THÉORÈME 27. — (*a*) *Si* K *est l'hypergroupe d'associativité d'un quasi-groupe, il existe sur* K *des sélections de groupe.*

(*b*) *Si* K *est l'hypergroupe d'associativité d'un hypergroupe, une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe sur* K *une sélection de groupe est que les complexes* $U_K \star x$ *soient équipotents.*

Démonstration. — Elle découle des deux lemmes précédents, du fait que pour tout $x \in K$, on a $U_K \star x = \varphi_K^{-1}\varphi_K(x)$, et du fait déjà remarqué, que si K est l'hypergroupe d'associativité d'un quasi-groupe, les complexes $U_K \star x$ sont équipotents.

C. Q. F. D.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] T. S. BLYTH, *Contribution à la théorie de la résiduation dans les structures algébriques ordonnées* (*Thèse*, Soc. Math., Paris, 1963).
[2] R. DESQ, *Étude de quelques relations d'équivalence dans un demi-groupe* D (*Séminaire Dubreil-Pisot, Algèbre et Théorie des nombres*, t. 15, 1961-1962, n° 11).
[3] P. DUBREIL, *Contribution à la théorie des demi-groupes*, Gauthier-Villars, Paris, 1941; *Mém. Acad. Sc. Inst. France*, t. 63, p. 1-52.
[4] P. DUBREIL, *Remarques sur les théorèmes d'isomorphismes* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 215, 1942, p. 239-241).
[5] M. L. DUBREIL-JACOTIN, *Images homomorphes d'un demi-groupe ordonné* (*Bull. Soc. Math. France*, t. 92, 1964.
[6] M. DRESHER et O. ORE, *Theory of multigroups* (*Amer. J. Math.*, t. 60, 1938, p. 705-733).
[7] M. KOSKAS, *Structures algébriques multivoques. Applications* (*Thèse*, Soc. Math., Paris, 1967).
[8] M. KRASNER, *La loi de Jordan-Hölder dans les hypergroupes et les suites génératrices des corps de nombres p-adiques* (*Duke Math. J.*, t. 6, 1940).
[9] J. KUNTZMAN, *Opérations multiformes. Hypergroupes.* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 204, 1937, p. 1787-1788).
10] P. LEFEBVRE, *Sur certaines conditions minimales en théorie des demi-groupes* (*Annali di Mat.*, 4e série, t. 59, 1962, p. 77-163; *Thèse*, Soc. Math., Paris, 1962.
11] F. MARTY, *Sur une généralisation de la notion de groupe*, VIIIe Congrès des Mathématiciens scandinaves, Stockholm, 1934.
[2] O. ORE, *Duke Math. J.*, t. 3, 1937, p. 149-174.
[3] G. THIERRIN, *Contribution à la théorie des équivalences dans les demi-groupes* (*Bull. Soc. Math. France*, t. 83, 1955, p. 103-159; *Thèse*, Soc. Math., Paris, 1954).

(Manuscrit reçu le 9 juillet 1969.)

J. Math. pures et appl., 49, 1970, p. 193 à 288.

COMPLÉTION, TENSEURS ET NUCLÉARITÉ EN BORNOLOGIE

PAR HENRI **HOGBE-NLEND.**

A GEORGES MACKEY
et
LUCIEN WAELBROECK,
Fondateur et Rénovateur de la Bornologie !

TABLE DES MATIÈRES.

DEUXIÈME PARTIE.

Produits tensoriels bornologiques d'espaces bornologiques.

CHAPITRE I.

Théorie générale des bornologies dans les espaces fonctionnels : σ-bornologies.

CHAPITRE II.

Produits tensoriels bornologiques d'espaces bornologiques

TROISIÈME PARTIE.

Bornologie nucléaire.

INTRODUCTION GÉNÉRALE.

1. OBJET DU TRAVAIL. REMERCIEMENTS. — L'objet du présent travail est de résoudre un certain nombre de problèmes, dont certains sont demeurés jusqu'ici ouverts, relatifs aux structures bornologiques. Le travail est divisé en trois grandes parties coiffées d'une « Note historique ».

Dans la première partie, nous développons une théorie générale de la complétion en bornologie, en commençant par donner une solution constructive complète et générale au problème de complétion des espaces bornologiques posé il y a neuf ans par M. L. Waelbroeck [54]. Dans la seconde partie, nous résolvons le problème général du produit tensoriel bornologique d'espaces bornologiques dans l'esprit de Grothendieck [16]. Dans la troisième partie, nous traitons de la nucléarité sous le point de vue bornologique et résolvons le problème de la caractérisation en termes de structure du dual d'espace nucléaire. Nous renvoyons aux introductions particulières de chacune de ces parties pour la substance de leur contenu. La « Note historique » fixe et explique le cadre philosophico-historique général du présent Mémoire et répond notamment aux questions relatives à la genèse, au développement, aux applications et aux perspectives de la bornologie dans le cadre de l'Analyse fonctionnelle moderne. Nous livrons à la fin de ce travail le fruit de nos recherches bibliographiques.

Il m'est particulièrement agréable de remercier ici M. le Professeur J. Colmez, Président du Département de Mathématiques de Bordeaux qui, en dépit de ses lourdes charges administratives, a dirigé avec une conscience exemplaire mes travaux de recherche pour la préparation de ce Mémoire. Je lui suis infiniment reconnaissant.

Je remercie vivement M. le Professeur J. Riss qui n'a cessé de s'intéresser au développement de mes travaux et a accepté de présider le Jury devant lequel je soumets cette Thèse.

Je remercie vivement M. le Professeur L. Schwartz de l'Université de Paris d'avoir accepté de venir à Bordeaux pour la soutenance de cette Thèse.

Je témoigne une gratitude toute particulière à M. le Professeur L. Waelbroeck, de l'Université de Bruxelles, qui m'a invité à deux reprises à Bruxelles, m'a consacré de nombreuses heures de discussions sur le contenu du présent travail et m'a fait des suggestions me permettant d'améliorer la présentation de certains de mes résultats. Je le remercie aussi d'avoir accepté de venir à Bordeaux pour la soutenance de cette Thèse.

Je remercie M. J. Martinet de m'avoir donné un second sujet particulièrement intéressant, de m'avoir aidé dans la préparation de ce sujet et d'avoir accepté de participer au Jury.

Enfin mes vifs remerciements vont au Personnel du Département de Mathématiques, et plus particulièrement à M^lle^ Odette Mitoyen, qui a réalisé avec compétence et dévouement la tâche de dactylographie de cette Thèse.

2. Notations et terminologie générales. — De façon générale, nous suivons sans référence spéciale les résultats classiques, conventions et terminologie usuels du traité de Bourbaki en ce qui concerne notamment la théorie des ensembles

et la théorie des espaces vectoriels topologiques; ceux de A. Grothendieck [16] en ce qui concerne la théorie des produits tensoriels topologiques et des espaces nucléaires et ceux de H. Buchwalter [9] en ce qui concerne la théorie des espaces vectoriels bornologiques.

Toutefois nous nous écarterons de la terminologie de Bourbaki sur les points suivants : Pour nous, comme pour L. Schwartz [45] un *espace ultra-bornologique* est un espace localement convexe (elc) limite inductive d'espaces de Banach, autrement dit un espace de type β au sens de Grothendieck [16]. Un elc sera dit *semi-Montel* si tout borné est relativement compact, autrement dit un espace de type (M) au sens de Grothendieck. Nous appelons *bornivore* une partie absorbant les bornés; un disque est un ensemble convexe équilibré *non nécessairement fermé;* l'enveloppe disquée d'une partie A est son enveloppe convexe équilibrée et est notée $\overline{|}A$. Un espace *semi-bornologique* est un elc sur lequel toute forme linéaire bornée est continue. Ce sont donc les « boundedly closed spaces » de Mackey. Un elc est bornologique si et seulement si il est semi-bornologique et de Mackey (c'est-à-dire sa topologie initiale coïncide avec la topologie de Mackey). La relation d'ordre de finesse sur les topologies localement convexes sur un espace vectoriel E sera notée $\leqq$ (moins fine que). Tous les elc donnés *a priori* sont supposés séparés.

Nous nous écarterons de la terminologie de H. Buchwalter sur les points suivants : Nous appelons *espace bornologique*, ce qu'il appelle « espace vectoriel bornologique convexe » mais gardons la même abréviation « ebc ». Les « espaces bornologiques » de Buchwalter seront appelés par nous *ensembles bornologiques*. Autrement dit, nos ensembles bornologiques sont les « ensembles à bornés » de Waelbroeck et nos espaces bornologiques séparés les « espaces à bornés » du même auteur [53]. Rappelons à toutes fins utiles que tout ensemble bornologique peut être isomorphiquement plongé dans un espace bornologique ([53], p. 24). Nous appellerons *bornologie de caractère dénombrable* ou *bornologie de Kormogoroff* [*voir* « Note historique »] une bornologie vérifiant l'axiome (D) de Buchwalter, c'est-à-dire pour laquelle une partie A est bornée si et seulement si toute partie dénombrable de A est bornée. Nous appellerons *suite de Cauchy-Mackey* [*voir* « Note historique »] toute suite de Cauchy au sens de la convergence de Mackey. Nous dirons qu'un ebc est *complet au sens de Mackey* pour dire qu'il est « presque-complet » au sens de Buchwalter [*voir* « Note historique »]. Nous noterons Hom (E, F) l'espace des applications linéaires bornées d'un ebc E dans un ebc F et par $\mathcal{L}(E, F)$ l'espace des applications linéaires continues d'un elc E dans un elc F. La bornologie BTE où E est un ebc sera appelée la *bornologie affaiblie* de E; c'est en effet la bornologie de E associée à la topologie affaiblie $\sigma(E, E^*)$ où E^* est le dual bornologique de E. Sur le dual bornologique E^* nous ne considérons *a priori* aucune topologie contrairement à H. Buchwalter. La relation de finesse sur les bornologies convexes sur un espace vectoriel est notée $\preceq$ (moins fine que).

Les conventions générales ci-dessus sont complétées dans les introductions particulières de chacune des trois parties du présent Mémoire.

NOTE HISTORIQUE.

GENÈSE, DÉVELOPPEMENT ET PERSPECTIVES DE LA BORNOLOGIE DANS LE CADRE DE L'ANALYSE FONCTIONNELLE MODERNE.

Nous nous proposons dans cette introduction de tracer et d'expliquer le cadre philosophico-historique général du présent Mémoire en répondant préalablement aux questions suivantes : Qu'est-ce que la bornologie ? Comment est-elle née et s'est développée ? Quelle est sa raison d'être, quel rôle joue-t-elle, quelles sont ses applications et ses perspectives d'avenir dans le cadre de l'Analyse fonctionnelle moderne ?

1° Le concept classique d'*espace bornologique* connu dans la théorie des espaces vectoriels topologiques a son origine dans le phénomène bien connu suivant. Étant donné un espace normé E, la famille de tous les bornés de E au sens de la norme caractérise la topologie de l'espace. Il existe donc une relation des plus intimes entre la topologie de E et sa « bornologie » (ensemble de ses parties bornées). Si l'on convient d'appeler « topologie » la théorie des structures définies par des « voisinages » et par « bornologie » la théorie des structures définies par « des bornés », on peut alors dire qu'au niveau des espaces normés, topologie et bornologie sont identiques. Cette situation de « confusion », on le sait, cesse de s'imposer au niveau des espaces vectoriels topologiques généraux. Partant de la bornologie d'un elc (espace localement convexe) séparé, deux voies peuvent être empruntées pour tenter de reconstruire la topologie de l'espace. La première, une voie *interne*, consiste à considérer la topologie sur E dont un système fondamental de voisinages de (o) est constitué par les disques bornivores de E. La seconde, une voie *externe* consiste à considérer l'espace E^* des formes linéaires bornées sur E en dualité séparante avec E et à considérer la topologie de Mackey relative à cette dualité. On constate alors que ces deux voies conduisent à une seule et même topologie T_0 sur E en général *strictement* plus fine que la topologie initiale de E. Cette topologie, qui a pour caractéristique essentielle d'être engendrée par une bornologie est dite *topologie bornologique* et les elc pour lesquels $T = T_0$ sont précisément les elc bornologiques, espaces qui ne sont en dernière analyse que les limites inductives (localement convexes) d'espaces normés et qui furent pour la première fois étudiés de façon systématique par G. Mackey [30], N. Bourbaki [8], Donoghue et Smith [13]. *Le concept moderne d'espace bornologique* est une généralisation dans un certain sens des elc bornologiques, généralisation fondée sur la notion d'ensemble borné.

2° La notion d'ensemble *borné* fut introduite dans les espaces vectoriels topologiques vers 1935 par Kolmogoroff et von Neumann [36]. Le premier, généralisant une idée de Banach, Mazur et Orlicz, posa la définition suivante : Un ensemble B, d'un espace vectoriel topologique est dit borné si pour toute suite (x_n) de points de B et toute suite (λ_n) de nombres réels tendant vers (o) la suite $(\lambda_n x_n)$ tend vers (o). Le second définissait un borné de E comme un ensemble absorbé par tout voisinage de (o). Il est classique depuis 1937 (*voir* Wehaussen [60]) que ces deux définitions sont équivalentes. C'est dans la thèse doctorale de G. Mackey (1942) [30] et [31] que fut mise en lumière pour la première fois de façon décisive l'importance fondamentale de la notion d'ensemble borné dans la théorie des espaces localement convexes. Dans [30], Mackey introduisit la notion de convergence connue aujourd'hui sous le nom de *convergence bornologique* ou *convergence locale au sens de Mackey;* il introduisit la notion de clôture bornologique et de « boundedly closed space » espace localement convexe dans lequel toute forme linéaire bornée est continue; il étudia en détail la notion de convergence bornologique, notamment les notions d'adhérence, de fermeture, de suite de Cauchy, de complétion qui en découlent, établit la liaison entre le problème de la mesure abstraite de Ulam et celui du produit transfini d'elc bornologiques. Au chapitre V de [30], Mackey attaqua une théorie systématique des ensembles bornés et des « bornologies » (« boundedness »), introduisit et étudia cinq (5) types de bornologies dont notamment : la *bornologie simple,* bornologie engendrée par les homothétiques d'un borné A (par exemple bornologie d'espace normé), la bornologie vérifiant le second *axiome de dénombrabilité,* c'est-à-dire à base dénombrable (exemple : bornologie d'espace DF) et la bornologie vérifiant le *premier axiome de dénombrabilité,* c'est-à-dire la propriété suivante : Pour toute suite (A_n) de bornés de E, il existe une suite (λ_n) de nombres réels positifs telle que $\bigcup \lambda_n A_n$ soit encore bornée (exemple : bornologie d'espace métrisable). Au chapitre VI, il entama l'étude des bornologies dans les espaces fonctionnels (« uniform boundedness ») et dans [31] appliqua ses théories bornologiques à l'étude de la dualité dans les espaces vectoriels topologiques. On peut conclure que sous l'impulsion de Mackey, la bornologie naquit et se développa dans sa *première phase* d'une part comme une théorie *a priori* « indépendante » de toute topologie, d'autre part comme principal moteur et instrument de la théorie des espaces vectoriels topologiques.

Après les travaux de Mackey, la bornologie s'engagea dans la *seconde phase* de son développement essentiellement caractérisée par le développement de la notion d'ensemble borné comme *instrument* pour la théorie des espaces vectoriels topologiques. Dans cette seconde étape, la bornologie en tant que théorie « indépendante » est pratiquement ignorée.

Ces deux dernières décennies, le développement triomphal de la théorie des espaces vectoriels topologiques et des structures qui lui sont intimement liées, a créé de nouvelles conditions pour un retour à la bornologie en tant que science, ouvrant ainsi la *troisième phase* du développement de la bornologie depuis 1935.

En 1951, puis en 1954, G. T. Roberts [38] et d'autres auteurs de l'école anglaise, dans leurs travaux sur les espaces vectoriels topologiques ordonnés, furent amenés à l'étude des topologies définies par une famille de parties dites « bornées » d'un espace vectoriel vérifiant un système d'axiomes strictement identique au système moderne d'axiomes de définitions des « espaces à bornés » ou « espaces bornologiques » (*voir* [9], [53], [54]). Ce travail eut pour notivation, une généralisation des topologies définies par les bornés au sens de l'ordre. Cette étude axiomatique conduisit comme il advient fréquemment en pareil cas à une conception plus claire de ces dernières topologies. Aux environs de 1960, M. L. Waelbroeck [53] de l'école belge, dans ses travaux sur la théorie spectrale des algèbres complètes constata qu'en dernière analyse, ce qui jouait un rôle essentiel dans sa théorie, c'était la notion de partie bornée et non de voisinage; il introduisit et étudia les « espaces à bornés » [53] et plus tard, les « *b*-espaces » et les « *b*-algèbres » [56]. De son côté, J. S. E. Silva [48] de l'école portugaise, en recherchant à développer une théorie suffisamment riche du Calcul différentiel dans les espaces vectoriels topologiques, fut amené à souligner que ce n'est pas la topologie qui est appelée à jouer un rôle fondamental dans cette question mais plutôt la bornologie. Cette importante thèse est pleinement confirmée par de nombreux, récents et importants travaux de mathématiciens de divers pays. Toujours aux environs de 1959, J. Mikusinski [34] de l'école polonaise, en recherchant à généraliser la théorie de Wloka des distributions opérationnelles (distributions à valeurs dans le corps opérationnel de Mikusinski) théorie qui échappait à la théorie des distributions vectorielles de L. Schwartz [45] (dans la mesure où le corps pseudo-topologique de Mikusinski n'est *a priori* muni d'aucune structure vectorielle topologique d'elc séparé et quasi-complet) fut amené à introduire et étudier les « réunions d'espaces de Banach », espaces qui sont catégoriquement équivalents aux espaces bornologiques complets. D'autres auteurs, notamment Foias et Marinescu de l'école roumaine ([14] et [33]) ont créé des structures « d'espaces polynormés » étroitement liées à la notion d'ensemble borné. Certains mathématiciens de l'école soviétique notamment Makarov [32] ont fait une étude systématique des limites inductives (localement convexes) d'espaces normés, c'est-à-dire des topologies TE où E est un espace bornologique. D'autres mathématiciens soviétiques, notamment Berezanski [2] d'une part et l'école japonaise avec H. Nakano et T. Shibata [49] d'autre part, se sont distingués dans la théorie de la « réflexivité bornologique ».... Un premier pas particulièrement élégant vers une vue catégorielle et synthétique de la bornologie a été fait en 1965 par le mathématicien français H. Buchwalter [9] dans l'esprit bien connu de N. Bourbaki.

3° Tous ces récents et importants travaux de mathématiciens de divers pays montrent qu'une importante question est à l'ordre du jour : *la théorie des structures bornologiques.* La théorie des espaces vectoriels topologiques est née de la bornologie et s'est développée sur la base de la bornologie. Aujourd'hui, il me semble à la lumière de mes travaux et de ceux de divers auteurs, qu'au stade actuel du développement de l'Analyse fonctionnelle, *le point de vue bornologique peut et doit être systématisé avec intérêt :* *a.* Tout d'abord le point de vue bornologique offre un cadre nouveau pour une reformulation claire, simple et naturelle, premier pas vers de sérieuses généralisations, de plusieurs importants résultats de l'Analyse fonctionnelle et plusieurs aspects de la théorie des espaces vectoriels topologiques. Exemples : G. T. Roberts [37] a démontré en partant du point de vue bornologique que l'important théorème de Banach-Dieudonné n'est qu'un cas particulier d'un théorème beaucoup plus général établi pour les espaces bornologiques. Il en est de même de principaux corollaires de ce théorème, notamment du théorème de Krein-Smulian caractérisant les convexes fermés du dual d'un espace de Fréchet. J. D. Weston [62] a montré que la théorie de l'intégration des fonctions vectorielles à support compact de Bourbaki se réduit en fait à la théorie des fonctions à valeurs dans le dual faible d'un espace de Banach. La théorie de Bourbaki pourrait donc être un cas particulier d'une théorie beaucoup plus générale de l'intégration des fonctions à valeurs dans un espace bornologique, à « bornologie compacte » (dans un sens à préciser) par exemple les espaces « farfelogiques » ou « cb-espaces » de Waelbroeck. Dans la même direction, M. L. Waelbroeck [57] a montré que la théorie de l'intégration des fonctions ultra-continues à valeurs dans un espace vectoriel topologique non localement convexe esquissée par Etter en 1965 s'insère dans le cadre plus général ci-dessus. Relevons aussi suivant [58] que la notion de différentiabilité C^∞ d'une fonction définie sur une variété à valeurs dans un espace localement convexe E ne dépend que de la bornologie de E. Enfin nous montrerons, dans le présent Mémoire, que les structures bornologiques constituent le cadre naturel de plusieurs importants aspects de la théorie des produits tensoriels topologiques de Grothendieck et de la théorie de Fredholm. *b.* Ensuite, comme l'ont montré Waelbroeck et Mikusinski, les structures bornologiques s'introduisent immédiatement dans certaines structures algébriques où aucune structure topologique ne semble pouvoir être définie de façon naturelle et intéressante. *c.* Enfin les structures vectorielles topologiques se sont dans une certaine mesure révélées inadaptées pour la solution de certains grands problèmes qui se posent à l'Analyse fonctionnelle moderne, par exemple, le problème de la différentiation dans les espaces vectoriels topologiques, alors que, comme l'ont montré Silva et d'autres auteurs, les structures bornologiques semblent mieux adaptées pour ce genre de problèmes. Tout cela paraît naturel dès qu'on analyse les choses du point de vue historique. L'Analyse fonctionnelle moderne part essentiellement du célèbre traité de Banach [1] sur les « opérations linéaires », c'est-à-dire de la théorie des espaces normés. La notion de norme est une notion algébrique et non topologique. Une norme engendre une topologie et une bornologie et on sait qu'au niveau des espaces de Banach, point de vue topologique et point de vue bornologique conduisent aux mêmes résultats, mais il n'en demeure pas moins que c'est là deux points de vue distincts. Le développement de l'Analyse fonctionnelle à partir des espaces normés peut donc se faire soit en partant du point de vue « voisinage de o » et alors on est conduit à la théorie des espaces localement convexes, c'est-à-dire des *limites projectives* (localement convexes) d'*espaces semi-normés*, soit en partant du point de vue « ensemble borné » et on est alors conduit à la théorie des ebc, c'est-à-dire des *limites inductives* (bornologiques) d'*espaces semi-normés*. Ainsi, à chaque type de problème correspond nécessairement un type approprié de structure, il est alors naturel que la topologie puisse échouer là où la bornologie réussit et inversement. Aucun des deux points de vue ci-dessus ne peut *a priori* être sous-estimé. Bornologie et topologie vectorielle sont deux aspects distincts et *complémentaires* d'une seule et même réalité.

4° Jusqu'à ce jour, seul le point de vue « voisinage de (o) » a été largement développé. Aujourd'hui, les conditions de l'épanouissement intégral du point de vue bornologique sont réunies et l'une des tâches centrales de l'heure est de le développer de façon intéressante et systématique. *En un mot, il semble utile de développer de façon extensive une importante aile de l'Analyse fonctionnelle moderne ayant pour base la notion d'ensemble borné.* C'est dans le cadre des premiers efforts pour l'accomplissement de cette tâche que nous plaçons le présent Mémoire.

PREMIÈRE PARTIE.

THÉORIE GÉNÉRALE DE LA COMPLÉTION BORNOLOGIQUE DES ESPACES BORNOLOGIQUES.

INTRODUCTION.

1. Notations et Terminologie. — De façon générale et sauf mention expresse du contraire, nous suivons sans référence spéciale les résultats classiques, notations, conventions et terminologie usuels du traité de Bourbaki en ce qui concerne notamment la théorie des ensembles et la théorie des espaces vectoriels topologiques. Nous suivons les notations et terminologie courantes de H. Buchwalter [9] en ce qui concerne les espaces vectoriels

bornologiques. Toutefois, nous nous écartons de cet auteur en appelant « espace bornologique » ce qu'il appelle « espace vectoriel bornologique convexe » mais gardons la même abréviation « ebc ».

Sauf mention expresse du contraire, toutes les opérations catégorielles (limite inductive, quotient, etc.) qui interviennent dans le présent texte sont prises au sens bornologique. Si E est un ebc, on notera $E = \varinjlim(E_i, \pi_{ij})$ où l'indice i représente le borné disqué B_i avec $\{B_i\}_{i\in I}$ une base de bornologie de E; E_i représente E_{B_i}, l'espace vectoriel engendré par B_i et semi-normé par la jauge de B_i. Pour $B_i \subset B_j$ on notera $i \leq j$ et π_{ij} l'injection canonique de E_i dans E_j. On notera $\hat{E}_i$ le complété de E_i au sens structure uniforme et $\hat{\pi}_{ij}$ le prolongement canonique de π_{ij} à $\hat{E}_i$.

Si E est un ebc t-séparé, on notera E^* son dual bornologique. Chaque fois que E^* interviendra comme ebc, la seule bornologie considérée sur cet espace sera la bornologie suivante : Une partie de E sera dite bornée si elle est bornée sur tout borné de E. Si E est un elc (espace localement convexe) séparé, on désignera par E' son dual topologique. Chaque fois que E' interviendra comme espace bornologique, la seule bornologie considérée sur cet espace sera la bornologie équicontinue.

2. Objet du présent travail. — Le but du présent travail est de développer une théorie générale de la « complétion » en bornologie. Nous commençons par poser sous sa forme la plus générale et donner une solution affirmative constructive au problème suivant de complétion des espaces bornologiques posé dans [54] par M. L. Waelbroeck : « Étant donné un ebc, E, construire un ebc complet $\tilde{E}$ et une application linéaire bornée i de E dans $\tilde{E}$ vérifiant la propriété universelle suivante :

Pour toute application linéaire bornée u de E dans un ebc complet G, il existe une application linéaire bornée $\tilde{u}$ de $\tilde{E}$ dans G unique telle que $u = \tilde{u} \circ i$. »

Le couple $(i, \tilde{E})$ s'il existe, est alors naturellement unique à un isomorphisme bornologique près en tant que solution d'un problème d'application universelle. L'espace $\tilde{E}$ sera alors appelé le *complété bornologique* de E. On sait que dans [54], M. Waelbroeck a conjecturé une réponse affirmative au problème ci-dessus. Plus tard, dans [55], il a construit un espace bornologique U (espace « à bornés » suivant sa terminologie) tel que toute application linéaire bornée de U dans un espace bornologique complet est nulle. Divers auteurs, dont M. Waelbroeck, ont considéré ce résultat comme une « anomalie » et, confondant le problème universel de la complétion bornologique avec celui, secondaire, de l'immersion de E dans $\tilde{E}$ ont déduit que l'espace U ne pouvait être « complété ».

Nous montrons que cette interprétation n'est pas la bonne. L'exemple suscité de M. Waelbroeck prouve seulement qu'il existe des espaces bornologiques dont le complété au sens défini par M. Waelbroeck lui-même dans [54] est réduit à (o) et par conséquent que l'application canonique i de E dans son « éventuel » complété n'est pas nécessairement injective. Qu'une application canonique déduite d'un problème universel ne soit pas injective est un résultat fort courant en mathématiques : rappelons en effet pour mémoire le cas de la construction des produits tensoriels des Z-modules; celui de la construction des anneaux de fractions ou, plus proche de notre sujet, le cas de la complétion des espaces uniformes non séparés. Il en résulte que malgré l'exemple de M. Waelbroeck, exemple qui est intrinsèquement très important et que nous utilisons par ailleurs, le problème de complétion des espaces bornologiques reste entièrement posé. Nous le résolvons ici.

Les résultats essentiels du présent travail ont été annoncés sans démonstration dans deux Notes à l'Académie des Sciences de Paris ([19] et [20]).

Dans le premier paragraphe, nous énonçons et démontrons le théorème d'existence et d'unicité du complété bornologique, et nous en déduisons quelques conséquences plus ou moins immédiates.

Le paragraphe II est consacré à l'étude de la structure bornologique du complété pour une classe particulière d'espaces bornologiques que nous introduisons : la classe des *ebc aux normes concordantes*. Pour ces espaces, la structure bornologique du complété prend son maximum de simplicité et d'intérêt : On retrouve en effet dans le complété bornologique des propriétés analogues aux propriétés essentielles du complété d'un espace

uniforme. La classe des ebc aux normes concordantes est très vaste : elle comprend presque tous les ebc rencontrés dans la pratique, notamment tous les espaces vectoriels topologiques (localement convexes séparés) et leurs duals munis de la bornologie équicontinue et plus généralement tous les ebc polaires ou complets.

Le paragraphe III étudie les relations entre le complété bornologique et le complété topologique d'un espace vectoriel topologique. Le problème qui se pose ici [et qu'on peut poser dans le cas général] est le suivant : Soit $\hat{}$ le foncteur covariant qui opère de la catégorie des espaces vectoriels topologiques localement convexes (elc) dans la même catégorie et qui à tout elc E associe son complété $\hat{E}$ au sens structure uniforme et à toute application linéaire continue u de E dans F fait correspondre son « prolongement » canonique $\hat{u}$ aux complétés. De même soit $\tilde{}$ le foncteur covariant, qui opère de la catégorie des ebc dans la même catégorie et qui à tout ebc E associe son complété bornologique $\tilde{E}$ et à toute application linéaire *bornée* de E dans F associe son « prolongement » canonique aux complétés bornologiques. Si E est un elc, le problème est de comparer $\widetilde{BE}$ et $B(\hat{E})$ d'une part, $\widehat{T\tilde{E}}$ et $\hat{E}$ d'autre part. Nous obtenons des résultats intéressants dans le cas d'elc bornologiques et surtout métrisables.

3. Rappels et remarques sur les espaces bornologiques complets. — Rappelons qu'un espace bornologique est dit *complet* s'il possède une base de bornologie formée de disques complétants. Il est dit *complet au sens de Mackey* si toute suite de Cauchy-Mackey est bornologiquement convergente (c'est-à-dire convergente au sens de Mackey). M. Waelbroeck [53] a montré qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'un ebc E soit complet est que les deux conditions suivantes soient satisfaites :

(1) E est complet au sens de Mackey.

(2) Pour tout borné B de E, γB est encore borné où γB est l'ensemble des séries $\sum_{n\geq 1} \lambda_n b_n$ où $b_n \in B$ et (λ_n) une suite de scalaires telle que $\sum_{n\geq 1} |\lambda_n| \leq 1$.

