2. 1639. **Mathieu, M.-P.** Recherches expérimentales sur quelques étalons métrologiques ; 1953 ; 31 fig., 224 p. .... 200 »
3. 1641. **Nollet, L.** Quelques propriétés nouvelles des courbes tracées sur une surface algébrique ; 1958 ; 40 p. .... 40 »
4. 1642. **Warzée, J.** Sur la possibilité de déduire immédiatement, du diagramme différentiel de Wilf, la distance et le pouvoir absorbant d'une nébuleuse obscure, ainsi que la dispersion δ des magnitudes absolues ; 1953 ; 9 fig., 42 p. .... 40 »
5. 1643. **Demeur, M.** Etude de l'interaction entre le champ propre d'une particule et un champ électro-magnétique homogène et constant ; 1953 ; 98 p. .... 100 »
6. 1644. **Colloque Junius Massau,** Mons et Gand, 26 et 27 avril 1952 ; 1954 ; 17 fig., 74 pp. .... 60 »
7. 1646. **Jeuniaux, Ch.** Sur la chitinase et la flore bactérienne intestinale des mollusques gastéropodes ; 1954 ; 3 fig., 45 p. .... 40 »
8. 1655. **Duchesne, J.** Les vibrations et les spectres électroniques des molécules polyatomiques ; 1955 ; 23 fig., 76 p. .... 60 »

Tome XXIX

1. 1656. **Demal, J.** Essai d'Histologie comparée des Organes Chémorécepteurs des Gastéropodes ; 1955 ; 12 fig., 7 pl. ; 83 p. .... 80 »
2. 1657. **Fraeijs de Veubeke, B.** Aspects Cinématique et Énergétique de la Flexion sans Torsion ; 1955 ; 3 fig. ; 48 p. .... 40 »
3. 1659. **Tits, J.** Sur certaines classes d'espaces homogènes de groupes de Lie ; 1955 ; 268 p. .... 200 »
4. 1661. **Kestens, J.** Le Problème aux Valeurs propres normal et Bornes supérieures et inférieures par la Méthode des Itérations ; 104 p. ; 1 fig. ; 1956 .... 80 »
5. 1665. **Monfils, A.** Contribution à l'étude de la structure du monochlorosilane par spectroscopie infrarouge à grande dispersion ; 52 p. ; 20 fig. ; 1956 .... 80 »
6. 1666. **Guillaume, M.** Sur les Topologies définies à partir d'une relation d'ordre ; 44 p. ; 1956 .... 40 »
7. 1667. **Grandjean, J.** Vitesses différentielles dans l'atmosphère de η Aquilae et de ζ Geminorum ; 59 p. ; 4 fig. ; 1956 .... 50 »
8. 1671. **Backes, F.** Recherches de Géométrie Anallagmatique ; 36 p. ; 1956 .... 40 »

Tome XXX

1. 1673. **Macq, P.** Contribution à l'étude de la corrélation angulaire Bêta-Gamma ; 1956 ; 9 fig., 40 p. .... 40 »
2. 1677. **Léonard, J.** Genera des Cynometreae et des Amherstieae africaines ; 1957 ; 47 pl. ; 314 p. .... 260 »
3. 1679. **Breny, R.** Contribution à l'étude de la diapause chez *Neodiprion sertifer* Geoffr. dans la nature ; 1957 ; 5 fig., 88 p. .... 80 »
4. 1680. **Duculot, C.** Méthode de détermination directe des représentations irréductibles associés aux harmoniques et combinaisons de vibrations moléculaires ; 1957 ; 90 p. .... 80 »
5. 1682. **Janssens, P.** Sur le rôle des corrélations en turbulence homogène ; 1957 ; 17 fig. ; 112 p. .... 160 »
6. 1684. **Colloque Jules Boulvin,** 1957 ; 117 fig. ; 8 diagr. ; 262 p. .... 100 »
7. 1689. **Burnelle, Louis.** Le Spectre Electronique de la Molécule de Thiophosgène ; 1958 ; 11 fig. ; 68 p. .... 80 »

Tome XXXI

1. 1691. **Streel, M.** Etude phytosociologique de la Fagne wallonne et de la Fagne de Clefay ; 1959 ; 21 fig. ; 109 p. .... 160 »
2. 1692. **Deprit, A.** Contribution à l'étude de l'Algèbre des Applications linéaires continues d'un Espace localement convexe séparée — Théorie de Riesz. Théorie spectrale ; 1959 ; 160 p. .... 120 »
3. 1693. **Fourmarier, P.** Le granite et les déformations mineures des roches (schistosité, microplissement, etc.) ; 1959 ; 22 fig. ; 101 p. .... 100 »
4. 1694. **Coz, M.** Une classe de modèles euclidiens pour métriques variationnelles ; 1959 ; 42 p. .... 40 »
5. 1695. **Backes, F.** Sur les congruences pseudosphériques ; 1959 ; 31 p. .... 40 »
6. 1698. **Fraeijs de Veubeke, B.** Flexion et extension des plaques d'épaisseur modérée ; 1959 ; 3 fig ; 38 p. .... 40 »
7. 1708. **Waelbroeck, L.** Étude spectrale des Algèbres complètes ; 1960 ; 142 p. 120 »

PUBLICATIONS DE LA FONDATION A. DE POTTER :

1. **Pelseneer, P.** Essai d'éthologie zoologique d'après l'étude des Mollusques ; 1935 ; 662 p. .... 200 »
2. **De Wildeman, É.** Études sur le genre Coffea L. ; 1941 ; 6 pl., 104 fig., 496 p. 200 »
3. **Baudoux, P.** Notes sur les systèmes modernes d'unités électriques ; 1950 ; 4 tabl. 15 p. ....

Imprimerie J. Duculot, Gembloux (Belgique).
Printed in Belgium.

Académie royale de Belgique

CLASSE DES SCIENCES

MÉMOIRES

Collection in-8°. — Tome XXXI
Fascicule 7 et dernier.

Koninklijke Academie van België

KLASSE DER WETENSCHAPPEN

VERHANDELINGEN

Verzameling in-8°. — Boek XXXI
Aflevering 7 en laatste.

