslant 1$.

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "u"] \arrow[d, "j"'] & F' \arrow[r, "w"] & H \\ E'' \arrow[rru, "f"'] & & \end{tikzcd}$$

PREUVE. On peut supposer tout de suite $u(A) \subset B'$ et $\|w\| < 1$ (le passage à la condition $\|w\| \leqslant 1$ étant ensuite immédiat par homothétie variable). On sait alors que $w(B')$ est un disque compact de H, contenu dans la boule ouverte $\mathring{D}$ de H. Ce que l'on sait des compacts d'un espace de Banach permet d'affirmer qu'il existe une suite $(d_n)_{n \geqslant 1}$, contenue dans $\mathring{D}$ et convergente vers o, dont l'enveloppe disquée fermée contient $w(B')$. Désignons par L le compact formé par la suite $(d_n)_{n \geqslant o}$, où l'on a rajouté $d_o = o$. Alors $M=\bar{\Gamma}(L)$ est un disque compact de H tel que $w(B') \subset M \subset \mathring{D}$. Soit maintenant $\mathcal{H}_M$ l'espace de Waelbroeck de boule compacte M. L'application w se factorise évidemment à travers $\mathcal{H}_M$ et l'application obtenue $\bar{w} : F' \longrightarrow \mathcal{H}_M$ est un morphisme de $\mathcal{W}$. Il suit de là que $\bar{w}u : E \longrightarrow \mathcal{H}_M$ est intégrale et telle que $(\bar{w}u)(A) \subset M$. On peut donc la représenter par un élément $z \in A' \bar{\otimes} M$. Or on sait que $A' \bar{\otimes} M$

est l'enveloppe disquée fermée $\bar{\Gamma}(A' \otimes M)$ et l'égalité $M=\bar{\Gamma}(L)$ donne facilement $A' \bar{\otimes} M = \bar{\Gamma}(A' \otimes L)$ et même $A' \bar{\otimes} M = \bar{C}(A' \otimes M)$ puisque A' est disquée. On est donc ramené à la remarque précédant (1.2.15) où l'on prend $T = A' \times L$ et $f = \otimes$. Ainsi il existe une mesure $\mu \in \mathcal{M}_1^+(A' \times L)$ telle que l'on ait, dans $E' \bar{\otimes} \mathcal{H}_M$, $z = \int_{A' \times L} x' \otimes h \, d\mu(x',h)$. Or $A' \times L = \bigcup A' \times \{d_n\}$ de sorte que μ est en réalité définie par une suite (λ_n) de mesures positives sur A' selon $\mu = \sum \lambda_n \otimes \varepsilon_{d_n}$. La suite $(\lambda_n(1))$ est dans ℓ^1 car $\sum \lambda_n(1) = \mu(1)$. Alors $z = \sum \left(\int_{A'} x' d\lambda_n(x') \right) \otimes d_n$. Mais l'intégrale $\int_{A'} x' d\lambda_n(x')$ peut encore s'écrire sous la forme $\nu_n a'_n$ où $a'_n \in A'$ et $\nu_n = \lambda_n(1)$, de sorte que, en résumé, z peut s'écrire $z = \sum \nu_n a'_n \otimes d_n$ dans $E' \bar{\otimes} \mathcal{H}_M$, ce qui prouve suffisamment que, pour tout $x \in E$ et tout $t' \in H'$ (un tel t' définit bien un élément de $\mathcal{H}_M^{\times}$), on a :

$$\langle wux, t' \rangle = \sum \nu_n \langle x, a'_n \rangle \langle d_n, t' \rangle .$$

La formule précédente montre que l'on peut prolonger wu en une application $f : E'' \longrightarrow H$ définie par $f(x'') = \sum \nu_n \langle x'', a'_n \rangle d_n$, qui est nucléaire de façon évidente et telle que $\|f\|_1 \leqslant \sum |\nu_n| \, \|d_n\| < \mu(1) \leqslant 1$. ∎

D'où l'on déduit :

(1.7.11) THÉORÈME. Soient E,F,G,H des espaces de Banach et $u : E \longrightarrow F'$ une application intégrale. Pour toute $v \in L(G',E)$ et toute $w \in L(F',H)$, l'application $wuv : G' \longrightarrow H$ est nucléaire. De plus si $u(A) \subset B'$ (c'est-à-dire si u est contenue dans la boule compacte de $\mathcal{L}(E,F')$), l'application $\Phi_u : (v,w) \longrightarrow wuv$ du produit $I(G',E) \times I(F',H)$ dans $L^1(G',H)$ est un "morphisme bilinéaire".

PREUVE.

$$\begin{tikzcd} G' \arrow[r, "v"] \arrow[rd, "\bar{v}"'] & E \arrow[r, "u"] \arrow[d, "j"] & F' \arrow[r, "w"] & H \\ & E'' \arrow[rru, "f"'] & & \end{tikzcd}$$

On suppose $\|w\| \leqslant 1$ et $\|v\| \leqslant 1$, et l'on prolonge wu en $f : E'' \longrightarrow H$ avec f nucléaire et $\|f\|_1 \leqslant 1$. Alors $\bar{v} = jv : G' \longrightarrow E''$ est un morphisme de $\mathcal{W}$ (car v est faiblement continue) donc $wuv = f\bar{v} \in L^1(G',H)$ et de plus $\|wuv\|_1 \leqslant \|f\|_1 \leqslant 1$. ∎

1.8. La propriété d'approximation.

Nous ne reprendrons pas en détail le problème d'approximation. Tous les résultats connus actuellement se trouvent dans (G3) (voir aussi Waelbroeck (W)). On dit qu'un espace de Banach Y a la propriété d'approximation si et seulement si, pour tout $X \in \mathbb{B}$, le morphisme canonique $X\hat{\otimes}Y \longrightarrow L(Y',X)$ est injectif. On sait qu'il revient au même de dire que, pour tout $X \in \mathbb{B}$, le produit tensoriel algébrique $X \otimes Y$ est partout dense dans $L(Y',X)$.
Ces définitions se laissent traiter fonctoriellement. En effet, dans les diagrammes fonctoriels transposés l'un de l'autre

$$\begin{array}{ccc} \hat{\otimes}_Y & \xrightarrow{t} & L_{Y'} \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \uparrow{\scriptstyle r} \\ L^1_{Y'} & \xrightarrow{\tilde{t}} & \hat{\hat{\otimes}}_Y \end{array} \qquad \text{et} \qquad \begin{array}{ccc} \bar{\otimes}_{Y'} & \xrightarrow{\tau} & \mathcal{L}_Y \\ {\scriptstyle \varpi}\downarrow & & \uparrow{\scriptstyle \rho} \\ \mathcal{L}^1_Y & \xrightarrow{\tilde{\tau}} & \bar{\bar{\otimes}}_{Y'} \end{array}$$

elles expriment que p est un isomorphisme fonctoriel, ou bien que r est un isomorphisme fonctoriel. On peut donc affirmer :

(1.8.1) THEOREME. Les hypothèses suivantes sur l'espace de Banach Y sont équivalentes :
a) $\hat{\otimes}_Y = L^1_{Y'}$.
b) $\hat{\hat{\otimes}}_Y = L_{Y'}$.
c) $\bar{\otimes}_{Y'} = \mathcal{L}^1_Y$.
d) $\bar{\bar{\otimes}}_{Y'} = \mathcal{L}_Y$.
Lorsqu'elles sont vérifiées, on dit que Y a la propriété d'approximation.

Il est donc manifeste, lorsque Y a la propriété d'approximation, que le foncteur $\hat{\hat{\otimes}}_Y$ possède un foncteur L-adjoint, qui est $\bar{\otimes}_{Y'}$, et que le foncteur $\bar{\bar{\otimes}}_{Y'}$ possède un foncteur $\mathcal{L}$-adjoint $\hat{\otimes}_Y$. En fait ces propriétés sont suffisantes pour entraîner que Y a la propriété d'approximation.

(1.8.2) THEOREME. Les hypothèses de (1.8.1) sont encore équivalentes à chacune des hypothèses suivantes :

e) Le foncteur $\hat{\hat{\otimes}}_Y$ possède un L-adjoint.
f) Le foncteur $\bar{\bar{\otimes}}_{Y'}$ possède un $\mathcal{L}$-adjoint.

PREUVE. Démontrons l'implication e$\Longrightarrow$b. Soit $\mathcal{G}: \mathbb{W} \longrightarrow \mathbb{W}$ un foncteur L-adjoint au foncteur $\hat{\hat{\otimes}}_Y$. Pour tout $\mathfrak{X} \in \mathbb{W}$ et tout $Z \in \mathbb{B}$ on a :

$$L(\mathcal{G}(\mathfrak{X}),Z) = L(\mathfrak{X}, Z\hat{\hat{\otimes}}Y).$$

En prenant $\mathfrak{X}=K$, on obtient l'égalité $Z\hat{\hat{\otimes}}Y=L(\mathcal{G}(K),Z)$, puis avec $Z=K$ l'égalité $Y=(\mathcal{G}(K))^*$, d'où $Y'=\mathcal{G}(K)$ et $Z\hat{\hat{\otimes}}Y=L(Y',Z)$, ce qui prouve l'égalité $\hat{\hat{\otimes}}_Y=L_{Y'}$. On démontrerait de même l'implication f$\Longrightarrow$d. ∎

Revenons au cas général où l'on ne fait aucune hypothèse sur Y. Bien qu'alors le foncteur $\hat{\hat{\otimes}}_Y$ ne possède pas nécessairement un L-adjoint, on peut voir qu'il conserve cependant quelques propriétés de commutation des foncteurs admettant un L-adjoint. Et de même le foncteur $\bar{\bar{\otimes}}_{Y'}$ conserve aussi quelques propriétés de commutation.

(1.8.3) PROPOSITION. Le foncteur $\hat{\hat{\otimes}}_Y$ commute aux monomorphismes, aux monostricts et aux puissances finies dans la catégorie $\mathbb{B}$. Le foncteur $\bar{\bar{\otimes}}_{Y'}$ commute aux monomorphismes, aux monostricts et aux puissances quelconques dans la catégorie $\mathbb{W}$.

PREUVE. Si $u : X \longrightarrow X_0$ est un monomorphisme (resp : un monostrict) de $\mathbb{B}$, le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} L(Y',X) & \xrightarrow{L_{Y'}(u)} & L(Y',X_0) \\ \uparrow & & \uparrow \\ X\hat{\hat{\otimes}}Y & \xrightarrow{\hat{\hat{\otimes}}_Y(u)} & X_0\hat{\hat{\otimes}}Y \end{array}$$

où les flèches verticales sont des monostricts, permet de voir que $\hat{\hat{\otimes}}_Y(u)$ est un monomorphisme (resp : un monostrict).
Soit maintenant I un ensemble quelconque. On sait que l'espace de Banach produit $K^I=\ell^\infty_I$ a la propriété d'approximation, ce qui donne l'égalité $K^I\hat{\hat{\otimes}}X=L(X',K^I)$ pour tout $X \in \mathbb{B}$. Désignons provisoirement, pour éviter toute confusion, par $\mathcal{K}$ le corps K lu dans $\mathbb{W}$. Alors $K^I\hat{\hat{\otimes}}X=(\mathcal{K}^{(I)}\bar{\bar{\otimes}}X')^*$. Supposons maintenant l'ensemble I fini. Puisque $\bar{\bar{\otimes}}_{X'}$ commute aux sommes directes finies de $\mathbb{W}$, on a $\mathcal{K}^{(I)}\bar{\bar{\otimes}}X'=X'^{(I)}$ d'où

par dualité $K^I\hat{\otimes}X=X^I$. Il suit de là, grâce à l'associativité du produit $\hat{\hat{\otimes}}$, que $X^I\hat{\hat{\otimes}}Y=(K^I\hat{\otimes}X)\hat{\hat{\otimes}}Y=K^I\hat{\hat{\otimes}}(X\hat{\hat{\otimes}}Y)=(X\hat{\hat{\otimes}}Y)^I$, ce qui, pour le foncteur $\hat{\hat{\otimes}}_Y$, termine la démonstration.

Pour le foncteur $\bar{\bar{\otimes}}_Y$, le raisonnement est le même en permutant les catégories $\mathbb{B}$ et $\mathbb{W}$. Mais comme on sait que $\hat{\otimes}_X$ commute aux sommes directes quelconques de $\mathbb{B}$, l'hypothèse de finitude de I n'est pas à retenir. La démonstration se termine en utilisant la propriété d'associativité du produit $\bar{\bar{\otimes}}$ dans la catégorie $\mathbb{W}$, qui se prouve par des arguments évidents de densité. ∎

Les foncteurs b et β. Pour aller plus loin et examiner une réciproque, il convient de revenir sur la notion de bidual. En réalité la correspondance $X \longrightarrow X''$ définit un foncteur covariant $\beta : \mathbb{B} \longrightarrow \mathbb{W}$. Et lorsqu'on associe à tout espace de Waelbroeck $\mathfrak{X}$ l'espace de Banach $b\mathfrak{X}=\mathfrak{X}_b$ obtenu en prenant pour boule unité la boule compacte de $\mathfrak{X}$, on réalise aussi un foncteur $b : \mathbb{W} \longrightarrow \mathbb{B}$. Cela étant, la liaison entre b et β est vue avec :

(1.8.4) PROPOSITION. Le foncteur β est adjoint à gauche au foncteur b.

PREUVE. L'égalité $Hom_{\mathbb{B}}(X,b\mathcal{Y})=Hom_{\mathbb{W}}(X'',\mathcal{Y})$ provient du fait que tout morphisme $u : X \longrightarrow b\mathcal{Y}$ est continu pour les topologies faibles $\sigma(X,X')$ et $\sigma(\mathcal{Y},\mathcal{Y}^*)$; il admet donc un unique prolongement continu pour ces topologies et qui envoie la boule compacte A" de X" dans la boule compacte de $\mathcal{Y}$.

Avec cela on peut maintenant prouver :

(1.8.5) THEOREME. Pour que l'espace de Banach Y ait la propriété d'approximation il suffit (et il faut) que le foncteur $\bar{\bar{\otimes}}_{Y'}$ commute aux produits quelconques de la catégorie $\mathbb{W}$.