Dans [35], L. D. Nel a établi par un exemple l'indépendance des conditions (1) et (2) en montrant qu'un ebc complet au sens de Mackey n'est pas nécessairement complet. Pour un espace localement convexe et plus généralement pour tout espace bornologique aux normes fortement concordantes (*voir* définition, § II), les deux notions de complétitude ci-dessus coïncident. Dans le cas d'un espace localement convexe on a donc cinq (5) notions usuelles de complétitude donc quatre (4) distinctes : Un elc *complet* (tout filtre de Cauchy est convergent) est *quasi-complet* (tout borné fermé est complet) donc *semi-complet* (toute suite de Cauchy est convergente) et par conséquent *complet au sens de Mackey*, c'est-à-dire bornologiquement complet.

L'espace de Nel a d'autres propriétés remarquables qui résulteront immédiatement des résultats du paragraphe II. C'est un ebc aux normes faiblement concordantes (il est limite inductive bornologique d'espaces normés E_i tels que pour $i \leqq j$, E_i est relatif dans E_j) et non fortement concordantes (car il est complet au sens de Mackey et non complet). C'est aussi un exemple d'ebc t-séparé et non polaire. Cet espace coïncide algébriquement avec son complété.

I. — THÉORÈME D'EXISTENCE ET D'UNICITÉ DU COMPLÉTÉ BORNOLOGIQUE.

1. Énoncé du théorème fondamental et propositions préliminaires.

Théorème 1. — *Soit* E *un ebc non nécessairement séparé.*

(*a*) *Il existe un ebc complet* $\tilde{E}$ *et une application* $i : E \to \tilde{E}$ *linéaire bornée ayant la propriété* (P) *suivante :*

(P) : *Pour toute application linéaire bornée u de* E *dans un ebc complet* G, *il existe une application linéaire bornée* $u : \tilde{E} \to G$ *unique telle que* $u = \tilde{u} \circ i$.

(*b*) *Le couple* $(i, \tilde{E})$ *est alors unique à un isomorphisme bornologique près, c'est-à-dire si* (i', E') *est un second couple formé d'un ebc complet et d'une application linéaire bornée de* E *dans* E' *possédant la propriété* (P), *il existe un isomorphisme bornologique* χ *de* $\tilde{E}$ *sur* E' *unique tel que* $i' = \chi \circ i$.

La partie (*b*) du théorème résulte immédiatement de la partie (*a*) en vertu des propriétés générales d'une solution d'un problème d'application universelle. L'existence du couple $(i, \tilde{E})$ est évidente si E est un espace normé (prendre $\tilde{E} = \hat{E}$ et i l'injection canonique).

Pour prouver l'existence de ce couple dans le cas général, nous aurons besoin des résultats préliminaires suivants intéressants en eux-mêmes.

Proposition 1. — *Soit* $E = \varinjlim(E_i, \pi_{ij})$ *un ebc séparé.*

(i) E *est injectivement et bornologiquement plongé dans l'ebc* $\check{E} = \varinjlim(\hat{E}_i, \hat{\pi}_{ij})$;

(ii) $\check{E}$ *est un ebc en général non séparé*, a fortiori *non complet.*

Preuve. — Soit $u_i : E_i \to \hat{E}_i$ l'injection canonique. Le système d'applications (u_i) est inductif (*cf.* Bourbaki [3] pour la terminologie), donc l'application $i_1 = \varinjlim u_i$ de E dans $\check{E}$ est bien définie; elle est unique, linéaire et injective [*cf.* Bourbaki [5], § 6, n° 4, prop. 6 et [3], chap. III, § 1, n° 11, corollaire 1 de la proposition 10]. On sait alors que i_1 est définie par le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} E_i & \xrightarrow{u_i} & \hat{E}_i \\ \downarrow{\scriptstyle \pi_i} & & \downarrow{\scriptstyle \hat{\pi}_i} \\ E = \lim(E_i, \pi_{ij}) & \xrightarrow{i_1} & \varinjlim(\hat{E}_i, \pi_{ij}) = \check{E} \end{array}$$

On en déduit immédiatement que i_1 est *bornée* d'où l'assertion (i) de la proposition 1. L'espace $\check{E}$ étant une limite inductive (bornologique) d'espaces de Banach, dire qu'il est séparé équivaut à dire qu'il est complet. Il en résulte aussitôt que cet ebc n'est pas en général séparé (complet) car sinon tout ebc séparé E serait *injectivement* et bornologiquement plongé dans un ebc complet, ce qui est faux en général en vertu d'un contre-exemple bien connu de L. Waelbroeck [55].

Notation. — On notera $i_1 : \mathrm{E} \to \check{\mathrm{E}}$ l'injection canonique.

Proposition 2. — *Soient* $\mathrm{E} = \varinjlim(\mathrm{E}_i, \pi_{ik})$ *un ebc séparé;* $\mathrm{F} = \varinjlim(\mathrm{E}_j, \mathrm{L}_{jl})$ *un ebc* complet. *Toute application linéaire bornée u de* E *dans* F *se prolonge de manière unique en une application linéaire bornée de* $\check{\mathrm{E}} = \varinjlim(\hat{\mathrm{E}}_i, \hat{\pi}_{ik})$ *dans* F.

Preuve. — *a. Existence du prolongement :* L'application u : $\mathrm{E} = \varinjlim \mathrm{E}_i \to \mathrm{F} = \varinjlim \mathrm{F}_j$ étant linéaire bornée, pour tout indice i il existe un indice j (non nécessairement unique) noté $j = f(i)$ tel que $u(\mathrm{E}_i)$ soit contenu dans $\mathrm{F}_j = \mathrm{F}_{f(i)}$ et que la restriction de u à E_i soit continue de E_i dans $\mathrm{F}_{f(i)}$. Notons $u_{i,f(i)}$ cette restriction. Pour tout indice $f(i)$, $\mathrm{F}_{f(i)}$ est un espace de Banach (puisque F est un ebc complet), donc $u_{i,f(i)}$ se prolonge de manière unique en une application linéaire bornée $\widehat{u_{i,f(i)}}$ de $\hat{\mathrm{E}}_i$ dans $\mathrm{F}_{f(i)}$. Si l'indice i est inférieur ou égal à l'indice k, il existe un indice $f(i)$ tel que $f(i) = f(k)$ puisque $u(\mathrm{E}_i)$ est contenu dans $u(\mathrm{E}_k)$. Alors les diagrammes suivants sont commutatifs :

$$\begin{tikzcd}
E_i \arrow[r, "u_{i,f(i)}"] \arrow[d, "\pi_{i,k}"'] & F_{f(i)} = F_{f(k)} \arrow[d, "L_{f(i),f(k)} = L_{f(k),f(k)}"] \\
E_k \arrow[r, "u_{k,f(k)}"'] & F_{f(k)} = F_{f(i)}
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\hat{E}_i \arrow[r, "\widehat{u_{i,f(i)}}"] \arrow[d, "\hat{\pi}_{ik}"'] & F_{f(i)} \arrow[d, "L_{f(i),f(k)}"] \\
\hat{E}_k \arrow[r] & F_{f(k)}
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\hat{E}_i \arrow[r, "\widehat{u_{i,f(i)}}"] \arrow[d, "\hat{\pi}_{ik}"'] & F_{f(i)} \arrow[d] \arrow[dr, "L_{f(i)}"] & \\
\hat{E}_k \arrow[r, "\widehat{u_{k,f(k)}}"'] & F_{f(k)} \arrow[r, "L_{f(k)}"'] & F = \varinjlim F_k
\end{tikzcd}$$

Posons

$$g_i = \mathrm{L}_{f(i)} \circ \widehat{u_{i,f(i)}}; \qquad g_k = \mathrm{L}_{f(k)} \circ \widehat{u_{k,f(k)}}.$$

On a $g_k \circ \hat{\pi}_{ik} = g_i$ pour tout $i \leq k$. Il en résulte (Bourbaki [3], chap. III, § 1, n° 11, prop. 10) qu'il existe une application g unique de $\check{\mathrm{E}} = \lim(\hat{\mathrm{E}}_i, \hat{\pi}_{ik})$ dans F telle que $g_i = g \circ \hat{\pi}_i$. Posons $g = u_1$. Par définition *de* u_1 le diagramme suivant est commutatif.

$$\begin{tikzcd}
 & E \arrow[dr, "u_1"] & \\
\hat{E}_i \arrow[ur, "\hat{\pi}_i"] \arrow[rr, "g_i"'] & & F
\end{tikzcd}$$

Il en résulte immédiatement que u_1 est linéaire *bornée*. Il est clair que u_1 prolonge u. En effet si x est un élément de E, il existe un indice i tel que x appartienne à E_i. Alors

$$u_1(x) = g_i(x) = \mathrm{L}_{f(i)} \circ u_{i,f(i)}(x) = u_{i,f(i)}(x) = u(x).$$

b. Unicité du prolongement u_1 *de* u : Soit v_1 une application linéaire bornée de $\check{\mathrm{E}}$ dans F prolongeant u. Pour tout indice i, $v_1 \circ i_1$ et u coïncident sur E_i donc la restriction de $v_1 \circ i_1$ à E_i est $u_{i,f(i)}$ pour tout indice $f(i)$ associé à i. Donc $\widehat{v_1 \circ i_1\big|_{\mathrm{E}_i}} = \widehat{u_{i,f(i)}}$ sur $\hat{\mathrm{E}}_i$. Le diagramme suivant est donc commutatif :

$$\begin{tikzcd}
 & \hat{\pi}_i(\hat{E}_i) \arrow[dr, "v_1|_{\hat{\pi}_i(\hat{E}_i)}"] & \\
\hat{E}_i \arrow[ur, "\pi_i"] \arrow[rr, "v_1 \circ i_1|_{E_i}"'] & & F_{f(i)}
\end{tikzcd}$$

car les deux applications continues de $\hat{\mathrm{E}}_i$ dans $\mathrm{F}_{f(i)}$ [$f(i)$ convenablement choisi] coïncident sur E_i donc sur $\hat{\mathrm{E}}_i$ (puisque $\mathrm{F}_{f(i)}$ est un Banach). On en déduit alors que

$$v_1\big|_{\hat{\pi}_i(\hat{\mathrm{E}}_i)} \circ \hat{\pi}_i = \widehat{u_{i,f(i)}} = \mathrm{L}_{f(i)} \circ \widehat{u_{i,f(i)}} = g_i = u_1\big|_{\hat{\pi}_i(\hat{\mathrm{E}}_i)} \circ \pi_i$$

et par conséquent $v_1 = u_1$ sur $\hat{\pi}_1(\hat{E}_i)$ donc $v_1 = u_1$ sur $\check{E} = \bigcup \hat{\pi}_i(\hat{E}_i)$, d'où l'unicité du prolongement et la proposition 2 est complètement démontrée.

Proposition 3. — *Soit* $G = \varinjlim (G_i, g_{ij})$ *une limite inductive bornologique* non nécessairement séparée *d'espaces vectoriels normés (ce qui implique que les applications* g_{ij} *ne sont pas nécessairement injectives); H un sous-espace bornologique de G.*

Alors $\frac{G}{H} = \varinjlim \left(\frac{G_i}{\overset{-1}{g_i}(H)}, g_{ij} \right)$ *(algébriquement et bornologiquement).*

Preuve. — 1° *Définition des applications* $\dot{g}_{ij}$: Par définition de la limite inductive on a le diagramme commutatif (D_1) suivant pour $i \leqq j$:

$$(D_1)\quad \begin{tikzcd} & G & \\ G_i \arrow[ur, "g_i"] \arrow[rr, "g_{ij}"'] & & G_j \arrow[ul, "g_j"'] \end{tikzcd}$$

La commutativité de (D_1) entraîne l'existence d'applications $\dot{g}_{ij}$ telles que le diagramme (D_2) suivant soit commutatif.

$$(D_2)\quad \begin{tikzcd} G_i \arrow[r, "g_{ij}"] \arrow[d, "\theta_j"'] & G_j \arrow[d, "\theta_j"] \\ \frac{G_i}{\overset{-1}{g_i}(H)} \arrow[r, "\dot{g}_{ij}"'] & \frac{G_j}{\overset{-1}{g_j}(H)} \end{tikzcd} \quad \text{pour } i \leqslant j$$

En effet, il suffit de vérifier que $\theta_j \circ g_{ij}$ s'annule sur $\overset{-1}{g_i}(H)$: Soit $x_i \in \overset{-1}{g_i}(H)$ autrement dit $g_i(x_i) \in H$; dire que $\theta_j \circ g_{ij}(x_i) = 0$ dans $\frac{G_j}{\overset{-1}{g_j}(H)}$ équivaut à dire que $g_{ij}(x)$ appartient à $\overset{-1}{g_j}(H)$, c'est-à-dire $g_j \circ g_{ij}(x_i)$ appartient à H. Or $g_j \circ g_{ij}(x_i) = g_i(x_i)$

d'après (D_1) donc appartient bien à H, ce qui vérifie la commutativité du diagramme (D_2).

Les applications $\dot{g}_{ij}$ sont donc bien définies; elles sont linéaires et pour $i \leqq j$ fixés, $\dot{g}_{ij}$ est unique.

2° *Le système* $\left(\frac{G_i}{\overset{-1}{g_i}(H)}, \dot{g}_{ij} \right)$ *est un système inductif d'ebc :*

Il est en effet clair que c'est un système inductif d'espaces vectoriels et que les applications $\dot{g}_{ij}$ sont bornées [*cf.* diagramme (D_2)].

Posons $G' = \varinjlim \left(\frac{G_i}{H_i}, \dot{g}_{ij} \right)$, où $H_i = \overset{-1}{g_i}(H)$ et notons u_i l'application canonique de $\frac{G_i}{H_i}$ dans G'.

3° Nous allons montrer que $\frac{G}{H} = G'$ *algébriquement.*

a. Pour tout indice i soit $\dot{g}_i$ l'application linéaire *injective* de $\frac{G_i}{H_i}$ dans $\frac{G}{H}$ définie par le diagramme commutatif (D_3) suivant :

$$(D_3)\quad \begin{tikzcd} G_i \arrow[r, "g_i"] \arrow[d, "\varphi_i"'] & G \arrow[d, "\varphi"] \\ \frac{G_i}{H_i} \arrow[r, "\dot{g}_i"'] & \frac{G}{H} \end{tikzcd}$$

En rapprochant les diagrammes commutatifs (D_1) et (D_3), on obtient le diagramme commutatif (D_4) suivant :

$$(D_4)\quad \begin{tikzcd} & G & \\ G_i \arrow[ur, "g_i"] \arrow[rr, "g_{ij}"] \arrow[d, "\varphi_i"'] & & G_j \arrow[ul, "g_j"'] \arrow[d, "\varphi_j"] \\ \frac{G_i}{H_i} \arrow[rr, "\dot{g}_{ij}"'] & & \frac{G_j}{H_j} \end{tikzcd} \quad \text{pour } i \leqslant j$$

La commutativité du diagramme (D_4) entraîne la commutativité du diagramme (D_5) suivant :

$$(D_5)\qquad \begin{tikzcd} & \frac{G}{H} & \\ \frac{G_i}{H_i} \arrow[ur, "\dot g_i"] \arrow[rr, "g_{ij}"'] & & \frac{G_j}{H_j} \arrow[ul, "\dot g_j"'] \end{tikzcd} \qquad \text{pour } i \leq j$$

En effet, pour le vérifier, il suffit de vérifier que $g_j \circ \dot g_{ij} \circ \varphi_i = \varphi \circ g_i$ [en tenant compte du diagramme (D_3)], ce qui est presque évident car si $x_i \in G_i$, on a

$$\begin{aligned} \dot g_j \circ \dot g_{ij} \circ \varphi_i(x_i) &= \dot g_j(\dot g_{ij} \circ \varphi_i(x_i)) = \dot g_j(\varphi_j \circ g_{ij}(x_i)) && [\text{diagramme } (D_4)] \\ &= (\dot g_j \circ \varphi_j) \circ g_{ij}(x_i) = (\varphi \circ g_j) \circ g_{ij}(x_i) && [\text{diagramme } (D_3)] \\ &= \varphi \circ (\varphi_j \circ g_{ij})(x_i) = \varphi \circ g_i(x_i) && [\text{diagramme } (D_1)], \end{aligned}$$

Le diagramme (D_5) est donc bien commutatif.

b. On a donc un ensemble $\frac{G}{H}$ et pour tout indice i une application $\dot g_i$ de $\frac{G_i}{H_i}$ dans $\frac{G}{H}$ telle que la relation $i \leq j$ entraîne $\dot g_j \circ \dot g_{ij} = \dot g_i$ [diagramme (D_5)]. Il en résulte (Bourbaki [5], chap. III, prop. 10 déjà cité) qu'il existe une application g unique de $G' = \varinjlim \frac{G_i}{H_i}$ dans $\frac{G}{H}$ telle que le diagramme (D_6) suivant soit commutatif :

$$(D_6)\qquad \begin{tikzcd} G' \arrow[rr, "g"] & & \frac{G}{H} \\ & \frac{G_i}{H_i} \arrow[ul, "u_i"] \arrow[ur, "\dot g_i"'] & \end{tikzcd}$$

autrement dit $\dot g_i = g \circ u_i$. Cette application g est *injective* (car les applications $\dot g_i$ sont injectives) et *linéaire*. De plus, en vertu du diagramme (D_6), elle est *bornée*.

Rapprochant les diagrammes précédents, on obtient le diagramme commutatif (D_7) suivant :

$$(D_7)\qquad \begin{tikzcd} & G \arrow[rr, "\varphi"] & & \frac{G}{H} \\ G_i \arrow[ur, "g_i"] \arrow[rr, "g_{ij}"] \arrow[dd, "\varphi_i"] & & G_j \arrow[ul, "g_j"'] \arrow[dd, "\varphi_j"] & \\ & & & \\ \frac{G_i}{H_i} \arrow[rr, "g_{ij}"'] \arrow[uuurrr, "\dot g_i"] & & \frac{G_j}{H_j} \arrow[uuur, "\dot g_j"'] & \end{tikzcd}$$

c. Nous allons montrer que g *est un isomorphisme algébrique de* G' *sur* $\frac{G}{H}$. Pour cela il ne reste à vérifier que la surjectivité. Il suffit manifestement [*cf.* diagramme (D_6)] de vérifier que $\frac{G}{H} = \bigcup \dot g_i\left(\frac{G_i}{H_i}\right)$. Soit $\dot x = \varphi(x)$ un élément de $\frac{G}{H}$. Puisque x appartient à $G = \bigcup g_i(E_i)$, x appartient à un $g_i(E_i)$ donc $x = g_i(y_i)$ où y_i appartient à E_i, donc

$$\dot x = \varphi(x) = \varphi \circ g_i(y_i) = \dot g_i \circ \varphi_i(y_i) \quad [\text{diagramme } (D_7)] = \dot g_i(\varphi_i(y_i)) = \dot g_i(z)$$

où $z = \varphi_i(y_i)$ appartient à $\frac{G_i}{H_i}$, d'où la surjectivité de g et d'après ce qui précède g est un isomorphisme algébrique borné de G' sur $\frac{G}{H}$.

4° Pour achever la démonstration de la proposition 3, autrement dit pour achever de démontrer que $\frac{G}{H}$ muni de la bornologie quotient est bornologiquement isomorphe à la limite inductive bornologique des quotients bornologiques $\frac{G_i}{H_i}$ il ne reste qu'à vérifier que $\overset{-1}{g}$ est bornée.

Soit alors $\varphi(B)$ un borné de $\frac{G}{H}$ (quotient bornologique), où B est un borné de G. Nous devons montrer que $\varphi(B)$ est contenu dans un $g_i(A)$ où A est un borné de $\frac{G_i}{H_i}$. Or B est borné dans G, donc il existe un indice i tel que B soit contenu dans $g_i(B_i)$ où B_i est borné dans G_i. Alors $\varphi(B)$ est contenu dans $\varphi \circ g_i(B_i) = \dot{g}_i(\varphi_i(B_i))$ [diagramme (D_i)] $= \dot{g}_i(A)$ en posant $A = \varphi_i(B_i)$ partie bornée de $\frac{G_i}{H_i}$.

La proposition 3 est complètement démontrée.

Corollaire 1. — *Les données et notations étant celles de la proposition* 3. *On suppose* H *b-fermé dans* G. *Alors la limite inductive* $\varinjlim\left(\frac{G_i}{\overset{-1}{g_i}(H)}, g_{ij}\right)$ *est séparée.*

En effet H étant b-fermé, le quotient bornologique $\frac{G}{H}$ est séparé. On peut encore dire, H étant b-fermé, $\overset{-1}{g_i}(H)$ est b-fermé, donc fermé dans G_i (condition de Mackey), et par conséquent $\frac{G_i}{\overset{-1}{g_i}(H)}$ est un espace normé. Comme $\dot{g}_{ij}$ est injective, la limite inductive bornologique est séparée.

Corollaire 2. — *Soit* $G = \varinjlim(G_i, g_{ij})$ *une limite inductive bornologique* non nécessairement séparée *d'espaces de Banach. L'ebc séparé associé à* G *est complet.*

En effet soit H la b-fermeture de (o) dans G. L'espace $\frac{G}{H}$ est par définition l'ebc séparé associé à G. Comme $\overset{-1}{g_i}(H)$ est b-fermé dans l'espace de Banach G_i, l'espace $\frac{G_i}{\overset{-1}{g_i}(H)}$ est un espace de Banach et par conséquent la limite inductive bornologique $\varinjlim\left(\frac{G_i}{\overset{-1}{g_i}(H)}, \dot{g}_{ij}\right)$ est complète en tant que limite inductive *séparée* (corollaire 1) d'ebc complets, d'où le corollaire 2.

2. Démonstration du théorème d'existence (*suite et fin*). — 1° Supposons E séparé. Soit $\tilde{E}$ l'ebc séparé associé à $\check{E} = \varinjlim(\hat{E}_i, \hat{\pi}_{ij})$. $\tilde{E}$ est un ebc complet (corollaire 2 de la proposition 3). De plus, toute application linéaire bornée de E dans un ebc complet se factorise (par passage au quotient) de manière *unique* à travers $\tilde{E}$. Soit i_2 la surjection canonique de $\check{E}$ sur $\tilde{E}$.

Posons $i = i_2 \circ i_1$. Le couple $(i, \tilde{E})$ vérifie la propriété (P) du théorème. En effet soit u une application linéaire bornée de E dans un ebc complet F. En vertu de la proposition 2, il existe une application u_1 de $\check{E}$ dans F linéaire bornée unique prolongeant u, donc par construction de $\tilde{E}$ il existe une application linéaire bornée de $\tilde{E}$ dans F unique telle que $u = \tilde{u} \circ i$ en vertu du diagramme.

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "u"] \arrow[d, "i_1"'] & F \\ \check{E} \arrow[ur, "u_1"] \arrow[r, "i_2"'] & \tilde{E} = \frac{\check{E}}{(\bar{0})} \arrow[u, "\tilde{u}"'] \end{tikzcd}$$

2° Si E est non séparé, soit E_0 l'ebc séparé associé à E. Le couple $(i_0, \tilde{E}_0)$ solution du problème pour E_0 l'est aussi pour E. L'existence et l'unicité du complété bornologique d'un espace bornologique sont complètement prouvées. Le théorème 1 est démontré.

Définition 1. — *Soit* E *un ebc séparé ou non. L'ebc complet* $\tilde{E}$ *défini dans la démonstration du théorème* 1 *s'appellera le* complété (*bornologique*) *de l'ebc* E *et l'application linéaire bornée* i *de* E *dans* $\tilde{E}$ *s'appellera l'application* canonique *de* E *dans son complété.*

3. Remarques et conséquences immédiates du théorème fondamental.

Remarques. — 1° Il est possible que $\tilde{E}$ soit réduit à (o), auquel cas l'application i n'est évidemment pas injective. Cela se produira si et seulement si l'espace $\check{E}$ coïncide avec la b-fermeture de son origine. C'est ce qui se produit effectivement dans l'exemple donné par M. Waelbroeck [55].

2° Ainsi que le montre ce qui précède, l'espace $\check{E} = \varinjlim(\hat{E}_i, \hat{\pi}_{ij})$ bien qu'en général non complet est très étroitement lié au complété bornologique de E. De plus cet espace en vertu de la proposition 2 jouit d'une propriété universelle. Il nous semble que cet espace soit appelé à jouer un rôle *pratique* important. Nous lui donnerons le nom de *quasi-complété* (bornologique) de E.

Tirons quelques conséquences immédiates du théorème 1.

PROPOSITION 4. — *Soit* E *un ebc. Pour que l'application canonique* $i : E \to \tilde{E}$ *soit injective, il faut et il suffit que pour tout élément non nul* x *de* E *il existe une application linéaire bornée* u *de* E *dans un ebc complet telle que* $u(x) \neq 0$.

Ce critère standard résulte aussitôt du théorème 1.

COROLLAIRE. — *Tout ebc t-séparé est injectivement et bornologiquement plongé dans son complété.*

PROPOSITION 5. — *Soient* E *et* F *deux ebc;* $u : E \to F$ *un isomorphisme bornologique. Alors* u *se prolonge en un isomorphisme bornologique de* $\tilde{E}$ *sur* $\tilde{F}$.

En effet, $u : E \to \tilde{F}$ se prolonge d'après le théorème 1 en une application linéaire bornée $\tilde{u} : \tilde{E} \to \tilde{F}$. De même $v = \overset{-1}{u} : F \to \tilde{E}$ se prolonge en une application linéaire bornée $\tilde{v} : \tilde{F} \to \tilde{E}$. Il est clair que $\tilde{v} \circ \tilde{u}$ prolonge l'identité de F donc coïncide avec l'identité de $\tilde{F}$ (unicité). De même $\tilde{u} \circ \tilde{v}$ est l'identité de $\tilde{E}$, ce qui exprime que $\tilde{u}$ et $\tilde{v}$ sont des bijections réciproques l'une de l'autre. Comme elles sont bornées, ce sont des isomorphismes bornologiques réciproques.

PROPOSITION 6. — *Soient* E *et* F *deux ebc;* $u : E \to F$ *une application linéaire bornée. Il existe une application linéaire bornée* $\tilde{u}$ *unique telle que le diagramme*

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "u"] \arrow[d, "i"'] & F \arrow[d, "j"] \\ \tilde{E} \arrow[r, "\tilde{u}"'] & \tilde{F} \end{tikzcd}$$

soit commutatif.

Il suffit d'appliquer le théorème 1 à l'application $j \circ u : E \to \tilde{F}$.

COROLLAIRE. — *Soient* E, F *et* G *trois ebc;* $f : E \to F$, $g : F \to G$ *deux applications linéaires bornées; alors* $\widetilde{g \circ f} = \tilde{g} \circ \tilde{f}$.

C'est une conséquence immédiate de la propriété d'unicité de la proposition 6.

Pour énoncer la proposition suivante, notons F la b-fermeture de (o) dans $\check{E} = \varinjlim(\hat{E}_i, \hat{\pi}_{ij})$. Si $\hat{\pi}_i$ désigne l'application canonique de $\hat{E}_i \to \check{E}$ on notera F_i le sous-espace vectoriel $\hat{\pi}_i^{-1}(F)$ de $\hat{E}_i$. Alors on sait (proposition 3) que $\tilde{E} = \varinjlim\left(\frac{\hat{E}_i}{F_i}, \tilde{\pi}_{ij}\right)$.

Soit $\tilde{\pi}_i : \frac{\hat{E}_i}{F_i} \to \tilde{E}$ l'application canonique. On a alors le résultat suivant :

PROPOSITION 7. — *Tout borné de* $\tilde{E}$ *est contenu dans l'adhérence dans un* $\tilde{\pi}_i\left(\frac{\hat{E}_i}{F_i}\right)$ *de l'image par l'application canonique* i *d'un borné de* E.

Preuve. — On a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} E_i \arrow[r, "u_i"] \arrow[d, "\pi_i"'] & \hat{E}_i \arrow[r, "v_i"] \arrow[d, "\hat{\pi}_i"] & \frac{\hat{E}_i}{F_i} \arrow[d, "\tilde{\pi}_i"] \\ E \arrow[r, "i_1"'] & \check{E} \arrow[r, "i_2"'] & \tilde{E} \end{tikzcd}$$

Soit $\tilde{B}$ un borné de $\tilde{E}$. $\tilde{B}$ est contenu dans un $\tilde{\pi}_i(A)$ où A est borné dans $\frac{\hat{E}_i}{F_i}$ (quotient bornologique). Donc il existe un borné $\hat{B}_i$ de $\hat{E}_i$ tel que A soit contenu dans $v_i(\hat{B}_i)$. Donc $\tilde{B}$ est contenu dans $\tilde{\pi}_i \circ v_i(\hat{B}_i)$. Or $\hat{B}_i$ étant borné dans $\hat{E}_i$, on peut supposer que $\hat{B}_i$ est l'adhérence $\overline{B}_i$ dans $\hat{E}_i$ d'un borné de E_i. Alors $\tilde{B}$ est contenu dans $\tilde{\pi}_i \circ v_i(\overline{B}_i)$, c'est-à-dire contenu dans $\tilde{\pi}_i \circ v_i(\overline{u_i(B_i)})$ (adhérence dans $\hat{E}_i$), donc contenu dans $\tilde{\pi}_i(\overline{v_i \circ u_i(B_i)})$ (adhérence dans $\left(\frac{\hat{E}_i}{F_i}\right)$ donc contenu dans $\overline{\tilde{\pi}_i \circ \rho_i \circ u_i(B_i)}$ [adhérence dans $\tilde{\pi}_i\left(\frac{\hat{E}_i}{F_i}\right)$], c'est-à-dire contenu dans $\overline{i(\pi_i(B_i))}$ [adhérence dans $\tilde{\pi}_i\left(\frac{\hat{E}_i}{F_i}\right)$] (*cf.* diagramme ci-dessus). Comme $f_i(B_i)$ est un borné de E, la proposition est démontrée.

Remarque. — Nous reviendrons plus loin (§ II) sur la structure bornologique du complété dans un cas particulier pratiquement fondamental où le résultat de la proposition ci-dessus prend une forme plus simple et plus élégante.