ÉTUDE SPECTRALE
DES
ALGÈBRES COMPLÈTES

PAR

L. WAELBROECK

Docteur en Sciences mathématiques.
Chef de Travaux à l'Université Libre de Bruxelles.

Exemplaire hors commerce.

BRUXELLES
PALAIS DES ACADÉMIES
RUE DUCALE, 1

BRUSSEL
PALEIS DER ACADEMIËN
HERTOGELIJKESTRAAT, 1

1960

LISTE DES PUBLICATIONS RÉCENTES DE L'ACADÉMIE

CLASSE DES SCIENCES

Mémoires in-8° — 2e Série

TOME XX

1. **1548. Brien, P.** Etudes sur deux Hydroïdes gymnoblastiques ; 1942 ; 4 pl., 15 fig., 116 p. .... 80 »
2. **1555. Prigogine, I.** Contribution à l'étude spectroscopique dans l'infra-rouge proche de la liaison d'hydrogène et la structure des solutions ; 1943 ; 37 fig., 93 p. .... 70 »
3. **1556. Gillis, P.** Sur les formes différentielles et la formule de Stokes ; 1943 ; 95 p. .... 70 »
4. **1558. Van Dormael, A.** Le nitrile γ hydroxy-crotonique ; 1945 ; 34 p. .... 20 »
5. **1559. Lahaye, Ed.** Les développements des intégrales des équations $\frac{dy}{dx}=\frac{P(x, y)}{Q(x, y)}$ dans le domaine des valeurs qui annulent simultanément P et Q ; 1945 ; 123 p. .... 70 »
6. **1560. Defay, R.** Des diverses manières de définir l'adsorption ; 1946 ; 2 fig., 71 p. .... 50 »

TOME XXI

1. **1561. Smets, G.** Contribution à l'étude de l'Isomérie géométrique. Les alcools a éthyléniques ; 1947 ; 72 p. .... 40 »
2. **1562. Conard, A.** Sur la division cellulaire chez oedogonium ; 1947 ; 8 tabl., 4 pl., 88 p. .... 60 »
3. **1565. Ansiaux, J. R.** Recherches sur une fonction écologique, la pression osmotique chez les végétaux ; 1948 ; 20 tabl., 5 graph., 56 p. .... 40 »
4. **1567. Bosquet, J.** Introduction à l'électrodynamique des conducteurs en mouvement, 1948 ; 86 p. .... 60 »
5. **1569. Géhéniau, J.** Etude sur les champs spinoriels et leur quantification ; 1948 ; 58 p. .... 50 »
6. **1570. Bureau, Fl.** Sur l'intégration d'une équation linéaire aux dérivées partielles totalement hyperbolique d'ordre quatre et à trois variables indépendantes ; 1948 ; 6 fig. ; 64 p. .... 50 »
7. **1574. Capron, P. G.** L'isomérie nucléaire du Radio-Brome Br. 80/35 et ses niveaux de capture ; 1948 ; 12 fig. ; 36 p. .... 40 »
8. **1575. Lahaye, E.** Le problème de Cauchy et la résolution de certaines catégories d'équations linéaires du second ordre et d'ordres supérieurs à multiplicités caractéristiques décomposables ; 1949 ; 80 p. .... 80 »
9. **1576. Mortier, P.** Bijzonder geval van wisselwerking tussen dipolen en ionen in een electrolytische oplossing, mede in verband met de dielectrische constante van het oplosmiddel ; 1949 ; 9 fig., 32 p. .... 40 »

TOME XXII

De Wildeman, É. Stérilité ou vieillissement et disparition des espèces végétales

1564. 1er volume ; 1948 ; 3 fig., 705 p. .... } 500 »
1564bis 2me volume ; 1948 ; 5 fig., 29 pl. ; 697 p. .... }

TOME XXIII

1. **1577. Pissard, N.** Sur les surfaces à sections hyperplanes hyperelliptiques ; 1949 ; 35 p. .... 40 »
2. **1578. Jungers, J. C. et Verhulst, J.** Photosynthèse des bromures de deutero-éthylènes et des bromures de deutero-vinyles ; 1949 ; 9 fig., 44 p. .... 45 »
3. **1579. Lecat, M.,** Azéotropes de dérivés du glycol, de maléates et de fumarates ; 1949 ; 1 fig., 34 p. .... 40 »
4. **1580. Jongmans, Fr.** Mémoire sur les surfaces et les variétés algébriques à courbes-sections de genre quatre ; 1949 ; 96 p. .... 100 »
5. **1582. Teghem, J.** Sommes de Weyl. Sur la méthode de Vinogradowvan der Corput ; 1949 ; 50 p. .... 50 »
6. **1583. Nollet, L.** Sur la classification et la détermination des congruences linéaires de cubiques gauches ; 1949 ; 112 p. .... 100 »
7. **1585. De Wildeman, É.** Les liquides laticiformes des guttiféracées (*supplément*) ; 1949 ; 80 p. .... 75 »
8. **1586. Van Meel, L. I. J.** Aperçu sur la végétation algologique du district poldérien de la vallée du Bas-Escaut belge ; 1949 ; 12 fig. ; 157 p. .... 150 »

ÉTUDE SPECTRALE
DES
ALGÈBRES COMPLÈTES

PAR

L. WAELBROECK
Docteur en Sciences mathématiques.
Chef de Travaux à l'Université Libre de Bruxelles.

Impression décidée le 2 avril 1960.

SCIENCES. — T. XXXI, fasc. 7 et dernier.

Étude spectrale des Algèbres complètes

INTRODUCTION

Dans ce travail, nous abordons l'étude spectrale d'éléments d'une algèbre topologique (ou pseudo-topologique) sans supposer que le spectre est un ensemble compact. Des liens étroits apparaissent, ici comme ailleurs, entre le spectre, le calcul symbolique, et les formules « de Cauchy » permettant d'exprimer les valeurs d'une fonction holomorphe à l'intérieur d'un domaine au moyen des valeurs de cette fonction sur la frontière, ou sur un voisinage de cette frontière.

1. A l'origine des travaux qui ont mené à ce travail, on trouve la théorie de Gelfand des algèbres de Banach [5]. Il est bon d'en rappeler certains résultats essentiels.