PREUVE. Avec (1.8.3) on voit que $\bar{\bar{\otimes}}_{Y'}$ commute alors aux limites gauches dans $\mathbb{W}$. Or la catégorie $\mathbb{W}$ est localement petite et possède un séparateur, en l'occurrence le corps K. Un théorème catégorique de Freyd-Mitchell (M3 : V.3 th.3.1 et cor.3.2) assure, dans ces conditions, l'existence d'un foncteur $\mathcal{F} : \mathbb{W} \longrightarrow \mathbb{W}$, adjoint à gauche au foncteur $\bar{\bar{\otimes}}_{Y'}$. On a donc, pour $\mathfrak{X}$ et $\mathcal{Z}$ dans $\mathbb{W}$:

$$Hom_{\mathbb{W}}(\mathcal{F}(\mathfrak{X}),\mathcal{Z}) = Hom_{\mathbb{W}}(\mathfrak{X},\mathcal{Z}\bar{\bar{\otimes}}Y').$$

En faisant $\mathfrak{X}=\mathcal{Z}=K$, on recueille $Hom_{\mathbb{W}}(\mathcal{F}(K),K)=Hom_{\mathbb{W}}(K,Y')$, d'où l'on déduit $Hom_{\mathbb{B}}(K,\mathcal{F}(K)^*)=Hom_{\mathbb{W}}(K,Y'_b)$ puis $Y'_b=\mathcal{F}(K)^*$ et $\mathcal{F}(K)=Y''$. En revenant à $\mathcal{Z}$, on a $Hom_{\mathbb{W}}(Y'',\mathcal{Z})=Hom_{\mathbb{W}}(K,\mathcal{Z}\bar{\bar{\otimes}}Y')$, ce qui donne encore l'égalité dernière $Hom_{\mathbb{B}}(Y,\mathcal{Z}_b)=Hom_{\mathbb{W}}(K,\mathcal{Z}\bar{\bar{\otimes}}Y')$. Or le premier ensemble n'est autre que la boule compacte de l'espace $\mathcal{L}(Y,\mathcal{Z})$ et le second coïncide avec la boule compacte de $\mathcal{Z}\bar{\bar{\otimes}}Y'$. Les deux espaces de Waelbroeck $\mathcal{L}(Y,\mathcal{Z})$ et $\mathcal{Z}\bar{\bar{\otimes}}Y'$ sont donc algébriquement égaux, ce qui suffit pour entraîner leur identité dans $\mathbb{W}$, puisque de toute façon $\mathcal{Z}\bar{\bar{\otimes}}Y'$ est un sous-espace de $\mathcal{L}(Y,\mathcal{Z})$. On a donc prouvé (car toutes les égalités qui interviennent sont fonctorielles) l'égalité des foncteurs $\bar{\bar{\otimes}}_{Y'}$ et $\mathcal{L}_Y$, ce qui nous ramène à (1.8.1.3). ∎

REMARQUE. Il reste, pour en terminer avec ce premier chapitre, à poser deux questions non résolues.

1. La commutation du foncteur $\hat{\otimes}_Y$ aux produits finis de $\mathbb{B}$ implique-t-elle que Y a la propriété d'approximation ?
2. La commutation du foncteur $\bar{\bar{\otimes}}_{Y'}$ aux produits finis de $\mathbb{W}$ (compte tenu de la commutation aux puissances quelconques) implique-t-elle la commutation aux produits quelconques, donc que Y a la propriété d'approximation ?

Il est d'ailleurs inutile, au sujet de la question 1, de supposer que le foncteur $\hat{\otimes}_Y$ commute aux produits quelconques dans $\mathbb{B}$ pour pouvoir appliquer le théorème cité de Freyd-Mitchell. En effet :

(1.8.6) PROPOSITION. On suppose que le foncteur $\hat{\hat{\otimes}}_Y$, ou le foncteur $L_{Y'}$, commute aux produits quelconques de $\mathbb{B}$. Alors Y est un espace de dimension finie.

PREUVE. Commençons la démonstration avec le foncteur $\hat{\hat{\otimes}}_Y$. Le théorème de Freyd-Mitchell prouve que $\hat{\hat{\otimes}}_Y$ admet un adjoint à gauche dans $\mathbb{B}$, soit $F : \mathbb{B} \longrightarrow \mathbb{B}$. Ainsi, pour X et Z dans $\mathbb{B}$, $Hom_{\mathbb{B}}(F(X),Z)=Hom_{\mathbb{B}}(X,Z\hat{\hat{\otimes}}Y)$, et, avec $X=Z=K$, $Hom_{\mathbb{B}}(F(K),K)=Hom_{\mathbb{B}}(K,Y)$. Posons $E=F(K)\in\mathbb{B}$. Alors $Hom_{\mathbb{B}}(K,Y)=Hom_{\mathbb{W}}(K,E')=Hom_{\mathbb{B}}(K,E'_b)$, de sorte que $Y=E'_b$. Mais, si $X=K$ et $Z=E$, on a $Hom_{\mathbb{B}}(E,E)=Hom_{\mathbb{B}}(K,E\hat{\hat{\otimes}}E'_b)$. Cette égalité prouve que l'identité

1_E est un élément de $\hat{E}^{\prime\prime}_b$, donc se prolonge en un élément de $I(E'',E)$ (ce à quoi on serait arrivé en partant avec le foncteur $I_{Y'}$). En particulier elle envoie la boule compacte de E", et a fortiori la boule unité de E, dans un compact de E, ce qui assure bien que E, et partant $Y=E'_b$, est de dimension finie. ∎

Comme application, on en tire que la condition de finitude du premier théorème de commutation est essentielle et ne peut être dépassée puisque :

(1.2.7) COROLLAIRE. Si Y est un espace de Banach de dimension infinie, le foncteur $I_{Y'}$ admet un foncteur L-adjoint et ne commute pas aux produits quelconques de $\mathbb{B}$.

CHAPITRE 2 : LA DUALITE ENTRE ELC COMPLETS ET ECC REGULIERS.

.1. Les ecc réguliers et la dualité.

On revient maintenant à une étude plus précise des ecc réguliers introduits dans le chapitre 3 de la seconde partie. Rappelons qu'un tel espace $\mathfrak{X}$ a un dual $\mathfrak{X}^*$ qui est un elc complet séparant $\mathfrak{X}$.

EXEMPLES.

Ex 1. Soit $(\mathfrak{X},\mathcal{A})$ un espace de Waelbroeck. On peut traiter $\mathfrak{X}$ en ecc en définissant les "compacts" de $\mathfrak{X}$ comme étant les homothétiques de la boule compacte de $\mathfrak{X}$(en fait on obtient ainsi une base de "compacts"). Il est clair que l'espace de Banach $\mathfrak{X}^*$, dual de l'espace de Waelbroeck $\mathfrak{X}$, est aussi le dual (en tant qu'elc) de l'ecc $\mathfrak{X}$. Le théorème de Waelbroeck (1.2.12) a donc assuré que $\mathfrak{X}$ est un ecc régulier.
De plus on reconnaît dans les topologies T_c et $T_{\bar{c}}$ étudiées en (1.2) exactement les topologies des espaces $c\mathfrak{X}$ et $\bar{c}\mathfrak{X}$ définis en (II.1.1) et (II.3.2). Autrement dit, pour un espace de Waelbroeck $\mathfrak{X}$ traité en ecc régulier, on a l'égalité topologique $c\mathfrak{X}=\bar{c}\mathfrak{X}$, et son dual est un espace de Banach.

Ex 2. Plus généralement Waelbroeck a montré (W3 : prop.6.1 et cor.6.2) que tout ecc dénombrable (c'est-à-dire admettant un système fondamental dénombrable de disques "compacts") $\mathfrak{X}$ est nécessairement régulier et tel aussi que $c\mathfrak{X}=\bar{c}\mathfrak{X}$. Le dual $\mathfrak{X}^*$ d'un tel espace est évidemment un espace de Fréchet.

La dualité entre ecc réguliers et elc complets. Soit $\mathbb{ELCC}$ la catégorie des elc séparés et complets. Elle contient la catégorie $\mathbb{B}$ comme sous-catégorie non pleine puisque les morphismes de $\mathbb{B}$ sont les morphismes de boules. Les résultats sommairement acquis au chapitre 3 de la seconde partie, mais que l'on pourrait développer fonctoriellement, se récrivent ici en introduisant les deux foncteurs de dualité $\mathfrak{D} : \mathbb{ELCC} \longrightarrow \mathbb{ECCR}$, $\mathfrak{D}Y=Y'$, et $D : \mathbb{ECCR} \longrightarrow \mathbb{ELCC}$, $D\mathfrak{X}=\mathfrak{X}^*$, sous la forme $D\mathfrak{D}=1$ et $\mathfrak{D}D=1$, où ces égalités sont des isomorphismes fonctoriels. Il suit de là que :

(2.1.1) PROPOSITION. Les catégories $\mathbb{ELCC}$ et $\mathbb{ECCR}$ sont duales l'une de l'autre.

Pour expliciter cette proposition et rattacher la théorie à celle des espaces de Banach et de Waelbroeck, désignons par $\mathcal{V}(X)$ la base de filtre formée des voisinages de o disqués fermés d'un elc complet X et par $\mathcal{K}(\mathfrak{X})$ l'ensemble des disques "compacts" d'un ecc régulier $\mathfrak{X}$. A tout $V\in\mathcal{V}(X)$ on associe l'espace semi-normé X_V et son séparé-complété $\hat{X}_V$, et l'on sait, X étant complet, que la limite projective (dans la catégorie $\mathbb{ELCS}$ ou dans la catégorie $\mathbb{ELCC}$) des espaces de Banach $\hat{X}_V$ est précisément l'espace X. De même à tout $\mathcal{A}\in\mathcal{K}(\mathfrak{X})$ on associe l'espace de Waelbroeck $\mathfrak{X}_{\mathcal{A}}$, dont la boule compacte est $\mathcal{A}$, et l'on voit aussitôt que $\mathfrak{X}$ est exactement la limite inductive (dans la catégorie ECC ou dans la catégorie $\mathbb{ECCR}$) des espaces $\mathfrak{X}_{\mathcal{A}}$. La liaison entre les deux types d'espaces est régie par :

(2.1.2) PROPOSITION. Pour tout $V\in\mathcal{V}(X)$ on a $(\hat{X}_V)'=X'_{V^\circ}$ et pour tout $\mathcal{A}\in\mathcal{K}(\mathfrak{X})$ on a $(\mathfrak{X}_{\mathcal{A}})^*=(\mathfrak{X}^*_{\mathcal{A}^\circ})\hat{}$, où V° et $\mathcal{A}^\circ$ sont respectivement les polaires de V et $\mathcal{A}$.

PREUVE. La première formule est évidente et la seconde se prouve par dualité à partir de la première. ∎

(2.1.3) COROLLAIRE. Pour tout elc complet X on a :

$$X = \varprojlim_{\mathbb{ELCC}} \hat{X}_V \qquad \text{et} \qquad X' = \varinjlim_{\mathbb{ECCR}} X'_{V^\circ}$$

lorsque V décrit la base de filtre $\mathcal{V}(X)$, la limite projective (resp : inductive) étant épique (resp : monique).

Soit maintenant $\mathfrak{X}$ un ecc régulier. La définition de l'elc séparé (mais non nécessairement complet) $\bar{c}\mathfrak{X}$ montre que les duals $(\bar{c}\mathfrak{X})'$ et $\mathfrak{X}^*$ coïncident algébriquement. Cela étant :

(2.1.4) PROPOSITION. Soit $\mathfrak{X}$ un ecc régulier. On a les égalités compactologiques :

$$(\bar{c}\mathfrak{X})' = \gamma\mathfrak{X}^* = \bar{\gamma}\mathfrak{X}^* \ .$$

PREUVE. Les parties équicontinues H de $(\bar{c}\mathfrak{X})'$ sont exactement (eu égard à la définition de $\bar{c}\mathfrak{X}$) les parties H telles que, pour tout disque "compact" $\mathcal{A}$ de $\mathfrak{X}$, les parties $H_{\mathcal{A}}$, formées des restrictions à $\mathcal{A}$ des formes linéaires de H, soient précisément équicontinues dans l'espace $C(\mathcal{A})$. Or le théorème d'Ascoli garantit que ces parties sont aussi les parties relativement compactes de $C(\mathcal{A})$, de sorte que H est équicontinue si et seulement si H est relativement compact dans l'elc complet $C(\mathfrak{X}) = \varprojlim C(\mathcal{A})$. Et puisque $\mathfrak{X}^*$ est un sous-elc fermé de $C(\mathfrak{X})$ on voit bien que les "compacts" de $(\bar{c}\mathfrak{X})'$ sont les mêmes que ceux de $\gamma\mathfrak{X}^*$. Or il est clair que sur chacun d'eux la topologie est, par raison de compacité, celle de la convergence simple sur $\mathfrak{X}$, d'où l'égalité compactologique $(\bar{c}\mathfrak{X})' = \gamma\mathfrak{X}^*$. ∎

(2.1.5) COROLLAIRE 1. Soit X un elc complet. La topologie de $\bar{c}X'$ est celle de la convergence compacte sur X.

(2.1.6) COROLLAIRE 2. Soit X un elc séparé. La topologie de $\bar{c}X'$ est celle de la convergence compacte sur le complété $\hat{X}$ de X. Elle est en général plus fine que celle de la convergence précompacte sur X.

PREUVE. Elle provient de l'égalité compactologique $X' = (\hat{X})'$. ∎

2.2. Les espaces de Kelley.

Les foncteurs $\hat{c}$ et $\hat{\gamma}$. Rappelons que les foncteurs $\bar{c}$ et $\bar{\gamma}$ opèrent entre les catégories $\mathbb{ELCS}$ et $\mathbb{ECCR}$ et que $\bar{\gamma}$ diffère du foncteur $\gamma : \mathbb{ELCS} \to \mathbb{C}$. Si l'on veut bénéficier des résultats de dualité précédents, il faut mettre en place des foncteurs convenables entre les catégories $\mathbb{ELCC}$ et $\mathbb{ECCR}$.
Définissons le foncteur $\hat{c}$ en posant, pour tout ecc régulier $\mathfrak{X}$, $\hat{c}\mathfrak{X} = (\bar{c}\mathfrak{X})^\wedge$, et le foncteur $\hat{\gamma}$ en posant, pour tout elc complet X, $\hat{\gamma}X = \bar{\gamma}X = \gamma X$. On obtient ainsi un jeu de couples de foncteurs covariants:

$$\bar{c} : \mathbb{ECCR} \to \mathbb{ELCS} \qquad \hat{c} : \mathbb{ECCR} \to \mathbb{ELCC}$$
$$\bar{\gamma} : \mathbb{ELCS} \to \mathbb{ECCR} \qquad \hat{\gamma} : \mathbb{ELCC} \to \mathbb{ECCR} \ .$$

Alors :

(2.2.1) PROPOSITION. Le foncteur $\bar{c}$ (resp : $\hat{c}$) est adjoint à gauche au foncteur $\bar{\gamma}$ (resp : $\hat{\gamma}$).