PROPOSITION 8. — *Soit* E *un ebc t-séparé;* $E^* = (\tilde{E})^*$ *algébriquement et bornologiquement.*

Preuve. — L'égalité algébrique résulte immédiatement du théorème 1 puisque E est injectivement plongé dans $\tilde{E}$ (corollaire de la proposition 4). Comme il résulte immédiatement des définitions que l'identité $(\tilde{E})^* \to (E)^*$ est bornée, la proposition 8 sera démontrée si nous vérifions que toute partie H de $(\tilde{E})^*$ bornée dans E^* est bornée dans $(\tilde{E})^*$. Soit alors $\tilde{B}$ un borné de $\tilde{E}$. On sait (prop. 7) que $\tilde{B}$ est contenu dans $\overline{i(B)}$ adhérence dans un $\tilde{\pi}_i\left(\frac{\hat{E}_i}{F_i}\right)$ d'un borné B de E. Alors $H(\tilde{B}) = \bigcup_{u \in H} (\tilde{B})$ est contenu dans $H(\overline{i(B)})$ qui est contenu dans $\overline{H(i(B))}$ (adhérence dans le corps des scalaires). Comme i est injective et H borné dans $(E)^*$ la proposition 8 est démontrée.

II. — STRUCTURE DU COMPLÉTÉ D'UN ESPACE BORNOLOGIQUE.

1. Espaces bornologiques aux normes concordantes.

DÉFINITION 2. — Soient E_1 et E_2 deux espaces normés de normes respectives p_1 et p_2 et π une injection linéaire continue de E_1 dans E_2. Nous dirons que les normes p_1 et p_2 sont faiblement (resp. fortement) concordantes sur E_1 si pour toute suite de Cauchy (x_n) dans E_1 telle que $\pi(x_n)$ converge vers $\pi(x_0)$ dans E_2 [resp. $\pi(x_n)$ converge dans E_2] la suite (x_n) converge vers x_0 dans E_1 [resp. (x_n) converge dans E_1].

Si la boule unité de E_1 est fermée dans E_2 [condition « VF »], les normes p_1 et p_2 sont automatiquement fortement (*a fortiori* faiblement) concordantes sur E_1.

DÉFINITION 3. — Nous dirons qu'un ebc E possède la propriété de *concordance faible* (resp. *forte*) *des normes* ou que E est un *ebc aux normes faiblement* (resp. *fortement*) *concordantes*, s'il est séparé et s'il possède une base de bornologie $(B_i)_{i \in I}$ telle que $E = \varinjlim(E_i, \pi_{ij})$ de manière que si p_i désigne la norme de l'espace E_i alors, pour tout $i \leq j$ les normes p_i et p_j sont faiblement (resp. fortement) concordantes sur E_i.

Exemples. — Tout ebc polaire ou complet est un ebc aux normes fortement concordantes. En particulier si E est un espace localement convexe séparé BE et E' muni de la bornologie équicontinue sont des ebc aux normes fortement concordantes.

Remarquons [*cf.* Introduction, n° 3] qu'il existe des ebc aux normes faiblement et non fortement concordantes. La vérification du fait qu'un ebc polaire est un ebc aux normes fortement concordantes est immédiate.

En effet, un ebc polaire E admet une base de bornologie $(B_i)_{i \in I}$ formée de disques fermés pour $\sigma(E, E^*)$. Alors si $i \leq j$, B_i est fermé dans E_j et dans E_i pour $\sigma(E, E^*)$. Notons E_j'' le dual de E_j muni de la topologie faible induite par E et par E_j' le dual de E_j muni de la topologie définie par la jauge de B_j. Comme $\sigma(E_j, E_j'') = \sigma(E, E^*)$ induite à E_j. B_i est un disque fermé dans E_j pour $\sigma(E_j, E_j'')$ donc fermé dans l'espace normé E_j. Mais B_i est la boule unité de E_i (car fermé dans E_i) ce qui assure la classique condition « VF » (voisinages fermés) et par conséquent la concordance forte des normes.

2. Théorème de structure du complété. — La structure bornologique du complété d'un ebc aux normes concordantes est donnée par le théorème suivant :

THÉORÈME 2. — *Soit* E *un ebc de complété* $\tilde{E}$.

(i) *Si* E *est un ebc aux normes faiblement concordantes, soit* $\{E_i\}_{i \in I}$ *le système correspondant d'espaces normés tel que*

$E = \varinjlim(E_i, \pi_{ij})$:

(*a*) $\tilde{E} = \varinjlim(\hat{E}_i, \hat{\pi}_{ij})$ *autrement dit le quasi-complété bornologique de* E *est complet;*

(*b*) *Tout borné de* $\tilde{E}$ *est contenu dans l'adhérence dans un* $\hat{E}_i$ *d'un borné de* E_i;

(*c*) *Tout élément de* $\tilde{E}$ *est limite bornologique d'une suite de* E *et par conséquent* E *est dense dans* $\tilde{E}$ (*pour la pseudo-topologie déduite de la convergence de Mackey*).

(ii) *Si* E *est un ebc aux normes fortement concordantes,* E *est un sous-espace* bornologique *de son complété.*

Preuve. — (i) La concordance faible des normes est *équivalente* à la biunivocité des applications $\hat{\pi}_{ij}$. Par conséquent, la limite inductive $\varinjlim(\hat{E}_i, \hat{\pi}_{ij})$ est séparée donc complète, d'où l'assertion (*a*). Les assertions (*b*) et (*c*) résultent aussitôt des définitions et de la structure bornologique des espaces normés $\hat{E}_i$.

(ii) Supposons que E possède la propriété de concordance *forte* des normes. On sait déjà (proposition 1) que E est bornologiquement plongé dans son quasi-complété. Inversement, soit B une partie quelconque de E, bornée dans E pour la bornologie induite par $\tilde{E}$. B est contenu dans $\tilde{B} \cap E$, où $\tilde{B}$ est un borné de $\tilde{E}$, donc d'après l'assertion (*b*), B est contenu dans $\overline{B}_i \cap E$ où $\overline{B}_i$ est l'adhérence dans un $\hat{E}_i$ d'un borné de E_i, borné qu'on peut toujours supposer fermé dans E_i. Autrement dit, B est contenu dans

$$B_i \cap \Big(\bigcup_j E_j\Big) = \bigcup_j B_i \cap E_j = B_i \cup \Big(\bigcup_{j \neq i} B_i \cap E_j\Big).$$

Si toutes les intersections $\overline{B}_i \cap E_j$ pour $j \neq i$ sont vides, la démonstration est terminée. Sinon, soit un indice $j \neq i$ tel que $\overline{B}_i \cap E_j$ soit non vide. Soit x un élément de $\overline{B}_i \cap E_j$ et un indice k tel que E_k contienne E_i et E_j. Il existe une suite de points de B_i qui converge vers x dans $\hat{E}_i$. Cette suite (x_n) est donc une suite de Cauchy dans E_i convergeant vers un point x de E_k. Nous

allons montrer que cette convergence se fait selon la norme p_k. Or cette suite converge dans $\hat{E}_i$ pour la norme $\hat{p}_i$, donc elle converge dans $\hat{E}_k$ pour la norme $\hat{p}_k$ (car $\hat{E}_i$ est injectivement et continûment plongé dans $\hat{E}_k$). Comme x appartient à E_k, il s'ensuit que la suite (x_n) converge *dans* E_k. Mais les normes p_i et p_k sont *fortement* concordantes sur E_i, x appartient à E_i et la suite (x_n) converge vers x dans E_i. Mais B_i est fermé dans E_i, donc x appartient à B_i. Comme x est un élément arbitraire de $\overline{B}_i \cap E_j$, il s'ensuit que $\overline{B}_i \cap E_j$ est contenu dans B_i et par conséquent on a toujours $B_i \cup \Big(\bigcup_{j \neq i} \overline{B}_i \cap E_j\Big)$ contenu dans B_i, donc B est contenu dans B_i, donc borné dans E, ce qui achève la démonstration du théorème 2.

Corollaire. — *Soit* E *un ebc aux normes faiblement concordantes t-séparé,* $\tilde{E}$ *est t-séparé.*

Il suffit de montrer que $(\tilde{E})^*$ sépare $\tilde{E}$. Soit x un élément non nul de $\tilde{E}$. Cet élément est limite bornologique d'une suite (x_n) de points de E avec $x_n \neq 0$ à partir d'un certain rang. Alors, comme E est *t*-séparé, il existe, pour n assez grand une forme linéaire bornée f sur E telle que $f(x_n) = 1$ (par exemple) donc $f(x)$ est différent de o pour un certain $f \in E^* = (\tilde{E})^*$, d'où le corollaire.

3. Complétion des sous-espaces, quotients, sommes directes.

Proposition 9. — *Soient* E *un ebc aux normes faiblement concordantes tel que* $E = \varinjlim(E_i, \pi_{ij})$; F *un sous-espace bornologique de* E; $F = F \cap E_i$ *muni de la norme induite par* E_i. *Alors* $F = \varinjlim F_i$ *et* F *possède la propriété de concordance faible des normes.*

Preuve. — Il est clair que $F = \varinjlim F_i$ algébriquement. Notons F_r l'espace F muni de la bornologie induite par E et par F_l l'espace F muni de la bornologie limite inductive.

Soit B une partie de F. Dire que B est bornée dans F_r équivaut à dire qu'il existe un indice i tel que B soit contenu et borné dans E_i, autrement dit que B soit contenu et borné dans $F_i = E_i \cap F$ (F_i étant un sous-espace normé de E_i), ce qui est équivalent à dire que B est borné dans F_i.

La deuxième assertion est évidente : si $\pi_{ij}\big|_{F_i}$ est la restriction de π_{ij} à F_i, $\pi_{ij}\big|_{F_i}$ est à valeurs dans F_j et comme $\left(\widehat{\pi_{ij}\big|_{F_i}}\right) = \hat{\pi}_{ij}\big|_{\hat{F}_i}$ et que $\hat{\pi}_{ij}$ est injective, la biunivocité de $\left(\widehat{\pi_{ij}\big|_{F_i}}\right)$ s'ensuit aussitôt.

Corollaire. — *Pour qu'un ebc E soit un sous-espace bornologique de son complété, il est nécessaire que E possède la propriété de concordance faible des normes et il est suffisant que E possède la propriété de concordance forte des normes.*

C'est nécessaire car tout sous-espace bornologique d'un ebc aux normes faiblement concordantes est un ebc aux normes faiblement concordantes (proposition 9) et tout ebc complet possède évidemment la propriété de concordance faible des normes. C'est suffisant en vertu du théorème 2 (ii).

Proposition 10. — *Soit* $E = \bigoplus_{\lambda \in L} M^\lambda$ *la somme directe bornologique d'une famille* $(M^\lambda)_{\lambda \in L}$ *d'ebc séparés. Pour tout* $\lambda \in L$, *on a* $M^\lambda = \varinjlim_\alpha M^\lambda_\alpha$, M^λ_α *étant des espaces normés.*

(i) $E = \varinjlim_\alpha \bigoplus_{\lambda \in L} M^\lambda_\alpha$ *(bornologiquement).*

(ii) *Pour que E possède la propriété de concordance faible des normes il suffit que* M^λ *possède la même propriété.*

Alors $\tilde{E} = \bigoplus_{\lambda \in L} \tilde{M}^\lambda$ *(algébriquement et bornologiquement).*

Preuve. — (i) Pour tout $\alpha \leqq \beta$ soit $f_{\alpha\beta} : \bigoplus_{\lambda \in L} M^\lambda_\alpha \to \bigoplus_{\lambda \in L} M^\lambda_\beta$ l'injection canonique. Si on note $\pi^\lambda_{\alpha\beta} : M^\lambda_\alpha \to M^\lambda_\beta$ l'injection canonique, $f_{\alpha\beta} = \bigoplus_{\lambda \in L} \pi^\lambda_{\alpha\beta}$. La restriction à M^λ_α de $f_{\alpha\beta}$ est donc $\pi^\lambda_{\alpha\beta}$ donc $f_{\alpha\beta}(M^\lambda_\alpha) = \pi^\lambda_{\alpha\beta}(M^\lambda_\alpha)$ est contenu dans M^λ_β. Si l'on pose

$$E' = \varinjlim_\alpha \left(\bigoplus_{\lambda \in L} M^\lambda_\alpha, f_{\alpha\beta} \right),$$

on peut appliquer un théorème de Bourbaki ([5], § 6, n° 6, prop. 10) pour conclure que $E' = E$. Notons de plus que les applications $f_{\alpha\beta}$ sont injectives puisque $\ker f_{\alpha\beta} = \bigoplus_{\lambda \in L} \ker \pi^\lambda_{\alpha\beta}$. Reste à montrer que $E' = E$ bornologiquement. Pour cela notons :

(1) $E = \bigoplus_{\lambda \in L} M^\lambda$, $\quad \tau_\lambda : M^\lambda \to E$ (injection canonique),

(2) Pour λ fixé, $M^\lambda = \varinjlim M^\lambda_\alpha$ et $\pi^\lambda_\alpha : M^\lambda_\alpha \to M^\lambda$ (application canonique),

(3) Pour α fixé, $E_\alpha = \bigoplus_{\lambda \in L} M^\lambda_\alpha$ et $\theta_\lambda : M^\lambda_\alpha \to E_\alpha$ (injection canonique),

(4) $E' = \varinjlim E_\alpha$, $\quad f_\alpha : E_\alpha \to E'$ (application canonique).

D'après (1) et (2) la bornologie convexe de E est la plus fine parmi celles rendant bornées les applications $\tau_\lambda \circ \pi^\lambda_\alpha : M^\lambda_\alpha \to E$ (transitivité des structures finales [3]). D'après (3) et (4) la bornologie convexe de E′ est la plus fine parmi celles rendant bornées les applications $f_\alpha \circ \theta_\lambda : M^\lambda_\alpha \to E'$. Or $\pi^\lambda_{\alpha\beta}$ est la restriction de $f_{\alpha\beta}$ à M^λ_α donc π^λ_α est la restriction de f_α à M^λ_α. Donc si x est un élément de M^λ_α on a

$$(f_\alpha \circ \theta_\lambda)(x) = f_\alpha(\theta_\lambda(x)) = f_\alpha(x) = \pi^\lambda_\alpha(x) = \tau_\lambda \circ \pi^\lambda_\alpha(x),$$

et par conséquent $f_\alpha \circ \theta_\lambda = \tau_\lambda \circ \pi^\lambda_\alpha$ sur M^λ_α donc $E = E'$ (bornologiquement).

(ii) Supposons que chaque M^λ possède la propriété de concordance faible des normes. On a

$$E = \varinjlim_\alpha \bigoplus_{\lambda \in L} M^\lambda_\alpha = \varinjlim_\alpha \left(\varinjlim_J N_{\alpha, J} \right) \qquad \text{(bornologiquement)}$$

avec

$$N_{\alpha, J} = \bigoplus_{\lambda \in J} M^\lambda_\alpha \qquad \text{(somme directe localement convexe)},$$

où J est une partie finie quelconque de L. Autrement dit, $E = \varinjlim_\nu N_\nu$, où $\nu = (\alpha, J)$. Les espaces N_ν sont des espaces normés. De plus, ces espaces sont injectivement plongés dans E puisque les espaces $\bigoplus_{\lambda \in L} M^\lambda_\alpha$ sont injectivement plongés dans E. Il en résulte que si $(B_i)_{i \in I}$ est une base quelconque de bornologie de E, les familles (B_i) et (N_ν) sont cofinales puisque $\varinjlim B_i = \varinjlim N_\nu$, (bornologiquement), donc (N_ν) est une base de bornologie de E. Pour montrer que E possède la propriété envisagée il suffit donc de montrer que les applications $\widehat{\pi^J_{\alpha,\beta}} : \widehat{N_{\alpha,J}} \to \widehat{N_{\beta,J}}$ sont injectives; autrement dit que les applications linéaires $\widehat{\bigoplus_{\lambda \in J} \pi^\lambda_{\alpha\beta}} : \widehat{\bigoplus_{\alpha \in J} M^\lambda_\alpha} \to \widehat{\bigoplus_{\lambda \in J} M^\lambda_\beta}$ sont injectives.

Or

$$\widehat{\bigoplus_{\lambda \in J} M^\lambda_\alpha} = \bigoplus_{\lambda \in J} \widehat{M^\lambda_\alpha} \qquad (J \text{ est fini}),$$

donc

$$\widehat{\bigoplus_{\lambda \in J} \pi^\lambda_{\alpha\beta}} = \bigoplus_{\lambda \in J} \widehat{\pi^\lambda_{\alpha\beta}}$$

donc

$$\ker\left(\widehat{\bigoplus_{\lambda \in J} \pi^\lambda_{\alpha\beta}}\right) = \ker\left(\bigoplus_{\lambda \in J} \widehat{\pi^\lambda_{\alpha\beta}}\right) \bigoplus_{\lambda \in J} \ker\left(\widehat{\pi^\lambda_{\alpha\beta}}\right) = 0,$$

C. Q. F. D.

Alors

$$\tilde{E} = \varinjlim \hat{N}_\nu \text{ (théorème 2)} = \varinjlim_{\alpha, J} \widehat{\bigoplus_{\lambda \in J} M^\lambda_\alpha} = \varinjlim_{\alpha, J} \bigoplus_{\lambda \in J} \widehat{M^\lambda_\alpha} = \varinjlim_{\alpha}\left(\varinjlim_{J} \bigoplus_{\lambda \in L} \widehat{M^\lambda_\alpha}\right)$$

$$= \varinjlim_{\alpha} \bigoplus_{\lambda \in L} \widehat{M^\lambda_\alpha} = \bigoplus_{\lambda \in L} \varinjlim_{\alpha} \widehat{M^\lambda_\alpha} \text{ [d'après le raisonnement de } (i)] = \bigoplus_{\lambda \in L} \widehat{M^\lambda},$$

toutes les égalités étant bornologiques ; la proposition est démontrée.

Corollaire. — *Soit* $E = \prod_{i=1}^{n} E_i$ *un produit bornologique fini d'ebc aux normes faiblement concordantes.* E *est un ebc aux normes faiblement concordantes et* $\tilde{E} = \prod_{i=1}^{n} \tilde{E}_i$ *(produit et égalité bornologiques).*

Proposition 11. — *Soient* E *un ebc;* F_1 *un sous-espace de* E *et* F *la b-fermeture de* F_1 *dans* $\tilde{E}$. *Alors* $\left(\frac{E}{F_1}\right)^\sim = \frac{\tilde{E}}{F}$. *En particulier si* E *est un ebc aux normes faiblement concordantes tel que*

$$E = \varinjlim (E_i, \pi_{ij}), \qquad \left(\frac{E}{F_1}\right)^\sim = \varinjlim \left(\frac{\hat{E}_i}{F \cap \hat{E}_i}, \widehat{\pi_{ij}}\right),$$

les $\widehat{\pi_{ij}}$ *étant injectives.*

Preuve. — La première assertion résulte du fait que le quotient (séparé) d'un ebc complet est complet (résultat qui n'a pas en général d'équivalent en topologie) et de la propriété universelle du complété bornologique.

La seconde assertion résulte de la première et de la proposition 3. Les vérifications sont immédiates.

4. Prolongement des injections et complétion des limites inductives. — Soit u une application linéaire continue de G dans H où G et H sont des espaces vectoriels topologiques séparés : Nous dirons que u vérifie la « *condition de Robertson* » si pour tout filtre de Cauchy Φ de G tel que $u(\Phi)$ converge vers un point de $u(\Phi)$, Φ converge vers un point de G. On sait que cette condition équivaut à dire que l'application $\hat{u}$ de $\hat{G}$ dans $\hat{H}$ est injective dès que u est injective.

Définition. — *Soient* $E = \varinjlim (E_i, \pi_{ij})$ *et* $F = \varinjlim (F_k, \tau_{kl})$ *deux ebc séparés et* u *une application linéaire bornée de* E *dans* F. *Pour tout indice* i *soit* $u_{i, f(i)}$ *la restriction de* u *à* E_i *à valeurs dans* $F_{f(i)}$ (notations de la démonstration de la proposition 2).

Nous dirons que u *vérifie la condition de Robertson si toutes les applications* $u_{i, f(i)}$ *vérifient la condition de Robertson.*

La démonstration de la proposition 2 permet d'énoncer le résultat suivant :

Proposition 12. — *Soient* E *et* F *deux ebc aux normes faiblement concordantes et* u *une injection linéaire bornée de* E *dans* F *vérifiant la condition de Robertson,* $\tilde{u}$ *est une injection de* $\tilde{E}$ *dans* $\tilde{F}$.

On tire immédiatement le

Corollaire. — *Soit* $E = \varinjlim (E_\alpha, \pi_{\alpha\beta})$ *une limite inductive d'ebc séparés. Si pour tout* $\alpha \leq \beta$, $\pi_{\alpha\beta}$ *est une injection vérifiant la condition de Robertson :*

$$\tilde{E} = \varinjlim_{\alpha} (\tilde{E}_\alpha, \tilde{\pi}_{\alpha\beta}).$$

Preuve. — En effet l'hypothèse entraîne que les applications $\pi_{\alpha x}$ vérifient la condition de Robertson, ce qui équivaut à dire que les ebc E_α vérifient la propriété de concordance faible des normes.

5. Caractérisation du complété.

Proposition 13. — *Soient un ebc complet* $E = \varinjlim(E_i, \pi_{ij})$, F *un sous-espace bornologique de* E. *Pour que* E *coïncide algébriquement et bornologiquement avec* $\tilde{F}$, *il faut que* F *soit dense au sens de Mackey dans* E *et il suffit que pour tout* $i \in I$, $F \cap E_i$ *soit dense dans* E_i.

Preuve. — La nécessité résulte de ce qui précède (théorème 2). Démontrons la suffisance. Pour cela, il suffit de montrer que E vérifie la propriété (P) du théorème 1 relative à F. Soit donc G un ebc complet et $u : F \to G$ une application linéaire bornée. Si $F_i = F \cap E_i$, on sait que $F = \varinjlim F_i$ (prop. 9) et que F est un ebc aux normes faiblement concordantes. Donc u est bornée sur $F = \varinjlim F_i$. Soit u_i la restriction de u à F_i; c'est une application linéaire bornée de F_i dans G donc (théorème 1) se prolonge de manière unique en une application linéaire bornée $\hat{u}_i$ de $\tilde{F}_i = \hat{F}_i = E_i$ dans G. Par « recollement des morceaux » (raisonnement du théorème 1) on obtient une application linéaire bornée $\tilde{u} = \varinjlim u_i$ de $E = \varinjlim E_i$ dans G prolongeant u de manière unique d'où $E = \tilde{F}$ et la proposition est démontrée.

III. — RAPPORTS ENTRE COMPLÉTION BORNOLOGIQUE ET COMPLÉTION VECTORIELLE TOPOLOGIQUE.

Soit E un elc (espace localement convexe) séparé; BE, l'ebc associé. On sait que BE possède la propriété de concordance forte des normes, ce qui entraîne en particulier que l'application canonique $i : BE \to \widetilde{BE}$ est un *isomorphisme* bornologique (dans); autrement dit, *la bornologie de* E *est l'image réciproque par* i *de la bornologie de* $\widetilde{BE}$ [*ou de celle de* $i(E)$].

Soit $\hat{E}$ le complété topologique de E et $u : E \to \hat{E}$ l'injection canonique. Puisque $\hat{E}$ est un ebc complet, il existe une application linéaire bornée $\tilde{u}$ unique de $\widetilde{BE}$ dans $\hat{E}$ telle que $u = \tilde{u} \circ i$.

L'application $\tilde{u}$ n'est autre que le prolongement de l'injection $E \to \hat{E}$ au complété bornologique $\widetilde{BE}$ de $\hat{E}$. On l'appellera l'*application canonique de* $\widetilde{BE}$ *dans* $\hat{E}$.

Proposition 14. — *Soit* E *un espace localement convexe séparé et bornologique;* $\hat{E} = \widehat{T\widetilde{BE}}$ (*algébriquement et topologiquement*).

Preuve. — Soit $Ei : E \to \widetilde{BE}$. C'est une application linéaire bornée de E dans $T\widetilde{BE}$ donc de E dans $\widehat{T\widetilde{BE}}$; comme E est bornologique, i est continue. Pour montrer que $\hat{E} = \widehat{T\widetilde{BE}}$, il suffit de montrer que le couple $(i, \widehat{T\widetilde{BE}})$ est solution du problème d'application universelle de la complétion des espaces vectoriels topologiques pour E. Soit (ν, F) un couple formé d'une application linéaire continue ν de E dans un elc complet F. Il existe une application linéaire bornée ν_1 unique de $\widetilde{BE}$ dans F telle que $\nu = \nu_1 \circ i$, c'est-à-dire telle que le diagramme

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "i"] \arrow[dr, "\nu"'] & & \widetilde{BE} \arrow[dl, "\nu_1"] \\ & F & \end{tikzcd}$$

soit commutatif. L'application ν_1 étant bornée de $\widetilde{BE}$ dans F est *continue* de $T\widetilde{BE}$ dans F et comme F est complet, ν_1 se prolonge de manière unique en une application linéaire continue $\tilde{\nu}$ de $\widehat{T\widetilde{BE}}$ dans F telle que le diagramme

$$\begin{tikzcd} T\widetilde{BE} \arrow[rr] \arrow[dr, "\nu_1"'] & & \widehat{T\widetilde{BE}} \arrow[dl, "\tilde{\nu}"] \\ & F & \end{tikzcd}$$

soit commutatif; donc le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathrm{E} \arrow[r] \arrow[dr, "v"'] & \widetilde{\mathrm{BE}} = \mathrm{T}\,\widetilde{\mathrm{BE}}\ (\mathrm{alg}) \arrow[r] \arrow[d, "v_1"] & \widehat{\mathrm{T}\widetilde{\mathrm{BE}}} \arrow[dl, "\tilde{v}"] \\ & \mathrm{F} & \end{tikzcd}$$

est commutatif. La factorisation $\tilde{v} = v \circ i$ est la factorisation cherchée et par conséquent $\hat{\mathrm{E}} = \widehat{\mathrm{T}\widetilde{\mathrm{BE}}}$ (algébriquement et topologiquement).

Corollaire 1. — *Si* E *est un elc séparé bornologique; alors* $\hat{\mathrm{E}}$ *contient* $\tilde{\mathrm{E}}$ *et* $\tilde{\mathrm{E}}$ *contient* E, *les injections étant bornées (l'injection* $\mathrm{E} \to \tilde{\mathrm{E}}$ *est même un isomorphisme) (en notant* $\tilde{\mathrm{E}}$ *le complété bornologique de* BE).

Les notations étant celles du corollaire 1, on a le

Corollaire 2. — *Soit* E *un elc métrisable.*

(i) $\tilde{\mathrm{E}} = \hat{\mathrm{E}}$ *(algébriquement);*

(ii) *Du point de vue topologique,* $\hat{\mathrm{E}}$ *est l'espace localement convexe associée à* $\tilde{\mathrm{E}}$;

(iii) *Du point de vue bornologique, la bornologie de* $\hat{\mathrm{E}}$ *est identique à la bornologie affaiblie de* $\tilde{\mathrm{E}}$, *c'est-à-dire* $\mathrm{B}\hat{\mathrm{E}} = \mathrm{B}\,\mathrm{T}\tilde{\mathrm{E}}$.

Preuve. — En vertu de la proposition 13, il suffit de montrer que $\tilde{\mathrm{E}} = \hat{\mathrm{E}}$ (algébriquement) (*voir* remarque 2 ci-dessous). Tout élément x de $\hat{\mathrm{E}}$ est limite dans $\hat{\mathrm{E}}$ d'une suite (x_n) de points de E. La suite (x_n) est donc de Cauchy dans E. Puisque E vérifie la condition de convergence de Mackey, la suite (x_n) est une suite de Cauchy au sens bornologique dans E donc converge dans $\tilde{\mathrm{E}}$ (au sens de Mackey) vers un point y. Comme $\tilde{\mathrm{E}}$ est injectivement et bornologiquement plongé dans $\hat{\mathrm{E}}$, la suite (x_n) converge bornologiquement donc topologiquement vers y dans $\hat{\mathrm{E}}$. Il en résulte que $x = y$, donc $x \in \tilde{\mathrm{E}}$.

Remarque 1. — L'assertion (iii) du corollaire 2, entraîne que si $\tilde{\mathrm{E}}$ est un ebc topologique, tout borné de $\hat{\mathrm{E}}$ est adhérent dans $\hat{\mathrm{E}}$ à un borné de E, autrement dit on a alors une réponse affirmative à un problème de Grothendieck : « Si E est un espace métrisable, tout borné de $\hat{\mathrm{E}}$ est-il contenu dans l'adhérence d'un borné de E » [15].

Remarque 2. — Si E est un elc bornologique (non nécessairement métrisable) l'égalité algébrique $\tilde{\mathrm{E}} = \hat{\mathrm{E}}$ entraîne aussitôt que $\hat{\mathrm{E}}$ est un elc bornologique puisqu'alors on a d'une part $\mathrm{T}\widetilde{\mathrm{BE}} = \hat{\mathrm{E}}$ (algébriquement) et d'autre part $\hat{\mathrm{E}} = \widehat{\mathrm{T}\widetilde{\mathrm{BE}}}$ (algébriquement et topologiquement) donc $\mathrm{T}\widetilde{\mathrm{BE}} = \widehat{\mathrm{T}\widetilde{\mathrm{BE}}}$ (algébriquement donc topologiquement) donc $\hat{\mathrm{E}} = \mathrm{T}\widetilde{\mathrm{BE}}$ (algébriquement et topologiquement). Il en résulte que l'égalité algébrique $\tilde{\mathrm{E}} = \hat{\mathrm{E}}$ est une condition suffisante pour une solution affirmative à un problème de Dieudonné : « Le complété d'un elc bornologique est-il encore un elc bornologique » [11].

D'un autre point de vue, on sait que moyennant l'hypothèse du continu, T. Komura et Y. Komura ont construit un elc bornologique dont le complété n'est pas bornologique [28], ce qui est une réponse « *presque* » négative à la question de Dieudonné. On peut donc conclure qu'il est *peu probable* qu'on ait *en général* l'égalité algébrique $\tilde{\mathrm{E}} = \hat{\mathrm{E}}$.

Remarque 3. — E étant toujours un elc bornologique on sait (corollaire 1 ci-dessus) que $\tilde{\mathrm{E}} \subset \hat{\mathrm{E}}$. *A priori*, $\tilde{\mathrm{E}}$ est distinct de $\overline{\mathrm{E}}$, b-fermeture de E dans $\hat{\mathrm{E}}$. Puisque tout point de $\tilde{\mathrm{E}}$ est limite au sens de Mackey dans $\tilde{\mathrm{E}}$, donc dans $\hat{\mathrm{E}}$ d'une suite de points de E, l'espace $\tilde{\mathrm{E}}$ est contenu dans $\overline{\mathrm{E}}$ mais on sait qu'en général un point de $\overline{\mathrm{E}}$ ne se détermine au moyen des suites de points de E qu'en utilisant le principe de récurrence transfinie.