Soit **A** une algèbre de Banach, commutative, unitale, sur le corps des complexes, **C** [1]. Gelfand définit un espace compact $\mathcal{M}(\mathbf{A})$, qu'il appelle le spectre de **A**, et une représentation unitale $a \to \hat{a}(m)$ de **A** dans l'algèbre des fonctions continues sur $\mathcal{M}(\mathbf{A})$. Cette représentation est continue si l'algèbre des fonctions continues sur $\mathcal{M}(\mathbf{A})$ est munie de la topologie de la convergence uniforme. L'idéal engendré dans **A** par des éléments $a_1, \ldots, a_n$, contient l'unité de **A** si, et uniquement si les fonctions $\hat{a}_1(m), \ldots, \hat{a}_n(m)$ ne s'annulent pas simultanément sur $\mathcal{M}(\mathbf{A})$.

Gelfand définit un calcul symbolique en fonction d'un élément de **A**. Dans ma thèse de Doctorat, je montre qu'un calcul symbolique plus général, en fonctions de n éléments peut être considéré : $f(a_1, \ldots, a_n)$ est défini lorsque f est une fonction holomorphe sur un voisinage de l'ensemble des $(s_1, \ldots, s_n) \in \mathbf{C}^n$ tels que $s_i = \hat{a}_i(m)$ pour un $m \in \mathcal{M}(\mathbf{A})$ et pour $i = 1, \ldots, n$. Cet ensemble, $S(a_1, \ldots, a_n)$ est aussi celui des $(s_1, \ldots, s_n)$ tels que $1 \notin idl(a_1 - s_1, \ldots, a_n - s_n)$. On l'appelle le spectre de Gelfand de $(a_1, \ldots, a_n)$.

---

(1) Voir le numéro 5, page 9, où nous expliquons certaines notations et certains termes utilisés dans toute cette dissertation.

Lorsque $n = 1$, on construit le calcul symbolique en substituant a dans la formule de Cauchy

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_j f(s)(s-z)^{-1}ds.$$

La substitution a un sens moyennant certaines hypothèses, et définit un élément de $\mathbf{A}$ dont les propriétés sont telles qu'il est normal de l'appeler $f(a)$. Lorsque $n > 1$, la construction du calcul symbolique est plus difficile, mais elle reste basée sur la formule de Cauchy, tout au moins dans ma thèse de Doctorat.

La théorie de Gelfand s'applique aux algèbres de Banach. Dans ma thèse de Doctorat, j'étudie des algèbres plus générales, mais les spectres sont encore compacts. De nombreux opérateurs à spectre non compact interviennent pourtant dans les applications. Il suffit de citer les opérateurs de dérivation partielle des espaces de distribution.

C'est surtout aux opérateurs à spectre non compact que nous nous intéresserons. On peut espérer que leur étude spectrale aura des applications aussi intéressantes que la théorie des algèbres commutatives self-adjointes d'opérateurs, ou que la théorie de Gelfand.

Un résultat préliminaire (1) montre que le point à l'infini ne joue pas un rôle privilégié dans l'ensemble des points frontières du spectre. La théorie spectrale ne doit pas étudier plus particulièrement le voisinage de l'infini. Elle doit étudier le voisinage de tous les points frontières.

Le spectre que nous définissons n'est pas une partie de $\mathbf{C}^n$, mais un ensemble de fonctions sur $\mathbf{C}^n$. Ces fonctions sont réelles non négatives. Nous dirons qu'elles sont spectrales (pour $a_1, \ldots, a_n$) et que l'ensemble $\delta(s) > 0$ est un ensemble spectral si $\delta(s)$ est une fonction spectrale. Les ensembles spectraux constituent un filtre sur $\mathbf{C}^n$.

Nous obtiendrions un spectre d'allure plus classique si nous disions que ce filtre, ou son adhérence, est le spectre. Le spectre serait alors, soit une partie de $\mathbf{C}^n$, soit un filtre sur $\mathbf{C}^n$. Mais la donnée de l'ensemble des fonctions spectrales fournit plus de renseignements au sujet de $(a_1, \ldots, a_n)$, et le calcul symbolique

(1) Voir [15]. L'application $z \to (z-t)^{-1}$ applique le spectre de a sur le spectre de $(a-t)^{-1}$ et le point à l'infini sur l'origine, si $(a-t)^{-1}$ existe.

permet d'utiliser l'information supplémentaire. C'est pourquoi nous avons donné du spectre une définition qui peut surprendre à première vue.

Nous avons parlé de spectres compacts, et de frontière du spectre. C'est un abus de langage, d'après notre définition. Nous aurions dû parler d'éléments dont le spectre ne contient pas de fonction à support compact, et de la frontière des ensembles spectraux.

Une algèbre de fonctions analytiques peut être associée au spectre de $(a_1, \ldots, a_n)$, puis un calcul symbolique défini : il existe un homomorphisme unital borné de l'algèbre de fonctions analytiques dans $\mathbf{A}$, qui applique la variable z_i sur a_i $(i = 1, \ldots, n)$. Dans la construction de ce calcul symbolique, nous utilisons la classe de cohomologie définie et étudiée au chapitre V. Cette classe semble avoir des liens étroits avec l'intégrale de Cauchy à n variables complexes, telle qu'elle est définie par A. Weil [17], L. Fantappiè [4], et J. Leray [6].

2. Les hypothèses faites dans ce travail sont fort générales. Certains énoncés peuvent dérouter le lecteur. Commençons par énoncer les théorèmes principaux, et donnons les définitions essentielles dans un cadre plus classique. $\mathbf{A}$ sera une algèbre unitale, localement convexe et complète, et $a_1, \ldots, a_n$ seront des éléments de $\mathbf{A}$.