PREUVE. Soient $\mathfrak{X}$ un ecc régulier et Y un elc séparé. L'ensemble $\mathrm{Hom}_{\mathbb{ELCS}}(\bar{c}\mathfrak{X}, Y)$ est formé des applications linéaires $f : \mathfrak{X} \to Y$ qui sont continues sur chaque disque "compact" de $\mathfrak{X}$. Ces applications sont donc les mêmes que celles qui envoient continûment les disques "compacts" de $\mathfrak{X}$ dans les disques compacts de Y, autrement dit ce sont les applications de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{ECCR}}(\mathfrak{X}, \bar{\gamma}Y)$. Si maintenant Y est complet, alors $\bar{\gamma}Y = \gamma Y = \hat{\gamma}Y$ et il est clair que $\mathrm{Hom}_{\mathbb{ELCC}}(\hat{c}\mathfrak{X}, Y)$ coïncide exactement avec $\mathrm{Hom}_{\mathbb{ELCS}}(\bar{c}\mathfrak{X}, Y)$, ce qui ramène à la situation précédente. ∎

On sait que, pour tout ecc régulier $\mathfrak{X}$ et pour tout elc séparé Y, les applications identiques $1_{\mathfrak{X}} : \mathfrak{X} \to \bar{\gamma}\bar{c}\mathfrak{X}$ et $1_Y : \bar{c}\bar{\gamma}Y \to Y$ sont des morphismes. On en tire aisément les égalités (isomorphismes fonctoriels) de foncteurs $\bar{c}\bar{\gamma}\bar{c} = \bar{c}$ et $\bar{\gamma}\bar{c}\bar{\gamma} = \bar{\gamma}$. Malheureusement la situation n'est pas aussi favorable pour les foncteurs $\hat{c}$ et $\hat{\gamma}$. Si l'on suppose Y complet, le morphisme $1_Y : \bar{c}\bar{\gamma}Y \to Y$ se prolonge en un morphisme surjectif $\hat{c}\hat{\gamma}Y \to Y$, tandis que le morphisme $1_{\mathfrak{X}} : \mathfrak{X} \to \bar{\gamma}\bar{c}\mathfrak{X}$ s'étend en un morphisme injectif $\mathfrak{X} : \to \hat{\gamma}\hat{c}\mathfrak{X}$. Il suit de là l'existence de morphismes

$$\hat{c}\mathfrak{X} \xrightarrow{i_{\mathfrak{X}}} \hat{c}\hat{\gamma}\hat{c}\mathfrak{X} \xrightarrow{p_{\mathfrak{X}}} \hat{c}\mathfrak{X} \qquad \text{et} \qquad \hat{\gamma}Y \xrightarrow{j_Y} \hat{\gamma}\hat{c}\hat{\gamma}Y \xrightarrow{q_Y} \hat{\gamma}Y$$

tels que $p_{\mathfrak{X}} i_{\mathfrak{X}} = 1_{\hat{c}\mathfrak{X}}$ et $q_Y j_Y = 1_Y$, mais on ne peut garantir en général que $p_{\mathfrak{X}}$ et $i_{\mathfrak{X}}$, ou q_Y et j_Y, soient des isomorphismes réciproques. En résumé, les propriétés fonctorielles se vérifiant aisément :

(2.2.2) PROPOSITION. On a les égalités fonctorielles $\bar{c}\gamma\bar{c}=\bar{c}$ et $\bar{\gamma}c\bar{\gamma}=\bar{\gamma}$ et il existe des morphismes fonctoriels

$$\hat{c} \xrightarrow{i} \hat{c}\hat{\gamma}\hat{c} \xrightarrow{p} \hat{c} \quad \text{et} \quad \hat{\gamma} \xrightarrow{j} \hat{\gamma}\hat{c}\hat{\gamma} \xrightarrow{q} \hat{\gamma}$$

tels que $pi=1$ et $qj=1$.

Relativement aux foncteurs $\hat{c}$ et $\hat{\gamma}$, ce point défavorable est compensé par les propriétés de dualité suivantes :

(2.2.3) PROPOSITION. A des isomorphismes fonctoriels près on a :

$$\mathfrak{D}\hat{c} = \hat{\gamma}D \quad \text{et} \quad \hat{c}\mathfrak{D} = D\hat{\gamma} \quad \text{puis} \quad \hat{c} = D\hat{\gamma}D \quad \text{et} \quad \hat{\gamma} = \mathfrak{D}\hat{c}\mathfrak{D} .$$

PREUVE. Pour tout ecc régulier $\mathfrak{X}$, on a déjà d'après (2.1.4) l'égalité compactologique $(\hat{c}\mathfrak{X})' = \hat{\gamma}\mathfrak{X}^*$. Par ailleurs les parties équicontinues de $(\bar{c}\mathfrak{X})'$ et $(\hat{c}\mathfrak{X})'$ sont évidemment les mêmes et leur topologie est celle de la convergence simple sur $\mathfrak{X}$, puisque $\mathfrak{X}$ est dense dans $\hat{c}\mathfrak{X}$. On a donc $(\hat{c}\mathfrak{X})' = \hat{\gamma}\mathfrak{X}^*$, ce qui démontre, à la fonctorialité près, l'égalité $\mathfrak{D}\hat{c}=\hat{\gamma}D$. On en tire, grâce à (2.1.1), les égalités $\hat{c}=D\hat{\gamma}D$ et $\hat{\gamma}=\mathfrak{D}\hat{c}\mathfrak{D}$ donc aussi $\hat{c}\mathfrak{D}=D\hat{\gamma}$. ∎

Les espaces de Kelley. On a dit, en (II.3.2), qu'un elc séparé X est un espace de Kelley lorsqu'il vérifie l'égalité topologique $\bar{c}\gamma X=X$. On est donc tenté d'introduire une condition analogue portant sur les foncteurs $\hat{c}$ et $\hat{\gamma}$ et jouant dans la catégorie des elc complets, mais cela risque de donner a priori deux notions d'espaces de Kelley pour ces elc. Bien heureusement il n'en est pas ainsi car :

(2.2.4) PROPOSITION. Soit X un elc complet. Pour que X soit un espace de Kelley (c'est-à-dire pour que $\bar{c}\gamma X=X$), il faut et il suffit que le morphisme $\hat{1}_X : \hat{c}\hat{\gamma}X \longrightarrow X$ prolongé du morphisme identité 1_X soit un isomorphisme (ou encore que $\bar{c}\gamma X$ soit un elc complet) ce qu'on traduira par l'écriture simplifiée $\hat{c}\hat{\gamma}X=X$.

PREUVE. Si X est espace de Kelley alors $\bar{c}\gamma X=X$ est évidemment complet donc $\hat{c}\gamma X=X$ mais $\bar{\gamma}X=\hat{\gamma}X$, donc $\hat{c}\hat{\gamma}X=X$. Réciproquement si $\hat{c}\hat{\gamma}X=X$, avec le sens donné dans la proposition, alors $\bar{c}\gamma X=\bar{c}\hat{\gamma}X$ est un sous-espace de X contenant X donc $\bar{c}\gamma X=X$ et X est espace de Kelley. ∎

REMARQUE. Il ne semble pas a priori qu'il y ait de liaison logique simple entre les deux assertions suivantes, concernant un elc séparé X : "X est un espace de Kelley" et "$\hat{X}$ est un espace de Kelley".

Les critères qui vont suivre sont répartis en deux familles. En effet la technique de dualité permet d'établir, pour les elc complets, des propriétés non valables pour les elc non complets.

(2.2.5) THÉORÈME. Les assertions suivantes, concernant un elc séparé X, sont équivalentes :

a) X est un espace de Kelley.

b) La topologie de X coïncide avec la topologie localement convexe la plus fine induisant sur chaque disque compact de X sa topologie propre.

c) Pour tout elc séparé Y, toute application linéaire $u : X \longrightarrow Y$, continue sur les disques compacts de X, est continue.

d) Identique à c) en supposant Y complet.

e) Identique à c) en supposant Y espace de Banach.

PREUVE. a$\Longleftrightarrow$b par définition de la topologie de $\bar{c}\gamma X$. Il est clair que b$\Longrightarrow$e. Comme tout elc complet est limite projective d'espaces de Banach on a e$\Longrightarrow$d, et comme tout elc séparé est sous-espace de son complété on a d$\Longrightarrow$c. Enfin c$\Longrightarrow$b comme on voit en prenant $Y=\bar{c}\gamma X$. ∎

Les résultats de stabilité sont assez bons puisque:

(2.2.6) PROPOSITION. Soit X un elc séparé dont la topologie est la topologie finale associée à un système d'applications linéaires $f_i : X_i \longrightarrow X$, où les X_i sont des espaces de Kelley séparés. Alors X est un espace de Kelley.

PREUVE. Elle découle immédiatement du critère c) du théorème. ∎

(2.2.7) COROLLAIRE. Toute somme directe d'espaces de Kelley séparés est un espace de Kelley. Tout quotient séparé d'un espace de Kelley est un espace de Kelley. Enfin toute limite inductive séparée d'espaces de Kelley est un espace de Kelley.

Et pour les elc complets on a :

(2.2.8) THEOREME. Les assertions suivantes, concernant un elc complet X, sont équivalentes :

a) X est espace de Kelley.

b) L'espace $\bar{c}X'$ est complet et ses parties compactes sont équicontinues dans X'.

c) Toute forme linéaire sur X, continue sur les compacts de X, est continue et les parties compactes de $\bar{c}X'$ sont équicontinues.

PREUVE. On sait que $\bar{c}X'$ est muni de la topologie de la convergence compacte sur X, de sorte que, si X est espace de Kelley, alors $\bar{c}X'$ est complet ; de plus $\hat{\gamma}\bar{c}X'=\hat{\gamma}\hat{c}X'$ est compactologiquement égal à X' grâce aux relations (2.2.3) et à l'égalité $\hat{c}\gamma X=X$ obtenue en (2.2.4) ; donc a$\Longrightarrow$b. Réciproquement puisque toute partie équicontinue de X' est relativement compacte dans $\bar{c}X'$, l'assertion b) signifie $\hat{\gamma}\bar{c}X'=\hat{\gamma}\hat{c}X'=X'$, donc $\hat{c}\gamma X=X$ par dualité et b$\Longrightarrow$a. Enfin a$\Longrightarrow$c de façon évidente (compte tenu que a$\Longrightarrow$b) et l'assertion c) implique l'égalité algébrique $X'=(\gamma X)^{*}$, de sorte que $\bar{c}X'$ est bien complet ce qui prouve c$\Longrightarrow$b. ∎

REMARQUE. Si X est espace de Kelley complet, alors $\bar{c}X'$ est un elc complet tel que $\bar{c}\gamma\bar{c}X'=\bar{c}X'$. C'est donc aussi un espace de Kelley. De plus son dual est algébriquement égal à X (ce qu'on peut voir avec le théorème de Mackey ou aussi bien avec $\delta\hat{c}X'=\delta\hat{c}\delta X=\gamma X$). Enfin X est muni de la topologie de la convergence compacte sur $\bar{c}X'$, donc $X=\bar{c}(\bar{c}X')'$.

Du théorème on déduit successivement :

(2.2.9) COROLLAIRE 1. Soit X un elc complet. Si $\bar{c}X'$ est complet et si X a la topologie de Mackey $\tau(X,X')$, alors X est espace de Kelley.

PREUVE. Dans X' il y a identité entre disques équicontinus et disques faiblement relativement compacts. A fortiori toute partie compacte de $\bar{c}X'$ est contenue dans un disque compact de $\bar{c}X'$ (car $\bar{c}X'$ est complet), lequel est faiblement compact donc équicontinu. On est ramené à l'assertion b) du théorème. ∎

(2.2.10) COROLLAIRE 2. Tout elc X complet et bornologique est un espace de Kelley.

PREUVE. On sait que X a la topologie de Mackey et que $\bar{c}X'$ est complet. ∎

REMARQUE. La condition donnée en (2.2.9) n'est pas nécessaire, loin de là. Par exemple soit X un espace de Banach réflexif de dimension infinie. L'espace $\bar{c}X'=Y$ est bien espace de Kelley et Y n'a pas la topologie $\tau(Y,Y')=\tau(X',X)$ (de sorte que Y n'est même pas infratonnelé) car cela signifierait que la boule unité de X, qui est faiblement compacte, serait équicontinue dans Y', donc relativement compacte dans X, ce qui n'est pas.

Enfin donnons un résultat qui complète les propriétés de stabilité déjà vues :

(2.2.11) THEOREME. Tout produit d'espaces de Kelley complets est un espace de Kelley (complet).

PREUVE. Soit $X=\prod X_i$. On sait que X' est la somme directe $\sum X_i'$ et même que $\bar{c}X'$ est la somme directe topologique $\sum \bar{c}X_i'$ (ce qui peut aussi se déduire de (2.2.1)). Il en résulte que $\bar{c}X'$ est complet puisque les $\bar{c}X_i'$ le sont. De plus toute partie compacte de $\bar{c}X'$ est contenue et compacte dans une somme directe finie $\sum_{i\in J} \bar{c}X_i'$, donc équicontinue dans cette somme directe finie, et par suite équicontinue dans X'. On termine avec le critère (2.2.8.b). ∎

REMARQUE. En général un sous-espace fermé d'un espace de Kelley même complet n'est pas un espace de Kelley (sinon tout elc complet serait espace de Kelley). Cependant :

(2.2.12) PROPOSITION. Soit X un espace de Fréchet (donc de Kelley). Alors tout sous-espace fermé M de l'espace $Y=\bar{c}X'$ est un espace de Kelley.

PREUVE. Il est classique que l'on a $\bar{c}M'=X/M°$ topologiquement. Donc $\bar{c}M'$ est complet. Toute partie compacte de $\bar{c}M'$ est l'image canonique d'une partie compacte de X (propriété des espaces métrisables) donc d'une partie équicontinue de $Y=\bar{c}Y'$; c'est ainsi une partie équicontinue de M'. ∎

REMARQUE. On voit que la stabilité des espaces de Kelley (complets) est comparable à celle des espaces tonnelés ou infratonnelés. Elle est légèrement meilleure que celle des espaces bornologiques puisque, généralement parlant, un produit quelconque d'espaces bornologiques n'est pas bornologique. Paradoxalement (mais est-ce l'adverbe qui convient ?) on retrouve ici quelquechose d'analogue à l'étude comparée des espaces topologiques replets ou c-replets. En effet un espace topologique discret I est toujours c-replet mais il n'est replet que si son cardinal est non mesurable. Et l'elc produit R^I est toujours espace de Kelley mais il n'est bornologique que si le cardinal de I est non mesurable (théorème d'Ulam-Mackey : voir par exemple Kelley-Namioka (K2 : 19.9)). Le mystère s'éclaircit en faisant appel à un résultat simultané de Nachbin (N1) et Shirota (S3) (voir aussi Warner (W5)) selon lequel, si T est un espace topologique complètement régulier, l'elc $C_c(T)$, espace des fonctions continues sur T muni de la topologie de la convergence compacte (donc égal à $C(\gamma T)$ lorsque T est de plus espace de Kelley), n'est bornologique que si T est un espace replet. Et nous avons vu en (II.4.3.8) que si T est effectivement de Kelley et si $C(\gamma T)$ est un elc de Kelley, alors T est c-replet.