Note. — Après la publication de mes deux Notes aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* sur le présent travail, M. Henri Buchwalter a bien voulu me faire parvenir sa Thèse doctorale soutenue en septembre 1968. Dans celle-ci, l'auteur a résolu le problème de la complétion bornologique pour un ebc *polaire*, c'est-à-dire un ebc *t*-séparé tel que l'adhérence faible de tout disque borné soit encore bornée. Comme tout ebc polaire est un ebc aux normes fortement concordantes (la réciproque étant évidemment fausse), son résultat est un cas particulier du cas particulier envisagé au paragraphe II.

DEUXIÈME PARTIE.

PRODUITS TENSORIELS BORNOLOGIQUES D'ESPACES BORNOLOGIQUES.

INTRODUCTION.

Le but du présent travail est de poser sous sa forme générale et de résoudre le problème du produit tensoriel bornologique d'espaces bornologiques. En quoi consiste ce problème ? Chacun sait que si E et F sont des espaces vectoriels, le *produit tensoriel algébrique* (ou produit de Kronecker) $E \otimes F$ est solution du problème consistant à construire un espace vectoriel Φ tel que les applications bilinéaires de $E \times F$ dans un espace vectoriel G correspondent biunivoquement aux applications linéaires de Φ dans G, autrement dit, $E \otimes F$ est solution du problème de la « linéarisation du bilinéaire ». Lorsque E et F sont munis de structures topologiques (localement convexes), le problème qui se pose alors est de savoir si l'on peut munir l'espace vectoriel $E \otimes F$ d'une ou de plusieurs topologies convenables permettant de faire correspondre biunivoquement les applications bilinéaires continues (resp. séparément continues, plus généralement hypocontinues) de $E \times F$ dans un elc G aux applications linéaires continues de $E \times F$ dans G. Le problème ainsi posé est le problème du *produit tensoriel topologique* d'espaces vectoriels topologiques. Il fut attaqué pour la première fois avec un succès remarquable par R. Schatten [42] dans le cas où E et F sont des espaces de Banach; ensuite, il fut traité sous sa forme générale et complète par A. Grothendieck [16]. Si E et F sont munis de structures bornologiques (non nécessairement topologiques) il devient alors

clair que le problème du *produit tensoriel bornologique* d'espaces bornologiques consiste à construire un ou des ebc Φ ou, ce qui revient au même, à déterminer et étudier de façon systématique les bornologies convenables sur $E \otimes F$ telles que « certains types » d'applications bilinéaires de $E \times F$ dans un ebc G, correspondent biunivoquement aux applications linéaires bornées de Φ dans G. Ce problème fut attaqué pour la première fois par M. Lucien Waelbroeck [53]. Mais cet auteur se borna à prouver l'existence de Φ dans un cas très particulier. Par des méthodes tout à fait différentes de celles de M. Waelbroeck et dans l'esprit de Grothendieck [16], nous posons et attaquons avec succès ce problème sous sa forme générale.

Sur $E \otimes F$ nous définissons une famille de bornologies universelles dites (λ, τ)-*bornologies* dépendant d'un couple de paramètres (λ, τ) où λ et τ sont des familles de parties de E et F. L'espace $E \otimes F$ muni de la (λ, τ)-bornologie est la solution du problème de « linéarisation bornologique » (rendre linéaire et bornée) des applications bilinéaires dites (λ, τ)-*hypobornées*, notion introduite par nous qui généralise la notion d'application bilinéaire bornée et qui constitue un équivalent bornologique de l'hypocontinuité de Bruhat-Schwartz [45] plus générale que l'hypocontinuité de Bourbaki [7]. Nous appelons π_b la (λ, τ)-bornologie lorsque λ (resp. τ) est précisément la bornologie donnée de E (resp. de F). La bornologie π_b est le produit tensoriel bornologique dans la catégorie des espaces bornologiques.

Une théorie générale des bornologies dans les espaces fonctionnels faite au chapitre I nous permet de définir des bornologies convenables dans les espaces d'applications linéaires et bilinéaires de façon que l'isomorphisme algébrique entre l'espace des applications (λ, τ)-hypobornées de $E \times F$ dans G et l'espace des applications linéaires bornées de $E \otimes F$ muni de la (τ, λ)-bornologie devienne remarquablement un isomorphisme bornologique, résultat qui, on le sait, n'a pas d'équivalent en topologie (« problèmes des topologies » de Grothendieck).

Enfin, pour reprendre une expression imagée de J. Dieudonné [11], le produit tensoriel algébrique $E \otimes F$, même convenablement bornologisé est « *trop petit* » pour les besoins de l'Analyse fonctionnelle. Il faut ajouter à cet espace d'opérateurs de rang fini, les limites en un sens à préciser de ses éléments, autrement dit, il faut le *compléter* en un sens convenable. C'est la solution générale du problème de complétion bornologique donnée par la première partie de ce Mémoire qui fournit la possibilité de le faire sans aucune restriction superflue. Et nous voilà alors à l'étape ultime du processus de définition des produits tensoriels « hypobornologiques ».

Partant d'un autre point de vue, nous définissons une bornologie tensorielle ε_b, équivalent bornologique de la topologie tensorielle de la convergence bi-équicontinue de Grothendieck. La bornologie i_b, (λ, τ)-bornologie correspondant à γ et τ famille des enveloppes disquées de parties finies de E et F d'une part, la bornologie ε_b de l'autre, semblent les deux extrêmes de la gamme de toutes les « bonnes » bornologies sur $E \otimes F$.

Ensuite, nous étudions les interrelations sur $E \otimes F$ entre topologies et bornologies. Nos résultats les plus importants sur cette question sont donnés au paragraphe 2, nº 3, où nous retrouvons les topologies tensorielles projective et inductive de Grothendieck à partir de notre théorie bornologique (avec des conditions précises sur les espaces E et F) et au paragraphe 4, nº 2, théorème 2, corollaire, où nous obtenons une expression bornologique du célèbre théorème général des noyaux de Schwartz-Grothendieck.

Enfin, nous donnons une interprétation concrète des tenseurs bornologiques par le théorème de régularité du paragraphe 3, nº 2. Ce qu'il y a de particulièrement remarquable dans cette question est que la plupart de classes d'opérateurs introduits par Grothendieck dépendent beaucoup plus de la bornologie que de la topologie des espaces où ces opérateurs opèrent. Cette importante remarque, systématisée, ouvre et illumine naturellement la voie d'une fructueuse généralisation de certains de ces types d'opérateurs indépendamment *a priori* de toute topologie. L'étude de certains de ces nouveaux êtres est l'objet de la troisième partie du présent Mémoire.

CHAPITRE I.

THÉORIE GÉNÉRALE DES BORNOLOGIES DANS LES ESPACES FONCTIONELS : σ-BORNOLOGIES.

§ 1. Définition et propriétés générales des σ-bornologies.

Sauf mention expresse du contraire, nous désignerons dans tout ce paragraphe par :

X, un ensemble non vide;
σ, une famille non vide de parties de X;
F, un ensemble bornologique;
$\mathcal{B}$, la bornologie de F;
F^X, l'ensemble des applications de X dans F;
H, une partie non vide de F^X;
$B(M) = \bigcup_{u \in B} u(M)$ lorsque $B \subset F^X$ et $M \subset X$.

DÉFINITION 1. — *Une partie* B *de* H *sera dite* σ-bornée *si pour tout élément de* σ, $B(M) = \bigcup_{u \in B} u(M)$ *appartient à* $\mathcal{B}$.

Soit $\mathcal{B}_\sigma$ la famille des parties σ-bornées de H. Il est immédiat que $\mathcal{B}_\sigma$ est une famille héréditaire et stable par réunion finie; on a donc la proposition immédiate suivante :

PROPOSITION 1. — *Pour que* $\mathcal{B}_\sigma$ *définisse une bornologie sur* H, *il faut et il suffit que tout point de* H *soit σ-borné* [condition (R)].

DÉFINITION 2. — *Lorsque la condition* (R) *est satisfaite, nous appellerons* σ-bornologie *sur* H *la bornologie définie par les parties σ-bornées de* H.

Sauf mention expresse du contraire, on supposera désormais, en plus des données générales du début de ce paragraphe, que F est un espace vectoriel bornologique non réduit à (o) sur un corps $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$; H un sous-espace vectoriel de F^X et la condition (R) satisfaite. Ces hypothèses permanentes ne seront pas nécessairement répétées dans la suite.

Les propriétés d'une σ-bornologie sont résumées dans le théorème suivant :

THÉORÈME 1 :

(i) *La σ-bornologie sur* H *est compatible avec la structure d'espace vectoriel de* H.

(ii) *Si* F *est un ebc, la σ-bornologie vectorielle sur* H *est convexe.*

(iii) *Si* F *est un evb t-séparé (resp. séparé) et si la réunion* A *des ensembles de σ sépare* H, *la σ-bornologie sur* H *est t-séparée (resp. séparée).*

(iv) *Si la bornologie de* F *est de caractère dénombrable, la σ-bornologie sur* H *est de caractère dénombrable.*

(v) *On suppose que les éléments de σ forment un recouvrement de* X. *Alors si* F *est un ebc complet et si* $H = F^X$, H *muni de la σ-bornologie est un ebc complet.*

Preuve. — Les assertions (i) et (ii) sont de vérification immédiate à partir des définitions. L'assertion de (iii) concernant la séparation se vérifie par un raisonnement analogue à un raisonnement classique de Bourbaki ([7], chap. III, § 3, n° 2). En effet : soit u un élément non nul de H tel que la droite $\mathbf{K}u$ soit bornée. Alors pour tout élément non vide M de σ, $\mathbf{K}u(M)$ est borné dans F. Puisque u est non nul et que A sépare H, il existe un élément x_0 de A tel que $u_0(x_0) \neq 0$. Soit alors M un élément de σ contenant x_0, $u_0(M) \neq \{0\}$ et $u_0(M) \neq \emptyset$. Si alors $y_0 = u_0(x_0)$, la droite $\mathbf{K}y_0$ est contenue dans $\mathbf{K}u(M)$ donc est bornée, ce qui contredit l'hypothèse de séparation de F.

Démontrons l'assertion (iii) relative à la t-séparation. Soit τ une topologie localement convexe séparée sur F engendrant une bornologie moins fine que la bornologie de F et soit T_0 la σ-topologie sur H au sens de Bourbaki lorsqu'on considère H comme espace de fonctions à valeurs dans l'espace vectoriel topologique (F, τ). La topologie T_0 est séparée car (F, τ) est séparé et A sépare les points de H. De plus, il est immédiat que la bornologie $\mathcal{B}_0$ associée à T_0 est moins fine que la σ-bornologie sur H, d'où l'assertion (iii).

Démontrons l'assertion (iv). Soit B une partie de H telle que toute suite de B soit bornée et M un élément de σ. Soit y_n une suite de $B(M) = \bigcup_{u \in B} u(M)$. Pour tout n, $y_n = u_n(x_n)$ où $u_n \in B$ et $x_n \in M$. La suite $S = (u_n)$ est σ-bornée par hypothèse sur B donc S(M) et *a fortiori* $S(\{x_n\})$ est bornée dans F et par conséquent la suite $\{y_n\}$ qui est contenue dans $S(\{x_n\})$ est bornée dans F; donc B (M) est bornée dans F et comme M est arbitraire dans F, B est bornée dans H, d'où l'assertion (iv).

(v) Soit B un borné disqué de H. Il est clair que B est un disque séparant car H est un ebc séparé (iii). Soit (f_n) une suite de Cauchy de H_B. Pour tout $x \in X$ la suite $(f_n(x))$ est de Cauchy dans $F_{B(x)}$ car $P_{B(x)}[f_n(x) - f_m(x)] \leqq P_B[f_n - f_m]$, où P_B [resp. $P_{B(x)}$] désigne la jauge de B [resp. de B(x)]. Comme F est complet, B(x) est contenu dans un disque borné complétant B_x, donc $f_n(x)$ converge dans F_{B_x}. On définit ainsi une fonction $f(x)$ sur X à valeurs dans F. Nous allons montrer que $p_B(f_n - f)$ tend vers zéro autrement dit, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0(\varepsilon)$ tel que pour tout $n \geqq n_0$ il existe $\lambda_0(n) > 0$ vérifiant à la fois $\lambda_0(n) \leqq \varepsilon_0$ et $(f_n - f) \in \lambda_0(n)B$. Par hypothèse il existe $n'_0(\varepsilon)$ tel que pour tout couple (m, n) d'entiers $\geqq n'_0$ il existe $\lambda = \lambda(m, n) > 0$ vérifiant $\lambda \leqq \varepsilon$ et $\lambda^{-1}(f_m - f_n) \in B$. En prenant la borne supérieure de $\lambda(m, n)$ lorsque m et n varient tout en restant supérieurs à n'_0, on établit qu'on peut choisir λ indépendant du couple (m, n) pourvu que $m \geqq n'_0$ et $n \geqq n'_0$. Prenons $n_0 = n'_0$ et $\lambda_0 = \lambda$. Comme $\lambda_0 \leqq \varepsilon$, il suffit de montrer que $(f_n - f) \in \lambda_0 B$. Or $f_n - f_m \in \lambda B$, donc $f_n - f_m = \lambda u = \lambda_0 u$, où $u \in B$, d'où pour tout $x \in X$,

$$f_n(x) - f_m(x) - \lambda_0 u(x) = 0, \qquad \text{donc} \quad p_{B_x}[f_n(x) - f_m(x) - \lambda u(x)] = 0.$$

Fixons $n = n_0$ et faisons tendre m vers $+\infty$ (raisonnement classique), nous en déduisons que

$$p_{B_x}[f_n(x) - f(x) - \lambda u(x)] = 0 \qquad \text{donc} \quad f_n(x) - f(x) - \lambda u(x) = 0,$$

donc $f_n - f \in \lambda B$ et l'assertion (v) est démontrée. Le théorème 1 est complètement démontré.

De la démonstration du théorème résulte la proposition suivante :

PROPOSITION 2. — *On suppose que σ est un recouvrement de* X*; F un ebc séparé non nécessairement complet et* $H = F^X$.

Pour qu'une suite de Cauchy-Mackey dans F^X *converge vers* f *au sens de Mackey, il faut et il suffit que pour tout* $x \in X$, $f_n(x)$ *converge vers* $f(x)$ *au sens de Mackey dans* F.

COROLLAIRE. — *Dans les conditions de la proposition* 2, *si* F *est complet au sens de Mackey,* F^X *est aussi complet au sens de Mackey.*

§ 2. Topologies et bornologies sur Hom (E, F).

Si E et F sont des ebc on désignera par Hom(E, F) l'espace des applications linéaires bornées de E dans F.

1. STABILITÉ D'UNE σ-BORNOLOGIE SUR Hom (E, F).

PROPOSITION 1. — *Soient* E *et* F *deux ebc; σ une famille non vide de parties de* E *et* H = Hom(E, F). *On suppose que tout élément u de* H *est σ-borné. Alors la σ-bornologie sur* H *ne change pas si l'on remplace σ par l'un quelconque les ensembles de parties suivants :*

1° *l'ensemble* σ_1 *des parties des éléments de* σ;
2° *l'ensemble* σ_2 *des réunions finies des éléments de* σ;
3° *l'ensemble* σ_3 *des homothétiques des éléments de* σ;
4° *l'ensemble* σ_4 *des sommes finies des éléments de* σ;
5° *l'ensemble* σ_5 *des enveloppes équilibrées des éléments de* σ;
6° *l'ensemble* σ_6 *des enveloppes convexes des éléments de* σ;

Preuve. — La démonstration de la proposition se réduit à une vérification immédiate à partir de la remarque évidente suivante :

Remarque. — Soient τ_1 et τ_2 deux familles de parties d'un ensemble non vide X définissant des bornologies $\mathcal{B}_{\tau_1}$ et $\mathcal{B}_{\tau_2}$ sur un sous-espace H de F^X. Pour que $\mathcal{B}_{\tau_1}$ soit moins fine que $\mathcal{B}_{\tau_2}$, il suffit que tout élément de τ_1 soit contenu dans un élément de τ_2.

Scholie. — Il résulte de la proposition ci-dessus que, pour définir une σ-bornologie convexe sur Hom(E, F), lorsque E et F sont des ebc, on peut supposer sans restreindre la généralité que σ est une famille héréditaire de parties de E, stable par réunion finie, par somme vectorielle, par homothétie et par passage à l'enveloppe disquée; en un mot *on peut supposer que σ est une base d'une bornologie vectorielle et convexe sur* E. La σ-bornologie la plus importante sur Hom(E, F) est celle pour laquelle la bornologie définie par σ est équivalente à la bornologie initiale de E, d'où la définition suivante :

DÉFINITION 1. — *Soient* E *et* F *deux ebc. Sur l'espace* Hom(E, F), *on appellera bornologie canonique ou naturelle, la σ-bornologie où σ est une base de la bornologie de* E.

Du théorème 1 du paragraphe précédent on tire alors la

PROPOSITION 2. — *Soient* E *et* F *deux ebc. La bornologie naturelle sur* Hom(E, F) *est vectorielle, convexe séparée (si* F *est séparé), t-séparée (si* F *est t-séparée) et de caractère dénombrable si celle de* F *l'est.*

2. TOPOLOGIE DE LA CONVERGENCE BORNÉE SUR Hom(E, F).

— Rappelons que si E et F sont deux ebc, on a les relations

$$\mathrm{Hom}(E, F) \subset \mathrm{Hom}(E, BTF) = \mathcal{L}(TE, TF).$$

Par conséquent, Hom(E, F) = $\mathcal{L}$(TE, TF) si F est un ebc topologique. Soit σ la bornologie de E. Puisque tout élément de σ est borné pour $\sigma(E, E^\times)$, c'est-à-dire borné pour TE, la famille σ définit sur $\mathcal{L}$(TE, TF) une σ-topologie strictement moins fine que la topologie de la convergence bornée dans $\mathcal{L}$(TE, TF) si E n'est pas topologique. Si F est un ebc topologique on définit ainsi par « transport de structure » une topologie sur Hom (E, F) que nous appellerons la *topologie de la convergence bornée sur* Hom(E, F). De même on peut définir sur Hom(E, F) la topologie de la convergence simple. Il est clair que la topologie de la convergence bornée sur Hom(E, F) possède alors un système fondamental de voisinages de o fermés pour la topologie de la convergence simple : [*cf.* [7], chap. III, § 3, n° 1, remarque 2].

Pour la commodité de langage introduisons systématiquement la terminologie suivante :

Terminologie et notations. — Soit (P) une propriété d'espace vectoriel topologique.

Nous dirons qu'un espace vectoriel bornologique possède la propriété (P) si TE la possède. Ainsi, nous parlerons d'evb t-complets, t-tonnelés, etc. Si E et F sont deux ebc on notera $\mathrm{Hom}_b(E, F)$ [resp. $\mathrm{Hom}_s(E, F)$] l'espace Hom(E, F) muni de la topologie de la convergence bornée (resp. de la topologie de la convergence simple).

Théorème 1. — *Soient* E *et* F *deux ebc;* F *étant un ebc topologique.*

(i) *Si* F *est t-séparé,* $\mathrm{Hom}_b(E, F)$ *est un elc séparé;*

(ii) *si* F *est t-séparé et t-complet,* $\mathrm{Hom}_b(E, F)$ *est un elc séparé et complet.*

Preuve. — Par transport de structure on peut raisonner dans $\mathcal{L}$(TE, TF). La première assertion résulte alors d'un critère classique de séparation d'une σ-topologie. Démontrons la seconde assertion. Remarquons que si tout compact de TE est borné dans E, la seconde assertion résulte immédiatement d'un exercice de Bourbaki ([7], chap. III, § 3, exercice n° 18). Dans le cas général, faisons un raisonnement direct. Soit $\Phi = (u_j)_{j\in I}$ un « filtre » de Cauchy dans $\mathrm{Hom}_b(E, F)$; il converge simplement vers une application linéaire u_0 de E dans F. Nous allons montrer que u_0 appartient à Hom(E, F). Soit M un borné de E. Puisque F est un ebc topologique, il nous suffit de montrer que $u_0(M)$ est borné dans TF. Soit alors V un disque bornivore de F et W un autre disque bornivore de F faiblement fermé tel que $W + W \subset V$. Le filtre Φ étant de Cauchy dans $\mathrm{Hom}_b(E, F) = \mathcal{L}(TE, TF)$, est petit d'ordre $T_0(M, W)$ donc il existe $J \subset I$ tel que pour tout i et j appartenant à J, $u_i - u_j \in T_0(M, W)$. Fixons i dans J et faisons converger $u_j(x)$ vers $u_0(x)$ dans TF ($x \in M$). Comme W est fermé dans TF, $u_0(M)$ ($u_i(M) \subset W$, donc $u_0(M) \subset u_i(M) + W$. Comme $u_i(M)$ est borné dans F, *a fortiori* dans TF, il est absorbé par tout disque bornivore de F donc, il existe λ_i tel que $u_i(M)$ soit contenu dans $\lambda_i W$, et par conséquent

$$u_0(M) \subset \lambda_i W + W \subset W + W \subset V \quad \text{si } |\lambda_i| \leq 1$$

ou

$$\subset \lambda_i W + \lambda_i W \subset \lambda_i V \quad \text{si } |\lambda_i| > 1.$$

Dans tous les cas, $u_0(M)$ est absorbé par V. V étant un disque bornivore arbitraire de F, nous avons prouvé que $u_0(M)$ est borné dans TF, donc $u_0 \in \mathrm{Hom}(E, F)$. On conclut alors en utilisant la classique condition « VF » (voisinages fermés) (*voir* au début de ce numéro).

Remarque. — La partie (ii) du théorème se vérifie aussi par conjugaison d'un résultat de Grothendieck ([16], Intr. III, 4) et du fait que E^* muni de la topologie de la convergence uniforme sur les bornés de E est complet.

Théorème 2. — *Soient* E *et* F *deux ebc séparés;* F *étant un ebc topologique t-séparé.*

(*a*) *Sur* Hom(E, F) *les trois bornologies suivantes sont identiques :*

(i) *La bornologie associée à la topologie de la convergence bornée;*

(ii) *La bornologie naturelle;*

(iii) *La bornologie transportée sur* Hom(E, F) *de la bornologie équicontinue de* $\mathcal{L}$(TE, TF).

(*b*) *Si* E *est un ebc complet, les trois bornologies ci-dessus coïncident avec la bornologie sur* Hom(E, F) *associée à la topologie de la convergence simple sur* E.

Preuve. — L'équivalence entre (i) et (ii) résulte des définitions et du fait que F est un ebc topologique. Comme il est clair que (iii) est plus fine que (ii), il suffit de montrer que (i) est plus fine que (iii).

Soit B un borné de $\mathrm{Hom}_b(E, F)$. Pour tout disque bornivore V de F, $\bigcap_{u\in B} u^{-1}(V)$ est un disque bornivore de E ([7], chap. III, § 3, prop. 3) et par conséquent B est une partie équicontinue de $\mathcal{L}$(TE, TF). ([7], chap. III, § 3, n° 5) et la première assertion du théorème est démontrée. La seconde résulte du fait que TE est un elc ultrabornologique donc tonnelé dès que E est un ebc complet.

En particulier, en prenant $F = K$, on tire le :

Corollaire 1. — *Soit* E *un ebc t-séparé;* $E_b^{\times}$ *le dual bornologique de* E *muni de la topologie de la convergence bornée;* $(TE)'$ *le dual topologique de* TE *muni de la bornologie équicontinue et* $E^{\times}$ *le dual bornologique de* E *muni de la bornologie naturelle.*
Alors $B(E_b^{\times}) = (TE)' = E^{\times}$ *(algébriquement et bornologiquement).*

Remarque. — L'égalité $B(E^{\times}) = (TE)'$ est un résultat connu [*voir* par exemple Buchwalter [9], IV, 3, prop. (4.3.2)].

Corollaire 2. — *Soit* E *un ebc t-séparé.* $E^{\times}$ *muni de la bornologie naturelle est un ebc polaire et complet.*

§ 3. Transposition bornologique.

Théorème 1. — *Soient* E *et* F *deux ebc t-séparés;* F *étant supposé un ebc topologique;* u *une application linéaire bornée de* E *dans* F*;* $E^{\times}$ *et* $F^{\times}$ *les duals bornologiques respectifs de* E *et* F*. Alors :*

(*a*) *Il existe une application linéaire* $v : F^{\times} \to E^{\times}$ *unique telle que*

$$(1) \qquad \langle u(x), y^{\times} \rangle = \langle x, v(y^{\times}) \rangle \quad \textit{pour tout } x \in E \textit{ et tout } y^{\times} \in F.$$

(*b*) *Cette application est continue pour les topologies faibles* $\sigma(E^{\times}, E)$ *et* $\sigma(F^{\times}, F)$ *et bornée pour les bornologies naturelles de* $E^{\times}$ *et* $F^{\times}$.

Preuve. — Comme u est une application linéaire continue de TE dans TF, u est continue pour les topologies affaiblies

$$\sigma(TE, (TE)') = \sigma(E, E^{\times}) \quad \text{et} \quad \sigma(TF, (TF)') = \sigma(F, F^{\times})$$

Il existe donc une application linéaire v unique de $(TF)' = F^{\times}$ dans $(TE)' = E^{\times}$ vérifiant (1) ([7], chap. IV, § 4, n° 1, prop. 1).

Cette application est continue tant pour les topologies faibles [ce qui établit la première assertion du (*b*)] que pour les topologies fortes. Alors v est bornée de $B(TF)'_{\beta}$ dans $B(TE)'_{\beta}$ en désignant par G'_{β} le dual fort d'un elc séparé G. Mais $(TE)'_{\beta}$ est plus fine que la topologie de la convergence bornée sur $E^{\times}$, donc la bornologie $B(TE)'_{\beta}$ est plus fine que la bornologie naturelle

sur $E^{\times}$ (§ 2, n° 2, corollaire 1 du théorème 2); donc v est bornée de $B(TF)'_{\beta}$ dans $E^{\times}$ muni de sa bornologie naturelle et comme F est un ebc topologique, la proposition est démontrée.

Définition 1. — *Dans les hypothèses du théorème ci-dessus,* v *sera appelé* la transposée bornologique *de* u.

Remarques. — 1° La relation (1) montre que v est la restriction à $F^{\times}$ de la transposée algébrique de u. On notera donc ${}^t u$ la transposée bornologique de u lorsque aucune confusion ne pourrait en résulter.

2° Si E et F sont deux elc séparés, la transposée bornologique de u est définie sur la clôture du dual topologique F' de F dans son dual algébrique $F^{\times}$ et à valeurs dans la clôture de E' dans $E^{\times}$. (Pour la terminologie, *voir* Bourbaki [7], chap. IV, 2, exercice 10.) En particulier si F est un elc bornologique, ou plus généralement un « boundedly closed space » au sens de Mackey [30], F' est clos dans $F^{\times}$ et par conséquent la transposée bornologique ${}^t u$ de u est définie sur F' à valeurs dans la clôture de E' dans $E^{\times}$. Si u est continue on retrouve la transposée topologique de u et alors ${}^t u$ est nécessairement à valeurs dans E'. Supposons que E est un elc bornologique, F n'étant pas semi-bornologique, la transposée bornologique de u apparaît alors comme *un prolongement borné strict* de sa transposée topologique à la clôture de F' dans $F^{\times}$.

3° Puisque les espaces E et $E^{\times}$ d'une part, F et $F^{\times}$ d'autre part, sont en dualité séparante et que la transposée bornologique de u est algébriquement la transposée de u relativement à ces dualités, tous les résultats classiques généraux de transposition d'applications linéaires faiblement continues sont conservés. En particulier, on peut énoncer les assertions suivantes [la polarité étant relative aux dualités $(E, E^{\times})$ et $(F, F^{\times})$]. Pour toute partie A de E et B de F, on a $(u(A))^{\circ} = {}^t u^{-1}(A^{\circ})$; la relation $u(A) \subset B$ entraîne ${}^t u(B^{\circ}) \subset A^{\circ}$. Si en outre A et B sont convexes faiblement fermés et contenant l'origine, les relations $u(A) \subset B$ et ${}^t u(B^{\circ}) \subset A^{\circ}$ sont équivalentes. En particulier, le noyau de la transposée bornologique est égal au sous-espace de $F^{\times}$ orthogonal à $u(E)$. Pour que $u(E)$ soit faiblement partout dense dans F, il faut et il suffit que ${}^tu$ soit injective. Pour que u soit un homomorphisme faible de F sur $u(F)$, il faut et il suffit que ${}^tu(F^*)$ soit faiblement fermé dans E^*. En particulier si u est un homomorphisme de E sur $u(E) \subset F$, le dual faible de $u(F)$ est isomorphe à l'image de la transposée. Pour que u soit surjective, il faut et il suffit que ${}^tu$ soit un isomorphisme faible de F^* sur ${}^tu(F^*)$. Toutes ces assertions sont classiques et bien connues (*voir* par exemple Bourbaki [7], chap. IV, § 4, n° 1).

4° Les propriétés de la transposée bornologique énoncées dans la partie b du théorème suggèrent d'étudier plus systématiquement les relations entre applications de E dans F (resp. de E^* dans E^*) bornées pour les bornologies affaiblies [resp. faibles ou fortes, c'est-à-dire associées aux topologies faibles ou fortes sur (TE)' et (TF)'] et les applications bornées pour les bornologies initiales (resp. les bornologies naturelles). Les résultats essentiels sont résumés dans la proposition suivante :

Proposition 1. — *Soient* E *et* F *deux ebc t-séparés de duals bornologiques respectifs* E^* *et* F^* *et* u *une application linéaire de* E *dans* F.

(*a*) (i) *Si* u *est bornée pour les bornologies initiales,* u *est bornée pour les bornologies affaiblies;*

(ii) *Inversement si* u *est bornée pour les bornologies affaiblies et si* F *est un ebc topologique,* u *est bornée pour les bornologies initiales.*

(*b*) *Soit* v *une application linéaire de* F^* *dans* E^* *bornée pour les bornologies fortes. Si* F *est un ebc topologique,* v *est bornée pour les bornologies naturelles.*

(*c*) *Soit* v *une application linéaire de* F^* *dans* E^* *bornée pour les bornologies faibles. Si* F *est un ebc topologique et si* E *est un ebc complet,* v *est bornée pour les bornologies naturelles.*

Preuve. — L'assertion (*a*) est de vérification immédiate. L'assertion (*b*) résulte de la démonstration du théorème. L'assertion (*c*) résulte du fait que si E est un ebc complet, la bornologie faible dans E^* coïncide avec la bornologie naturelle (th. 2, § 2, n° 2).