Le spectre de $(a_1, \ldots, a_n)$ est l'ensemble $\Delta(a\,;\mathbf{A})$ des fonctions $\delta(s)$, réelles non négatives bornées sur l'espace complexe à n dimensions, $\mathbf{C}^n$, qui sont telles que $a_1 - s_1, \ldots, a_n - s_n$ et $\delta(s)$ engendrent l'idéal impropre de $\Theta(s\,;\delta_0\,;\mathbf{A})$, si $\Theta(s\,;\delta_0\,;\mathbf{A})$ est l'algèbre des fonctions de $s = (s_1, \ldots, s_n)$ qui sont définies sur $\mathbf{C}^n$, à valeurs dans $\mathbf{A}$, localement bornées, et à croissance polynômiale à l'infini (1). C'est-à-dire, $\delta(s) \in \Delta(a\,;\mathbf{A})$ s'il existe des fonctions $u_1(s), \ldots, u_n(s), y_0(s)$, qui appartiennent à $\Theta(s\,;\delta_0\,;\mathbf{A})$, et vérifient la relation

$$(a_1 - s_1)u_1(s) + \ldots + (a_n - s_n)u_n(s) + \delta(s)y_0(s) = 1 \qquad (1)$$

sur tout $\mathbf{C}^n$.

$\Delta(a\,;\mathbf{A})$ a les propriétés immédiates suivantes :

(1) La fonction auxiliaire $\delta_0(s) = (1 + |s|^2)^{-1/2}$ a un rôle important, technique, dans ce travail.

1. $\delta_0(s) = (1 + |s|^2)^{-1/2}$ appartient à $\Delta(a ; \mathbf{A})$.
2. $\epsilon\delta^N \in \Delta(a ; \mathbf{A})$ si ϵ est une constante positive, N un entier, et si $\delta \in \Delta(a ; \mathbf{A})$.
3. $\delta' \in \Delta(a ; \mathbf{A})$ si $\delta' \geqslant \delta \in \Delta(a ; \mathbf{A})$.
4. $\delta_3(s) = \min [\delta_1(s), \delta_2(s)] \in \Delta(a ; \mathbf{A})$ si $\delta_1 \in \Delta(a ; \mathbf{A})$, $\delta_2 \in \Delta(a ; \mathbf{A})$.

Les propriétés 3, 4 montrent que $\Delta(a ; \mathbf{A})$ est un filtre sur le lattice des fonctions réelles non négatives. *Ce filtre est propre* (la constante nulle ne lui appartient pas) *et a une base composée de fonctions aussi souvent dérivables que l'on veut.*

Enfin, l'idéal engendré par $a_1 - s_1, \ldots, a_n - s_n, \delta(s)$ dans $\theta_r(s ; \delta_0 ; \mathbf{A})$ est l'idéal impropre, si $\delta(s) \in \Delta(a ; \mathbf{A})$, est suffisamment souvent dérivable, $\theta_r(s ; \delta_0 ; \mathbf{A})$ étant l'algèbre des fonctions r fois continument dérivables sur $\mathbf{C}^n$, à valeurs dans $\mathbf{A}$, qui ont une croissance polynômiale à l'infini avec toutes leurs dérivées d'ordre inférieur ou égal à r. On peut même trouver des fonctions $u_1, \ldots, u_n, y_0$, qui sont r fois continument dérivables, décroissent à l'infini comme $1/|s|$, ont des dérivées qui ne croissent pas trop vite, et vérifient la relation (1).

Nous poserons $y = \delta(s)y_0(s)$ et appellerons Ξ l'ensemble des $(u_1, \ldots, u_n, y)$ tels que

$$(a_1 - s_1)u_1(s) + \ldots + (a_n - s_n)u_n(s) + y(s) = 1 \qquad (2)$$

avec $y = \delta(s)y_0$, et $u_1, \ldots, u_n, y_0$ définis sur $\mathbf{C}^n$, tendant vers zéro à l'infini comme $1/|s|$, et ayant des dérivées qui ne croissent pas trop vite. *L'ensemble Ξ n'est pas vide, si $\delta \in \Delta(a ; \mathbf{A})$ et est suffisamment souvent dérivable.*

Soit $(u_1, \ldots, u_n, y) \in \Xi$, et k entier grand. La forme extérieure [1]

$$\omega = \frac{(n+k)!}{k!} y^k du_1 \ldots du_n ds_1 \ldots ds_n \qquad (3)$$

a son coefficient divisible par $\delta(s)^k$. Celui-ci tend rapidement vers zéro à la frontière du domaine $\delta(s) > 0$ et à l'infini... si δ tend vers zéro à l'infini, ce que nous supposons.

La classe de cohomologie de ω ne dépend ni du choix de $(u, y) \in \Xi$, *ni de* k, *dans l'espace des formes à coefficients divisibles par δ^r, si* k *est grand* ($k \geqslant k_0(r)$). De plus,

[1] Les conventions faites au chapitre V sont légèrement différentes de celles-ci.

$$\frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\mathbf{C}^n} \omega = 1.$$

(L'intégrale ne dépend évidemment que de la classe de cohomologie de l'intégrande, et donc pas de u, y, ni de k).

Appelons $\Theta(s ; \delta ; \mathbf{A})$ l'algèbre des fonctions de s, à valeurs dans $\mathbf{A}$, définies et holomorphes sur l'ouvert $\delta(s) > 0$, qui sont telles que $\delta(s)^N f(s)$ soit bornée pour N suffisamment grand. Soit $f \in \Theta(s ; \delta ; \mathbf{A})$ et k grand. Nous appellerons, par abus de langage $f(s)\omega$ la forme définie sur $\mathbf{C}^n$, égale à $f(s)\omega$ si $\delta(s) > 0$ et nulle si $\delta(s) = 0$. (A proprement parler, $f(s)$, et donc $f(s)\omega$, n'est définie que si $\delta(s) > 0$). La classe de cohomologie de $f(s)\omega$ ne dépend ni de $(u, y) \in \Xi$, ni de k, dans l'espace des formes à coefficients divisibles par δ^r, si k est suffisamment grand.