D'ailleurs l'analogie se poursuit au delà des espaces discrets I ou des produits de droites $R^T=C(\gamma I)$. Si l'on considère un produit $X=\prod_{i\in I} X_i$ d'elc séparés, on sait que X est bornologique chaque fois que les X_i le sont pourvu que le cardinal de I soit non mesurable (K2 : 19.9) et que X est un espace de Kelley complet chaque fois qu'il en est de même des X_i, et ceci sans condition cardinale sur I. Considérant alors une somme topologique $T=\sum_{i\in I} T_i$ d'espaces topologiques complètement réguliers (laquelle est complètement régulière), et remarquant, ce qui est immédiat, que $C_c(T)=\prod_{i\in I} C_c(T_i)$, on obtient, si cardI est non mesurable, que T est replet lorsque tous les T_i

sont replets. De plus comme T est manifestement un sous-espace de l'espace replet $\sum \upsilon T_i$ et que toute fonction continue sur T admet un prolongement continu unique à $\sum \upsilon T_i$, on voit que $\upsilon T=\sum \upsilon T_i$. En résumé, et en disant pour simplifier qu'une famille $(T_i)_{i\in I}$ est non mesurable lorsque cardI est non mesurable, le théorème cité de Nachbin-Shirota fournit la preuve (très indirecte au demeurant) du résultat suivant, que l'on pourra comparer à (II.4.3.13) :

([illegible].17) PROPOSITION. Soit $(T_i)_{i\in I}$ une famille non mesurable d'espaces topologiques complètement réguliers. Leur somme topologique $T=\sum T_i$ a une réplétion υT qui s'identifie à la somme topologique $\sum \upsilon T_i$ des réplétions υT_i des espaces T_i. En particulier toute somme topologique d'une famille non mesurable d'espaces replets est replète.

CONJECTURE. Terminons en signalant qu'il semble probable, lorsque T est un espace topologique de Kelley complètement régulier, que T soit c-replet si et seulement si l'elc (complet) $C_c(T)=C(\gamma T)$ est un espace de Kelley.

[illegible]. Les bifoncteurs mixtes $\mathcal{L}$ et I.

L'espace $\mathcal{L}(X,\mathcal{Z})$ et l'espace $\mathcal{B}(X,Y;\mathcal{Z})$. Etant donnés un elc complet X et un ecc régulier $\mathcal{Z}$, on désigne par $\mathcal{L}(X,\mathcal{Z})$ l'espace vectoriel des applications linéaires $u : X \longrightarrow \mathcal{Z}$ telles qu'il existe un voisinage de o disque fermé $V\in\mathcal{V}(X)$ et un disque "compact" $\mathcal{C}\in\mathcal{K}(\mathcal{Z})$ pour lesquels $u(V)\subset\mathcal{C}$. On place sur $\mathcal{L}(X,\mathcal{Z})$ une structure d'ecc en considérant les disques $\mathcal{A}(V,\mathcal{C})=\{u,\ u(V)\subset\mathcal{C}\}$ que l'on munit de la topologie de la convergence simple sur V pour laquelle ils sont compacts. Lorsque V décrit $\mathcal{V}(X)$ et $\mathcal{C}$ décrit $\mathcal{K}(\mathcal{Z})$, les disques "compacts" $\mathcal{A}(V,\mathcal{C})$ forment un recouvrement de $\mathcal{L}(X,\mathcal{Z})$ qui possède les propriétés requises pour que $\mathcal{L}(X,\mathcal{Z})$ soit un ecc. Il reste seulement à voir que $\mathcal{L}(X,\mathcal{Z})$ est un ecc régulier. Or cet espace est bien séparé par son dual $\mathcal{L}^*$. En effet soit $u\in\mathcal{A}(V,\mathcal{C})$ un élément de $\mathcal{L}(X,\mathcal{Z})$ annulé par toute forme linéaire de $\mathcal{L}^*$. Pour tout $x\in V$ et tout $z'\in\mathcal{C}°\subset\mathcal{L}^*$, on définit une application $v \longrightarrow \langle vx,z'\rangle$, qui est évidemment un élément de $\mathcal{L}^*$, donc $\langle ux,z'\rangle=0$.

Alors V et $\mathfrak{C}^{\circ}$ étant absorbants dans X et $\mathcal{Z}^{*}$ respectivement, on a nécessairement $u=0$ puisque $\mathcal{Z}^{*}$ sépare $\mathcal{Z}$.

Il est clair que l'on a défini un bifoncteur $\mathcal{L}$: $\mathbb{E}LCC \times \mathbb{E}CCR \longrightarrow \mathbb{E}CCR$, contravariant par rapport au premier indice et covariant par rapport au second, et que, pour tout X fixé, on en déduit un foncteur covariant $\mathcal{L}_X : \mathbb{E}CCR \longrightarrow \mathbb{E}CCR$.

EXEMPLES.

Ex 1. Si K est le corps des scalaires, considéré comme un ecc régulier, alors $\mathcal{L}(X,K)=X'$ donc $\mathcal{D}=\mathcal{L}(\cdot,K)$.

Ex 2. Si K est lu comme un elc complet alors $\mathcal{L}(K,\mathcal{Z})=\mathcal{Z}$ donc $\mathcal{L}_K=1_{\mathbb{E}CCR}$.

Ex 3. Pour un espace de Banach E et un espace de Waelbroeck $\mathfrak{g}$ l'espace de Waelbroeck $\mathcal{L}(E,\mathfrak{g})$ définit un ecc régulier qui n'est autre que celui que nous venons de nommer $\mathcal{L}(E,\mathfrak{g})$. En ce sens le conflit de notations n'est pas à craindre.

On rattache l'espace $\mathcal{L}(X,\mathcal{Z})$ aux espaces de Waelbroeck $\mathcal{L}(E,\mathfrak{g})$ par la caractérisation suivante :

(2.3.1) PROPOSITION. Pour toute $u \in \mathcal{L}(X,\mathcal{Z})$ il existe un espace de Banach E, un espace de Waelbroeck $\mathfrak{g}$, des morphismes $X \longrightarrow E$ et $\mathfrak{g} \longrightarrow \mathcal{Z}$ et une application $\bar{u} \in \mathcal{L}(E,\mathfrak{g})$ tels que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{u} & \mathcal{Z} \\ \downarrow & & \uparrow \\ E & \xrightarrow{\bar{u}} & \mathfrak{g} \end{array}$$

PREUVE. Il existe V et $\mathfrak{C}$ tels que $u(V) \subset \mathfrak{C}$, ce qui permet de faire opérer u de l'espace semi-normé X_V dans l'espace de Waelbroeck $\mathcal{Z}_{\mathfrak{C}}$. Comme ce prolongement est manifestement continu de X_V dans l'elc $(\mathcal{Z}_{\mathfrak{C}})_c$, la compacité de $\mathfrak{C}$ suffit pour assurer l'existence du prolongement $\hat{X}_V \longrightarrow \mathcal{Z}_{\mathfrak{C}}$; il suffit donc de prendre $E=\hat{X}_V$ et $\mathfrak{g}=\mathcal{Z}_{\mathfrak{C}}$. ∎

(2.3.2) COROLLAIRE. Lorsque V et $\mathfrak{C}$ décrivent respectivement $\mathcal{V}(X)$ et $\mathcal{K}(\mathcal{Z})$ les espaces de Waelbroeck $\mathcal{L}(\hat{X}_V,\mathcal{Z}_{\mathfrak{C}})$ forment un système inductif filtrant monique de la catégorie $\mathbb{W}$, ou de la catégorie $\mathbb{E}CCR$ et $\mathcal{L}(X,\mathcal{Z}) = \varinjlim_{\mathbb{E}CCR} (\hat{X}_V,\mathcal{Z}_{\mathfrak{C}})$.

PREUVE. Lorsque $W \subset V$ et $\mathfrak{C} \subset \mathfrak{D}$ les morphismes canoniques $\alpha : \hat{X}_W \longrightarrow \hat{X}_V$ et $\beta : \mathcal{Z}_{\mathfrak{C}} \longrightarrow \mathcal{Z}_{\mathfrak{D}}$ déterminent un morphisme $\theta : \mathcal{L}(\hat{X}_V,\mathcal{Z}_{\mathfrak{C}}) \longrightarrow \mathcal{L}(\hat{X}_W,\mathcal{Z}_{\mathfrak{D}})$ par $\theta(u)=\beta u \alpha$. Puisque α est un épimorphisme et que β est un monomorphisme il est clair que θ est un monomorphisme. On vérifie aussi facilement que le système $(\mathcal{L}(\hat{X}_V,\mathcal{Z}_{\mathfrak{C}}))$ est inductif et filtrant. Soit $\mathcal{H}$ sa limite inductive dans la catégorie $\mathbb{E}CCR$. La preuve de la proposition (2.3.1) fournit l'existence d'un morphisme $\varphi : \mathcal{L}(X,\mathcal{Z}) \longrightarrow \mathcal{H}$ qui possède une application réciproque $\psi : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{L}(X,\mathcal{Z})$ construite à partir des morphismes $\mathcal{L}(\hat{X}_V,\mathcal{Z}_{\mathfrak{C}}) \longrightarrow \mathcal{L}(X,\mathcal{Z})$. Par ailleurs φ et ψ échangent (par prolongement continu ou restriction) les disques "compacts" $\mathcal{A}(V,\mathfrak{C})$ de $\mathcal{L}(X,\mathcal{Z})$ et $\mathcal{A}(\hat{V},\mathfrak{C})$ de $\mathcal{H}$, et cet échange est bicontinu : cela résulte du fait que, tout voisinage de o dans $\mathfrak{C}$ absorbant $\mathfrak{C}$, les disques "compacts" $\mathcal{A}(V,\mathfrak{C})$ et $\mathcal{A}(\hat{V},\mathfrak{C})$ sont tous deux des ensembles équicontinus de fonctions. ∎

De la même façon, et sans détailler, on introduit, pour deux elc complets X et Y et pour un ecc régulier $\mathcal{Z}$, l'espace $\mathcal{B}(X,Y;\mathcal{Z})$ des applications bilinéaires $u : X \times Y \longrightarrow \mathcal{Z}$ pour lesquelles il existe $V \in \mathcal{V}(X)$, $W \in \mathcal{V}(Y)$ et $\mathfrak{C} \in \mathcal{K}(\mathcal{Z})$ avec $u(V,W) \subset \mathfrak{C}$. Les disques "compacts" de $\mathcal{B}(X,Y;\mathcal{Z})$ sont définis en fixant les ensembles V, W et $\mathfrak{C}$ et en considérant la topologie de la convergence bi-simple sur $V \times W$. On vérifie comme précédemment que $\mathcal{B}(X,Y;\mathcal{Z})$ est un ecc régulier, puis que $\mathcal{B}$ est en réalité un trifoncteur, d'où l'on déduit, en fixant X et Y, un foncteur $\mathcal{B}_{X,Y} : \mathbb{E}CCR \longrightarrow \mathbb{E}CCR$ covariant. On a aussi :

(2.3.3) PROPOSITION. Pour toute $u \in \mathcal{B}(X,Y;\mathcal{Z})$ il existe des espaces de Banach E et F, un espace de Waelbroeck $\mathfrak{g}$, des morphismes $X \longrightarrow E$, $Y \longrightarrow F$ et $\mathfrak{g} \longrightarrow \mathcal{Z}$ et une application $\bar{u} \in \mathcal{B}(E,F;\mathfrak{g})$ tels que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc} X \times Y & \xrightarrow{u} & \mathcal{Z} \\ \downarrow & & \uparrow \\ E \times F & \xrightarrow{\bar{u}} & \mathfrak{g} \end{array}.$$

(2.3.4) COROLLAIRE. Lorsque V, W et $\mathfrak{C}$ décrivent respectivement $\mathcal{V}(X)$, $\mathcal{V}(Y)$ et $\mathcal{K}(\mathcal{Z})$ les espaces de Waelbroeck $\mathcal{B}(\hat{X}_V,\hat{Y}_W,\mathcal{Z}_{\mathfrak{C}})$ forment un système inductif filtrant monique dans la catégorie $\mathbb{W}$, ou dans la catégorie $\mathbb{E}CCR$ et $\mathcal{B}(X,Y;\ ) = \varinjlim_{\mathbb{E}CCR} \mathcal{B}(X_V,Y_W;\mathcal{Z}_{\mathfrak{C}})$.

Relations entre $\mathcal{L}$ et $\mathcal{B}$.

(2.3.5) PROPOSITION. A des isomorphismes fonctoriels près on a :

$$\mathcal{B}_{X,Y} = \mathcal{L}_X . \mathcal{L}_Y = \mathcal{L}_Y . \mathcal{L}_X \quad .$$

PREUVE. Pour $v \in \mathcal{B}(X,Y;\mathcal{Z})$ on pose $u = \tau v \in \mathcal{L}(X,\mathcal{L}(Y,\mathcal{Z}))$ avec $u(x)(y)=v(x,y)$. Il est clair que les conditions "$v(V,W)\subset\mathcal{C}$" et "$u(V)(W)\subset\mathcal{C}$" sont équivalentes, de sorte que τ échange les disques "compacts" $\mathcal{A}(V,W;\mathcal{C})$ et $\mathcal{A}(V,\mathcal{A}(W,\mathcal{C}))$. Et comme sur ces disques les topologies sont celles de $\mathcal{C}^{V\times W}$ d'une part et de $(\mathcal{C}^W)^V$ d'autre part, cela suffit. ∎

L'espace $\mathcal{B}(X,Y)$. C'est l'espace $\mathcal{B}(X,Y;K)$ des formes bilinéaires continues sur $X\times Y$, muni de la structure d'ecc régulier précédente. En conséquence :

(2.3.6) PROPOSITION. $\mathcal{B}(X,Y) = \mathcal{L}(Y,X') = \mathcal{L}(X,Y')$.

On démontre aussi, comme en (1.4.1) que le produit tensoriel algébrique $X'\otimes Y'$ s'injecte canoniquement dans $\mathcal{B}(X,Y)$ et que $X\otimes Y$ et $\mathcal{B}(X,Y)$ sont en dualité séparante.

L'espace $X\hat{\otimes}Y$. On le définit comme pour les espaces de Banach en choisissant $X\hat{\otimes}Y = (\mathcal{B}(X,Y))^{*}$. On tire donc immédiatement de cette définition par dualité la proposition :

(2.3.7) PROPOSITION. Lorsque V et W décrivent respectivement $\mathcal{V}(X)$ et $\mathcal{V}(Y)$ les espaces de Banach $\hat{X}_V\hat{\otimes}\hat{Y}_W$ forment un système projectif filtrant épique dans la catégorie $\mathbb{B}$, ou dans la catégorie $\mathbb{E}$LCC, et $X\hat{\otimes}Y = \varprojlim_{\mathbb{E}\mathrm{LCC}} \hat{X}_V\hat{\otimes}\hat{Y}_W$.