Remarque. — On pourrait pousser beaucoup plus loin la théorie de la transposition bornologique, par exemple en étudiant systématiquement le problème des morphismes stricts notamment dans le cas particulier d'ebc à base dénombrable, ceci en liaison avec le théorème du graphe b-fermé de Buchwalter [9]. On peut aussi étudier les applications de la transposition bornologique à la théorie des équations linéaires dont les coefficients sont des opérateurs bornés dans des ebc.

L'auteur espère examiner ces questions dans un travail ultérieur. Pour le moment, les notions introduites ci-dessus suffisent pour l'objet du présent travail : la théorie des produits tensoriels bornologiques.

§ 4. Applications bilinéaires hypobornées.

Définition 1. — *Soient* E, F *et* G *trois ebc de bornologies respectives* $\mathcal{B}_E$, $\mathcal{B}_F$ *et* $\mathcal{B}_G$. *Soit* λ (*resp.* τ) *une famille de parties de* E (*resp. de* F). *Une famille* H *d'applications bilinéaires de* $E \times F$ *dans* G *sera dite* (λ, τ)-hypobornée *si les deux conditions suivantes sont satisfaites : D'une part pour tout élément* A *de* λ *et* B *de* $\mathcal{B}_F$, $H(A \times B)$ *est borné dans* G; *d'autre part, pour tout élément* A *de* $\mathcal{B}_E$ *et* B *de* τ, $H(A \times B)$ *est borné dans* G.

La notion d'application bilinéaire hypobornée permet d'introduire un équivalent bornologique de la notion d'hypocontinuité de Bruhat-Schwartz [45] plus générale que l'hypocontinuité de Bourbaki [7].

On notera $\mathrm{Hom}_{\lambda,\tau}(E, F; G)$ l'espace vectoriel des applications bilinéaires (λ, τ)-hypobornées de $E \times F$ dans G. Si $\lambda = \mathcal{B}_E$ et $\tau = \mathcal{B}_F$, $\mathrm{Hom}_{\lambda,\tau}(E, F; G)$ coïncide avec l'espace des *applications bilinéaires bornées* de $E \times F$ dans G, espace qu'on notera $\mathrm{Hom}(E, F; G)$. Si λ (resp. τ) est l'ensemble des parties finies de E (resp. de F), $\mathrm{Hom}_{\lambda,\tau}(E, F; G)$ coïncide avec l'espace des *applications bilinéaires séparément bornées* de $E \times F$ dans G. Diverses autres variantes peuvent évidemment être envisagées. Il est immédiat que sur $\mathrm{Hom}_{\lambda,\tau}(E, F; G)$ les parties (λ, τ)-hypobornées définissent une bornologie convexe que nous appellerons *la bornologie canonique ou naturelle sur* $\mathrm{Hom}_{\lambda,\tau}(E, F; G)$.

Chaque fois que $\mathrm{Hom}_{\lambda,\tau}(E, F; G)$ sera considéré dans ce travail comme ebc, il devra être considéré comme muni de sa bornologie naturelle sauf évidemment mention expresse du contraire.

Remarque. — Il semble possible de développer plus avant une théorie des applications bilinéaires hypobornées comparable à la théorie classique des applications bilinéaires hypocontinues. L'auteur espère y revenir.

Chapitre II.

PRODUITS TENSORIELS BORNOLOGIQUES D'ESPACES BORNOLOGIQUES.

§ 1. Produits tensoriels hypobornologiques.

1. Théorème fondamental d'existence et d'unicité.

Théorème 1. — *Soient* E *et* F *deux ebc de bornologies respectives* $\mathcal{B}_E$ *et* $\mathcal{B}_F$; λ *(resp.* τ*) une famille de parties de* E *(resp.* F*) telle que* λ *(resp.* τ*) soit sur* E *(resp. sur* F*) une base d'une bornologie convexe non nécessairement identique à* $\mathcal{B}_E$ *(resp.* $\mathcal{B}_F$*)*; $E \otimes F$ *le produit tensoriel algébrique de* E *et* F.

(i) *Il existe sur* $E \otimes F$ *une bornologie convexe unique notée* $E \underset{\lambda,\tau}{\otimes} F$ *vérifiant la propriété universelle* (U) *suivante :*

(U) *Pour tout ebc* G, *l'isomorphisme algébrique canonique entre l'espace vectoriel des applications bilinéaires de* $E \times F$ *dans* G *et l'espace vectoriel des applications linéaires de* $E \otimes F$ *dans* G *fait correspondre à l'espace* $\mathrm{Hom}_{\lambda,\tau}(E, F; G)$ *des applications bilinéaires* (λ, τ)*-hypobornées de* $E \times F$ *dans* G, *l'espace vectoriel* $\mathrm{Hom}\left(E \underset{\lambda,\tau}{\otimes} F, G\right)$ *des applications linéaires bornées de* $E \underset{\lambda,\tau}{\otimes} F$ *dans* G.

(ii) *Cet isomorphisme algébrique induit un* isomorphisme bornologique *de* $\mathrm{Hom}_{\lambda,\tau}(E; F; G)$ *sur* $\mathrm{Hom}\left(E \underset{\lambda,\tau}{\otimes} F, G\right)$ *pour les bornologies naturelles.*

(iii) *La bornologie ainsi définie sur* $E \otimes F$ *est la bornologie convexe la plus fine pour laquelle l'application bilinéaire canonique de* $E \times F$ *dans* $E \otimes F$ *est* (λ, τ)*-hypobornée.*

Preuve. — La propriété (U) entraîne immédiatement que si la bornologie cherchée existe, elle vérifie (iii). En effet, si $\mathcal{B}$ est une bornologie convexe sur $E \otimes F$ rendant hypobornée l'application $\varphi : E \times F \to (E \otimes F)_{\mathcal{B}}$, l'identité $E \underset{\lambda,\tau}{\otimes} F \to (E \otimes F)_{\mathcal{B}}$ est bornée en vertu de la propriété (U), d'où l'assertion (iii) du théorème et par suite l'unicité de $E \underset{\lambda,\tau}{\otimes} F$.

Démontrons l'existence.

(*a*) Considérons sur $E \otimes F$ les ensembles $\Gamma A \otimes B$, enveloppes disquées des ensembles $A \otimes B = \{a \otimes b;\ a \in A \text{ et } b \in B\}$, où A appartient à λ et B à $\mathcal{B}_F$. Nous allons montrer que ces ensembles définissent une *base* d'une bornologie vectorielle convexe sur $E \otimes F$, autrement dit que l'ensemble $\mathcal{B}_1$ des parties de $E \otimes F$ contenues dans un ensemble de la forme $\Gamma A \otimes B$ où A appartient à λ et B à $\mathcal{B}_F$ définit une bornologie vectorielle convexe sur $E \otimes F$. Par définition, $\mathcal{B}_1$ est héréditaire et il est clair que $\mathcal{B}_1$ est stable par homothétie. La vérification de la stabilité par rapport à la somme vectorielle est alors équivalente à la vérification de la stabilité par rapport à la réunion finie. Or, celle-ci est immédiate puisque, si A_1 et A_2 appartiennent à λ et B_1 et B_2 à $\mathcal{B}_F$, on a $\Gamma A_1 \otimes B_1 \cup \Gamma A_2 \otimes B_2$ contenu dans $\Gamma (A_1 \cup A_2) \otimes (B_1 \cup B_2)$. Puisque $\mathcal{B}_1$ est stable par somme vectorielle, la vérification de l'axiome de recouvrement se réduit à la vérification du recouvrement des tenseurs $x \otimes y$, ce qui est immédiat en vertu des hypothèses sur λ et sur $\mathcal{B}_F$.

(*b*) Par raison de symétrie, on définit de même sur $E \otimes F$ une bornologie vectorielle convexe $\mathcal{B}_2$ ayant pour base les enveloppes disquées des ensembles $A \otimes B$ où A appartient à $\mathcal{B}_E$ et B à τ.

(*c*) Soit $\mathcal{B}_{\lambda,\tau}$ *la borne inférieure* dans le treillis des bornologies convexes sur $E \otimes F$ des bornologies convexes $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ autrement dit, *la bornologie convexe la plus fine* sur $E \otimes F$ telle que les identités $(E \otimes F, \mathcal{B}_i) \to (E \otimes F, \mathcal{B}_{\lambda,\tau})$ $(i = 1, 2)$ soient bornées. Une partie de $E \otimes F$ est donc bornée pour $\mathcal{B}_{\lambda,\tau}$ si et seulement si elle est continue dans un ensemble $A \cup B$ où A est borné pour B_1 et B pour B_2. Cette bornologie est solution du problème.

Définition 1. — *La bornologie construite sur* $E \otimes F$ *dans la démonstration du théorème 1 s'appellera* (λ, τ)*bornologie sur* $E \otimes F$. *L'espace* $E \otimes F$ *muni de cette bornologie sera noté* $E \underset{\lambda,\tau}{\otimes} F$ *et sera appelé* produit tensoriel (λ, τ)-bornologique *de* E *et* F.

Scholies. — 1° Soit $E \underset{\lambda,\tau}{\tilde{\otimes}} F$ $\left[\text{resp. } E \underset{\lambda,\tau}{\breve{\otimes}} F\right]$ le complété bornologique [resp. le quasi-complété bornologique] de $E \underset{\lambda,\tau}{\otimes} F$. Si G est un ebc complet, les applications bilinéaires (λ, τ)-hypobornées de $E \times F$ dans G correspondent biunivoquement aux applications linéaires bornées de $E \underset{\lambda,\tau}{\otimes} F$ dans G. L'espace $E \underset{\lambda,\tau}{\tilde{\otimes}} F$ $\left[\text{resp. } E \underset{\lambda,\tau}{\breve{\otimes}} F\right]$ sera appelé *produit tensoriel* (λ, τ)-*bornologique* complété [resp. quasi-complété] de E et F.

2° Si $G = K$, corps des scalaires, la partie (ii) du théorème assure que le dual bornologique de $E \underset{\lambda,\tau}{\otimes} F$ est algébriquement et *bornologiquement* isomorphe à $\mathrm{Hom}_{\lambda,\tau}(E, F; G)$, résultat qui n'a pas d'équivalent en topologie (« problèmes des topologies » de Grothendieck [16]).

3° Le théorème 1 nous donne d'un seul coup toute une gamme de bornologies *universelles* sur $E \otimes F$ dont notamment les suivantes :

(*a*) λ (resp. τ) est la bornologie grossière; $E \underset{\lambda,\tau}{\otimes} F$ sera alors noté $E \underset{\beta_b}{\otimes} F$;

(*b*) λ (resp. τ) est la bornologie initiale de E; $E \underset{\lambda,\tau}{\otimes} F$ sera alors noté $E \underset{\pi_b}{\otimes} F$;

(*c*) E et F sont des espaces localement convexes et λ (resp. τ) est la bornologie ayant pour base les disques compacts de E (resp. F); $E \underset{\lambda,\tau}{\otimes} F$ sera alors noté $BE \underset{\gamma_b}{\otimes} BF$;

(*d*) λ (resp. τ) est la bornologie convexe discrète (enveloppes disquées des parties finies); $E \underset{\lambda,\tau}{\otimes} F$ sera alors noté $E \underset{i_b}{\otimes} F$;

(*e*) λ (resp. τ) est la bornologie convexe déterminée par les suites convergeant vers zéro (bornologiquement ou topologiquement si E et F sont des elc), on notera $E \underset{c_b}{\otimes} F$.

Corollaire. — *Soient* E *et* F *deux ebc;* λ *et* τ *données comme dans l'énoncé du théorème 1. Il existe un ebc* Φ *et une application bilinéaire* φ *de* $E \times F$ *dans* G, (λ, τ)-*hypobornée vérifiant la propriété universelle* (P) *suivante :*

(P) *Pour toute application bilinéaire* f, (λ, τ)-*hypobornée de* $E \times F$ *dans un ebc* G, *il existe une application linéaire bornée* $\tilde{f}$ *de* Φ *dans* G *unique telle que* $f = \tilde{f} \circ \varphi$.

Le couple (Φ, φ) *est donc unique à un isomorphisme bornologique près.*

On prend évidemment $\Phi = E \underset{\lambda,\tau}{\otimes} F$ et φ l'application bilinéaire canonique. L'unicité de $\tilde{f}$ résulte de la propriété universelle du produit tensoriel algébrique $E \otimes F$.

Cas particuliers importants. — 1° Dans le cas où $\lambda = \mathcal{B}_E$ et $\tau = \mathcal{B}_F$, l'espace $\Phi = E \underset{\pi_b}{\otimes} F$ et les applications bilinéaires (λ, τ)-hypobornées sont précisément les applications bilinéaires bornées. Le corollaire du théorème 1 exprime donc que le produit tensoriel π_b est le produit tensoriel *dans la catégorie* des espaces bornologiques.

Soit $E \underset{\pi_b}{\tilde{\otimes}} F$ le complété bornologique de $E \underset{\pi_b}{\otimes} F$. Cet espace est le produit tensoriel dans la catégorie des *ebc complets*. Il est donc bornologiquement isomorphe au produit tensoriel complet de L. Waelbroeck [53].

2° Si λ (resp. τ) est la bornologie convexe discrète, le produit tensoriel $E \underset{i_b}{\otimes} F$ a la propriété universelle (d'après le corollaire) de transformer les applications bilinéaires *séparément bornées* en applications linéaires bornées.

2. Produits tensoriels (λ, τ)-hypobornologiques d'applications linéaires bornées. — Soient E et F deux ebc; (λ_α) [resp. (τ_β)] une famille de bornologies convexes sur E (resp.

sur F) dépendant d'un ensemble non vide d'indices A (resp. B). Posons alors la définition suivante :

DÉFINITION 2. — *Pour tout couple* (α, β), *une application linéaire de* E *dans* F *sera dite* $(\lambda_\alpha, \tau_\beta)$-*bornée si elle est bornée de* E *muni de la bornologie* λ_α *dans* F *muni de la bornologie* τ_β.

PROPOSITION 1. — *Soient* E_i *et* F_i $(i = 1, 2)$ *quatre ebc;* λ_i *(resp.* τ_i*) une bornologie convexe sur* E_i *et* u *(resp.* v*) une application linéaire bornée de* E_1 *dans* E_2 *(resp. de* F_1 *dans* F_2*)* (λ_1, λ_2)-*bornée [resp.* (τ_1, τ_2)-*bornée].*

Alors :

(i) *L'application linéaire* $u \otimes v$, *produit tensoriel algébrique de* u *et* v *est une application bornée de* $E_1 \underset{\lambda_1, \tau_1}{\otimes} F_1$ *dans* $E_2 \underset{\lambda_2, \tau_2}{\otimes} F_2$;

(ii) *Elle se prolonge par conséquent en une application linéaire bornée* $u \tilde{\otimes} v$ *de* $E_1 \underset{\lambda_1, \tau_1}{\tilde{\otimes}} F_1$ *dans* $E_2 \underset{\lambda_2, \tau_2}{\tilde{\otimes}} F_2$.

Preuve. — L'application bilinéaire $E_1 \times F_1 \to E_2 \otimes F_2$ qui à (e_1, f_1) fait correspondre $u(e_1) \otimes v(f_1)$ est (λ_1, τ_1)-hypobornée (immédiat) d'où la proposition en vertu du théorème 1.

COROLLAIRE [Comparaison des (λ, τ)-bornologies]. — *Soient* E *et* F *deux ebc;* λ_1 *(resp.* τ_1*) et* λ_2 *(resp.* τ_2*) deux bornologies convexes sur* E *(resp. sur* F*). Si* λ_1 *(resp.* τ_1*) est plus fine que* λ_2 *(resp.* τ_2*),* $E \underset{\lambda_1, \tau_1}{\otimes} F$ *est plus fine que* $E \underset{\lambda_2, \tau_2}{\otimes} F$.

On dira en abrégé que les produits tensoriels hypobornologiques conservent la finesse des bornologies.

Comme application, on a la relation d'ordre suivante sur les (λ, τ)-bornologies $\beta_b \leq \pi_b \leq \gamma_b \leq i_b$ où le signe $\leq$ signifie « moins fine » et la bornologie γ_b n'étant mentionnée que dans le cas des elc séparés.

§ 2. Étude de la bornologie tensorielle π_b.

1. CARACTÈRE INDUCTIF DE LA BORNOLOGIE π_b.

PROPOSITION 1. — *Soient* $E = \varinjlim(E_i, f_{ij})$ *et* $F = \varinjlim(F_k, g_{kl})$ *deux limites inductives bornologiques d'ebc. Alors* $E \underset{\pi_b}{\otimes} F = \varinjlim E_i \underset{\pi_b}{\otimes} F_k$ *(algébriquement et bornologiquement).*

Preuve. — La démonstration se réduit à une vérification à partir des définitions. D'une part la bornologie π_b a pour base l'ensemble des enveloppes disquées des ensembles $A \otimes B$ où A (resp. B) est un borné de E (resp. de F). Donc pour qu'une partie C de $E \otimes F$ soit bornée dans $E \underset{\pi_b}{\otimes} F$, il faut et il suffit qu'il existe deux indices i et k et A (resp. B) un borné de E_i (resp. de F_k) tel que C soit contenu dans $\overline{|A \otimes B}$; ce qui équivaut exactement à dire que C est borné dans la limite inductive bornologique des $E_i \underset{\pi_b}{\otimes} F_k$.

COROLLAIRE. — *Soit* $E = \varinjlim(E_i, \pi_{ij})$ *et* $F = \varinjlim(F_k, \tau_{kl})$ *deux ebc* $E \underset{\pi_b}{\otimes} F = \varinjlim BE_i \underset{\pi_b}{\otimes} BF_k$ *(algébriquement et bornologiquement).*

Ce résultat, rapproché au corollaire du théorème 2 du numéro suivant, montre que la bornologie π_b peut s'obtenir dans l'essentiel par passage à la limite inductive bornologique à partir de la norme projective de Schatten (« greatest crossnorm » [42]) tout comme la topologie de Grothendieck s'obtient dans l'essentiel à partir de cette norme par passage à la *limite projective localement convexe.* En fait il n'y a là rien de particulièrement étonnant puisqu'on sait que les espaces localement convexes ne sont rien d'autres que les limites projectives localement convexes d'espaces semi-normés et les espaces bornologiques, limites inductives bornologiques d'espaces semi-normés.

2. « COMMUTATION » DES BIFONCTEURS $\overset{t}{\otimes}$ ET $\overset{b}{\otimes}$. — Soient E et F deux elc; λ (resp. τ) une famille saturée de parties de E (resp. de F); λ définit sur E (resp. τ définit sur F) une bornologie *a priori* distincte de la bornologie initiale de BE (resp. de BF). Sur $E \otimes F$ le couple (λ, τ) définit d'une part une topologie localement convexe $E \underset{\lambda, \tau}{\overset{t}{\otimes}} F$ [45] qui engendre une bornologie convexe canonique $B\left(E \underset{\lambda, \tau}{\overset{t}{\otimes}} F\right)$ sur $E \otimes F$; ce couple définit d'autre part une (λ, τ)-bornologie $BE \underset{\lambda, \tau}{\otimes} BF$ notée ici $E \underset{\lambda, \tau}{\overset{b}{\otimes}} F$ qui à son tour engendre une topologie localement convexe canonique

$T\left(E \underset{\lambda,\tau}{\overset{b}{\otimes}} F\right)$ sur $E \otimes F$. Si (λ_i, τ_i) est une famille finie de tels couples il est naturel de s'interroger sur les rapports exacts entre $B\left(E \underset{\lambda_i,\tau_i}{\overset{t}{\otimes}} F\right)$ et $E \underset{\lambda_j,\tau_j}{\otimes} F$ d'une part, $E \underset{\lambda_i,\tau_i}{\overset{t}{\otimes}} F$ et $T\left(E \underset{\lambda_j,\tau_j}{\overset{b}{\otimes}} F\right)$ d'autre part pour tous les couples d'indices (i, j). Un problème analogue se pose pour E et F deux ebc.

A. Nous traiterons d'abord systématiquement le cas particulier important suivant : λ_1 (resp. τ_1) est l'ensemble de toutes les parties de E (resp de F); λ_2 (resp. τ_2) est l'ensemble des parties bornées de E (resp. de F); Alors $E \underset{\lambda_1,\tau_1}{\otimes} F = E \underset{\pi}{\otimes} F$ (topologie projective de Grothendieck avec notations de Schwartz) [46] et $E \underset{\lambda_2,\tau_2}{\overset{b}{\otimes}} F = E \underset{\pi_b}{\otimes} F$.

Théorème 1. — *Soient* E *et* F *deux ebc.*

(1) *La topologie localement convexe associée à la bornologie* π_b *est plus fine que le produit tensoriel topologique projectif des elc* TE *et* TF. *Autrement dit,*

$$T\left(E \underset{\pi_b}{\otimes} F\right) \geqq TE \underset{\pi}{\otimes} TF.$$

Par conséquent la bornologie affaiblie de $E \underset{\pi_b}{\otimes} F$ *est plus fine que la bornologie convexe canoniquement associée au produit tensoriel topologique projectif de elc* TE *et* TF, *c'est-à-dire*

$$E \underset{\pi_b}{\otimes} F \geqq BT\left(E \underset{\pi_b}{\otimes} F\right) \geqq B\left(TE \underset{\pi}{\otimes} TF\right).$$

(2) *Si tout borné de* $TE \underset{\pi}{\otimes} TF$ *est contenu dans l'enveloppe disquée d'un ensemble* $A \otimes B$ *où* A *est un borné de* E *et* B *un borné de* F [condition (G_1)].

(i) *Les deux topologies* $T\left(E \underset{\pi_b}{\otimes} F\right)$ *et* $TE \underset{\pi}{\otimes} TF$ *sont identiques si et seulement si la seconde est bornologique;*

(ii) $E \underset{\pi_b}{\otimes} F$ *est un ebc topologique et la bornologie* π_b *coïncide exactement avec la bornologie canoniquement associée au produit tensoriel topologique projectif des elc* TE *et* TF, *c'est-à-dire*

$$E \underset{\pi_b}{\otimes} F = B\left(TE \underset{\pi}{\otimes} TF\right).$$

Preuve. — Soient

$$\mathcal{T}_1 = T\left(E \underset{\pi_b}{\otimes} F\right) \quad \text{et} \quad \mathcal{T}_2 = TE \underset{\pi}{\otimes} TF.$$

La topologie $\mathcal{T}_1$ a pour base les disques de $E \otimes F$ qui absorbent tous les ensembles $\overline{|A \otimes B}$ où A (resp. B) est borné dans E (resp. F). La topologie $\mathcal{T}_2$ a pour base les ensembles $\overline{|U \otimes V}$ où U (resp. V) est un disque bornivore de E (resp. de F). Si alors $\overline{|U \otimes V}$ est un voisinage disqué de o pour $\mathcal{T}_2$, il absorbe tous les $\overline{|A \otimes B}$ et, par conséquent, est un voisinage de o pour $\mathcal{T}_1$ donc $\mathcal{T}_2$ est moins fine que $\mathcal{T}_1$. L'inégalité sur les bornologies en résulte aussitôt. Puisque la topologie $\mathcal{T}_1$ est bornologique, il suffit de montrer la suffisance de l'assertion (i) du (2). Or, si $TE \underset{\pi}{\otimes} TF$ est bornologique, l'identité des topologies $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$ est équivalente à l'identité des bornologies qui leur sont canoniquement associées, d'où le résultat en vertu de la condition G_1. Démontrons l'assertion (ii). L'assertion (1) du théorème entraîne qu'on a toujours

$$E \underset{\pi_b}{\otimes} F \geqq BT\left(E \underset{\pi_b}{\otimes} F\right) \geqq B\left(TE \underset{\pi}{\otimes} TF\right),$$

ce qui montre en passant que la bornologie associée à la topologie tensorielle projective sur $TE \otimes TF$ est non seulement moins fine que la bornologie π_b mais moins fine que la bornologie affaiblie de cette dernière bornologie. Pour que l'identité

$$E \underset{\pi_b}{\otimes} F = B\left(TE \underset{\pi}{\otimes} TF\right)$$

ait lieu, il est évidemment nécessaire et suffisant que tout borné de $TE \underset{\pi}{\otimes} TF$ soit borné dans $E \underset{\pi_b}{\otimes} F$, ce qui est assuré par la condition (G_1) donc

$$E \underset{\pi_b}{\otimes} F = BT\left(E \underset{\pi_b}{\otimes} F\right) = B\left(TE \underset{\pi}{\otimes} TF\right)$$

et le théorème est démontré.

Corollaire. — *Soient* E *et* F *deux ebc t-séparés. La bornologie* $E \underset{\pi_b}{\otimes} F$ *est t-séparée.*

En effet la topologie localement associée $T\left(E \underset{\pi_b}{\otimes} F\right)$ est plus fine que la topologie séparée $TE \underset{\pi}{\otimes} TF$.

Théorème 2. — *Soient* E *et* F *deux elc.*

(1) (i) *Le produit tensoriel topologique projectif des topologies localement convexes bornologiques associées à* E *et* F *est moins fin que la topologie localement convexe bornologique associée au produit tensoriel bornologique* π_b *des ebc canoniquement associées à* E *et* F, *c'est-à-dire*

$$T\left(BE \underset{\pi_b}{\otimes} BF\right) \geqq TBE \underset{\pi}{\otimes} TBF;$$

(ii) *Le produit tensoriel bornologique* π_b *des bornologies convexes associées à* E *et* F *est plus fin que la bornologie convexe associée au produit tensoriel topologique projectif de* E *et* F, *c'est-à-dire*

$$BE \underset{\pi_b}{\otimes} BF \geqq B\left(E \underset{\pi}{\otimes} F\right);$$

(2) *Si tout borné de* $E \underset{\pi}{\otimes} F$ *est contenu dans l'enveloppe disquée d'un ensemble* $A \otimes B$ *où* A (*resp.* B) *est un borné de* E (*resp. de* F) [condition (G_2)] :

(i) *Les topologies* $T\left(BE \underset{\pi_b}{\otimes} BF\right)$ *et* $E \underset{\pi}{\otimes} F$ *sont identiques si et seulement si la seconde est bornologique;*

(ii) *L'espace* $BE \underset{\pi_b}{\otimes} BF$ *est un ebc topologique et la bornologie* π_b *coïncide exactement avec la bornologie associée à la topologie* π *de Grothendieck.*

Preuve. — L'inégalité $T\left(BE \underset{\pi_b}{\otimes} BF\right) \geqq TBE \underset{\pi}{\otimes} TBF$ résulte du théorème précédent. Comme $TBE \underset{\pi}{\otimes} TBF$ est plus fine que $E \underset{\pi}{\otimes} F$ et $BE \underset{\pi_b}{\otimes} BF$ plus fine que $BT\left(BE \underset{\pi_b}{\otimes} BF\right)$, on a immédiatement l'inégalité bornologique (ii). Le raisonnement pour démontrer (2) est analogue à celui de la démonstration du théorème précédent.

Remarques. — 1° Il existe des espaces localement convexes où la condition (G_2) n'est pas vérifiée. Par exemple, si $E = \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ et $F = \mathbf{R}^{(\mathbf{N})}$ (*cf.* A. Grothendieck [16], p. 34).

2° La condition (G_2) est évidemment vérifiée dans le cas où E et F sont des espaces semi-normés. Cela résulte en effet directement d'un résultat classique de Schatten et Grothendieck sur l'expression explicite de la norme tensorielle projective la boule unité de $E \otimes F$ est l'enveloppe disquée du « produit tensoriel » des boules unités de E et F.

3° Le problème de la vérification de la condition (G_2) est étroitement lié au « problème des topologies » de Grothendieck sur lequel nous revenons au numéro suivant.

Corollaire. — *Soient* E *et* F *deux espaces semi-normés :*

(i) $E \underset{\pi}{\otimes} F = T\left(BE \underset{\pi_b}{\otimes} BF\right)$ $\left[\textit{resp.}\ E \hat{\otimes} F = T\left(BE \underset{\pi_b}{\hat{\otimes}} BF\right)\right]$;

(ii) $BE \underset{\pi_b}{\otimes} BF$ *est un ebc topologique et par conséquent*

$$B\left(E \underset{\pi}{\otimes} F\right) = BE \underset{\pi_b}{\otimes} BF.$$

Le corollaire résulte de la remarque 2° et du théorème 2.

En rapprochant le corollaire avec le corollaire de la proposition 1 du numéro précédent, on peut énoncer l'important résultat :

Théorème 3. — *Soient* $E = \underrightarrow{\lim}(E_i, \pi_{ij})$ *et* $F = \underrightarrow{\lim}(F_k, \tau_{kl})$ *deux ebc.*

(i) $E \underset{\pi_b}{\otimes} F = \underrightarrow{\lim}\left[B\left(E_i \underset{\pi}{\otimes} F_k\right), \pi_{ij} \otimes \tau_{kl}\right]$ (*algébriquement et bornologiquement*);

(ii) *Par conséquent* $E \underset{\pi_b}{\check{\otimes}} F = \underrightarrow{\lim}\left(E_i \hat{\otimes} F_k, \pi_{ij} \hat{\otimes} \tau_{kl}\right)$.

B. Considérons maintenant le cas suivant : λ_1 (resp. τ_1) est l'ensemble des bornés de rang fini de E (resp. de F); λ_2 (resp. τ_2) est l'ensemble de toutes les parties bornées de E (resp. de F). Alors $E \underset{\lambda_1, \tau_1}{\overset{i}{\otimes}} F = E \underset{i}{\otimes} F$ (topologie tensorielle inductive de Grothendieck) et $E \underset{\lambda_2, \tau_2}{\overset{b}{\otimes}} F = E \underset{\pi_b}{\otimes} F$. Nous avons alors le résultat suivant :

Théorème 4. — *Soient* E *et* F *deux ebc.*

(i) *Si* E *ou* F *est complet, la topologie produit tensoriel inductif des topologies localement convexes associées à* E *et* F *coïncide exac-*

tement avec la topologie localement convexe associée au produit tensoriel bornologique π_b des ebc E *et* F. *Fonctoriellement, cela signifie*

$$TE \underset{i}{\otimes} TF = T\left(E \underset{\pi_b}{\otimes} F\right).$$

(ii) *En conséquence, si* E *et* F *sont des elc bornologiques l'un au moins étant complet au sens de Mackey :*

(*a*) $E \underset{i}{\otimes} F = T\left(BE \underset{\pi_b}{\otimes} BF\right)$ (*topologiquement*).