L'élément suivant de $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{S}(f ; a ; \mathbf{A}) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int f(s)\omega$$

ne dépend donc pas de (u, y), ni de k, si k est grand... cet élément ne dépend que de f et de a. *Nous montrons que l'application* $f \to \mathbf{S}(f ; a ; \mathbf{A})$ *est un homomorphisme de $\Theta(s ; \delta ; \mathbf{A})$ dans $\mathbf{A}$, qui applique unité sur unité et s_i sur a_i. C'est cet homomorphisme que nous appelons le calcul symbolique.*

Un problème est laissé ouvert. La formule de composition du calcul symbolique est-elle valable dans le cadre envisagé ici ? Écrivons $f(a)$ pour $\mathbf{S}(f ; a ; \mathbf{A})$. Est-ce que $f(b) = h(a)$ si $b = g(a)$ et $h = f(g)$, ces divers éléments étant bien entendu supposés définis ? Nous n'abordons ce problème que lorsque g est linéaire, et nous le résolvons par l'affirmative dans ce cas.

3. Indiquons ensuite dans quelle mesure les théorèmes établis sont plus généraux que les énoncés ci-dessus, et pour quelles raisons j'ai été amené à généraliser.

L'algèbre unitale $\mathbf{A}$ n'est pas munie d'une structure topologique, mais d'une certaine structure pseudo-topologique. Nous dirons que $\mathbf{A}$ est une algèbre unitale à bornes complètes. Ces algèbres à bornés complètes sont mieux adaptées aux raisonnements que les algèbres topologiques.

Les théorèmes démontrés ne dépendent que de l'ensemble des parties bornées de l'algèbre $\mathbf{A}$. Il est naturel de chercher les conditions les plus générales que ces bornés doivent vérifier pour qu'on puisse leur appliquer la théorie.

Nous devrons considérer des algèbres auxiliaires. Une structure à bornés complète s'introduit immédiatement sur celles-ci. Il est moins naturel d'y définir une structure topologique, même lorsque l'espace donné initialement était topologique. (Je ne sais pas s'il est toujours possible de le faire).

Enfin, les résultats établis s'appliqueront à de nombreuses algèbres topologiques importantes. Soit **A** une algèbre localement convexe, quasi-complète, à produit séparément continu. L'ensemble des parties de **A**, bornées pour la topologie, définit sur **A** une structure d'algèbre à bornés complete. (Pour les définitions, voir Bourbaki [2], la démonstration est donnée aux n[os] 7.3, 7.4).

A n'est pas une algèbre commutative, mais les éléments sur lesquels nous portons principalement notre attention sont dans le centre. La théorie est ainsi essentiellement commutative. Mais la généralisation apportée permettra de simplifier certaines applications.

Soient **A** une algèbre, **A**′ une sous-algèbre, et $a_1, \ldots, a_n$ des éléments qui appartiennent à **A**′ et au centre de **A**. Les résultats obtenus en appliquant la théorie spectrale à $(a_1, \ldots, a_n, \mathbf{A}')$ seront moins forts que ceux que l'on obtient en appliquant cette même théorie à $(a_1, \ldots, a_n, \mathbf{A})$. C'est clair, vu la structure de la théorie.

Considérons une algèbre quelconque $\mathbf{A}_0$, et des éléments $a_1, \ldots, a_n$ de $\mathbf{A}_0$, qui commutent entre eux, et sont autrement quelconques. Les éléments $a_1, \ldots, a_n$ seront par exemple des opérateurs continus commutatifs d'un espace tonnelé, et $\mathbf{A}_0$ l'algèbre de tous les opérateurs continus de cet espace. Nous ne pourrons pas appliquer la théorie à $(a_1, \ldots, a_n, \mathbf{A}_0)$, mais à $(a_1, \ldots, a_n, \mathbf{A}_1)$ si $\mathbf{A}_1$ est l'ensemble des éléments de $\mathbf{A}_0$ qui commutent avec $a_1, \ldots, a_n$. Et $\mathbf{A}_1$ est maximum parmi les sous-algèbres de $\mathbf{A}_0$ dont le centre contient $a_1, \ldots, a_n$.

Si notre étude avait été limitée aux algèbres commutatives, nous n'aurions pu appliquer la théorie qu'à $(a_1, \ldots, a_n, \mathbf{A}_m)$, où $\mathbf{A}_m$ est l'une quelconque des sous-algèbres commutatives maximales de $\mathbf{A}_0$ qui contiennent $a_1, \ldots, a_n$. Les résultats obtenus auraient été moins forts, et auraient dépendu du choix arbitraire de $\mathbf{A}_m$.

Enfin, la théorie spectrale abordée est relative. Nous considérons une algèbre **A**, un idéal bilatère $\mathfrak{b}$, et étudions modulo $\mathfrak{b}$ des éléments $a_1, \ldots, a_n$ du centre de **A**. La théorie absolue se déduit de la théorie relative en posant $\mathfrak{b} = 0$. Mais la théorie relative ne se déduit pas de la théorie absolue par passage au quotient, $\mathbf{A}/\mathfrak{b}$ n'est pas une algèbre à bornés complète.

La théorie relative est utile pour l'étude des idéaux des algèbres à bornés complètes, et plus particulièrement des idéaux de fonctions analytiques. D'autre part, certains théorèmes établis ici sont des conséquences immédiates de théorèmes relatifs, et seraient sensiblement plus difficiles à établir dans le cadre strict de la théorie absolue.

4. Dans les trois premiers chapitres, nous étudions principalement les espaces à bornés complets. Ces espaces sont étudiés au chapitre I, certains facteurs jouant un rôle essentiel ultérieurement sont introduits aux chapitres suivants. Les propriétés des algèbres qui sont établies dans ces trois chapitres sont des conséquences immédiates des propriétés des applications multilinéaires bornées.

La théorie spectrale n'est abordée qu'à partir du chapitre IV. Les théorèmes principaux de ce travail sont établis aux chapitres IV, V, VI.

Au chapitre VII, on trouvera des applications de la théorie. D'autre part, les théorèmes se simplifient lorsqu'on ne veut pas les appliquer dans toute leur généralité. Certaines de ces simplifications sont indiquées dans ce chapitre. Enfin, les rapports de cette théorie avec des théories plus classiques, et notamment avec la théorie des algèbres de Banach y sont esquissés.

5. Certaines notations seront utilisées constamment par la suite : **N** désignera l'ensemble des entiers strictement positifs, **Z** celui des entiers rationnels. Nous appellerons **R** le corps des réels, et **C** celui des complexes.