On montre ensuite rapidement que la définition choisie permet de retrouver les propriétés du produit tensoriel (projectif) de deux elc complets introduit par Grothendieck (G3), en prouvant d'abord que $X\otimes Y$ est un sous-espace dense de $X\hat{\otimes}Y$, puis que la topologie de $X\hat{\otimes}Y$ admet pour base de voisinages de o les enveloppes disquées fermées $\overline{\Gamma}(V\otimes W)$, d'où l'on déduit :

(2.3.8) PROPOSITION. Pour $V\in\mathcal{V}(X)$ et $W\in\mathcal{V}(Y)$ on a $(X\hat{\otimes}Y)\hat{}_{\overline{\Gamma}(V\otimes W)} = \hat{X}_V\hat{\otimes}\hat{Y}_W$.

enfin qu'un système fondamental de semi-normes sur $X\otimes Y$ décrivant la topologie induite par $X\hat{\otimes}Y$ est formé des semi-normes tensorielles $p\hat{\otimes}q$ calculées selon :

$$(p\hat{\otimes}q)(z) = \inf_{z=\sum x_i\otimes y_i} \sum p(x_i)q(y_i)$$

lorsque p et q parcourent les systèmes fondamentaux de semi-normes dans X et Y respectivement.

Le bifoncteur $\hat{\otimes}$. En définissant par densité et prolongement continu le produit tensoriel de deux morphismes, on fait de $\hat{\otimes}$ un bifoncteur. En fixant Y on obtient un foncteur covariant $\hat{\otimes}_Y$: $\mathbb{E}$LCC$\longrightarrow\mathbb{E}$LCC.

(2.3.9) [illegible]. A des isomorphismes fonctoriels près on a :

$$\mathcal{B}_{X,Y} = \mathcal{L}_X . \mathcal{L}_Y = \mathcal{L}_{X\hat{\otimes}Y} \quad .$$

PREUVE. Elle s'obtient à partir du même résultat sur les espaces de Banach, en passant à des limites inductives convenables, compte tenu de (2.3.4), (1.4.6) et (2.3.2). ∎

(2.3.10) COROLLAIRE. Les foncteurs $\hat{\otimes}_Y$: $\mathbb{E}$LCC$\longrightarrow\mathbb{E}$LCC et $\mathcal{L}_Y$: $\mathbb{E}$CCR$\longrightarrow\mathbb{E}$CCR sont $\mathcal{L}$-adjoints.

REMARQUE. Mais, contrairement à ce qui se passe dans les catégories $\mathbb{B}$ et $\mathbb{W}$, nous ne pourrons déduire de cette propriété de $\mathcal{L}$-adjonction aucune propriété particulière de commutation. Cela tient au fait que le corps de base K, générateur de la catégorie $\mathbb{B}$, n'est pas un générateur de la catégorie $\mathbb{E}$LCC, de sorte que les principes de démonstration des théorèmes de commutation (1.3.5) et (1.3.6) ne peuvent se reconduire.

L'espace $L(\mathfrak{X},Z)$ et l'espace $B(\mathfrak{X},\mathfrak{Y};Z)$. Etant donnés deux ecc réguliers $\mathfrak{X}$ et $\mathfrak{Y}$ et un elc complet Z, on désigne par $L(\mathfrak{X},Z)$ l'espace des applications linéaires $u : \mathfrak{X}\longrightarrow Z$, dont les restrictions aux disques "compacts" $\mathcal{A}$ de $\mathfrak{X}$ sont continues, muni de la topologie de la convergence "compacte" sur $\mathfrak{X}$, donnant pour base de voisinages de o les disques $U(\mathcal{A},W)=\{u,\ u(\mathcal{A})\subset W\}$ où $\mathcal{A}\in\mathcal{K}(\mathfrak{X})$ et $W\in\mathcal{V}(Z)$. C'est un elc complet. L'espace $B(\mathfrak{X},\mathfrak{Y};Z)$ est celui des applications bilinéaires $u : \mathfrak{X}\times\mathfrak{Y}\longrightarrow Z$ dont les restrictions aux produits $\mathcal{A}\times\mathcal{B}$ de deux disques "compacts"

de $\mathfrak{X}$ et $\mathfrak{Y}$ sont continues, muni de la topologie de la convergence "bicompacte" sur $\mathfrak{X}\times\mathfrak{Y}$. C'est aussi un elc complet. Lorsque Z est le corps des scalaires K, on reconnaît en $L(\mathfrak{X},K)$ le dual $\mathfrak{X}^*$.
Il est bien clair que L et B sont en fait respectivement un bifoncteur et un trifoncteur, d'où l'on déduit les foncteurs covariants $L_{\mathfrak{X}} : \mathbb{E}LCC \longrightarrow \mathbb{E}LCC$ et $B_{\mathfrak{X},\mathfrak{Y}} : \mathbb{E}LCC \longrightarrow \mathbb{E}LCC$.

La caractérisation suivante est presque immédiate :

(2.3.11) <u>PROPOSITION</u>. Soit $u : \mathfrak{X} \longrightarrow Z$ une application linéaire. Pour que $u \in L(\mathfrak{X},Z)$ il faut et il suffit que, pour tout espace de Banach G, tout espace de Waelbroeck $\mathcal{E}$, tous morphismes $\mathcal{E} \longrightarrow \mathfrak{X}$ et $Z \longrightarrow G$, l'application $\bar{u} : \mathcal{E} \longrightarrow G$ que l'on déduit de u soit un élément de l'espace $L(\mathcal{E},G)$.

On en tire :

(2.3.12) <u>PROPOSITION</u>. Lorsque $\mathcal{A}$ et W décrivent respectivement $\mathcal{K}(\mathfrak{X})$ et $\mathcal{V}(Z)$ les espaces de Banach $L(\mathfrak{X}_{\mathcal{A}},\hat{Z}_W)$ forment un système projectif filtrant dans la catégorie $\mathbb{B}$, ou dans la catégorie $\mathbb{E}LCC$ et $L(\mathfrak{X},Z) = \varprojlim_{\mathbb{E}LCC} L(\mathfrak{X}_{\mathcal{A}},\hat{Z}_W)$.

<u>PREUVE</u>. Pour $\mathcal{A}\subset\mathcal{B}$ et $V\subset W$ le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{X}_{\mathcal{A}} \arrow[r] \arrow[dr] & \mathfrak{X}_{\mathcal{B}} \arrow[r, "\bar{u}"] \arrow[d] & \hat{Z}_V \arrow[r] & \hat{Z}_W \\
 & \mathfrak{X} \arrow[r, "u"] & Z \arrow[u] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

montre suffisamment que le système $(L(\mathfrak{X}_{\mathcal{A}},\hat{Z}_W))$ est projectif filtrant dans la catégorie $\mathbb{B}$ et qu'il existe une application

$$\varphi : L(\mathfrak{X},Z) \longrightarrow H = \varprojlim L(\mathfrak{X}_{\mathcal{A}},\hat{Z}_W) ,$$

qui se trouve être injective de façon évidente, surjective à cause de (2.3.11), et un isomorphisme puisqu'elle échange exactement les voisinages $U(\mathcal{A},W)$ de $L(\mathfrak{X},Z)$ et ceux de H. ∎

<u>REMARQUE</u>. Contrairement aux précisions "monique" et "épique" de (2.3.2) et (2.3.7) on ne peut garantir ici que le système projectif des espaces $L(\mathfrak{X}_{\mathcal{A}},\hat{Z}_W)$ soit épique.

Et de façon similaire :

(2.3.13) <u>PROPOSITION</u>. Soit $u : \mathfrak{X}\times\mathfrak{Y} \longrightarrow Z$ une application bilinéaire. Pour que $u \in B(\mathfrak{X},\mathfrak{Y};Z)$ il faut et il suffit que, pour tout espace de Banach G, tous espaces de Waelbroeck $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$, tous morphismes $\mathcal{E} \longrightarrow \mathfrak{X}$, $\mathcal{F} \longrightarrow \mathfrak{Y}$ et $Z \longrightarrow G$, l'application $\bar{u} : \mathcal{E}\times\mathcal{F} \longrightarrow G$ que l'on déduit de u soit un élément de l'espace $B(\mathcal{E},\mathcal{F};G)$.

(2.3.14) <u>PROPOSITION</u>. Lorsque $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ et W décrivent respectivement $\mathcal{K}(\mathfrak{X})$, $\mathcal{K}(\mathfrak{Y})$ et $\mathcal{V}(Z)$ les espaces de Banach $B(\mathfrak{X}_{\mathcal{A}},\mathfrak{Y}_{\mathcal{B}};\hat{Z}_W)$ forment un système projectif filtrant dans la catégorie $\mathbb{B}$, ou dans la catégorie $\mathbb{E}LCC$ et $B(\mathfrak{X},\mathfrak{Y};Z) = \varprojlim_{\mathbb{E}LCC} B(\mathfrak{X}_{\mathcal{A}},\mathfrak{Y}_{\mathcal{B}};\hat{Z}_W)$.

(2.3.15) <u>PROPOSITION</u>. A des isomorphismes fonctoriels près on a :

$$B_{\mathfrak{X},\mathfrak{Y}} = L_{\mathfrak{X}}.L_{\mathfrak{Y}} = L_{\mathfrak{Y}}.L_{\mathfrak{X}} .$$

<u>L'espace $B(\mathfrak{X},\mathfrak{Y})$</u>. En choisissant pour Z le corps des scalaires K, on obtient l'espace $B(\mathfrak{X},\mathfrak{Y})=B(\mathfrak{X},\mathfrak{Y};K)$ des formes bilinéaires sur $\mathfrak{X}\times\mathfrak{Y}$ dont les restrictions aux "compacts" de $\mathfrak{X}\times\mathfrak{Y}$ sont continues, muni de la topologie de la convergence "bicompacte". Alors :

(2.3.16) <u>PROPOSITION</u>. $B(\mathfrak{X},\mathfrak{Y}) = L(\mathfrak{X},\mathfrak{Y}^*) = L(\mathfrak{Y},\mathfrak{X}^*)$.

On démontre aussi que le produit tensoriel algébrique $\mathfrak{X}^*\otimes\mathfrak{Y}^*$ s'injecte dans $B(\mathfrak{X},\mathfrak{Y})$ et que $\mathfrak{X}\otimes\mathfrak{Y}$ et $B(\mathfrak{X},\mathfrak{Y})$ sont en dualité séparante.

<u>L'espace $\mathfrak{X}\bar{\otimes}\mathfrak{Y}$</u>. On le définit comme pour les espaces de Waelbroeck par l'égalité $\mathfrak{X}\bar{\otimes}\mathfrak{Y}=(B(\mathfrak{X},\mathfrak{Y}))'$, et c'est un ecc régulier. On a donc déjà :

(2.3.17) <u>PROPOSITION</u>. Lorsque $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ décrivent respectivement $\mathcal{K}(\mathfrak{X})$ et $\mathcal{K}(\mathfrak{Y})$ les espaces de Waelbroeck $\mathfrak{X}_{\mathcal{A}}\bar{\otimes}\mathfrak{Y}_{\mathcal{B}}$ forment un système inductif filtrant dans la catégorie $\mathbb{W}$, ou dans la catégorie $\mathbb{E}CCR$ et $\mathfrak{X}\bar{\otimes}\mathfrak{Y} = \varinjlim_{\mathbb{E}CCR} \mathfrak{X}_{\mathcal{A}}\bar{\otimes}\mathfrak{Y}_{\mathcal{B}}$.

On vérifie aussi, par application du théorème de Hahn-Banach, que $\mathfrak{X}\otimes\mathfrak{Y}$ est un sous-ev de $\mathfrak{X}\bar{\otimes}\mathfrak{Y}$, d'ailleurs dense dans l'elc $(\mathfrak{X}\bar{\otimes}\mathfrak{Y})_c$.
Et même plus généralement :

(2.3.18) PROPOSITION. Les disques "compacts" de $\mathfrak{X}\bar{\otimes}\mathfrak{Y}$ sont les ensembles $\mathcal{A}\bar{\otimes}\mathcal{B}=\bar{\Gamma}(\mathcal{A}\otimes\mathcal{B})$, enveloppes disquées fermées dans $(\mathfrak{X}\bar{\otimes}\mathfrak{Y})_c$ du produit tensoriel de deux disques "compacts" quelconques $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ de $\mathfrak{X}$ et $\mathfrak{Y}$ respectivement.

PREUVE. Les disques "compacts" de $\mathfrak{X}\bar{\otimes}\mathfrak{Y}$ sont les polaires des voisinages de o dans $\mathrm{P}(\mathfrak{X},\mathfrak{Y})$, donc les bipolaires $(\mathcal{A}\otimes\mathcal{B})^{\circ\circ}$, c'est-à-dire les disques $\mathcal{A}\bar{\otimes}\mathcal{B}=\bar{\Gamma}(\mathcal{A}\otimes\mathcal{B})$. ∎

(2.3.19) THEOREME. A des isomorphismes fonctoriels près on a :

$$B_{\mathfrak{X},\mathfrak{Y}} = L_{\mathfrak{X}}.L_{\mathfrak{Y}} = L_{\mathfrak{X}\bar{\otimes}\mathfrak{Y}} .$$

PREUVE. Elle s'obtient par un raisonnement direct analogue à celui de la démonstration de (1.5.4). ∎

Le foncteur $\bar{\otimes}_{\mathfrak{Y}}$. On construit $\bar{\otimes}$ en bifoncteur en remarquant que, pour deux morphismes $u : \mathfrak{X}\longrightarrow\mathfrak{X}_o$ et $v : \mathfrak{Y}\longrightarrow\mathfrak{Y}_o$ l'application linéaire $u\otimes v : \mathfrak{X}\otimes\mathfrak{Y}\longrightarrow\mathfrak{X}_o\otimes\mathfrak{Y}_o$ se prolonge (par densité) de façon unique en un morphisme $u\bar{\otimes}v : \mathfrak{X}\bar{\otimes}\mathfrak{Y}\longrightarrow\mathfrak{X}_o\bar{\otimes}\mathfrak{Y}_o$. En fixant l'espace $\mathfrak{Y}$ on obtient donc le foncteur covariant $\bar{\otimes}_{\mathfrak{Y}}$: ECCR$\longrightarrow$ECCR. Alors :

(2.3.20) PROPOSITION. Les foncteurs $\bar{\otimes}_{\mathfrak{Y}}$: ECCR$\longrightarrow$ECCR et $L_{\mathfrak{Y}}$: ELCC$\longrightarrow$ELCC sont L-adjoints.

PREUVE. C'est une conséquence immédiate de (2.3.19). ∎

(2.3.21) COROLLAIRE. Le foncteur $\hat{c}.\bar{\otimes}_{\mathfrak{Y}}$: ECCR$\longrightarrow$ELCC est adjoint à gauche au foncteur $\hat{\gamma}.L_{\mathfrak{Y}}$: ELCC$\longrightarrow$ECCR.