(*b*) *Soit* H *l'espace des noyaux de Fredholm dans* $E \overline{\otimes} F$. *La topologie sur* H *induite par* $E \overline{\otimes} F$ *coïncide exactement avec la topologie bornologique associée au quasi-complété bornologique de* $BE \underset{\pi_b}{\otimes} BF$. *Si* $BE \underset{\pi_b}{\otimes} BF$ *est un ebc aux normes faiblement concordantes, le sous-espace topologique* H *des noyaux de Fredholm dans* $E \overline{\otimes} F$ *est un espace ultra-bornologique. Si en outre* E *et* F *sont des ebc à base dénombrable, tout borné complétant de* H *est contenu dans un borné de* $BE \underset{\pi_b}{\tilde{\otimes}} BF$ *et, par conséquent si* H *est complet au sens de Mackey :* $H = BE \underset{\pi_b}{\tilde{\otimes}} BF$ (*algébriquement et bornologiquement*).

Preuve. — Notons $E = \varinjlim (E_i, \tau_{ij})$ et $F = \varinjlim (F_k, \tau_{kl})$ (les limites inductives étant bornologiques). Alors

$$TE = \varinjlim (E_i, \tau_{ij}) \quad \text{et} \quad TF = \varinjlim (F_k, \tau_{kl}),$$

les limites inductives étant localement convexes. Le caractère inductif du produit tensoriel topologique inductif assure alors que

$$TE \underset{i}{\otimes} TF = \varinjlim (E_i \otimes F_k, \pi_i \otimes \tau_k).$$

Si E ou F est complet, (par exemple E) les espaces E_i sont des espaces de Banach et alors $E_i \underset{i}{\otimes} F_k = E_i \underset{\pi}{\otimes} F_k$ en vertu du théorème de Baire-Banach d'où la première assertion du théorème. L'assertion (ii)-(*a*) en résulte aussitôt. L'espace H des noyaux de Fredholm coïncide exactement avec le quasi-complété bornologique de $BE \underset{\pi_b}{\otimes} BF$ (*voir* aussi plus loin, § 3, démonstration du théorème 1). La première assertion de (ii)-(*b*) exprime tout simplement que sur H la topologie induite par $E \overline{\otimes} F$ est identique à

la topologie limite inductive des $E_i \overline{\otimes} F_k$, ce qui est bien connu ([16], chap. I, § 3, n° 1, prop. 14). L'espace H est donc ultra-bornologique moyennant la concordance faible des normes qui assure la biunivocité des applications $\pi_i \overline{\otimes} \tau_k$. Si E et F sont à bornologie à base dénombrable, l'espace H est limite inductive d'une suite d'espaces de Fréchet (suite qu'on peut supposer croissante) $E_i \overline{\otimes} F_k$. On sait alors moyennant un théorème de Grothendieck ([16], Intr. IV, n° 4, th. A, cor. 1) que tout borné complétant de H est contenu dans un borné d'un espace $E_i \overline{\otimes} F_k$ d'où le théorème.

3. Sur le « problème des topologies » de Grothendieck. — La condition intervenant dans la partie 2° du théorème 2 est étroitement liée au « problème des topologies » de Grothendieck ([16], p. 33). En fait, il existe une liaison intime entre ce problème et la bornologie π_b. Les résultats ci-après montrent que pour tous les couples d'elc pour lesquels on espère raisonnablement trouver une solution affirmative au « problème des topologies », la topologie π de Grothendieck est nécessairement obtenue à partir de la bornologie π_b et alors se dégage naturellement une condition bornologique équivalente à la solution affirmative au problème de Grothendieck. Rappelons que le « problème des topologies » de Grothendieck est le problème de savoir si l'isomorphisme algébrique entre le dual fort de $E \underset{\pi}{\otimes} F$ et l'espace des formes bilinéaires continues sur $E \times F$ muni de la topologie de la convergence bibornée est un isomorphisme topologique.

Proposition 2. — *Soient* E *et* F *deux elc séparés.*

Pour que $E \underset{\pi}{\otimes} F = T\left(BE \underset{\pi_b}{\otimes} BF\right)$ *il faut et il suffit que les deux conditions suivantes soient simultanément satisfaites :*

(*a*) $E \underset{\pi}{\otimes} F$ *est un elc bornologique;*

(*b*) *Toute forme bilinéaire bornée sur* $E \times F$ *est continue.*

Preuve. — La démonstration est évidente puisque deux topologies bornologiques compatibles avec la dualité sont identiques.

Ce résultat nous amène à considérer les couples (E, F) d'espaces localement convexes tels que $E \underset{\pi}{\otimes} F$ est un elc bornologique et que toute forme bilinéaire bornée de $E \times F$ est continue. Notons $U = E \underset{\pi_b}{\otimes} F$ l'espace $BE \underset{\pi_b}{\otimes} BF$ et $E \underset{\pi_b^s}{\otimes} F$ la bornologie sur $E \otimes F$ ayant pour base les adhérences pour $\sigma(U, U^*)$ des bornés disqués de $E \otimes F$.

On a alors le

Théorème 5. — *Supposons vérifiées les conditions (a) et (b) de la proposition 2.*

(i) *La topologie* π *de Grothendieck est identique à la topologie localement convexe associée à* $E \underset{\pi_b^s}{\otimes} F$, *c'est-à-dire* $E \underset{\pi}{\otimes} F = T\left(E \underset{\pi_b^s}{\otimes} F\right)$;

(ii) *Les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

(*a*) *Le « problème des topologies » de Grothendieck est affirmativement résolu pour le couple* (E, F);

(*b*) $E \underset{\pi_b^s}{\otimes} F$ *est un ebc topologique.*

Preuve. — L'assertion (ii) résulte immédiatement de l'assertion (i) en remarquant que la bornologie $E \underset{\pi_b^s}{\otimes} F$ est identique à la bornologie sur $E \otimes F$ ayant pour base les adhérences pour $E \underset{\pi}{\otimes} F$ des bornés disqués de $E \underset{\pi_b}{\otimes} F$. L'assertion (i) est une conséquence de la proposition précédente et du résultat général suivant :

Lemme. — *Soit* $(E, \mathcal{B})$ *un ebc t-séparé. La bornologie* $\mathcal{B}^0$ *sur E ayant pour base les adhérences pour* $\sigma(E, E^*)$ *des bornés de E est compatible avec la dualité. En conséquence,* $TE = TE^0$ [*en notant* E^0 *l'espace* $(E, \mathcal{B}^0)$] *et l'espace* E^0 *est un ebc polaire.*

Preuve. — En effet $E^* = (BTE)^* \subset (E^0)^* \subset E^*$, où F^* désigne le dual bornologique de l'ebc F.

Comme *exemples de couples d'espaces* (E, F) *vérifiant les deux conditions de la proposition* 2, signalons les couples d'espaces métrisables et les couples d'espaces (DF) bornologiques. On sait en effet que le produit tensoriel projectif de deux espaces métrisables [resp. deux espaces (DF) bornologiques] est métrisable [resp. un (DF) bornologique] ([16], chap. I, § 1, n° 3, prop. 5 et corollaire 1). D'autre part, si u est une application bilinéaire bornée de $E \times F$ dans un elc G, elle est continue si E et F sont des (DF) bornologiques en vertu d'un théorème de Grothendieck ([15], théorème 2) car alors u est nécessairement hypocontinue. Si E et F sont métrisables, il suffit de montrer que $u(x_n, y_n)$ tend vers zéro pour toute suite $((x_n, y_n))$ de points de $E \times F$ tendant vers zéro. Mais E étant métrisable, vérifie la condition de convergence de Mackey donc il existe une suite de scalaires (λ_n) tendant vers zéro telle que la suite $\frac{x_n}{\lambda_n}$ soit bornée. Alors $u(x_n, y_n) = \lambda_n u\left(\frac{x_n}{\lambda_n}, y_n\right)$ tend vers zéro puisque u est bornée, d'où notre assertion.

4. Espaces bornologiques « projectifs ». — Nous avons vu au paragraphe 2 que toute notion de produit tensoriel (λ, τ)-bornologique d'espaces donnait naissance à une notion correspondante de produit tensoriel d'applications linéaires bornées. En particulier soient $\{E_i\}$ et $\{F_i\}$ $(i = 1, 2)$ quatre ebc et pour tout i une application linéaire bornée de E_i dans F_i, le produit tensoriel algébrique $u_1 \otimes u_2$ des deux applications linéaires u_1 et u_2 est π_b-bornée et se prolonge en une application linéaire bornée $u_1 \otimes u_2$ aux complétés bornologiques. De plus, il est clair que si u_1 (resp. u_2) est un isomorphisme bornologique de E_1 sur F_1 (resp. de E_2 sur F_2), alors $u_1 \otimes u_2$ est un isomorphisme bornologique de $E_1 \underset{\pi_b}{\otimes} E_2$ sur $F_1 \underset{\pi_b}{\otimes} F_2$ se prolongeant par conséquent en un isomorphisme bornologique de $E_1 \underset{\pi_b}{\tilde{\otimes}} E_2$ sur $F_1 \underset{\pi_b}{\tilde{\otimes}} F_2$. Mais si u_i est un isomorphisme bornologique de E_i dans F_i, il est faux en général que $u_1 \otimes u_2$ est un isomorphisme bornologique de $E_1 \underset{\pi_b}{\otimes} E_2$ sur $u_1(E_1) \otimes u_2(E_2)$ muni de la bornologie induite par $F_1 \underset{\pi_b}{\otimes} F_2$. Autrement dit, *si* E_i *est un sous-espace bornologique de* F_i $(i = 1, 2)$ *il est faux en général que* $E_1 \underset{\pi_b}{\otimes} E_2$ *est un sous-espace bornologique de* $F_1 \underset{\pi_b}{\otimes} F_2$. Ce résultat négatif n'est pas propre à la bornologie. Il est classique dans le cas d'espaces normés (Schatten [42], th. 3.10, p. 58) et alors *a fortiori* vérifié

dans le cas d'espaces bornologiques (et pour la topologie π dans le cas d'espaces localement convexes [16]).

Toutefois on a un résultat positif pour la classe particulière d'ebc que nous allons introduire.

DÉFINITION. — *Soit* $E = \varinjlim(E_i, \pi_{ij})$ *un ebc. On dira que* E *est* projectif *si pour tout sous-espace* bornologique F, $E_i \cap F$ *est facteur direct dans* E_i.

Cette notion n'est pas à confondre avec celle d'ebc projectif considéré comme « objet projectif » dans la catégorie des ebc.

PROPOSITION 3. — *Soient* F_1 *et* F_2 *deux ebc projectifs;* E_1 (*resp.* E_2) *un sous-espace bornologique de* F_1 (*resp.* F_2). *Alors* $E_1 \underset{\pi_b}{\otimes} E_2$ *est un sous-espace bornologique de* $F_1 \underset{\pi_b}{\otimes} F_2$.

Preuve. — Notons $F_i = \varinjlim F_k^{(i)}$. Alors $E_i = \varinjlim E_k^{(i)}$ et $E_k^{(i)}$ est facteur direct dans $F_k^{(i)}$ donc $E_k^{(1)} \underset{\pi}{\otimes} E_k^{(2)}$ est un sous-espace normé de $F_k^{(1)} \underset{\pi}{\otimes} F_k^{(2)}$ (Schatten [42], p. 58 ou Grothendieck [16], p. 40). Alors $\varinjlim E_k^{(1)} \underset{\pi}{\otimes} E_k^{(2)}$ est un sous-espace *bornologique* de $\varinjlim F_k^{(1)} \underset{\pi}{\otimes} F_k^{(2)} = F_1 \underset{\pi}{\otimes} F_2$, d'où la proposition.

Remarque. — Les ebc projectifs se rencontrent fréquemment en Analyse (*voir* plus loin : les espaces *b*-nucléaires).

5. CARACTÉRISATION EN TERMES D'OPÉRATEURS DES ESPACES $\left(E \underset{\pi_b}{\otimes} F\right)^*$ ET $E^* \underset{\pi_b}{\otimes} F^*$. — Le théorème fondamental 1 du paragraphe 1, n° 1 assure que le dual bornologique $\left(E \underset{\pi_b}{\otimes} F\right)^*$ de $E \underset{\pi_b}{\otimes} F$ est l'espace Hom(E, F; K) de toutes les formes bilinéaires bornées sur $E \times F$.

L'espace Hom(E, F; K) est donc aussi le dual bornologique de l'ebc complet $E \underset{\pi_b}{\tilde{\otimes}} F$. De plus, on a les égalités bornologiques

$$\left(E \underset{\pi_b}{\tilde{\otimes}} F\right)^* = \left(E \underset{\pi_b}{\otimes} F\right)^* = \mathrm{Hom}(E, F; K)$$

pour les bornologies naturelles. Il en résulte donc que l'espace Hom(E, F; K) est un ebc complet. Remarquons de plus que

$$\mathrm{Hom}(E, F; K) = \mathrm{Hom}(E, F^*) = \mathrm{Hom}(F^*, E) \quad \text{(égalité bornologique)}$$

lorsque tous les espaces fonctionnels envisagés sont munis de bornologies naturelles.

Soient E et F deux ebc *t*-séparés. Il est clair que $E^* \otimes F^*$ est canoniquement identifiable à un sous-espace de $\mathrm{Hom}(E, F^*)$ et que l'injection canonique est bornée lorsqu'on munit $E^* \otimes F^*$ de la bornologie π_b et $\mathrm{Hom}(E, F^*)$ de la bornologie naturelle. Soit φ le prolongement canonique de cette injection à $E^* \underset{\pi_b}{\tilde{\otimes}} F^*$. Nous pouvons énoncer :

THÉORÈME 6. — *Soient* E *et* F *deux ebc t-séparés de duals* E^* *et* F^*.

(i) *L'espace* $E^* \otimes F^*$ *est l'espace vectoriel de tous les opérateurs bornés de rang fini de* E *dans* F^*.

(ii) *Si* $E^* \underset{\pi_b}{\otimes} F^*$ *est un ebc aux normes faiblement concordantes, l'espace* $\varphi\left(E^* \underset{\pi_b}{\tilde{\otimes}} F^*\right)$ *est un espace d'opérateurs linéaires bornés de* E *dans* F^* *qui sont limites de Mackey dans* $\mathrm{Hom}(E, F^*)$ *d'opérateurs de rang fini.*

Preuve. — (i) Soit $\sum_{j=1}^{m} F_j \otimes G_j$ un élément de $E^* \otimes F^*$. Cet élément définit un opérateur

$$T : \; f \in E \to Tf = \left(\sum_j F_j \otimes G_j\right) f = \sum_j \langle f, F_j \rangle G_j \in F^*$$

qui est bien de rang fini. De plus, il est immédiat que cet opérateur est borné lorsqu'on munit F^* de la bornologie naturelle. Inversement soit U un opérateur linéaire borné de rang fini de E dans F. U étant de rang fini et borné, il existe une famille finie (G_j) $(j = 1, \ldots, m)$ d'éléments de F^* telle que $Uf = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^{(f)} G_j$ pour tout f appartenant à E. Soit F_j la forme linéaire qui à f fait correspondre $\lambda_j^{(f)}$. Il est clair que cette forme linéaire est bornée (car U est bornée) et on a bien

$$Uf = \sum_{i=1}^{m} \langle f, F_i \rangle G_i = \left(\sum_{i=1}^{m} F_i \otimes G_i \right) f,$$

d'où la première assertion du théorème.

(ii) Soit $\varphi(x)$ un élément de $\varphi\left(E^* \tilde{\otimes}_{\pi_b} F^*\right)$. Puisque $E^* \otimes_{\pi_b} F^*$ est un ebc aux normes faiblement concordantes, il existe une suite (x_n) de $E^* \otimes F^*$ convergeant vers x au sens de Mackey dans $E^* \tilde{\otimes}_{\pi_b} F^*$ (première partie : théorème 2) et chaque élément x_n définit un opérateur de rang fini de E dans F^*. La suite (x_n) est une suite de Cauchy-Mackey dans $E^* \otimes_{\pi_b} F^*$ donc une suite de Cauchy-Mackey dans Hom(E, F^*) pour la bornologie naturelle. Or Hom(E, F^*) est complet en tant que dual bornologique de $E \tilde{\otimes}_{\pi_b} F$, donc la suite x_n converge au sens de Mackey vers un point y de Hom(E, F^*). Il suffit alors de montrer que $y = \varphi(x)$. Or x_n converge (Mackey) vers x dans $E^* \tilde{\otimes}_{\pi_b} F^*$ donc $\varphi(x_n) = x_n$ converge (Mackey) vers $\varphi(x)$ dans Hom(E, F^*). Comme x_n tend (Mackey) vers y dans Hom(E, F^*), on a $y = \varphi(x)$ et le théorème est démontré.

Corollaire. — *Soient* E *et* F *deux ebc t-séparés tels que* $E^* \otimes_{\pi_b} F^*$ *possède la propriété de concordance faible des normes. On suppose* $\left(E \tilde{\otimes}_{\pi_b} F\right)^* = E^* \tilde{\otimes}_{\pi_b} F^*$ *(algébriquement). Alors :*

(i) *Tout opérateur linéaire borné de* E *dans* F^* *(resp. de* F *dans* E^**) est limite de Mackey dans* Hom(E, F^*) [*resp. dans* Hom(F, E^*)] *d'opérateurs de rang fini;*

(ii) *Autrement dit, toute forme bilinéaire bornée sur* $E \times F$ *est limite au sens de Mackey dans* Hom (E, F; K) *de formes bilinéaires provenant de* $E^* \otimes F^*$.

Remarques. — 1° Dans le cas particulier où E et F sont des espaces de Banach, nous retrouvons ainsi un résultat de Schatten ([42], th. 3.6, p. 51). Dans ce cas, l'égalité $\left(E \hat{\otimes}_{\pi} F\right)' = E' \hat{\otimes}_{\pi} F'$ équivaut à dire que tout opérateur linéaire borné de E dans F' est compact, ce qui est évidemment vérifié par exemple si E ou F est de dimension finie.

2° L'énoncé du théorème ci-dessus introduit le problème de la concordance des normes sur le produit tensoriel bornologique de deux ebc. On peut remarquer grâce à un résultat de Grothendieck que moyennant certaines conditions d'approximation, la concordance faible des normes est vérifiée sur le produit tensoriel. De façon précise on a le lemme suivant :

Soient E, F, U *trois espaces de Banach tels que* U *vérifie la condition d'approximation. Pour toute application linéaire continue injective* u *de* E *dans* F, $u \hat{\otimes} \iota$ *est une injection de* $E \hat{\otimes} U$ *dans* $F \hat{\otimes} U$ *où* ι *désigne l'identité de* U.

Il en résulte que si X et Y sont deux ebc complets admettant des bases de bornologies telles que les espaces de Banach correspondants vérifient la condition d'approximation, $X \otimes_{\pi_b} Y$ vérifie la condition de concordance faible des normes [*voir* Guy Noël, *Thèse*, Bruxelles, 1969, p. 62, § 6]. Le résultat du lemme ci-dessus est signalé par A. Grothendieck ([16], chap. I, § 3, n° 1, p. 77, remarque après le corollaire de la proposition 14). On peut donc conclure que dans tous les cas connus, le produit tensoriel vérifie la concordance faible des normes.

Autres propriétés de la bornologie π_b. — Il est immédiat que le produit tensoriel π_b est commutatif. De plus, on définit d'une manière évidente le produit tensoriel π_b d'une famille finie quelconque d'ebc et l'opération π_b est associative. Le produit tensoriel π_b permute avec les sommes directes bornologiques (caractère inductif de la bornologie π_b). Le produit tensoriel de deux ebc à base dénombrable est encore à base dénombrable ainsi que son complété bornologique.

§ 3. Régularité des tenseurs bornologiques.

Un des problèmes fondamentaux de la théorie des produits tensoriels, tant du point de vue algébrique que topologique est la caractérisation « concrète » des tenseurs, c'est-à-dire leur interprétation en termes d'êtres mathématiques *connus* (opérateurs, fonctions, distributions, etc.). On sait par exemple qu'algébriquement le produit tensoriel $E^* \otimes F$ de deux espaces vectoriels n'est rien d'autre que l'espace des *opérateurs de rang fini* de E dans F (E^* dual algébrique de E). Topologiquement, R. Schatten et A. Grothendieck ont caractérisé les éléments de nombreux espaces $E \tilde{\otimes} F$ ou $E \hat{\otimes} F$ (notations de Grothendieck) lorsque E et F sont des espaces normés et plus généralement des espaces localement convexes. La possibilité dont nous disposons de compléter au sens bornologique les produits tensoriels bornologiques pose naturellement le problème d'étudier la régularité des tenseurs bornologiques, c'est-à-dire leur interprétation concrète comme opérateurs, fonctions ou distributions. C'est cette étude que nous allons faire dans ce paragraphe.

Théorème 1. — A. — *Soient* E *et* F *deux elc séparés.*

(1) *Si* E *et* F *sont complets au sens de Mackey, le quasi-complété bornologique de* $BE \underset{\pi_b}{\otimes} BF$ *est exactement l'espace de tous les* noyaux de Fredholm *dans* $E \overline{\otimes} F$. *En particulier si* E *et* F *sont des espaces de Fréchet,* $E \underset{\pi_b}{\check{\otimes}} F = E \overline{\otimes} F$ *(algébriquement).*

(2) *Soit* E' *le dual de* E *muni de la bornologie forte (c'est-à-dire* $E' = BE'_\beta$*) et supposons* F *complet. Alors* $E' \underset{\pi_b}{\check{\otimes}} BF$ *définit exactement l'espace de tous les* opérateurs de Fredholm *de* E *dans* F.

(3) *Si* F *est complet au sens de Mackey, soit* E' *le dual de* E *muni de la bornologie équicontinue. Si* $E' \underset{\pi_b}{\otimes} BF$ *est un ebc aux normes faiblement concordantes, son complété bornologique* $E' \underset{\pi_b}{\tilde{\otimes}} BF$ *définit exactement l'espace de tous les* opérateurs nucléaires *de* E *dans* F. *En particulier si* E *et* F *sont deux espaces de Banach vérifiant la condition d'approximation* $T\left(E^* \underset{\pi_b}{\tilde{\otimes}} BF\right) = L^{(1)}(E, F)$ *algébriquement et* topologiquement *lorsqu'on munit* $L^{(1)}(E, F)$ *de la norme nucléaire ou norme-trace.*

(4) *Soit* μ *une mesure de Radon positive sur un espace localement compact* X *et* $L^1(\mu)$ *l'espace des fonctions* μ*-intégrables. Si* E *est un espace de Fréchet on a*

$$T\left(L^1(\mu) \underset{\pi_b^\circ}{\tilde{\otimes}} E\right) = L^1_E(\mu) \qquad \textit{(algébriquement et topologiquement).}$$

(5) *On munit* E' *et* F' *de leurs bornologies équicontinues, alors si* $E' \underset{\pi_b}{\otimes} F'$ *est un ebc aux normes faiblement concordantes,* $E' \underset{\pi_b}{\tilde{\otimes}} F'$ *définit un espace d'*applications linéaires intégrales *de* E *dans* F.

(6) *Si* E *et* F *sont deux espaces de Fréchet distingués ou deux espaces* (DF) *dont l'un au moins est nucléaire, l'espace* $BE'_\beta \underset{\pi_b^\circ}{\tilde{\otimes}} BF'_\beta$ *est un espace de* formes bilinéaires continues sur $E \times F$. *En particulier, certains noyaux-distributions (distributions à deux variables) à support compact ou tempérés sont définis par des tenseurs bornologiques.*

B. *Soit* V *une variété indéfiniment différentiable Si* F *est un espace de Fréchet on a*

$$\mathcal{E}(V) \underset{\pi_b^\circ}{\tilde{\otimes}} F = \mathcal{E}(V, F) \qquad \textit{(algébriquement et bornologiquement),}$$

$$\mathcal{E}(V, F) = T\left(\mathcal{E}(V) \underset{\pi_b^\circ}{\tilde{\otimes}} F\right) \qquad \textit{(topologiquement),}$$

où (V) *est l'espace des fonctions indéfiniment différentiables sur* V *muni de sa topologie classique d'espace de Schwartz.*

On obtient un résultat analogue en remplaçant $\mathcal{E}(V)$ *par* $\mathcal{H}(V)$ *si* V *est analytique,* par $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$, $\mathcal{O}_M$, $\mathcal{O}_c$, *etc. espaces classiques de Schwartz.*

Preuve. — (1) Par définition l'espace $E \overline{\otimes} F$ est le produit tensoriel inductif complété de E et F. Pour tout borné complétant A de E (resp. B de F), l'injection canonique de E_A dans E (resp. de F_B dans F) est continue. Il existe donc une application linéaire canonique de $E_A \hat{\otimes} F_B$ dans $E \overline{\otimes} F$ (non nécessairement injective). On appelle noyaux de Fredholm dans $E \overline{\otimes} F$, le sous-espace H de $E \overline{\otimes} F$, réunion des images canoniques des espaces $E_A \hat{\otimes} F_B$. Si alors E et F sont complets au sens de Mackey, BE et BF sont complets. Alors en faisant parcourir à A et à B des bases convenables de bornologie de E et F, on a

$$BE = \varinjlim (E_i, \pi_{ij}) \qquad \text{et} \qquad BF = \varinjlim (E_k, \tau_{kl})$$

et le sous-espace H se trouve précisément être l'espace vectoriel

$$\varinjlim (E_i \overline{\otimes} F_k, \pi_i \overline{\otimes} \tau_k) = \varinjlim (E_i \hat{\otimes} F_k, \pi_i \hat{\otimes} \tau_k)$$

et comme

$$\mathrm{BE} \underset{\pi_b}{\otimes} \mathrm{BF} = \varinjlim (\mathrm{E}_i \otimes \mathrm{F}_k,\ \pi_i \otimes \tau_k) \qquad \text{(algébriquement et bornologiquement)},$$

en passant au quasi-complété la première assertion est vérifiée. Le cas particulier où E et F sont des espaces de Fréchet est immédiat car alors $\mathrm{E} \overline{\otimes} \mathrm{F} = \mathrm{H}$.

(2) Rappelons brièvement la définition de Grothendieck des opérateurs de Fredholm ([16], chap. I, § 3, n° 2, p. 80). Soit E'_β le dual fort de E et $\hat{\mathrm{E}}'_\beta$ son complété. Notons E_a l'espace E muni de la topologie $\tau(\mathrm{E}, \hat{\mathrm{E}}'_\beta)$ de Mackey relative à la dualité entre E et $\hat{\mathrm{E}}'_\beta$ lorsqu'on considère $\hat{\mathrm{E}}'_\beta$ comme un espace de formes linéaires sur E. L'espace $\hat{\mathrm{E}}'_\beta$ est alors le dual fort de E_a. Soit d'autre part $\mathrm{L}_b(\mathrm{E}_a, \mathrm{F})$ l'espace des applications linéaires continues de E_a dans F muni de la topologie de la convergence bornée. Cet espace est complet en vertu d'un résultat de Grothendieck : Si G et H sont deux elc séparés, G étant un espace de Mackey, l'espace $\mathcal{L}(\mathrm{G}, \mathrm{H})$ est complet pour une σ-topologie si et seulement si l'espace H d'une part, le dual de G muni de la σ-topologie d'autre part sont complets ([16], Intr. III, 4, p. 9). Considérons l'application bilinéaire canonique

$$(x, y) \to x' \otimes y \quad \text{de } \mathrm{E}'_\beta \times \mathrm{F} \text{ dans } \mathrm{L}_b(\mathrm{E}_a, \mathrm{F}).$$

Il est immédiat qu'elle est continue donc se tensorise en une application linéaire canonique de $\mathrm{E}'_\beta \hat{\otimes} \mathrm{F}$ dans $\mathrm{L}_b(\mathrm{E}_a, \mathrm{F})$, donc en une application linéaire continue canonique.

$$\varphi : \ \mathrm{E}'_\beta \overline{\otimes} \mathrm{F} \to \mathrm{L}_b(\mathrm{E}_a, \mathrm{F}).$$

Soit H l'espace des noyaux de Fredholm dans $\mathrm{E}'_\beta \overline{\otimes} \mathrm{F}$. Par définition $\varphi(\mathrm{H})$ est l'*espace des opérateurs de Fredholm* de E dans F; (l'image de φ est l'espace des opérateurs à trace de E dans F). Tout opérateur de Fredholm est donc défini par un noyau de Fredholm dans $\mathrm{E}'_\beta \overline{\otimes} \mathrm{F}$, c'est-à-dire par un élément de l'image canonique dans $\mathrm{E}'_\beta \overline{\otimes} \mathrm{F}$ d'un espace $(\mathrm{E}'_\beta)_\mathrm{A} \hat{\otimes} \mathrm{F}_\mathrm{B}$ où A est un borné fort de E' et B un borné complétant de F d'où le résultat.

(3) Il suffit de rappeler qu'un opérateur nucléaire d'un elc E dans un elc F peut être caractérisé comme un opérateur défini

par un élément de $\mathrm{E}'_\mathrm{A} \hat{\otimes} \mathrm{F}_\mathrm{B}$ où A est un disque équicontinu faiblement fermé de E' et B un disque complétant de F. Si alors E et F sont deux espaces de Banach vérifiant la condition d'approximation, l'application canonique de $\mathrm{E}'_\beta \hat{\otimes} \mathrm{F}$ dans $\mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ est biunivoque (propriété de biunivocité) et, par conséquent,

$$\mathrm{L}^{(1)}(\mathrm{E}, \mathrm{F}) = \mathrm{E}'_\beta \hat{\otimes} \mathrm{F} = \mathrm{E}^\times \underset{\pi_b}{\tilde{\otimes}} \mathrm{BF} \qquad \text{(égalités algébriques)}$$

Or

$$\mathrm{E}'_\beta \underset{\pi}{\hat{\otimes}} \mathrm{F} = \mathrm{T}\,\mathrm{B}\overline{\left(\mathrm{E}'_\beta \underset{\pi}{\otimes} \mathrm{F}\right)} \qquad \text{(égalité topologique)}$$

et

$$\mathrm{B}\left(\mathrm{E}'_\beta \underset{\pi}{\otimes} \mathrm{F}\right) = \mathrm{B}(\mathrm{E}'_\beta) \underset{\pi_b}{\otimes} \mathrm{BF} = \mathrm{E}^\times \underset{\pi_b}{\otimes} \mathrm{BF} \qquad \text{(égalité bornologique)},$$

donc

$$\mathrm{E}'_\beta \underset{\pi}{\hat{\otimes}} \mathrm{F} = \mathrm{T}\left(\mathrm{E}^\times \underset{\pi_b}{\tilde{\otimes}} \mathrm{BF}\right) \qquad \text{(égalité topologique)}$$

d'où notre assertion.