Un ensemble $\mathbf{Z}^*$ sera défini, contenant **Z**, et ayant un élément supplémentaire appelé $-\infty$. Sur $\mathbf{Z}^*$, nous mettons la structure de demi-groupe ordonné qui prolonge la structure de groupe (additif) ordonné de **Z** et telle que $-\infty$ soit un élément minimum. Une telle structure peut être définie d'une manière unique :

La somme de deux éléments de $\mathbf{Z}^*$ est égale à leur somme dans **Z**, leur ordre dans $\mathbf{Z}^*$ est le même que celui dans **Z**, si ces deux éléments appartiennent à $\mathbf{Z}$. L'élément $-\infty$ vérifie les relations

$$-\infty + n = n + (-\infty) = -\infty, \qquad n \geqslant -\infty$$

quel que soit $n \in \mathbf{Z}^*$.

Nous dirons que $\mathbf{A}$ est une algèbre unitale si $\mathbf{A}$ est une algèbre à unité. L'unité sera souvent identifiée avec le scalaire 1, son produit par le scalaire s, avec s lui-même. Moyennant ces conventions $\mathbf{A} \supseteq \mathbf{C}$. Par définition, une sous-algèbre unitale de $\mathbf{A}$ sera une sous-algèbre de $\mathbf{A}$ qui contient l'unité de $\mathbf{A}$. L'algèbre $\mathbf{A}$ peut avoir des sous-algèbres, qui sont unitales, sans être des sous-algèbres unitales (si $\mathbf{A}$ a des idempotents non triviaux). Un homomorphisme unital de l'algèbre unitale $\mathbf{A}_1$ dans l'algèbre unitale $\mathbf{A}_2$ est un homomorphisme de $\mathbf{A}_1$ dans $\mathbf{A}_2$ qui applique l'unité de $\mathbf{A}_1$ sur l'unité de $\mathbf{A}_2$. L'application identique est par exemple, un monomorphisme unital d'une sous-algèbre unitale de $\mathbf{A}$ dans $\mathbf{A}$.

Soient $(a_1, \ldots, a_n)$ et $(b_1, \ldots, b_n)$ deux n-uples d'éléments d'une même algèbre. Nous écrivons

$$\langle a, b \rangle = a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n.$$

Il sera pratique de normer $\mathbf{R}^n$ et $\mathbf{C}^n$ avec la norme euclidienne

$$|s|^2 = |s_1|^2 + \ldots + |s_n|^2 = \langle s, \bar{s} \rangle.$$

Supposons que $s \in \mathbf{R}^n$ et que $s' \in \mathbf{R}^{n'}$. Alors $(s, s') \in \mathbf{R}^{n+n'}$, et

$$|(s, s')|^2 = |s|^2 + |s'|^2.$$

D'autre part, nous considérerons sur les espaces $\mathbf{R}^n$ et $\mathbf{C}^n$ la fonction réelle positive $\delta_0(s)$ définie par

$$\delta_0(s) = (1 + |s|^2)^{-1/2}.$$

* * *

Je tiens à exprimer ma reconnaissance à Monsieur le Professeur Leray. Il m'a fait comprendre l'importance de l'étude algébrique des opérateurs sur les espaces vectoriels topologiques. L'intérêt qu'il a porté à mes recherches, ses encouragements, ses critiques, m'ont été fort utiles dans l'élaboration de ce travail.

Je rends également hommage à Monsieur le Professeur Lepage qui a guidé mes premiers pas sur la voie, parfois pénible, de la

recherche mathématique, et s'est constamment intéressé à mes recherches ultérieurement.

Je remercie Monsieur le Professeur Papy pour l'étude attentive qu'il a bien voulu faire de mon travail.

Toute ma gratitude va à l'Institute for Advanced Study, et au Fonds National de la Recherche Scientifique, pour l'aide matérielle dont j'ai bénéficié pendant l'élaboration de cette dissertation, et pour les excellentes conditions dans lesquelles ils m'ont permis de travailler.

CHAPITRE I

LES ESPACES A BORNÉS COMPLETS

Divers types de structures peuvent être définies sur un ensemble, et sur un espace vectoriel au moyen d'une famille de parties bornées. Nous définissons ici certains tels types de structure, et étudions particulièrement l'un d'entre eux. Une structure de ce type sera dite être une structure d'espace à bornés complète.

Nous commençons par définir des ensembles à bornés, et des espaces (vectoriels complexes) à bornés. Une pseudo-topologie est définie sur un espace à bornés. Les espaces à bornés complets sont des espaces à bornés qui vérifient une condition plus forte que le second critère de Cauchy pour la pseudo-topologie considérée.

Nous étudions quelques propriétés de la catégorie des espaces à bornés complets. Les applications linéaires bornées sont les homomorphismes. Les sous-espaces, les quotients d'un espace, les sommes directes, et produits tensoriels complets de deux espaces sont définis.

Une filtration sur un espace complet, E, est une application de l'ensemble des parties bornées de E dans $\mathbf{Z}^*$ qui vérifie certaines conditions (1). Nous considérons la structure supplémentaire définie par une filtration sur E.

Les algèbres à bornés complètes sont des espaces à bornés complets sur lesquels une multiplication bilinéaire bornée associative est définie. Seules quelques propriétés simples de ces algèbres sont établies ici. Nous n'étudierons celles-ci d'une manière détaillée qu'aux chapitres IV, V, VI, et VII.

(1) $\mathbf{Z}^*$ est le demi-groupe ordonné obtenu lorsqu'on adjoint un élément minimum au groupe ordonné $\mathbf{Z}$.

1. Les espaces a bornés.

Les ensembles à bornés, les espaces à bornés (en général non complet) sont définis ici, ainsi que les sous-structures, les structures produit, et les structures quotient d'une structure d'espace à bornés.

Les homomorphismes de structure à bornés sont les applications bornées. Une structure à bornés est définie sur l'ensemble $\beta(X, X')$ des applications bornées d'un ensemble à bornés X dans un autre X'.

Les notations $f(x) = O(c(x))$, $f(x) = o(c(x))$ qui sont définies classiquement pour les fonctions à valeurs réelles ou complexes se généralisent d'une manière naturelle aux fonctions à valeurs dans un espace (vectoriel) à bornés.