PREUVE. On sait que le foncteur $\hat{c}$ est adjoint à gauche au foncteur $\hat{\gamma}$. De façon plus précise on a les égalités algébriques

$$\mathrm{Hom}_{ELCC}(\hat{c}\mathfrak{X},Z) = L(\mathfrak{X},Z) = \mathrm{Hom}_{ECCR}(\mathfrak{X},\hat{\gamma}Z)$$

D'où l'on déduit les égalités algébriques

$$\mathrm{Hom}_{ELCC}(\hat{c}(\mathfrak{X}\bar{\otimes}\mathfrak{Y}),Z) = L(\mathfrak{X}\bar{\otimes}\mathfrak{Y},Z) = L(\mathfrak{X},L(\mathfrak{Y},Z)) = \mathrm{Hom}_{ECCR}(\mathfrak{X},\hat{\gamma}L(\mathfrak{Y},Z)). \blacksquare$$

2.4. Les applications nucléaires et les applications intégrales.

Rappel sur la catégorie ELCC. La catégorie ELCC est bien une catégorie complète à droite et à gauche, mais certaines propriétés ne sont pas aussi bonnes que dans la catégorie ELCS. Les produits de ELCC sont les mêmes que dans ELCS (ou ELC) ; les sous-espaces dans ELCC sont les sous-espaces fermés. Les sommes directes sont les mêmes que dans ELCS (une somme directe d'elc séparés et complets est séparée et complète) ; les quotients de ELCC sont les "quotients complétés", et c'est là le fait le plus négatif pour nous.
En effet tout morphisme $u:X\longrightarrow Y$ entre deux elc complets admet une décomposition canonique dans la catégorie ELCC selon :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{u} & Y \\ {\scriptstyle \mathrm{Coimu}}\downarrow & & \uparrow{\scriptstyle \mathrm{Imu}} \\ (X/u^{-1}(o))^{\wedge} & \xrightarrow{\tilde{u}} & \overline{uX} \end{array}$$

mais l'épimorphisme Coimu n'est plus surjectif en général.
Il suit de là que la notion de morphisme strict (dans ELCC) n'est pas la même que dans la catégorie ELCS, et qu'en particulier, si les monostricts sont bien, à un isomorphisme près, les injections canoniques d'un sous-espace fermé avec topologie induite dans l'elc complet qui le contient, les épistricts ne sont même pas surjectifs.
L'autre aspect négatif est que le morphisme $\tilde{u}$, construit par passage aux complétés à partir du morphisme (de ELCS) $\bar{u} : X/u^{-1}(o)\longrightarrow uX$, peut ne pas être injectif bien que $\bar{u}$ le soit. Autrement dit $\tilde{u}$ n'est pas en général un bimorphisme. C'est toutefois évidemment un épimorphisme.

Le diagramme fondamental. Etant donnés deux elc X et Y complets on peut considérer $X\otimes Y$ comme un sous-ev de l'espace $L(Y',X)$ en associant à tout $x\otimes y$ l'application $y'\longrightarrow\langle y,y'\rangle x$. Comme on vérifie aussitôt que cette application est continue pour la topologie tensorielle sur $X\otimes Y$, on obtient par prolongement continu un morphisme

$$t_X : X\hat{\otimes}Y\longrightarrow L(Y',X)$$

Bien entendu, si X et Y sont deux espaces de Banach, on retrouve le morphisme, noté t_X de (1.5). D'ailleurs on va pouvoir se ramener aux espaces de Banach. En effet, omettons l'indice X pour simplifier l'écriture et désignons, pour tout $V\in\mathcal{V}(X)$ et tout $W\in\mathcal{V}(Y)$, par $t_{V,W}$ le morphisme canonique de $\hat{X}_V\hat{\otimes}\hat{Y}_W$ dans $L(Y'_{W^\circ},\hat{X}_V)$. On constate alors la commutativité du diagramme :

$$\begin{tikzcd}
X\hat{\otimes}Y \arrow[r, "t"] \arrow[d] & L(Y',X) \arrow[d] \\
\hat{X}_V\hat{\otimes}\hat{Y}_W \arrow[r, "t_{V,W}"] & L(Y'_{W^\circ},\hat{X}_V)
\end{tikzcd}$$

où les flèches verticales sont les morphismes canoniques intervenant dans les limites projectives (2.3.7) et (2.3.12).
En décomposant alors canoniquement dans $\mathbb{E}$ le morphisme $t_{V,W}$ on fait apparaître les espaces $L^1(Y'_{W^\circ},\hat{X}_V)$ et $\hat{X}_V\hat{\hat{\otimes}}\hat{Y}_W$, et le fait que L^1 et $\hat{\hat{\otimes}}$ soient des bifoncteurs montre clairement que, lorsque V et W varient, ces espaces forment des systèmes projectifs dans la catégorie $\mathbb{E}$; on est donc en droit de définir :

(2.4.1) DEFINITION. Etant donnés deux elc complets X et Y on pose :

$$L^1(Y',X) = \varprojlim_{\mathbb{E}LCC} L^1(Y'_{W^\circ},\hat{X}_V)$$

$$X\hat{\hat{\otimes}}Y = \varprojlim_{\mathbb{E}LCC} \hat{X}_V\hat{\hat{\otimes}}\hat{Y}_W$$

où les limites projectives sont prises lorsque V et W décrivent respectivement $\mathcal{V}(X)$ et $\mathcal{V}(Y)$. On dit que l'espace $L^1(Y',X)$ est l'espace des applications nucléaires de Y' dans X.

REMARQUE. Cette définition ne prendra tout son sens que lorsque nous aurons montré que $L^1(Y',X)$ peut s'identifier à un espace de fonctions de Y' dans X, autrement dit qu'il existe une injection de $L^1(Y',X)$ dans $L(Y',X)$. Et nous devrons aussi prouver que l'espace noté ici $X\hat{\hat{\otimes}}Y$ coïncide bien avec l'espace habituellement noté $X\hat{\hat{\otimes}}Y$, et qui est le produit tensoriel ε de X et Y.

Pour ce faire considérons le diagramme ouvert suivant, où les morphismes $\alpha_{V,W}$, $\beta_{V,W}$, $\gamma_{V,W}$ et $\delta_{V,W}$ sont les morphismes canoniques de projection :

$$\begin{tikzcd}
X\hat{\otimes}Y \arrow[rrr, "t"] \arrow[dr, "\alpha_{V,W}"] & & & L(Y',X) \arrow[dl, "\delta_{V,W}"'] \\
& \hat{X}_V\hat{\otimes}\hat{Y}_W \arrow[r, "t_{V,W}"] \arrow[d, "p_{V,W}"'] & L(Y'_{W^\circ},\hat{X}_V) & \\
& L^1(Y'_{W^\circ},\hat{X}_V) \arrow[r, "\tilde{t}_{V,W}"] & \hat{X}_V\hat{\hat{\otimes}}\hat{Y}_W \arrow[u, "r_{V,W}"'] & \\
L^1(Y',X) \arrow[ur, "\beta_{V,W}"] & & & X\hat{\hat{\otimes}}Y \arrow[ul, "\gamma_{V,W}"']
\end{tikzcd}$$

La cohérence des morphismes $p_{V,W}\alpha_{V,W}$, $\tilde{t}_{V,W}\beta_{V,W}$ et $r_{V,W}\gamma_{V,W}$ lorsque V et W varient permet de condenser respectivement les morphismes $p_{V,W}$, $\tilde{t}_{V,W}$ et $r_{V,W}$ en des morphismes .

$$p : X\hat{\otimes}Y \longrightarrow L^1(Y',X)$$

$$\tilde{t} : L^1(Y',X) \longrightarrow X\hat{\hat{\otimes}}Y$$

$$r : X\hat{\hat{\otimes}}Y \longrightarrow L(Y',X)$$

rendant commutatif le diagramme fondamental :

$$\begin{tikzcd}
X\hat{\otimes}Y \arrow[rrr, "t"] \arrow[dr, "\alpha_{V,W}"] \arrow[ddd, "p"'] & & & L(Y',X) \arrow[dl, "\delta_{V,W}"'] \\
& \hat{X}_V\hat{\otimes}\hat{Y}_W \arrow[r, "t_{V,W}"] \arrow[d, "p_{V,W}"'] & L(Y'_{W^\circ},\hat{X}_V) & \\
& L^1(Y'_{W^\circ},\hat{X}_V) \arrow[r, "\tilde{t}_{V,W}"] & \hat{X}_V\hat{\hat{\otimes}}\hat{Y}_W \arrow[u, "r_{V,W}"'] & \\
L^1(Y',X) \arrow[ur, "\beta_{V,W}"] \arrow[rrr, "\tilde{t}"] & & & X\hat{\hat{\otimes}}Y \arrow[ul, "\gamma_{V,W}"'] \arrow[uuu, "r"']
\end{tikzcd}$$

et l'on vérifie aisément les propriétés suivantes :

a) $\beta_{V,W}$ et p sont des épimorphismes car il en est de même de $\alpha_{V,W}$ et $p_{V,W}$.

b) $\gamma_{V,W}$ et $\tilde{t}$ sont des épimorphismes car $\beta_{V,W}$ et $\tilde{t}_{V,W}$ le sont.

c) $\tilde{t}$ est un monomorphisme car tous les $\tilde{t}_{V,W}$ le sont.

d) r est un monostrict car tous les $r_{V,W}$ sont des monostricts.

qui ont comme conséquence directe :

(2.4.2) THEOREME.

a) Les limites projectives qui définissent respectivement $L^1(Y',X)$ et $X\hat{\otimes}Y$ sont épiques.

b) Dans le diagramme simplifié

$$\begin{tikzcd} X\hat{\otimes}Y \arrow[r, "t"] \arrow[d, "p"'] & L(Y',X) \\ L^1(Y',X) \arrow[r, "\tilde{t}"] & X\hat{\hat{\otimes}}Y \arrow[u, "r"'] \end{tikzcd}$$

p est un épimorphisme, $\tilde{t}$ un bimorphisme et r un monostrict, d'où il suit que $L^1(Y',X)$ s'injecte canoniquement dans $L(Y',X)$ ce qui rend cohérente la notation adoptée.

c) On a kerp=kert donc p est injectif sur $X\otimes Y$, ce qui permet l'identification de $X\hat{\hat{\otimes}}Y$ avec l'adhérence dans $L(Y',X)$ du produit tensoriel algébrique $X\otimes Y$ munie de la topologie induite. Autrement dit $X\hat{\hat{\otimes}}Y$ apparaît comme le complété de $X\otimes Y$ pour la topologie de la convergence "bicompacte" (ou bi-équicontinue) sur $X'\times Y'$. C'est donc bien le produit tensoriel complété ε de X et Y.

PREUVE. Il suffit dans tout cela de prouver l'égalité kerp=kert. Or $t=r\tilde{t}p$ et r et $\tilde{t}$ sont des injections, donc $p^{-1}(o)=t^{-1}(o)$. Le morphisme p est alors injectif sur $X\otimes Y$ puisqu'on sait qu'il en est de même du morphisme t. ∎

REMARQUES.

Rque 1. Les résultats sont un peu moins forts que pour les

espaces de Banach car on ne peut prouver que p est un épistrict, ni même une surjection, bien que chaque $p_{V,W}$ soit un épistrict de $\mathbb{B}$, donc une surjection.

Rque 2. L'égalité kerp=kert montre que la décomposition canonique du morphisme t (dans la catégorie $\mathbb{E}$LCC) se fait à travers l'espace $L^1(Y',X)$ selon le diagramme

$$\begin{tikzcd} & X\hat{\otimes}Y \arrow[r, "t"] \arrow[dl, "\varphi"'] \arrow[d, "p"] & L(Y',X) \\ (X\hat{\otimes}Y/t^{-1}(o))^{\wedge} \arrow[r, "\theta"] & L^1(Y',X) \arrow[r, "t"] & X\hat{\hat{\otimes}}Y \arrow[u, "q"'] \end{tikzcd}$$

Mais le fait que θ n'est pas en général un monomorphisme suffit à prouver que l'espace $(X\hat{\otimes}Y/t^{-1}(o))^{\wedge}$ n'est pas une partie de $L(Y',X)$. Ainsi, contrairement à ce qui se produit avec les espaces de Banach, la décomposition canonique du morphisme t dans la catégorie $\mathbb{E}$LCC ne permet pas la définition d'une classe particulière d'applications de Y' dans X. C'est pourquoi nous avons préféré la définition donnée plus haut des applications nucléaires, estimant que, dans ce cadre catégorique, elle est la seule possible.

Les applications nucléaires. L'invariance de la nucléarité par transposition se démontre facilement. On peut identifier $L^1(Y',X)$ à un espace $B^1(X',Y')$ de formes bilinéaires sur $X'\times Y'$, appelées formes bilinéaires nucléaires. Cette remarque montre que la transposition $u \longrightarrow u'$, qui fait passer de $L(Y',X)$ à $L(X',Y)$, correspondant à l'échange des variables entre $B(X',Y')$ et $B(Y',X')$, induit un isomorphisme entre les espaces $L^1(Y',X)$ et $L^1(X',Y)$. Donc :

(2.4.3) PROPOSITION. La transposée $u' : X' \longrightarrow Y$ d'une application nucléaire $u : Y' \longrightarrow X$ est encore nucléaire.

Le critère suivant de caractérisation des applications nucléaires est à rapprocher du critère (2.3.11) caractérisant les applications éléments de l'espace $L(Y',X)$.

(2.4.4) PROPOSITION. Soit $u : Y' \longrightarrow X$ une application linéaire. Pour que u soit nucléaire il faut et il suffit que, pour tous espaces de Banach E et F et tous morphismes $\alpha : X \to E$ et $\beta : Y \to F$ l'application $\alpha u \beta' : F' \to E$ soit nucléaire.

PREUVE. La condition est suffisante puisqu'alors u définit des applications nucléaires $u_{V,W} : Y'_{W^\circ} \to \hat{X}_V$. Elle est aussi nécessaire car les morphismes α et β se factorisent respectivement à travers des espaces $\hat{X}_V$ et $\hat{Y}_W$ pour V et W convenables. ∎

REMARQUE. Si l'on fixe les morphismes α et β on obtient une application $u \mapsto \alpha u \beta'$ de $L^1(Y',X)$ dans $L^1(F',E)$ qui est en réalité un morphisme.

Cette remarque prépare à la démonstration du caractère fonctoriel de $L^1(.,.)$. En effet, la définition de $L^1(Y',X)$ comme limite projective montre que, pour qu'une application linéaire v d'un elc complet Z dans $L^1(Y',X)$ soit continue (donc un morphisme) il faut et il suffit que les applications $Z \to L^1(F',E)$ soient continues pour tout choix des morphismes $\alpha : X \to E$ et $\beta : Y \to F$. Et comme conséquence :

(2.4.5) PROPOSITION. Soient $v : X \to X_\circ$ et $w : Y \to Y_\circ$ des morphismes de la catégorie $\mathbb{E}$LCC. L'application $\Phi : L^1(Y',X) \to L^1(Y'_\circ, X_\circ)$ définie par $\Phi(u)=vuw'$ est un morphisme.