Remarque. — En particulier si $\mathrm{E} = \mathrm{F} = \mathrm{H}$, où H est un espace de Hilbert, l'espace $\mathrm{H}^\times \underset{\pi_b}{\tilde{\otimes}} \mathrm{BH}$ est l'espace des opérateurs dans H, produits d'au moins deux opérateurs de Hilbert-Schmidt. Plus particulièrement, encore si $\mathrm{H} = \mathrm{L}^2(a, b)$ où (a, b) est un intervalle compact de R, l'espace $(\mathrm{L}^2)^\times \underset{\pi_b}{\tilde{\otimes}} \mathrm{BL}^2$ est l'espace de tous les opérateurs intégraux dans L^2 qui sont produits d'au moins deux opérateurs intégraux définis par des noyaux de carré sommable. H étant un espace de Hilbert, l'espace $\mathrm{T}\left(\mathrm{H}^\times \underset{\pi_b}{\tilde{\otimes}} \mathrm{BH}\right)$ coïncide donc algébriquement et topologiquement avec le dual topologique de l'espace de tous les opérateurs compacts dans H et $\left(\mathrm{H}^\times \underset{\pi_b}{\tilde{\otimes}} \mathrm{BH}\right)$ coïncide avec l'espace $\mathcal{L}(\mathrm{H})$ de tous les opérateurs bornés dans H en vertu de théorèmes classiques (*voir* par exemple Schatten [43]).

(4) Puisque E et $\mathrm{L}^1_\mathrm{F}(\mu)$ sont métrisables, on a

$$\mathrm{L}^1(\mu) \underset{\pi}{\hat{\otimes}} \mathrm{E} = \mathrm{T}\left(\mathrm{L}^1(\mu) \underset{\pi_b^0}{\otimes} \mathrm{E}\right) \tag{1}$$

en vertu du paragraphe 2, n° 3, théorème 5. De plus, les ensembles $\overline{\Gamma \mathrm{A} \otimes \mathrm{B}}$ où A est un borné de $\mathrm{L}^1(\mu)$ et B un borné de E forment une base de bornologie de $L^1(\mu)\underset{\pi}{\otimes}E$ ([16], p. 68, prop. 12), donc $L^1(\mu)\underset{\pi_b^\circ}{\otimes}E$ est un ebc topologique (th. 5, § 2, n° 3). La relation (1) entraîne alors que $B\left(L^1(\mu)\underset{\pi}{\otimes}E\right)=L^1_E(\mu)\underset{\pi_b^\circ}{\otimes}E$. Mais $L^1(\mu)\underset{\pi}{\otimes}E$ est métrisable, donc $L^1(\mu)\underset{\pi}{\otimes}E=\widetilde{B\left(L^1(\mu)\underset{\pi}{\otimes}E\right)}$ (algébriquement) (première partie, § III, prop. 14, cor. 2) donc d'après (1), on a les relations au moins algébriques

$$L^1_E(\mu)=L^1(\mu)\underset{\pi}{\hat{\otimes}}E=\widetilde{B\left(L^1(\mu)\underset{\pi}{\otimes}E\right)}=BT\left[\widetilde{L^1(\mu)\underset{\pi}{\otimes}E}\right]=L^1(\mu)\underset{\pi_b^\circ}{\otimes}E,$$

d'où l'égalité algébrique annoncée. Comme

$$L^1(\mu)\hat{\otimes}E=T\left(L^1(\mu)\underset{\pi_b^\circ}{\hat{\otimes}}E\right)$$

(toujours en vertu de la proposition 14, corollaire 2 du paragraphe III, première partie), l'assertion (4) est démontrée.

(5) Rappelons que l'espace des formes bilinéaires intégrales s'identifie au dual de $E\hat{\hat{\otimes}}F$ et qu'une application linéaire de E dans F est dite intégrale si la forme bilinéaire qu'elle définit sur $E\times F'_\beta$ est intégrale. Il résulte immédiatement de ([16], chap. I, § 4, n° 3, prop. 27, critère *c*) que toute forme bilinéaire sur $E\times F$, définie par un élément d'un espace $E'_A\hat{\otimes}F'_B$ où A (resp. B) est un disque équicontinu faiblement fermé de E' (resp. F') est intégrale, d'où l'assertion (5).

(6) L'hypothèse entraîne que $\left(E\underset{\pi}{\hat{\otimes}}F\right)'=E'_\beta\hat{\otimes}F'_\beta$ ([16], chap. II, § 3, n° 2, th. 12) et que les espaces E'_β et F'_β sont soit métrisables, soit des DF bornologiques, l'un au moins étant nucléaire. Alors $E'_\beta\underset{\pi}{\otimes}F'_\beta=T\left(E'_\beta\underset{\pi_b^\circ}{\otimes}F'_\beta\right)$ et $B(E'_\beta\otimes F'_\beta)=E'_\beta\underset{\pi_b^\circ}{\otimes}F'$. Il en résulte (proposition 14 de la première partie) que $E'_\beta\underset{\pi_b^\circ}{\hat{\otimes}}F'_\beta$ est contenu dans $E'_\beta\underset{\pi}{\hat{\otimes}}F'_\beta$, d'où l'assertion (6).

B. L'espace $\mathcal{E}(V)$ étant un espace de Fréchet, nucléaire l'assertion B résulte aussitôt du paragraphe 3, n° 3, théorème 4, du corollaire 2 de la proposition 13 (première partie) et de ([16], chap. II, § 3, n° 1, prop. 12).

Le théorème de régularité est complètement démontré.

§ 4. La bornologie tensorielle ε_b et le théorème général des noyaux de Schwartz-Grothendieck.

Nous allons introduire dans ce paragraphe une bornologie ε_b sur $E\otimes F$, bornologie qui semble l'équivalent bornologique de la topologie tensorielle de la convergence bi-équicontinue de Grothendieck et ne rentre pas dans la catégorie des produits tensoriels hypobornologiques du paragraphe 1.

1. Définition et caractérisation de la bornologie tensorielle ε_b. — Soient E et F deux ebc *t*-séparés de duals respectifs E^* et F^*. Il est clair que tout élément de $E\otimes F$ définit une forme bilinéaire sur $E^*\times F^*$ par la relation

$$(x\otimes y)\,(x^*,y^*)=\langle x,x^*\rangle\langle y,y^*\rangle,$$

les produits scalaires $\langle\,,\rangle$ étant pris relativement à la dualité séparante entre E et E^* d'une part, F et F^* d'autre part. Si l'on munit E^* et F^* de leurs bornologies naturelles, il devient clairque tout élément de $E\otimes F$ définit une forme bilinéaire *bornée* sur $E^*\times F^*$, autrement dit $E\otimes F$ est identifiable à une partie de Hom $(E^*,F^*;K)$, espace des formes bilinéaires bornées sur $E^*\times F^*$. *Par définition la bornologie* ε_b *sur* $E\otimes F$ *est la bornologie induite sur* $E\otimes F$ *par la bornologie naturelle de* Hom $(E^*,F^*;K)$ [chap. I, § 4].

Interprétons explicitement cette définition. Une partie H de $E\otimes F$ est ε_b-bornée si et seulement si pour tout borné naturel A^* de E^* et B^* de F^*, $H(A^*,B^*)$ est borné dans le corps des scalaires. La bornologie ε_b sur $E\otimes F$ est la bornologie la moins fine sur $E\otimes F$ pour laquelle l'injection canonique $E\otimes F\rightarrow \mathrm{Hom}(E^*,F^*;K)$ est bornée. C'est la moins fine des bornologies sur $E\otimes F$ pour lesquelles tout « produit » $A^*\otimes B^*$ avec A^* borné naturel de E^* et B^* borné naturel de F^* est un ensemble de formes linéaires sur $E\otimes F$, borné sur tout borné. Cette propriété caractérise la bornologie ε_b et nous permet de la considérer comme l'analogue bornologique de la topologie ε. Rappelons en effet que si E, F sont des elc, la topologie ε est la moins fine sur $E\otimes F$ pour laquelle tout produit $A'\otimes B'$ (A' resp. B') partie équicontinue de E' (resp. F') soit équicontinu dans $(E\otimes F)'$.

2. Propriétés de la bornologie ε_b. — *Produit tensoriel ε_b d'applications linéaires bornées.*

Proposition 1. — *Soient E_i et F_i $(i=1,2)$ quatre ebc t-séparés tels que F_i soit un ebc topologique et u_i une application linéaire bornée de E_i dans F_i. Alors le produit tensoriel algébrique $u_1 \otimes u_2$ de u_1 et u_2 est une application* linéaire bornée *de $E_1 \underset{\varepsilon_b}{\otimes} E_2$ dans $F_1 \underset{\varepsilon_b}{\otimes} F_2$.*

Preuve. — Soit $v_i = {}^t u_i$ la transposée bornologique de u_i (chap. I, § 3). On sait que v_i est borné de F_i^* dans E_i^* pour les bornologies naturelles de ces espaces. Soit alors H un borné de $E_1 \underset{\varepsilon_b}{\otimes} E_2$ et A^* (resp. B^*) un borné naturel de F_1^* (resp. un borné naturel de F_2^*). $(u_1 \otimes u_2)(H)(A^* \otimes B^*) = H(v_1(A^*) \otimes v_2(B^*))$ est borné dans K puisque $v_1(A^*)$ [resp. $v_2(B^*)$] est borné dans E_1^* (resp. dans E_2^*) (th. 1, § 3, chap. I), d'où la proposition.

« Commutation » des bifoncteurs ε et ε_b. — Soient G et H deux espaces localement convexes séparés de duals topologiques G' et H'. Nous noterons par $G \underset{\varepsilon}{\otimes} H$ (notation de Schwartz) la topologie tensorielle de la convergence bi-équicontinue sur $G \otimes H$. Il est intéressant de remarquer que cette topologie a précisément pour base les polaires pour la dualité entre $G \otimes H$ et $G' \otimes H'$ des *bornés* de $G' \underset{\pi_b}{\otimes} H'$ lorsqu'on munit G' et H' de leur bornologie équicontinue. Le problème de la « commutativité » des bifoncteurs ε et ε_b se pose en termes analogues au problème de la « commutativité » des bifoncteurs π et π_b. Sa solution est donnée par les théorèmes suivants :

Théorème 1. — *Soient* E *et* F *deux ebc t-séparés.*

(i) $E \underset{\varepsilon_b}{\otimes} F = B\left(TE \underset{\varepsilon}{\otimes} TF\right)$, *c'est-à-dire la bornologie tensorielle ε_b sur $E \otimes F$ coïncide exactement avec la bornologie associée à la topologie tensorielle ε sur le produit tensoriel des espaces localement convexes canoniquement associés à* E *et* F;

(ii) $TE \underset{\varepsilon}{\otimes} TF = T\left(E \underset{\varepsilon_b}{\otimes} F\right) \Leftrightarrow TE \underset{\varepsilon}{\otimes} TF$ *est un elc bornologique. Autrement dit, pour que la topologie de la convergence*

bi-équicontinue sur le produit tensoriel des espaces localement convexes canoniquement associés à E *et* F *coïncide avec la topologie localement convexe associée à la bornologie tensorielle ε_b, il faut et il suffit que la première de ces topologies soit bornologique.*

Preuve. — (*a*) Soient

$$\mathcal{C}_1 = T\left(E \underset{\varepsilon_b}{\otimes} F\right) \quad \text{et} \quad \mathcal{C}_2 = TE \otimes TF.$$

D'une part $\mathcal{C}_1$ admet pour base de voisinage les disques bornivores de $E \underset{\varepsilon_b}{\otimes} F$, c'est-à-dire les disques V_1 de $E \otimes F$ absorbant toute partie H de $E \otimes F$ telle que $H(A^* \otimes B^*)$ soit borné dans K lorsque A^* (resp. B^*) est un borné naturel de E^* (resp. F^*). D'autre part, $\mathcal{C}_2$ a pour base les intersections finies des ensembles $T(M, W)$ où W est un disque bornivore de K et $M = A^* \times B^*$ avec A^* (resp. B^*) partie équicontinue de $(TE)'$ [resp. $(TF)'$]. Il résulte donc du chapitre I, théorème 2, corollaire 1, que le système des parties équicontinues de $(TE)' = E^*$ est équivalent au système des bornés naturels de E^*. On en déduit alors immédiatement que $\mathcal{C}_2$ est moins fine que $\mathcal{C}_1$.

Donc la bornologie associée à $\mathcal{C}_2$, soit $B\left(TE \underset{\varepsilon}{\otimes} TF\right)$ est moins fine que celle associée à $\mathcal{C}_1$, soit $BT\left(E \underset{\varepsilon_b}{\otimes} F\right)$, c'est-à-dire la bornologie affaiblie de $E \underset{\varepsilon_b}{\otimes} F$.

(*b*) Par ailleurs, il est immédiat que les bornologies $E \underset{\varepsilon_b}{\otimes} F$ et $B\left(TE \underset{\varepsilon}{\otimes} TF\right)$ sont identiques (appliquer les définitions), donc on a les égalités bornologiques

$$\left(E \underset{\varepsilon_b}{\otimes} F\right) = B\left(TE \underset{\varepsilon}{\otimes} TF\right) = BT\left(E \underset{\varepsilon_b}{\otimes} F\right)$$

et alors $E \underset{\varepsilon_b}{\otimes} F$ est un ebc topologique.

(*c*) Rapprochons (*a*) et (*b*). On a sur $E \otimes F$ deux topologies $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ comparables, ayant des bornologies associées identiques et dont l'une, $\mathcal{C}_1$, est bornologique. Elles sont donc identiques si et seulement si, l'autre, $\mathcal{C}_2$, est bornologique, d'où l'assertion (ii) et le théorème est complètement démontré.

COROLLAIRE 1. — *Soient* E *et* F *deux espaces normés :*

$$\mathrm{E} \underset{\varepsilon_b}{\otimes} \mathrm{F} = \mathrm{B}\left(\mathrm{E} \underset{\varepsilon}{\otimes} \mathrm{F}\right) \quad \text{et} \quad \mathrm{E} \underset{\varepsilon}{\otimes} \mathrm{F} = \mathrm{T}\left(\mathrm{E} \underset{\varepsilon_b}{\otimes} \mathrm{F}\right),$$

donc

$$\mathrm{E} \underset{\varepsilon}{\hat{\otimes}} \mathrm{F} = \mathrm{E} \underset{\varepsilon_b}{\tilde{\otimes}} \mathrm{F}.$$

COROLLAIRE 2. — *La bornologie* ε_b *est une bornologie topologique séparée. En particulier, elle est de caractère dénombrable.*

Pour énoncer le résultat suivant, rappelons la terminologie suivante utilisée par certains auteurs : Un elc séparé est dit *semi-bornologique* si toute forme linéaire bornée sur E est continue. Les elc semi-bornologiques sont donc les « boundedly closed spaces » de G. Mackey [30].

THÉORÈME 2. — *Soient* E *et* F *deux elc séparés.*

(i) $\mathrm{B}\left(\mathrm{E} \underset{\varepsilon}{\otimes} \mathrm{F}\right) \leq \mathrm{BE} \underset{\varepsilon_b}{\otimes} \mathrm{BF}$, *c'est-à-dire la bornologie tensorielle* ε_b *sur le produit tensoriel des espaces bornologiques canoniquement associés à* E *et* F *est plus fine que la bornologie sur* $\mathrm{E} \otimes \mathrm{F}$ *canoniquement associée à la topologie* ε *de Grothendieck.*

Par conséquent, la topologie $\mathrm{T}\left(\mathrm{BE} \underset{\varepsilon_b}{\otimes} \mathrm{BF}\right)$ *est plus fine que* $\mathrm{E} \underset{\varepsilon}{\otimes} \mathrm{F}$.

(ii) *Si* E *et* F *sont semi-bornologiques, les deux topologies ci-dessus coïncident si et seulement si la topologie* ε *de Grothendieck est bornologique. Alors les bornologies* $\mathrm{B}\left(\mathrm{E} \underset{\varepsilon}{\otimes} \mathrm{F}\right)$ *et* $\mathrm{BE} \underset{\varepsilon_b}{\otimes} \mathrm{BF}$ *sont identiques.*

Preuve. — En appliquant le théorème 1 aux espaces BE et BF, on a les résultats suivants :

$$\mathrm{BE} \underset{\varepsilon_b}{\otimes} \mathrm{BF} = \mathrm{B}\left(\mathrm{TBE} \underset{\varepsilon}{\otimes} \mathrm{TBF}\right)$$

et

$$\mathrm{TBE} \underset{\varepsilon}{\otimes} \mathrm{TBF} = \mathrm{T}\left(\mathrm{BE} \underset{\varepsilon_b}{\otimes} \mathrm{BF}\right) \iff \mathrm{TBE} \underset{\varepsilon}{\otimes} \mathrm{TBF}$$

est un elc bornologique. Mais

$$\mathrm{TBE} \underset{\varepsilon}{\otimes} \mathrm{TBF} \geq \mathrm{E} \underset{\varepsilon}{\otimes} \mathrm{F}$$

et par conséquent

$$\mathrm{BE} \underset{\varepsilon_b}{\otimes} \mathrm{BF} \geq \mathrm{B}\left(\mathrm{E} \underset{\varepsilon}{\otimes} \mathrm{F}\right),$$

donc

$$\mathrm{T}\left(\mathrm{BE} \underset{\varepsilon_b}{\otimes} \mathrm{BT}\right) \geq \mathrm{TB}\left(\mathrm{E} \underset{\varepsilon}{\otimes} \mathrm{F}\right) \geq \mathrm{E} \underset{\varepsilon}{\otimes} \mathrm{F}$$

et la première assertion du théorème est démontrée. La nécessité dans la condition (ii) étant évidente, démontrons la suffisance. Alors les deux topologies bornologiques $\mathrm{E} \underset{\varepsilon}{\otimes} \mathrm{F}$ et $\mathrm{T}\left(\mathrm{BE} \underset{\varepsilon_b}{\otimes} \mathrm{BF}\right)$ sont identiques si et seulement si leurs bornologies sont identiques, autrement dit si et seulement si

$$\mathrm{B}\left(\mathrm{E} \underset{\varepsilon}{\otimes} \mathrm{F}\right) = \mathrm{BT}\left(\mathrm{BE} \underset{\varepsilon_b}{\otimes} \mathrm{BF}\right) = \mathrm{BE} \underset{\varepsilon_b}{\otimes} \mathrm{BF}$$

(car $\mathrm{BE} \underset{\varepsilon_b}{\otimes} \mathrm{BF}$ est toujours un ebc topologique, théorème 1). Comme on sait déjà que $\mathrm{BE} \underset{\varepsilon_b}{\otimes} \mathrm{BF}$, est plus fine que $\mathrm{B}\left(\mathrm{E} \underset{\varepsilon}{\otimes} \mathrm{F}\right)$, l'égalité a lieu si tout borné de $\mathrm{E} \underset{\varepsilon}{\otimes} \mathrm{F}$ est borné dans $\mathrm{BE} \underset{\varepsilon_b}{\otimes} \mathrm{BF}$, condition réalisée si E et F sont semi-bornologiques, d'où le théorème.

COROLLAIRE (Théorème général des noyaux). — *Soient* E *et* F *deux espaces de Fréchet* [*ou deux espaces* (DF) *bornologiques*] *dont l'un au moins est nucléaire. Notons* $\mathrm{E} \tilde{\otimes} \mathrm{F}$ *le complété bornologique de* $\mathrm{BE} \underset{\pi_b^{\circ}}{\otimes} \mathrm{F}$ *et* $\mathrm{E} \tilde{\tilde{\otimes}} \mathrm{F}$ *le complété bornologique de* $\mathrm{BE} \underset{\varepsilon_b}{\otimes} \mathrm{BF}$. *Alors* $\mathrm{E} \tilde{\otimes} \mathrm{F} = \mathrm{E} \tilde{\tilde{\otimes}} \mathrm{F}$ (*algébriquement et bornologiquement*). *De plus cette relation algébrique et bornologique est strictement équivalente au théorème des noyaux de Schwartz-Grothendieck.*

Preuve. — Le théorème classique des noyaux dit que

$$\mathrm{E} \underset{\pi}{\hat{\otimes}} \mathrm{F} = \mathrm{E} \underset{\varepsilon}{\hat{\otimes}} \mathrm{F}$$

où π et ε sont les topologies de Grothendieck. Ceci équivaut à dire que $\mathrm{E} \underset{\pi}{\otimes} \mathrm{F} = \mathrm{E} \underset{\varepsilon}{\otimes} \mathrm{F}$ et comme $\mathrm{E} \underset{\pi}{\otimes} \mathrm{F}$ est un elc bornologique, ceci équivaut à $\mathrm{B}\left(\mathrm{E} \underset{\pi}{\otimes} \mathrm{F}\right) = \mathrm{B}\left(\mathrm{E} \underset{\varepsilon}{\otimes} \mathrm{F}\right)$. Mais

$$\mathrm{B}\left(\mathrm{E} \underset{\pi}{\otimes} \mathrm{F}\right) = \mathrm{E} \underset{\pi_b^{\circ}}{\otimes} \mathrm{F}$$

[théorème 5 du paragraphe 2] et $\mathrm{B}\left(\mathrm{E} \underset{\varepsilon}{\otimes} \mathrm{F}\right) = \mathrm{BE} \underset{\varepsilon_b}{\otimes} \mathrm{BF}$, donc le théorème des noyaux équivaut à la relation bornologique

$BE \underset{\varepsilon_b}{\otimes} BF = E \underset{\pi_b^0}{\otimes} F$ donc à $BE \underset{\varepsilon_b}{\tilde{\otimes}} BF = E \underset{\pi_b^0}{\tilde{\otimes}} F$ car les ebc $BE \underset{\varepsilon_b}{\otimes} BF$ et $E \underset{\pi_b^0}{\otimes} F$ sont des ebc topologiques donc sont des sous-espaces *bornologiques* de leur complété bornologique, d'où le corollaire.

Comparaison des bornologies π_b et ε_b. — Il résulte immédiatement des définitions que la bornologie $E \underset{\pi_b}{\otimes} F$ est plus fine que la bornologie $E \underset{\varepsilon_b}{\otimes} F$. En fait, elle est en général *strictement* plus fine que $E \underset{\varepsilon_b}{\otimes} F$: En effet on sait qu'en général $E \underset{\pi}{\otimes} F$ est *strictement* plus fine que $E \underset{\varepsilon}{\otimes} F$ si E et F sont des espaces normés (un espace normé n'est nucléaire que s'il est de dimension finie), autrement dit la bornologie $B\left(E \underset{\pi}{\otimes} F\right)$ est en général strictement plus fine que $B\left(E \underset{\varepsilon}{\otimes} F\right)$ dans le cas d'espaces normés. Comme

$$B\left(E \underset{\pi}{\otimes} F\right) = BE \underset{\pi_b}{\otimes} BF \quad \text{et} \quad B\left(E \underset{\varepsilon}{\otimes} F\right) = BE \underset{\varepsilon_b}{\otimes} BF$$

l'assertion annoncée est vérifiée.

Remarque : Caractère non inductif de ε_b. — Soient

$$E = \varinjlim (E_i, \pi_{ij}) \quad \text{et} \quad F = \varinjlim (F_k, \tau_{kl})$$

deux ebc séparés. On peut se demander si $E \underset{\varepsilon_b}{\otimes} F = \varinjlim B\left(E_i \underset{\varepsilon}{\otimes} F_k\right)$. La réponse est négative en général. En effet, soit E un ebc non topologique, si la relation ci-dessus était vraie on aurait

$$E = \varinjlim B\left(E_i \underset{\varepsilon}{\otimes} K\right) = E \underset{\varepsilon_b}{\otimes} K \quad \text{(égalités bornologiques)},$$

ce qui est impossible puisque $E \underset{\varepsilon_b}{\otimes} K$ est un ebc topologique (théorème 1, corollaire 2).

Cette remarque suggère l'introduction d'une nouvelle variante de bornologie tensorielle notée ε_b' en posant par définition

$$E \underset{\varepsilon_b'}{\otimes} F = \varinjlim B\left(E_i \underset{\varepsilon}{\otimes} F_k\right).$$

On vérifie immédiatement que la bornologie ε_b' est moins fine que π_b et plus fine que ε_b. Nous reviendrons ailleurs sur cette nouvelle bornologie.

TROISIÈME PARTIE.

BORNOLOGIE NUCLÉAIRE.

INTRODUCTION.

Les espaces nucléaires, introduits en Analyse par A. Grothendieck et étudiés depuis lors par plusieurs auteurs, jouent, comme chacun le sait, un rôle de premier plan dans plusieurs branches de l'Analyse fonctionnelle moderne, notamment dans la théorie spectrale des opérateurs et la théorie des mesures cylindriques dans les espaces vectoriels topologiques ([18], [47]). Dans la plupart de ces questions, les espaces nucléaires interviennent de façon essentielle par leur dual, dual dont l'importance réside fondamentalement dans le caractère nucléaire des parties équicontinues. Le problème naturel qui se pose est alors de savoir si l'on peut *définir une structure* N^* *telle que tout dual d'espace nucléaire soit muni de cette structure et qu'inversement tout espace vectoriel muni de la structure* N^* *soit automatiquement le dual d'un certain espace nucléaire, dual dont on connaît* a priori *de façon précise les parties équicontinues.* Il s'agit de créer une structure caractéristique des duals d'espaces nucléaires, structure permettant de reconnaître pratiquement ces derniers *a priori* et à travers les apparences plus ou moins diverses. Nous allons donner une réponse affirmative à cette question. Tout d'abord nous introduisons une notion d'opérateur nucléaire dans des ebc sans aucune topologie donnée *a priori* et montrons que cette nouvelle classe d'opérateurs possède les propriétés essentielles de la classe d'opérateurs nucléaires dans les espaces vectoriels topologiques. Nous introduisons et étudions une catégorie d'espaces, les espaces bornologiques nucléaires, attachée à cette nouvelle classe d'opérateurs; montrons que ces espaces ont des propriétés de dualité remarquables avec les espaces nucléaires. La classe des « espaces b-nucléaires » comprend tous les duals d'espaces nucléaires et la classe des espaces b-nucléaires *et polaires* coïncide exactement avec la classe des duals d'espaces nucléaires. Nous montrons qu'il existe des espaces b-nucléaires qui ne sont pas polaires (*voir* n° 3). Nous obtenons pour les espaces b-nucléaires des résultats généralisant des résultats de Grothendieck (*voir* n^{os} 5 et 6).

1. Opérateurs b-nucléaires dans les espaces bornologiques. — Rappelons que si E_1 et F_1 sont deux espaces de Banach, tout élément de l'espace $E'_1 \hat{\otimes} F_1$ définit un opérateur nucléaire de E_1 dans F_1 et tout tel opérateur provient d'un élément de cet espace. Si E et F sont deux elc séparés, un opérateur nucléaire de E dans F est donné par une séquence $E \xrightarrow{\alpha} E_1 \xrightarrow{u} F_1 \xrightarrow{\beta} F$ où E_1 et F_1 sont des espaces de Banach, α et β des opérateurs continus et u nucléaire. On sait que cela équivaut à dire que l'opérateur ainsi composé « provient » d'un élément de l'espace $E'_A \hat{\otimes} F_B$ où A est un disque équicontinu faiblement fermé de E' et B un disque complétant de F. Il est alors intéressant de remarquer que la notion d'opérateur nucléaire de E dans F ne dépend que de la bornologie de F et des parties équicontinues de E', c'est-à-dire des parties de E' bornées sur tout borné (dès que E est infratonnelé). Cette remarque justifie l'extension aux ebc quelconques de la notion d'opérateur nucléaire par la définition suivante :

Définition 1. — *Soient* E *et* F *deux ebc;* E *étant t-séparé et* E^* *son dual bornologique. Un opérateur linéaire de* E *dans* F *sera dit* bornologiquement nucléaire *ou* b-nucléaire *ou* nucléaire *si aucune confusion n'est à craindre si elle « provient » (dans un sens précisé plus bas) d'un élément de* $E^*_A \tilde{\otimes}_{\pi_b} F_B$ *(produit tensoriel bornologique complété* π_b *des espaces normés* E^*_A *et* F_B*) où* A *est un disque borné naturel faiblement fermé de* E^* *et* B *un disque complétant de* F.

Explicitons cette définition. Puisque $E^* = (TE)'$ (algébriquement) et que la bornologie naturelle de E^* coïncide avec la bornologie équicontinue de $(TE)'$, A peut être considéré comme un disque équicontinu faiblement fermé de $(TE)'$. Alors A^0 est un disque bornivore de E et l'injection canonique $TE \to E_{A^0} = (TE)_{A^0}$ est continue et *a fortiori* l'injection $E \to E_{A^0}$ est bornée. Nous

dirons donc qu'un opérateur linéaire de E dans F *provient* d'un élément de $E^*_A \tilde{\otimes} F_B$ s'il est donné par une séquence $E \xrightarrow{\alpha} E_{A^0} \xrightarrow{u_1} F_B \xrightarrow{\beta} F$ où u_1 est nucléaire, α et β étant les injections bornées canoniques.

Remarques. — 1° *Tout opérateur b-nucléaire de* E *dans* F *est borné et transforme tout borné affaibli de* E *en un ensemble faiblement relativement quasi-compact :* En effet il existe un borné complétant B de F tel que u soit nucléaire donc compact de TE dans F_B.

2° Notons $L^{(1)}_b(\ ,\ )$ [resp. $L^{(1)}(\ ,\ )$] l'ensemble des opérateurs b-nucléaires (resp. nucléaires) d'un ebc t-séparé dans un ebc (resp. d'un elc dans un elc). Les relations suivantes se vérifient immédiatement :

(*a*) $L^1_{(b)}(E, F) \subset L^{(1)}(TE, TF) = L^1_{(b)}(E, BTF)$,

(*b*) $L^{(1)}(E, F) \subset L^1_{(b)}(BE, BF) = L^{(1)}(TBE, TBF)$,

(*c*) $L^{(1)}_b(E, BF) = L^{(1)}(TE, F)$.