Une pseudo-topologie est définie sur un espace à bornés.

1. *Définition.* Une structure à bornés est définie sur un ensemble E par un ensemble $\mathcal{B}$ de parties de E qui a les trois propriétés suivantes :

a_1. Toute partie finie de E appartient à $\mathcal{B}$.

a_2. La réunion de deux éléments de $\mathcal{B}$ appartient à $\mathcal{B}$.

a_3. Toute partie d'un élément de $\mathcal{B}$ appartient à $\mathcal{B}$.

Un élément de $\mathcal{B}$ sera dit être une partie bornée de E pour la structure considérée.

De deux structures à bornés définies sur un même ensemble, la première sera dite être plus fine que la seconde si toute partie de l'ensemble considéré qui est bornée pour la première structure est encore bornée pour la seconde. Parmi toutes les structures à bornés sur E, il en est une plus fine que toutes les autres, c'est celle pour laquelle les seules parties bornées de E sont les parties finies de E. Il en est une moins fine que toutes les autres, toutes les parties de E, y compris E lui-même, sont bornées pour cette structure.

Un ensemble, muni d'une structure à bornés, sera encore appelé un *ensemble à bornés*.

Un *espace à bornés* est un espace vectoriel complexe sur lequel une structure à bornés est définie, d'une manière telle que :

b_1. Soient B_1, B_2 deux bornés, z_1, z_2 deux scalaires et $z_1B_1 + z_2B_2$ l'ensemble des $z_1b_1 + z_2b_2$ tels que $b_1 \in B_1$, $b_2 \in B_2$. L'ensemble $z_1B_1 + z_2B_2$ est borné.

b_2. La fermeture convexe d'un borné est bornée.

b_3. Aucun sous-espace non nul de E n'est borné.

La fermeture convexe équilibrée d'un borné est évidemment bornée. (B est équilibré si $e^{iu}B \subseteq B$ pour tout u réel).

Ni la structure d'ensemble à bornés la plus fine, ni la moins fine que l'on puisse définir sur un espace vectoriel ne définissent des structures d'espace à bornés. Soit E un espace vectoriel. La plus fine des structures d'espace à bornés définies sur E est celle pour laquelle les parties bornées sont contenues dans les fermetures convexes d'ensembles finis.

Considérons un *espace vectoriel normé,* E. L'ensemble des parties de E qui sont bornées pour la norme définit sur E une structure d'espace à bornés.

2. *Structure produit.* Soient E_1, E_2 deux ensembles à bornés. Une partie B de $E_1 \times E_2$ sera dite bornée pour la structure produit si les projections de B dans E_1 et dans E_2 sont toutes les deux bornées. Un borné de $E_1 \times E_2$ est contenu dans le produit cartésien d'un borné de E_1 par un borné de E_2.

Les conditions a_1, a_2, a_3 sont évidemment vérifiées ; la structure produit est effectivement une structure d'ensemble à bornés.

Supposons ensuite que E_1, E_2 soient deux espaces à bornés. Considérons sur leur produit la structure d'espace vectoriel somme directe des structures de E_1, E_2. La structure à bornés produit est une structure d'espace à bornés sur $E_1 \oplus E_2$. L'espace à bornés $E_1 \oplus E_2$ ainsi défini sera dit être la somme directe des espaces E_1, E_2.

3. *Notations* O, *o*. Soient X un ensemble, E un espace à bornés, $c(x)$ une fonction réelle non négative définie sur X, et $u(x)$ une fonction définie sur X à valeurs dans E. Nous dirons que

$$u(x) = O(c(x)) \tag{1}$$

sur X si $u(x) = c(x)v(x)$, l'ensemble des valeurs de $v(x) (x \in X)$ étant borné. Soit $\mathcal{F}$ un filtre sur X. Nous dirons que (1) est vrai selon $\mathcal{F}$ si cette relation est vraie sur un élément de $\mathcal{F}$.

Soit de nouveau $\mathcal{F}$ un filtre sur X. Nous dirons que

$$u(x) = o(c(x)) \qquad (2)$$

selon $\mathcal{F}$ si nous pouvons trouver une fonction réelle non négative, $d(x)$, qui tend vers zéro selon $\mathcal{F}$ et est telle que $u(x) = O(c(x)d(x))$ selon $\mathcal{F}$.

Les propriétés des relations 1 et 2 dont nous aurons besoin sont évidentes. Nous ne les expliciterons pas ici.

4. *Limites*. Soit X un ensemble, et $\mathcal{F}$ un filtre sur X. Soit $u(x)$ une application de X dans un espace à bornés E, et v un élément de E. Nous dirons que $u(x)$ tend vers v selon $\mathcal{F}$ si $u(x) - v - o(1)$ selon $\mathcal{F}$. Nous écrirons encore

$$u(x) \to v \text{ selon } \mathcal{F}. \qquad (3)$$

La limite de $u(x)$ selon $\mathcal{F}$ est bien déterminée si elle existe. De $u(x) \to v_1$ et $u(x) \to v_2$ nous tirons $v_1 = v_2$. En effet, il existe alors un borné B, une fonction réelle positive $c(x)$ qui tend vers zéro selon $\mathcal{F}$, et un élément Y de $\mathcal{F}$, qui sont tels que $u(x) - v_1$ et $u(x) - v_2$ appartiennent tous deux à $c(x)$B lorsque $x \in$ Y. Soit B′ la fermeture convexe équilibrée de B ; $v_1 - v_2 \in 2c(x)$B′ pour tout $x \in$ Y. Mais $c(x) \to 0$, l'intersection des ensembles $c(x)$B′ est un espace vectoriel borné, et donc nul. Le résultat est démontré puisque $v_1 - v_2$ appartient à cette intersection.

Supposons la structure à bornés de E associée à une structure d'espace normé ; la convergence définie est équivalente à la convergence pour la structure topologique de E. Par contre, si la structure à bornés de E n'est associée à aucune norme, cette convergence ne peut être équivalente à aucune convergence d'espace vectoriel topologique.