PREUVE. Il suffit d'écrire le diagramme

$$\begin{tikzcd}
Y'_\circ \arrow[r, "w'"] & Y' \arrow[r, "u"] & X \arrow[r, "v"] \arrow[dr] & X_\circ \arrow[d, "\alpha"] \\
F'_\circ \arrow[u, "\beta'"] \arrow[ur] \arrow[rrr] & & & E_\circ
\end{tikzcd}$$

pour tout choix des morphismes $\alpha : X_\circ \to E_\circ$ et $\beta : Y_\circ \to F_\circ$ dans des espaces de Banach. ∎

Les applications intégrales. Etant donnés deux ecc réguliers, identifiés à des duals X' et Y' d'elc complets, on peut considérer $X'\otimes Y'$ comme un sous-ev de $\mathcal{L}(Y,X')$ par l'intermédiaire de l'application injective $\tau : X'\otimes Y' \to \mathcal{L}(Y,X')$ définie par $\tau(x'\otimes y')(y)=\langle y,y'\rangle x'$. On voit facilement qu'elle se prolonge en un morphisme

$$\tau_{X'} : X'\bar{\otimes} Y' \to \mathcal{L}(Y,X')$$

et l'on pourrait poursuivre comme pour la construction des applications nucléaires. Mais c'est partiellement inutile car il est clair, tout comme pour les espaces de Banach, que les morphismes t_X et $\tau_{X'}$ sont duaux l'un de l'autre. Supprimons désormais les indices X et X'.

(2.4.6) DEFINITION. On pose, pour des elc complets X et Y :

$$\mathcal{L}^1(Y,X') = \varinjlim_{\mathbb{E}CCR} \mathcal{L}^1(\hat{Y}_W, X'_{V^\circ})$$

$$X'\bar{\bar{\otimes}}Y' = \varinjlim_{\mathbb{E}CCR} X'_{V^\circ}\bar{\bar{\otimes}}Y'_{W^\circ}$$

où les limites inductives sont prises lorsque V et W décrivent respectivement $\mathcal{V}(X)$ et $\mathcal{V}(Y)$. On dit que l'espace $\mathcal{L}^1(Y,X')$ est l'espace des applications intégrales de Y dans X'.

On obtient un diagramme commutatif dans $\mathbb{E}$CCR, qui est dual du diagramme dans $\mathbb{E}$LCC de p.129 :

$$\begin{tikzcd}
X'\bar{\otimes}Y' \arrow[rrr, "\tau"] \arrow[ddd, "\varpi"'] & & & \mathcal{L}(Y,X') \\
& X'_{V^\circ}\bar{\otimes}Y'_{W^\circ} \arrow[ul] \arrow[r, "\tau_{V,W}"] \arrow[d, "\varpi_{V,W}"'] & \mathcal{L}(\hat{Y}_W, X'_{V^\circ}) \arrow[ur] & \\
& \mathcal{L}^1(\hat{Y}_W, X'_{V^\circ}) \arrow[r, "\tilde{\tau}_{V,W}"] \arrow[dl] & X'_{V^\circ}\bar{\bar{\otimes}}Y'_{W^\circ} \arrow[u, "\rho_{V,W}"'] \arrow[dr] & \\
\mathcal{L}^1(Y,X') \arrow[rrr, "\tilde{\tau}"] & & & X'\bar{\bar{\otimes}}Y' \arrow[uuu, "\rho"']
\end{tikzcd}$$

et l'on a :

(2.4.7) THEOREME.

a) Les limites inductives qui définissent respectivement $\mathcal{L}^1(Y,X')$ et $X'\bar{\bar{\otimes}}Y'$ sont moniques.

b) Dans le diagramme simplifié, dual du diagramme simplifié de (2.4.2),

$$\begin{tikzcd} X'\hat{\otimes}Y' \arrow[r, "\tau=t'"] \arrow[d, "\varpi=r'"'] & \mathcal{L}(Y,X') \\ \mathcal{L}^1(Y,X') \arrow[r, "\tilde{\tau}=\tilde{t}'"] & X'\bar{\bar{\otimes}}Y' \arrow[u, "\rho=p'"'] \end{tikzcd}$$

ϖ est un épistrict, $\tilde{\tau}$ un bimorphisme et ρ un monomorphisme, d'où il suit que $\mathcal{L}^1(Y,X')$ s'injecte canoniquement dans $\mathcal{L}(Y,X')$ ce qui légitime la notation.
c) On a $\ker\varpi=\ker\tau$ donc ϖ est injectif sur l'espace $X'\otimes Y'$, ce qui permet de voir que $X'\otimes Y'$ s'identifie à un sous-ev dense de l'elc $(X'\bar{\bar{\otimes}}Y')_c$.

(2.4.8) COROLLAIRE. $\mathcal{L}^1(Y,X') = (X\hat{\hat{\otimes}}Y)'$ et $X'\bar{\bar{\otimes}}Y' = (L^1(Y',X))'$.

On peut aussi parler de formes bilinéaires intégrales en introduisant l'espace $\mathcal{B}^1(X,Y)$ isomorphe à l'espace $\mathcal{L}^1(Y,X')$. C'est le dual de l'espace $X\hat{\hat{\otimes}}Y$, ce qui redonne donc bien dans ce cas la terminologie de Grothendieck. De plus :

(2.4.9) PROPOSITION. La transposée $u' : X \longrightarrow Y'$ d'une application intégrale $u : Y \longrightarrow X'$ est encore intégrale.

Et sans entrer dans les détails :

(2.4.10) PROPOSITION. Soit $u : Y \longrightarrow X'$ une application linéaire. Alors u est intégrale si et seulement si il existe des espaces de Banach E et F et des morphismes $\alpha : X \longrightarrow E$ et $\beta : Y \longrightarrow F$, ainsi qu'une application intégrale $\bar{u} : F \longrightarrow E'$ tels que le diagramme

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "u"] \arrow[d, "\beta"'] & X' \\ F \arrow[r, "\bar{u}"] & E' \arrow[u, "\alpha'"'] \end{tikzcd}$$

soit commutatif.

Puis on obtient le caractère fonctoriel de $\mathcal{L}^1(.,.)$ sous la forme :

(2.4.11) PROPOSITION. Soient $v : X_o \longrightarrow X$ et $w : Y_o \longrightarrow Y$ des morphismes de la catégorie $\mathbb{E}LCC$. L'application $\Phi : \mathcal{L}^1(Y,X') \longrightarrow \mathcal{L}^1(Y_o,X_o')$ définie par $\Phi(u)=v'uw$ est un morphisme de $\mathbb{E}CCR$.

Les foncteurs $\hat{\hat{\otimes}}$ et $\bar{\bar{\otimes}}$. Par dualité on obtient le caractère fonctoriel de $\hat{\hat{\otimes}}$ et $\bar{\bar{\otimes}}$, d'où l'existence de foncteurs covariants

$$\hat{\hat{\otimes}}_Y : \mathbb{E}LCC \longrightarrow \mathbb{E}LCC \qquad \text{et} \qquad \bar{\bar{\otimes}}_{Y'} : \mathbb{E}CCR \longrightarrow \mathbb{E}CCR$$

et de diagrammes fonctoriels commutatifs duaux

$$\begin{tikzcd} \hat{\otimes}_Y \arrow[r] \arrow[d] & L_{Y'} \\ L^1_{Y'} \arrow[r] & \hat{\hat{\otimes}}_Y \arrow[u] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \bar{\otimes}_{Y'} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{L}_Y \\ \mathcal{L}^1_Y \arrow[r] & \bar{\bar{\otimes}}_{Y'} \arrow[u] \end{tikzcd} .$$

2.5. Les applications nucléantes et les applications intégrantes.

Jusqu'à présent nous n'avons jamais considéré entre deux elc complets d'autres applications que les morphismes. Il s'agit maintenant de définir des notions nouvelles naturellement associées aux notions d'application nucléaire et d'application intégrale.
Fixons un morphisme $u : Y \longrightarrow Z$ entre deux elc complets. Il permet de réaliser de nombreux morphismes fonctoriels :

$$\begin{array}{ll} \Phi_u : L_{Y'} \longrightarrow L_{Z'} & \Psi_u : \mathcal{L}_Z \longrightarrow \mathcal{L}_Y \\ \Phi^1_u : L^1_{Y'} \longrightarrow L^1_{Z'} & \Psi^1_u : \mathcal{L}^1_Z \longrightarrow \mathcal{L}^1_Y \\ \hat{\Phi}_u : \hat{\otimes}_Y \longrightarrow \hat{\otimes}_Z & \bar{\Psi}_u : \bar{\otimes}_{Z'} \longrightarrow \bar{\otimes}_{Y'} \\ \hat{\hat{\Phi}}_u : \hat{\hat{\otimes}}_Y \longrightarrow \hat{\hat{\otimes}}_Z & \bar{\bar{\Psi}}_u : \bar{\bar{\otimes}}_{Z'} \longrightarrow \bar{\bar{\otimes}}_{Y'} \end{array}$$

qui sont, bien entendu, liés par des relations que l'on peut sommairement exprimer par l'écriture des deux diagrammes fonctoriels commutatifs duaux :

$$\begin{tikzcd}
\hat{\otimes}_Y \arrow[rrr] \arrow[dr] \arrow[ddd] & & & L_{Y'} \arrow[dl] \\
& \hat{\otimes}_Z \arrow[r] \arrow[d] & L_{Z'} & \\
& L^1_{Z'} \arrow[r] & \hat{\hat{\otimes}}_Z \arrow[u] & \\
L^1_{Y'} \arrow[ur] \arrow[rrr] & & & \hat{\hat{\otimes}}_Y \arrow[ul] \arrow[uuu]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\bar{\otimes}_{Y'} \arrow[rrr] \arrow[ddd] & & & \mathcal{L}_Y \\
& \bar{\otimes}_{Z'} \arrow[ul] \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{L}_Z \arrow[ur] & \\
& \mathcal{L}^1_Z \arrow[dl] \arrow[r] & \bar{\bar{\otimes}}_{Z'} \arrow[u] \arrow[dr] & \\
\mathcal{L}^1_Y \arrow[rrr] & & & \bar{\bar{\otimes}}_{Y'} \arrow[uuu]
\end{tikzcd}$$

Retenons en particulier les égalités :

$$\Psi_u = (\hat{\Phi}_u)' \; ; \; \Psi^1_u = (\hat{\hat{\Phi}}_u)' \; ; \; \bar{\Psi}_u = (\Phi_u)' \; ; \; \bar{\bar{\Psi}}_u = (\Phi^1_u)' \; .$$

De ces diagrammes isolons les parties

$$\begin{tikzcd}
L^1_{Y'} \arrow[r, "\Phi^1_u"] \arrow[d] & L^1_{Z'} \arrow[d] \\
L_{Y'} \arrow[ur, dashed] \arrow[r, "\Phi_u"] & L_{Z'}
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
\mathcal{L}^1_Z \arrow[r, "\Psi^1_u"] \arrow[d] & \mathcal{L}^1_Y \arrow[d] \\
\mathcal{L}_Z \arrow[ur, dashed] \arrow[r, "\Psi_u"] & \mathcal{L}_Y
\end{tikzcd}$$

ce qui nous permet d'introduire les définitions :

(2.5.1) DEFINITIONS.

a) On dit que le morphisme u est nucléant lorsque le morphisme fonctoriel Φ_u se factorise à travers le foncteur $L^1_{Z'}$.

b) On dit que le morphisme u est intégrant lorsque le morphisme fonctoriel Ψ_u se factorise à travers le foncteur $\mathcal{L}^1_Y$.

Le morphisme u est donc nucléant lorsque, pour tout elc complet X_o, il définit un morphisme $L(X'_o,Y) \longrightarrow L^1(X'_o,Z)$. Il est intégrant lorsque, pour tout elc complet X_1, il définit un morphisme $\mathcal{L}(Z,X'_1) \longrightarrow \mathcal{L}^1(Y,X'_1)$.

$$X'_o \longrightarrow Y \xrightarrow{u} Z \longrightarrow X'_1$$

REMARQUES.

Rque 1. Il est clair que l'ensemble des morphismes nucléants (resp : intégrants) de Y dans Z est un espace vectoriel, mais

cet ev n'est muni ni d'une structure topologique, ni d'une structure compactologique, tout comme les ensembles de morphismes.

Rque 2. Ces définitions diffèrent assez profondément des définitions des applications nucléaires ou intégrales au sens de Grothendieck entre deux elc complets.

Rque 3. On pourrait de même définir des applications nucléantes et des applications intégrantes entre deux ecc réguliers, mais la lecture des diagrammes prouve qu'il suffit d'opérer par transposition. Nous préférons donc tout ramener aux elc complets.

Le recours aux limites projectives ou aux limites inductives (ainsi que l'intervention de la dualité) donne très rapidement la caractérisation :

(2.5.2) PROPOSITION. Les assertions suivantes sont équivalentes :

a) Le morphisme u : $Y \longrightarrow Z$ est nucléant.

b) Pour tout espace de Banach E et toute application $v \in L(E',Y)$, l'application uv : $E' \longrightarrow Z$ est nucléaire et l'application $v \longmapsto uv$ de $L(E',Y)$ dans $L^1(E',Z)$ est un morphisme.

c) Pour tout espace de Banach E, l'application $1_{E'} \otimes u'$ de $E' \otimes Z'$ dans $E' \otimes Y'$ se prolonge en un morphisme $E' \bar{\bar{\otimes}} Z' \longrightarrow E' \bar{\otimes} Y'$.

(2.5.3) PROPOSITION. Les assertions suivantes sont équivalentes :

a) Le morphisme u : $Y \longrightarrow Z$ est intégrant.

b) Pour tout espace de Banach E et toute application $w \in \mathcal{L}(Z,E')$, l'application wu : $Y \longrightarrow E'$ est intégrale et l'application $w \longmapsto wu$ de $\mathcal{L}(Z,E')$ dans $\mathcal{L}^1(Y,E')$ est un morphisme.

c) Pour tout espace de Banach E, l'application $1_E \otimes u$ de $E \otimes Y$ dans $E \otimes Z$ se prolonge en un morphisme $E \hat{\hat{\otimes}} Y \longrightarrow E \hat{\otimes} Z$.

La première question importante est sans doute de savoir s'il existe une réelle différence entre les notions de morphisme nucléant et de morphisme intégrant. Pour l'examiner partiellement, revenons sur la question d'approximation.

On dit qu'un elc complet Y a la propriété d'approximation (A) lorsque $\hat{\hat{\otimes}}_Y = L_{Y'}$, et qu'il a la propriété de biunivocité forte (B) lorsque $\hat{\otimes}_Y = L^1_{Y'}$. On dit que Y a la propriété de biunivocité faible (b) quand, pour tout elc complet X, le morphisme canonique $X\hat{\otimes}Y \longrightarrow L(Y',X)$ est injectif. Pour un espace de Banach les propriétés (A), (B) et (b) sont équivalentes. Pour un espace de Fréchet, Grothendieck a montré dans (G3) l'équivalence des propriétés (A) et (b). Dans le cas général on ignore quelles sont exactement les relations existant entre les propriétés (A) et (B). Toutefois il est facile de vérifier que tout elc complet Y admettant une base de voisinages $V \in \mathcal{V}(Y)$ tels que les espaces de Banach $\hat{Y}_V$ aient la propriété d'approximation, satisfait à la fois aux conditions (A) et (B). En fait le problème principal reste ouvert, puisqu'on ne connaît aucun exemple d'elc complet ne satisfaisant pas à la fois aux conditions (A) et (B). Cela étant :

(2.5.4) THEOREME.

a) Si Z vérifie la condition de biunivocité forte (B), alors tout morphisme nucléant $u : Y \longrightarrow Z$ est intégrant.
b) Si Y vérifie la condition d'approximation (A), alors tout morphisme intégrant $u : Y \longrightarrow Z$ est nucléant.