Ces relations montrent que *tout opérateur b-nucléaire de* E *dans* F *est nucléaire de* TE *dans* TF *et la réciproque est vraie si* F *est un ebc topologique. Tout opérateur nucléaire de* E *dans* F *(*E *et* F *étant des elc) est b-nucléaire de* BE *dans* BF *et la réciproque est vraie si* E *est un elc bornologique.* Les opérateurs b-nucléaires sont ainsi liés aux opérateurs nucléaires comme les opérateurs bornés sont aux opérateurs continus, ce qui semble bien naturel.

Le résultat ci-après donne une représentation caractéristique des opérateurs b-nucléaires, analogue à la représentation classique d'opérateurs nucléaires.

Théorème 1. — *Soient* E *un ebc t-séparé de dual bornologique* E^**;* F *un ebc séparé et* u *un opérateur linéaire de* E *dans* F.

Les deux assertions suivantes sont équivalentes :

(i) *u est b-nucléaire;*

(ii) *u est de la forme* $x \to u(x) = \sum_{n>0} \alpha_n f_n(x) y_n$ *où*

(α_n) *appartient à* l^1 *(espace des suites scalaires absolument convergentes);*

(y_n) est contenue dans un disque borné complétant B *de* F;
(f_n) est naturellement bornée dans E^*;
la série ci-dessus convergeant dans F_B. *On peut même supposer que (y_n) converge vers zéro dans un espace de Banach* F_B *et (f_n) une suite convergeant vers zéro au sens de Mackey dans* E^*.

Preuve. — Supposons (i). Alors u provient d'un élément u_1 de $(TE)'_A \hat{\otimes} F_B$ où A est un disque équicontinu faiblement fermé de $(TE)'$ et B un disque borné complétant de F; donc u_1 définit un opérateur nucléaire de $(TE)_{A°}$ dans F_B et par conséquent est de la forme $u_1 = \sum_{n>0} \alpha_n h_n \otimes y_n$ où $(\alpha_n) \in l^1$; (h_n) est une suite convergeant vers zéro dans E^*_A et (y_n) convergeant vers zéro dans F_B. Les formes linéaires (h_n) sur $(TE)_{A°}$ définissent des formes linéaires continues (f_n) sur TE et la suite (f_n) est uniformément bornée sur $A°$ [car (h_n) est bornée dans $(TE)_{A°}$] donc est équicontinue dans $(TE)'$, donc naturellement bornée dans E^*, d'où l'assertion (ii). Inversement supposons (ii), il existe un borné H faiblement fermé de E^* tel que (f_n) appartienne à $E^*_H = (TE)'_H = [(TE)_{H°}]'$. Les hypothèses sur (f_n), (α_n), (y_n) entraînent que la série $\sum_n \alpha_n f_n \otimes y_n$ converge dans $[(TE)_{H°}]' \hat{\otimes} F_B$ [en notant abusivement par f_n la forme linéaire déduite de f_n sur $(TE)_{H°}$] pour la norme tensorielle projective donc définit un opérateur nucléaire de TE dans F_B, donc (puisque B est un borné initial de F) un opérateur b-nucléaire de E dans F d'où le théorème.

Corollaire :

(i) *L'espace* $L_b^{(1)}(E, F)$ *des opérateurs b-nucléaires de* E *dans* F *est un espace vectoriel;*

(ii) *Soit* G *un troisième ebc séparé; v (resp. u) un opérateur borné de* E *(resp.* F*) dans* F *(resp.* G*). On suppose* F *t-séparé. Alors si u ou v est b-nucléaire, $u \circ v$ est b-nucléaire. En conséquence, $v \circ w \circ u$ est b-nucléaire dès que u et v sont bornés et w un opérateur b-nucléaire.*

En particulier, $L_b^{(1)}(E)$ *est un idéal bilatère de* Hom(E).

(iii) *Tout opérateur b-nucléaire u de* E *dans* F *reste b-nucléaire lorsqu'on renforce la bornologie de* E *et qu'on affaiblit celle de* F.

Preuve. — La première assertion résulte immédiatement de la représentation fournie par le théorème 1. Démontrons la seconde. Si u est b-nucléaire, $u \circ v$ est b-nucléaire en vertu de la représentation. Si v est b-nucléaire, il provient d'un opérateur nucléaire v_1 de E^*_A dans F_{B_0} où B_0 est un disque borné complétant de F et A un disque borné naturel faiblement fermé de E^*. Posons $B = u(B_0)$. Puisque u est borné et G est séparé, B est un disque borné complétant de G et G_B est isométrique à un quotient de F_{B_0}. Alors $u \circ v$ se décompose en une séquence $E \to E_{A°} \xrightarrow{v_1} F_{B_0} \xrightarrow{\varphi} G_B \to G$, où φ est la surjection canonique de F_{B_0} sur G_B. Comme $\varphi \circ v_1$ est nucléaire, $u \circ v$ est b-nucléaire, d'où (ii). L'assertion (iii) en résulte aussitôt.

2. Bornologie nucléaire. Espaces b-nucléaires.

Définition 2. — *Soit* E *un ebc séparé. Un disque borné* A *de* E *sera dit* b-nucléaire *ou* nucléaire *si aucune confusion n'est à craindre si l'injection canonique de* E_A *dans* E *est b-nucléaire. Un borné quelconque de* E *sera dit b-nucléaire si son enveloppe disquée (convexe équilibrée) est b-nucléaire. L'espace* E *sera dit un* espace b-nucléaire *ou* espace bornologique nucléaire *si tout borné de* E *est b-nucléaire.*

Théorème 2. — *Soit* E *un ebc séparé.*

Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) E *est b-nucléaire;*

(ii) *Pour tout borné* A *de* E, *il existe un borné complétant* B *de* E *contenant* A *tel que l'injection canonique de* $E_A \to E_B$ *soit nucléaire;*

(iii) *Toute application bornée d'un espace de Banach dans* E *est b-nucléaire.*

(iv) E *possède une base de bornologie formée de disques nucléaires.*

Preuve. — L'équivalence des assertions (i) et (ii) est immédiate à partir des définitions. Or l'assertion (ii) entraîne de façon évidente que *tout espace b-nucléaire est complet*, d'où l'équivalence des assertions (i) et (iii). L'équivalence de (i) et (iv) résulte du fait que toute partie d'un disque borné nucléaire est nucléaire en vertu du Corollaire du théorème 1.

Corollaire 1. — *Toute bornologie nucléaire est une bornologie de Schwartz.*

Toute bornologie nucléaire à base dénombrable est une bornologie de Silva, donc t-séparée et topologique.

Preuve. — Le corollaire résulte des définitions suivantes et des propriétés bien connues d'une bornologie de Silva.

Définition 3. — *Nous dirons qu'un ebc séparé* E *est un* espace de Schwartz (*au sens bornologique*) *ou, tout simplement, un espace de Schwartz si aucune confusion n'en résulte si tout borné* A *est contenu dans un borné* B *tel que l'injection* $E_A \to E_B$ *soit compacte. On dit que* E *est un* espace de Silva *s'il est un espace de Schwartz à base dénombrable.*

Remarque. — La notion d'espace de Silva a été introduite en bornologie par J. S. Silva [48] en 1960 comme l'analogue de la notion classique d'espace de Silva introduite en théorie des espaces vectoriels topologiques par le même auteur en 1955.

Corollaire 2. — *Tout espace b-nucléaire t-séparé est polaire et b-réflexif.*

Preuve : L'assertion du corollaire 2 est vraie plus généralement si E *est un espace de Schwartz (au sens bornologique).* — En effet, tout borné A de E est relativement compact dans un espace E_B, donc l'adhérence de A dans E_B est bornée et faiblement compacte, donc faiblement fermée dans E; d'où la polarité; La *b*-réflexivité résulte de Mackey-Arens.

3. Un théorème de dualité. Structure de dual d'espace nucléaire.

Théorème 3. — *Soit* F *un espace b-nucléaire [resp. un espace de Schwartz au sens bornologique] t-séparé;* F^* *son dual bornologique muni de la topologie de la convergence uniforme sur les bornés de* F.

(i) F^* *est un elc nucléaire et complet [resp. un espace de Schwartz complet au sens E. V. T.].*

(ii) *Inversement, soit* E *un elc nucléaire et complet (resp. un espace de Schwartz complet au sens E. V. T.); il existe un espace b-nucléaire (resp. un espace de Schwartz au sens bornologique)* F *tel que* $E = F^*$ *(algébriquement et bornologiquement).*

Preuve. — (i) F étant un espace de Schwartz (au sens bornologique) *t*-séparé est polaire et *b*-réflexif (démonstration du corollaire 2, théorème 1), donc $F = (F^*)'$ bornologiquement, d'où (i). Inversement, E étant un espace de Schwartz complet (au sens E. V. T.), $E = (E')^*$ algébriquement et topologiquement lorsqu'on munit E' [resp. $(E')^*$] de la bornologie équicontinue (resp. de la topologie de la convergence uniforme sur les parties équicontinues de E'). En effet il suffit de montrer en vertu du théorème de complétion de Grothendieck que toute forme linéaire bornée sur E' est faiblement continue sur toute partie équicontinue de E'. Si f est une telle forme et si A est un disque équicontinu faiblement fermé de E', A est compact dans un Banach E'_B où B est un disque équicontinu faiblement fermé de E', donc sur A la topologie $\sigma(E', E)$ coïncide avec la topologie induite par E'_B. Comme f est continue sur E_B, notre assertion est démontrée.

Il suffit alors de prendre $F = E'$ et le théorème est complètement démontré.

Corollaire. — *Soit* E *un elc bornologique. Si tout borné de* E *est nucléaire,* E'_B *est nucléaire. Inversement, si* E *est quasi-complet si son dual est nucléaire, tout borné de* E *est nucléaire.*

Preuve. — La première assertion résulte du théorème précédent. Inversement, l'hypothèse implique que E'_B est semi-réflexif car nucléaire et complet. Donc E, espace de Mackey quasi-complet, est réflexif (Bourbaki [7], chap. IV, § 3, exercice 11), donc E'_B est tonnelé donc tout borné faible de E'' est nucléaire *a fortiori* tout borné de $E = E''$ est nucléaire.

Ce résultat généralise un théorème de Grothendieck ([16], chap. 2, § 2, nº 1, th. 7).

Scholies. — En vertu du théorème 3, tous les espaces nucléaires complets sont obtenus algébriquement et topologiquement comme duals bornologiques convenablement topologisés d'espaces *b*-nucléaires.

2° Inversement, la classe des espaces b-nucléaires et polaires coïncide du point de vue algébrique et bornologique avec la classe des duals topologiques convenablement bornologisés d'espaces nucléaires.

On peut donc définir explicitement une structure de dual d'espace nucléaire par les axiomes suivants :

DÉFINITION 4. — *Soit* E *un espace vectoriel.* $\mathcal{B}$ *une famille de parties de* E. *On dira que* $\mathcal{B}$ *définit sur* E *une* structure de dual d'espace nucléaire *dite structure* N^* *si les axiomes suivants sont vérifiés :*

(1) *L'ensemble des éléments de* $\mathcal{B}$ *recouvre* E;

(2) *Toute partie d'un élément de* $\mathcal{B}$ *appartient à* $\mathcal{B}$;

(3) *Pour tous* A *et* B *appartenant à* $\mathcal{B}$ *et* λ *un scalaire* $\lambda \overline{\left| A \cup B \right.}$ *appartient à* $\mathcal{B}$;

(4) *Pour tout* A *appartenant à* $\mathcal{B}$, *il existe un* $B \in \mathcal{B}$ *complétant tel que* $E_A \to E_B$ *soit nucléaire;*

(5) *Pour tout élément non nul de* E, *il existe une forme linéaire sur* E *bornée sur tout élément de* $\mathcal{B}$ *telle que* $f(x) \neq 0$.

Remarque. — Nous allons montrer par un contre-exemple que l'axiome 5 est bien indépendant du système des quatre autres axiomes. Autrement dit, *il existe des espaces b-nucléaires qui ne sont pas duals d'elc nucléaires.* Dans [27], Y. Komura a construit un elc E limite inductive localement convexe d'une famille E_α d'espaces du type $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ tel que $E' = \{0\}$. Tous les espaces E_α sont donc des espaces de Fréchet nucléaires, ce qui équivaut à dire que les espaces BE_α sont des espaces b-nucléaires ([16], chap. 2, § 2, n° 1, th. 7). La limite inductive bornologique F des espaces BE_α est donc b-nucléaire en vertu du théorème 6 (corollaire) du n° 5 (voir plus loin). Il est clair que $E' = F^*$. Cet exemple montre aussi qu'il existe des espaces de Schwartz (au sens bornologique) non duals d'espace de Schwartz (au sens E. V. T.).

THÉORÈME 4. — *Soit* E *un espace vectoriel. Pour que* E *soit le dual d'un elc nucléaire* F, *il faut et il suffit que* E *soit muni d'une structure* N^* *définie par une famille* $\mathcal{B}$ *de parties de* E. *Alors* $\mathcal{B}$ *est exactement l'ensemble des parties équicontinues de* F'.

Comme application, les exemples ci-dessous montrent que les duals d'espaces nucléaires se rencontrent très fréquemment en Analyse et sous des apparences très diverses :

Exemples. — 1° Soit E un espace vectoriel; $\mathcal{B}$ la bornologie convexe discrète sur E (déterminée par les enveloppes disquées des parties finies. (E, $\mathcal{B}$) est un espace dual d'espace nucléaire. En effet, tout borné de rang fini est évidemment nucléaire et TE est la topologie localement convexe la plus fine sur E, donc est séparée. C'est d'ailleurs une somme directe topologique de droites.

Cet exemple montre que tout espace vectoriel peut toujours être canoniquement muni d'une structure de dual d'espace nucléaire.

2° Soit E un elc séparé; σ une famille de disques de E, bornés, complets, filtrante et invariante par homothétie. Laurent Schwartz [63] dit que E est σ-conucléaire si pour tout A de σ, il existe un élément B contenant A tel que l'injection canonique de E_A dans E_B soit un cléaire. Par définition, σ possède la propriété I, si tout sous-disque borné et complet d'un élément de σ, appartient à σ [*voir* [63], p. 99, définitions]. Il est clair que si σ possède la propriété de recouvrement, σ définit sur E une bornologie t-séparée et nucléaire, donc (E, σ) est un dual d'espace nucléaire.

4. STRUCTURE HILBERTIENNE DES ESPACES b-NUCLÉAIRES. — A. Grothendieck a montré que tout espace nucléaire (complet) est limite projective localement convexe d'espaces préhilbertiens (hilbertiens). Par dualité, tout dual d'espace nucléaire est limite inductive (au moins algébrique) d'espaces hilbertiens. Nous allons renforcer ce dernier résultat par une égalité bornologique et le généraliser à tout espace b-nucléaire polaire ou non. La généralisation de ce résultat est une *vraie* généralisation en vertu du contre-exemple signalé plus haut. Suivant une définition de Schwartz [63], nous dirons qu'un disque A d'un ebc est hilbertien si E_A est un espace de Hilbert. Alors on peut énoncer :

THÉORÈME 5. — *Soit* E *un espace b-nucléaire.*

(i) E *possède une base de bornologie formée de disques hilbertiens;*

(ii) *En conséquence tout espace b-nucléaire est limite inductive bornologique d'espaces de Hilbert.*

Preuve. — La démonstration se réduit en fait à constater que la technique classique de Grothendieck ([16], chap. II, § 2, n° 1, lemme 3) utilisée dans le cas particulier de la bornologie équicontinue s'adapte sans aucune difficulté au cas général :

Soit A un disque borné de E. Par hypothèse, il existe un disque borné complétant B de E tel que $\pi_{AB} : E_A \to E_B$ soit nucléaire. Mais alors π_{AB} se factorise à travers un espace de Hilbert H (l'espace l^2). Alors $\pi_{AB} = f_B \circ f_A$ où f_A (resp. f_B) est une application linéaire continue de E_A dans H (resp. de H dans E_B). L'image B′ de la boule unité de H par f_B est un disque borné hilbertien de E dont un homothétique contient A, d'où le résultat.

On peut alors donner une autre caractérisation des espaces *b*-nucléaires (la réciproque du théorème 5 étant évidemment fausse puisqu'un espace de Hilbert de dimension infinie ne peut être nucléaire).

Corollaire. — *Soit* E *un ebc.*

Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) E *est b-nucléaire;*

(ii) E *possède une base de bornologie formée de disques hilbertiens* $(B_i)_{i \in I}$ *telle que pour tout i, il existe j tel que* $E_{B_i} \to E_{B_j}$ *soit un opérateur de Hilbert-Schmidt.*

5. Propriétés de permanence. Constructions d'espaces *b*-nucléaires.

Théorème 6 :

(i) *Tout sous-espace b-fermé* F *d'un espace b-nucléaire est b-nucléaire;*

(ii) *Tout quotient bornologique* E/F *d'un espace b-nucléaire par un sous-espace b-fermé est b-nucléaire;*

(iii) *Toute somme directe bornologique d'espaces b-nucléaires b-nucléaires est b-nucléaire;*

(iv) *Tout produit au plus dénombrable d'espaces b-nucléaires est b-nucléaire;*

(v) *Le complété bornologique du produit tensoriel bornologique* π_b *de deux espaces b-nucléaires est b-nucléaire.*

Preuve. — Il suffit, pour les assertions (i) à (iv) de noter que les démonstrations classiques des propriétés de permanence des elc nucléaires faites à partir de la bornologie équicontinue du dual (*voir* par exemple, Grothendieck, [16], chap. I, § 2, n° 2 et Schwartz [46], exposé n° 18) s'adaptent sans aucune difficulté essentielle au cas général d'une bornologie nucléaire quelconque.

Pour l'assertion (v), on remarque tout d'abord que *le produit tensoriel* π_b *de deux espaces b-nucléaires vérifie la concordance faible des normes* puisque tout espace de Hilbert vérifie la condition d'approximation [*voir* partie II, chap. II, § 2, n° 5, remarque 2 après le corollaire du théorème 6]. L'assertion (v) résulte donc du théorème de complétion d'un ebc aux normes concordantes (partie I, théorème 2) et du fait que le produit tensoriel projectif complété de deux opérateurs nucléaires est encore nucléaire.

Corollaire. — *Toute limite inductive bornologique séparée et toute limite projective bornologique dénombrable d'espaces b-nucléaires est b-nucléaire.*

Remarque. — On retrouve ainsi, en partant du point de vue bornologique, et dûment généralisées, les propriétés de permanence classiques des espaces nucléaires établis par A. Grothendieck ([16], chap. II, § 2, n° 2, théorème 9). Moyennant des conditions de *t*-séparation le théorème 6 fournit des constructions de duals d'espaces nucléaires.

BIBLIOGRAPHIE.

Les ouvrages et articles traitant des questions d'intérêt général ne sont précédés d'aucun signe particulier. Nous ferons précéder du signe :

* les ouvrages et articles relatifs en tout ou en partie à la bornologie d'espace vectoriel topologique;

** les ouvrages et articles relatifs en tout ou en partie à la bornologie générale ou placés sous le point de vue bornologique.

Cette bibliographie ne fait pas mention des récents travaux sur les algèbres bornologiques. A partir du n° 63, les références ne sont plus classées par ordre alphabétique.

[1] S. Banach, *Théorie des opérations linéaires* (Varsovie, 1932).
**[2] I. A. Berezanskii, *Inductively reflexive, locally convex spaces* (*Soviet Mathematics-Dokadly*, vol. 9, n° 5, 1968, p. 1080-1082).
[3] N. Bourbaki, *Ensembles ordonnés* (*Théorie des ensembles*, chap. III, 1956).
[4] N. Bourbaki, *Structures* (*Théorie des ensembles*, chap. IV, 1966).
[5] N. Bourbaki, *Algèbre linéaire* (*Algèbre*, chap. II, 1962).

[6] N. Bourbaki, *Structures uniformes* (*Topologie générale*, chap. II, 1961).
*[7] N. Bourbaki, *Espaces vectoriels topologiques*, chap. I et II, 1966 et chap. III, IV et V, 1964.
*[8] N. Bourbaki, *Sur certains espaces vectoriels topologiques* (*Ann. Inst. Fourier*, t. II, 1950, p. 5-16).
**[9] H. Buchwalter, *Espaces vectoriels bornologiques* (*Publ. Dép. Math.*, Lyon, t. 2, nº 1, 1965).
**[10] H. Buchwalter, *Topologies, Bornologies et Compactologies* (*Thèse*, Lyon, 1968).
*[11] J. Dieudonné, *Recent developments in the theory of locally convex vector spaces* (*Bull. Amer. Math. Soc.*, vol. 59, nº 6, 1953, p. 495-512).
*[12] Dieudonné-Schwartz, *La dualité dans les espaces* (F) *et* (LF) (*Ann. Inst. Fourier*, t. I, 1949, p. 61-101).
**[13] W. F. Donoghue et K. T. Smith, *On the symetry and bounded closure of locally convex spaces* (*Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 73, 1952, p. 321-344).
**[14] C. Foias et G. Marinescu, *Sur le prolongement des fonctionnelles linéaires dans les espaces vectoriels pseudo-topologiques* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 251, 1962, p. 2274-2276); *voir* aussi [64].
*[15] A. Grothendieck, *Sur les espaces* (F) *et* (DF) (*Summa Brasiliensis Mathematicæ*, vol. 3, fasc. 6, 1954, p. 57-123).
*[16] A. Grothendieck, *Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires* (*Memoirs of Amer. Math. Soc.*, nº 16, 1955).
[17] A. Grothendieck, *Résumé des résultats essentiels de la théorie des produits tensoriels topologiques et des espaces nucléaires* (*Ann. Inst. Fourier*, t. IV, 1952, p. 73-112).
[18] I. M. Gelfand et N. Y. Vilenkin, *Applications de l'analyse harmonique* (*Les distributions*, t. 4, Dunod, Paris, 1967).
**[19] H. Hogbe-Nlend, *Sur la complétion des espaces bornologiques* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 268, série A, 1969, p. 382).
**[20] H. Hogbe-Nlend, *Sur la structure du complété d'un espace bornologique* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 268, série A, 1969, p. 540).
**[21] H. Hogbe-Nlend, *Sur les produits tensoriels bornologiques d'espaces bornologiques* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 268, série A, 1969, p. 1556-1559).
**[22] H. Hogbe-Nlend, *Sur les produits tensoriels bornologiques et les espaces à bornologie nucléaire* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 268, série A, 1969, p. 1602-1605).
*[23] J. Horvath, *Topological vector spaces and distributions* (I) (Addison-Wesley Publishing Company, New-York, 1966).
*[24] J. L. Kelley et I. Namioka, *Linear Topological spaces* (D. Van Nostrand Company, Inc., New-York, 1963).
[25] K. Kera, *Remarks on the space generated by a bounded disk* (*Math. Rev.*, vol. 24, nº 3 A, p. A 1595).
*[26] V. L. Klee, *Boundedness and continuity of linear spaces* (*Duke Math. J.*, vol. 22, 1955, p. 263-269).
*[27] Y. Komura, *Some examples of linear topological spaces* (*Math. Annalen*, 153, 1964, p. 150-162).
*[28] T. Komura et Y. Komura, *Sur les espaces parfaits de suites et leurs généralisations* (*J. Math. Soc. Japan*, vol. 15, nº 3, 1963).

*[29] G. Köthe, *Une caractérisation des espaces bornologiques* (*Colloque sur l'Analyse fonctionnelle*, C. B. R. M., 1961, p. 39-45).
**[30] G. W. Mackey, *On infinite-dimensional linear spaces* (*Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 57, 1945, p. 155-207).
*[31] G. W. Mackey, *On convex topological linear spaces* (*Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 60, 1946, p. 520-537).
**[32] B. M. Makarov, *Some pathological properties of inductive limits of* B-*spaces* (*Math. Rev.*, vol. 27, 1964, p. 2839).
**[33] G. Marinescu, *Espaces vectoriels pseudo-topologiques et théorie des distributions* (Berlin, 1963).
**[34] J. Mikusinski, *Distributions à valeurs dans les réunions d'espaces de Banach* (*Studia Mathematica*, t. 19, 1960, p. 251-285).
**[35] L. D. Nel, *Note on completeness in a pseudo-topological linear space* (*J. London Math. Soc.*, vol. 40, 3, nº 159, 1965, p. 497-498).
[36] J. von Neumann, *On complete topological spaces* (*Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 37, 1935, p. 1-20).
**[37] G. T. Roberts, *Bounded-weak topologies and completeness in vector spaces* (*Proc. Cambridge Phil. Soc.*, vol. 49, 2, 1953, p. 183-189).
**[38] G. T. Roberts, *Topologies defined by bounded sets* (*Proc. Cambridge Phil. Soc.*, vol. 51, 1955, p. 379-381).
*[39] A. P. Robertson et W. Robertson, *Topological vector spaces* (Cambridge University Press, 1966).
[40] A. P. Robertson et W. Robertson, *A note on the completion of a uniform space* (*J. London Math. Soc.*, vol. 33, 2, nº 130, 1958, p. 181-185).
*[41] H. H. Schaefer, *Topological vector spaces* (The Mac Millan Company, New-York, 1967).
[42] R. Schatten, *A theory of cross-spaces* (*Annals of mathematics studies*, nº 26, 1950).
[43] R. Schatten, *Norm ideals of completely continuous operators* (Springer-Verlag, Berlin, 1960).
[44] L. Schwartz, *Théorie des distributions* (Hermann, Paris, 1966).
[45] L. Schwartz, *Distributions à valeurs vectorielles* (*Ann. Inst. Fourier*, t. 7, 1957 et t. 8, 1958).
[46] L. Schwartz, *Produits tensoriels topologiques. Espaces nucléaires* (Séminaire 1953-1954, Secrétariat mathématique, Paris).
[47] L. Schwartz, *Mesures de Radon sur des espaces non localement compacts* (Centro de Calculo Cientifico, Lisboa, 1964); *voir* aussi [63].
**[48] J. S. E. Silva, *Les espaces à bornés et la notion de fonction différentiable* (*Colloque sur l'Analyse fonctionnelle*, C. B. R. M., 1961, p. 57-61); *voir* aussi [65].
**[49] T. Shibata, *Adjoint Space and Dual Space* (*Proc. Japan Acad.*, vol. 36, nº 5, 1960, p. 261-266).
*[50] S. Simons, *The bornological space associated with* R^I (*J. London Math. Soc.*, vol. 36, 4, nº 144, 1961, p. 461-473).
*[51] F. Treves, *Topological vector spaces, distributions and kernels* (Academic Press, New-York and London).
*[52] S. Vasilach, *Ensembles bornés dans les modules topologiques* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 267, série A, 1968, p. 681-683).

**[53] L. Waelbroeck, *Étude spectrale des algèbres complètes* (*Mém. Acad. Roy. Belgique*, Classe des Sciences, t. 31, 1960).

**[54] L. Waelbroeck, *Les espaces à bornés complets* (*Colloque sur l'Analyse fonctionnelle*, C. B. R. M., 1961, p. 51-55).

**[55] L. Waelbroeck, *Le complété et le dual d'un espace à bornés* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 253, 1961, p. 2827-2828).

**[56] L. Waelbroeck, *Théorie des algèbres de Banach et des algèbres localement convexes* (Séminaire Mathématiques sup., Montréal, 1962).

**[57] L. Waelbroeck, *Some theorems about bounded structures* (*J. Funct. Anal.*, vol. 1, 1967, p. 392-408).

**[58] L. Waelbroeck, *Differentiable mapping into b-spaces* (*J. Funct. Anal.*, vol. 1, 1967, p. 409-418); *voir* aussi [67] et suivants.

*[59] J. H. Webb, *Sequential convergence in locally convex spaces* (*Proc. Camb. Phil. Soc.*, vol. 64, 2, 1968, p. 341-364).

*[60] J. V. Wehaussen, *Transformations in linear topological spaces* (*Duke Math. J.*, vol. 4, 1938, p. 157-169).

*[61] E. Weiss, *Boundedness in topological rings* (*Pacific J. Math.*, vol. 6, n° 1, 1956, p. 149-158).

[62] J. D. Weston, *A note on integration in vector spaces* (*J. London Math. Soc.*, vol. 31, Part 4, n° 124, 1956 p. 399-400).

[63] L. Schwartz, *Mesures de Radon sur des espaces topologiques arbitraires* (Institut Henri Poincaré, 1964-1965).

**[64] C. Foais et G. Marinescu, *Fonctionnelles linéaires dans les réunions dénombrables d'espaces de Banach réflexifs* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 261, 1965, p. 4958-4960).

**[65] Sebastiao e Silva, *Les espaces à bornés et les réunions d'espaces normés* (*Atti Accad. Naz. Lincei, Rend. A. Sc. fis. mat. natur.*, VIII, Ser. 34, 1963, p. 134-137; *Zbl.*, 15 novembre 1965; MR 3305).

**[66] Guy Noël, *Structures bornologiques et produit tensoriel* (*Thèse*, Université Libre de Bruxelles, Faculté des Sciences, mai 1969).

**[67] L. Waelbroeck, *Le complété et le dual d'un espace localement convexe* (*Bull. Soc. math. Belgique*, t. 16, fasc. 4, 1964, p. 393-406).

**[68] L. Waelbroeck, *Compacité et dualité en Analyse linéaire* (*Publ. Math.*, Lyon, t. 2, fasc. 1, 1965).

**[69] L. Waelbroeck, *Les quotients de b-espaces* (Publ. Institut Mathématiques, Université Libre, Bruxelles, 1962).

**[70] L. Waelbroeck, *Fonctions différentiables et petite bornologie* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 267, série A, 1968, p. 220-222).

(Thèse soutenue à Bordeaux, le 26 septembre 1969.)

H. Hogbe-Nlend,
Département Mathématiques,
Faculté des Sciences
de Bordeaux,
351, cours de la Libération,
33-Talence.

J. Math. pures et appl.,
49, 1970, p. 289 à 348.

SOMME D'APPLICATIONS NON LINÉAIRES DANS DES CÔNES ET ÉQUATIONS D'ÉVOLUTIONS DANS DES ESPACES D'OPÉRATEURS

Par **G. Da PRATO**
(Rome).

TABLE DES MATIÈRES.