PREUVE. Elle se fait avec chacun des deux diagrammes

(a)

$$\begin{tikzcd} & L^1_{Y'} \arrow[r] \arrow[d] & L^1_{Z'} = \hat{\otimes}_Z \arrow[d] \\ \hat{\otimes}_Y \arrow[r] & L_{Y'} \arrow[r] \arrow[ur, dashed] & L_{Z'} \end{tikzcd}$$

(b)

$$\begin{tikzcd} \hat{\otimes}_Y \arrow[r] \arrow[d] & \hat{\otimes}_Z \arrow[r] \arrow[d] & L^1_{Z'} \\ L_{Y'} = \hat{\hat{\otimes}}_Y \arrow[r] \arrow[ur, dashed] & \hat{\hat{\otimes}}_Z & \end{tikzcd}$$

. ∎

REMARQUE. Ainsi, si l'hypothèse de Banach se vérifie, selon laquelle tout espace de Banach (ou tout elc complet) a la propriété d'approximation, donc aussi la propriété de biunivocité forte, alors il y a identité entre applications nucléantes et applications intégrantes. Ceci montre que, dans l'état actuel des choses, il est "pratiquement" impossible de mettre en évidence un morphisme intégrant (resp : nucléant) qui ne soit pas nucléant (resp : intégrant).

Invariance par morphismes. De façon à peu près évidente on a :

(2.5.5) PROPOSITION. Soit $u : Y \longrightarrow Z$ une application nucléante (resp : intégrante). Si $v : Y_\circ \longrightarrow Y$ et $w : Z \longrightarrow Z_\circ$ sont des morphismes, l'application $wuv : Y_\circ \longrightarrow Z_\circ$ est nucléante (resp : intégrante).

Les théorèmes de liaison. Ils vont généraliser les théorèmes (1.7.8) et (1.7.11) relatifs aux espaces de Banach .

(2.5.6) THEOREME. Soient $v : X' \longrightarrow Z$ une application nucléaire et $w : Y \longrightarrow X'$ une application élément de $\mathcal{L}(Y,X')$. Alors l'application $u=vw : Y \longrightarrow Z$ est intégrante.

PREUVE. Elle consiste à se ramener aux espaces de Banach, c'est-à-dire à (1.7.8). Il s'agit de prouver que pour tout espace de Banach H, l'application $s \longrightarrow svw$ est un morphisme de $\mathcal{L}(Z,H')$ dans $\mathcal{L}^1(Y,H')$.

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "w"] \arrow[d] & X' \arrow[r, "v"] & Z \arrow[r, "s"] \arrow[d, "p"] & H' \\ \hat{Y}_V \arrow[r, "\bar{w}"] & X'_{U^\circ} \arrow[u, "q"] \arrow[r, "\bar{v}"] & \hat{Z}_W \arrow[ur, "\bar{s}"] & \end{tikzcd}$$

La définition de $\mathcal{L}(Z,H')$ comme limite inductive montre déjà qu'il suffit de prouver que, pour tout $W \in \mathcal{V}(Z)$, l'application $\bar{s} \longrightarrow \bar{s}pvw$ est un morphisme de $\mathcal{L}(\hat{Z}_W,H')$ dans $\mathcal{L}^1(Y,H')$, autrement dit que l'application $pvw : Y \longrightarrow \hat{Z}_W$ est intégrante. Or on sait qu'il existe $U \in \mathcal{V}(X)$ et $V \in \mathcal{V}(Y)$ tels que l'application w se factorise à travers une application $\bar{w} : \hat{Y}_V \longrightarrow X'_{U^\circ}$ appartenant à $\mathcal{L}(\hat{Y}_V, X'_{U^\circ})$. Il suffit donc de prouver que l'application $\bar{v}\bar{w}=pvq\bar{w}$ est intégrante, ce qui ramène bien aux espaces de Banach, puisque $\bar{v}$ est nucléaire, de sorte que le théorème est une conséquence de (1.7.8). ∎

(2.5.7) THEOREME. Soient $w : Y \longrightarrow X'$ une application intégrale et $v : X' \longrightarrow Z$ une application élément de $L(X',Z)$. Alors l'application $u=vw : Y \longrightarrow Z$ est nucléante.

PREUVE. Elle consiste encore à se ramener aux espaces de Banach, donc à (1.7.11). Il s'agit de prouver que, pour tout espace de Banach H, l'application $s \longrightarrow vws$ est un morphisme de $L(H',Y)$ dans $L^1(H',Z)$.

$$\begin{tikzcd} H' \arrow[r, "s"] & Y \arrow[r, "w"] \arrow[d] & X' \arrow[r, "v"] & Z \arrow[d, "p"] \\ & \hat{Y}_V \arrow[r, "\bar{w}"] & X'_{U^\circ} \arrow[u, "q"] \arrow[r, "\bar{v}"] & \hat{Z}_W \end{tikzcd}$$

La définition de $L^1(H',Z)$ comme limite projective montre déjà qu'il suffit de prouver que, pour tout $W \in \mathcal{V}(Z)$, l'application $s \longrightarrow pvws$ est un morphisme de $L(H',Y)$ dans $L^1(H',\hat{Z}_W)$, autrement dit que l'application $pvw : Y \longrightarrow \hat{Z}_W$ est nucléante. Or on sait qu'il existe $U \in \mathcal{V}(X)$ et $V \in \mathcal{V}(Y)$ tels que l'application w se factorise à travers une application intégrale $\bar{w} : \hat{Y}_V \longrightarrow X'_{U^\circ}$. Il suffit donc de prouver que l'application $\bar{v}\bar{w}=pvq\bar{w}$ est nucléante, ce qui ramène bien aux espaces de Banach puisque $\bar{v}=pvq\in L(Y'_{U^\circ},\hat{Z}_W)$. ∎

Application aux espaces nucléaires. L'elc complet Y est nucléaire lorsque $\hat{\otimes}_Y=\hat{\hat{\otimes}}_Y$. Il est immédiat que cela implique aussi l'égalité $L^1_{Y'}=\hat{\otimes}_Y$; et puisqu'on sait que tout espace nucléaire a la propriété d'approximation, on voit qu'un espace nucléaire Y rend égaux les quatre foncteurs $\hat{\otimes}_Y$, $\hat{\hat{\otimes}}_Y$, $L^1_{Y'}$, et $L_{Y'}$.

Le rapport de la nucléarité avec les notions d'application intégrante et d'application nucléante est extrêmement simple et clair.

(2.5.8) THEOREME. Soit Y un elc complet. Les assertions suivantes sont équivalentes :

a) Y est un espace nucléaire.

b) L'application identique 1_Y est intégrante.

c) L'application identique 1_Y est nucléante.

d) Pour tout espace de Banach F, tout morphisme $u : Y \longrightarrow F$ est intégrant.

e) Pour tout espace de Banach F, tout morphisme $u : Y \longrightarrow F$ est nucléant.

f) On a l'égalité topologique $\ell^1\hat{\hat{\otimes}}Y = \ell^1\hat{\otimes}Y$.

PREUVE. Compte tenu d'un théorème de Pietsch, elle se fait selon le schéma logique

$$\begin{tikzcd} & & f \arrow[dd, Rightarrow] & & \\ d \arrow[r, Leftrightarrow] & b \arrow[ur, Rightarrow] & & c \arrow[ul, Rightarrow] \arrow[r, Leftrightarrow] & e \\ & & a \arrow[ul, Rightarrow] \arrow[ur, Rightarrow] & & \end{tikzcd}$$

a ⟹ b et a ⟹ c. Ces deux implications proviennent immédiatement de l'égalité des quatre foncteurs "en Y" rappelée plus haut lorsque Y est nucléaire.

b ⟺ d. Il suffit de prouver d ⟹ b. Cela vient du fait que, pour tout espace de Banach E, toute application $v\in\mathcal{L}(Y,E')$ se factorise à travers un espace de Banach $\hat{Y}_V$ en une application $\bar{v}\in\mathcal{L}(\hat{Y}_V,E')$.

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "1_Y"] \arrow[dr] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d] & E' \\ & \hat{Y}_V \arrow[ur, "\bar{v}"'] & \end{tikzcd}$$

c ⟺ e. Il suffit de prouver e ⟹ c. Or dire que, pour tout espace de Banach E, l'application $v \longmapsto v$ est un morphisme de $L(E',Y)$ dans $L^1(E',Y)$, c'est dire, grâce à la définition de $L^1(E',Y)$ comme limite projective, que pour tout $V\in\mathcal{V}(Y)$ l'application $v\longmapsto\bar{v}$ est un morphisme de $L(E',Y)$ dans $L^1(E',\hat{Y}_V)$. Cette remarque nous ramène donc à l'assertion e.

$$\begin{tikzcd} E' \arrow[r, "v"] \arrow[drr, "\bar{v}"'] & Y \arrow[r, "1_Y"] & Y \arrow[d] \\ & & \hat{Y}_V \end{tikzcd}$$

b ⟹ f et c ⟹ f. On sait que ℓ^1 a la propriété d'approximation. Il est donc clair, en utilisant les limites projectives, que $L^1(Y',\ell^1)=\ell^1\hat{\hat{\otimes}}Y$ et $L(Y',\ell^1)=\ell^1\hat{\otimes}Y$. Alors l'assertion b implique directement l'égalité $\ell^1\hat{\otimes}Y=\ell^1\hat{\hat{\otimes}}Y$ et l'assertion c implique l'égalité $L^1(Y',\ell^1)=L(Y',\ell^1)$, ce qui est la même chose.

f ⟹ a. C'est précisément là le théorème de Pietsch (Pl : Satz 18). ∎

BIBLIOGRAPHIE.

(A1) R.ARENS : A topology for spaces of transformations. Ann. of Math. 47 (1946) p.480-495.

(B1) N.BOURBAKI : Algèbre. Chap.2 Algèbre linéaire. 3ème éd. (1962) Hermann. Paris.

(B2) N.BOURBAKI : Topologie générale. Chap.1-2. 3ème éd. (1961).

(B3) N.BOURBAKI : Topologie générale. Chap.3. 3ème éd. (1960).

(B4) N.BOURBAKI : Topologie générale. Chap.9. 2ème éd. (1958).

(B5) N.BOURBAKI : Topologie générale. Chap.10. 2ème éd. (1961).

(B6) R.M.BROOKS : On locally m-convex ∗-algebras. Pacific J. Math. 23 n°1 (1967) p.5-23.

(B7) H.BUCHWALTER : Espaces vectoriels bornologiques. Publ. Dép. Math. Lyon 2-1 (1965) p.2-53.

(B8) H.BUCHWALTER : Espaces de Banach et dualité. Publ. Dép. Math. Lyon 3-2 (1966) p.2-61.

(F1) C.FOIAS-G.MARINESCU : Sur le prolongement des fonctionnelles linéaires dans les espaces vectoriels pseudo-topologiques. CRAS 254 (1962) p.2274-2276.

(G1) L.GILLMAN-M.JERISON : Ring of continuous functions. (1960). Van Nostrand. Princeton, New Jersey.

(G2) A.GROTHENDIECK : Espaces vectoriels topologiques. 3ème éd. Publ. Soc. Mat. Sao Paulo (1964).

(G3) A.GROTHENDIECK : Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires. Mem. Amer. Math. Soc. 16 (1955).

(G4) A.GROTHENDIECK : Sur les espaces (F) et (DF). Sum. Brasil. Math. 3-6 (1954).

(H1) E.HEWITT : Ring of real-valued continuous functions I. Trans. Amer. Math. Soc. 64 (1948) p.54-99.

(K1) J.L.KELLEY : General topology. (1955). Van Nostrand. Princeton, New Jersey.

(K2) J.L.KELLEY-I.NAMIOKA-and co : Linear topological spaces. (1963). Van Nostrand. Princeton, New Jersey.

(K3) Y.KŌMURA : Some examples on linear topological spaces. Math. Annalen 153 (1964) p.150-162.

(K4) G.KÖTHE : Topologische lineare Räume I. (1960). Springer. Berlin.

(K5) G.KÖTHE : Caractérisation des espaces bornologiques. Colloque sur l'analyse fonctionnelle. (1961). Gauthier-Villars. Paris.

(M1) G.MARINESCU : Espaces vectoriels pseudo-topologiques et théorie des distributions. (1963). Deutscher. Berlin.

(M2) E.MICHAEL : Locally multiplicatively-convex topological algebras. Mem. Amer. Math. Soc. 11 (1952).

(M3) B.MITCHELL : Theory of categories. (1965). Academic Press. New York.

(N1) L.NACHBIN : Topological vector spaces of continuous functions. Proc. Nat. Ac. Sc. USA 40 (1954) p.471-474.

(P1) A.PIETSCH : Eine neue Charakterisierung der nuklearen lokalkonvexen Räume I und II. Math.Nachr. 25 (1963) p.31-36 und 49-58.

(P2) P.PERRIER-A.ROUX : Séminaire de topologie générale. Dép. Math. Fac. Sc. Lyon (1967-1968).

(R1) A.ROBERT : Quelques questions d'espaces vectoriels topologiques. Comment. Math. Helvet. 42 4 (1967) p.314-342.

(R2) W.ROBERTSON : Completions of topological vector spaces. Proc. London Math. Soc. 30 8 (1958) p.242-257.

(S1) R.SCHATTEN : A theory of cross-spaces. (1950). Princeton Univ. Press.

(S2) T.SHIROTA : A class of topological spaces. Osaka Math. J. 4 (1952) p.23-40.

(S3) T.SHIROTA : On locally convex vector spaces of continuous functions. Proc. Jap. Ac. 30 (1954) p.294-298.

(S4) A.H.STONE : Paracompactness and product spaces. Bull. Amer. Math. Soc. 54 (1948) p.977-982.

(W1) L.WAELBROECK : Le complété et le dual d'un espace à bornés convexes. CRAS 253 (1961) p.2827-2828.

(W2) L.WAELBROECK : Compacité et dualité en analyse linéaire. Publ. Dép. Math. Lyon 2-1 (1965) p.72-92.

(W3) L.WAELBROECK : Some theorems about bounded structures. J. Funct. Anal. 1 4 (1967) p.392-408.

(W4) L.WAELBROECK : Duality and the injective tensor product. Math. Annalen 163 (1966) p.122-125.

(W5) S.WARNER : The topology of compact convergence on continuous functions spaces. Duke Math. J. 25 (1958) p.265-282.

§§§§§§