5. *Applications bornées*. Soient E_1, E_2 deux ensembles à bornés. Une application u de E_1 dans E_2 sera dite bornée si l'image de toute partie bornée de E_1 est une partie bornée de E_2. Un ensemble B d'applications de E_1 dans E_2 est également borné si l'ensemble B(B_1) des $u(b)$ tels que $u \in$ B, $b \in B_1$ est borné dans E_2.

Soit $\beta(E_1, E_2)$ l'ensemble des applications bornées de E_1 dans E_2. L'ensemble des parties également bornées de $\beta(E_1, E_2)$ vérifie évidemment les conditions a_1, a_2, a_3 et définit sur $\beta(E_1, E_2)$ une structure d'ensemble à bornés.

Supposons par exemple que E_2 soit muni de la structure à bornés la moins fine, ou que E_1 soit muni de la structure à bornés la plus fine. Toutes les applications de E_1 dans E_2 sont bornées. Dans le premier cas, $\beta(E_1, E_2)$ est muni de la structure à bornés la moins fine. Dans le second cas, une partie B de $\beta(E_1; E_2)$ est bornée si l'ensemble des $u(x)$ ($u \in$ B) est borné dans E_2 pour tout $x \in E_1$.

Si E_1 est muni de la structure à bornés la moins fine, une application u de E_1 dans un espace à bornés quelconque sera bornée si $u(E_1)$ est borné, B $\in \beta(E_1, E_2)$ est borné si B(E_1) l'est.

Soient E_1, E_2, E_3 des ensembles à bornés. L'espace $\beta(E_1, \beta(E_2, E_3))$ est canoniquement isomorphe à $\beta(E_1 \times E_2, E_3)$, l'isomorphisme étant établi en identifiant une fonction de x_1 à valeurs dans un espace de fonctions de x_2 avec une fonction de (x_1, x_2).

Une structure d'espace vectoriel complexe est définie sur $\beta(E_1, E_2)$ si E_2 est un espace à bornés. La structure à bornés de $\beta(E_1, E_2)$ est une structure d'espace à bornés.

Soient ensuite E, F deux espaces à bornés. Une application *linéaire bornée* de E dans F est une application de E dans F qui est à la fois linéaire pour les structures d'espace vectoriel, et bornée pour les structures à bornés. De même, si E_1, ..., E_m, F sont des espaces à bornés, une application *multilinéaire bornée* de $E_1 \times \dots \times E_m$ dans F est à la fois multilinéaire pour les structures d'espace vectoriel, et bornée pour la structure à bornés produit ; un tel φ sera donc multilinéaire, et tel que $\varphi(B_1, \dots, B_m)$ soit borné lorsque B_1, ..., B_m sont bornés.

6. *Sous-espaces, quotients*. Soit E un ensemble à bornés, et F une partie de E. Une partie de F sera bornée pour la structure induite par celle de E si elle est bornée pour la structure de E. La structure induite est une structure d'espace à bornés si E est un espace à bornés et F est un sous-espace vectoriel.

Soit E un espace à bornés. Une partie F de E sera dite fermée si elle contient la limite de tous ses filtres convergents. Pour cela il suffit que $u \in$ F lorsque $u \in$ E, et est tel qu'il existe une suite v_1, ..., v_r, ... d'éléments de F, avec $u - v_r = o(1)$. Un sous-espace fermé de E est un sous-espace vectoriel de E qui est fermé pour la structure à bornés.

Soit E un espace à bornés, et soit F un sous-espace fermé. Une partie de E/F sera dite bornée si elle est l'image d'une partie bornée de E par l'application quotient. La structure ainsi définie sur E/F est une structure d'espace à bornés.

En fait, il est évident que l'ensemble des parties bornées ainsi défini vérifie les conditions a_1, a_2, a_3, et les conditions b_1, b_3. Nous devons montrer que cet ensemble vérifie également la condition b_2 si F est fermé.

Supposons la condition b_2 fausse. Nous avons un $v \in E/F$ qui est différent de zéro, et tel que nv soit borné indépendamment de $n \in \mathbf{N}$. La suite $v, 2v, \ldots, nv, \ldots$ est l'image quotient d'une suite bornée $u_1, \ldots, u_n, \ldots$ de E. L'image quotient de $u_1 - u_n/n$ est nulle, $u_1 - u_n/n \in F$. Et $u_1 - u_n/n \to u_1$ puisque $u_n/n = o(1)$. L'espace F est fermé, $u_1 \in F$, son image quotient est nulle. Mais nous avions supposé $v \neq 0$.

E/F, avec la structure à bornés ainsi définie, sera appelé l'espace vectoriel quotient de E par F.

Soient E, F deux espaces à bornés. L'ensemble des applications linéaires bornées de E dans F est un sous-espace fermé de $\beta(E, F)$. De même, si $E_1, \ldots, E_m$, F sont des espaces à bornés, l'ensemble des applications multilinéaires bornées de $E_1 \times \ldots \times E_m$ dans F est un sous-espace fermé de $\beta(E_1 \times \ldots \times E_m, F)$.

Soit X un ensemble à bornés, Y une partie de X avec la structure à bornés induite. Soit E un espace à bornés. L'ensemble des applications linéaires bornées de X dans E qui sont nulles sur Y est un sous-espace fermé de $\beta(X, E)$. Le quotient de $\beta(X, E)$ par ce sous-espace fermé est canoniquement isomorphe à $\beta(Y, E)$.

2. Espaces complets.

Un espace à bornés E est muni d'une pseudo-topologie. Le second critère de Cauchy a un sens évident pour cette pseudo-topologie. Nous dirons que E est complet si l'espace à bornée $\beta(X, E)$ vérifie le second critère de Cauchy pour tout ensemble à bornés X.

Soit E un espace complet. A tout borné B de E nous associons un espace de Banach E_B, dont l'espace vectoriel sous-jacent est un sous-espace vectoriel de E, et dont la sphère unité est la fermeture convexe fermée pour la topologie de E_B, de l'ensemble B.

Nous établissons un certain nombre de critères suffisants (et évidemment nécessaires) pour qu'un espace à bornés E soit complet.

1. *Définition.* Soit E un espace à bornés. La suite $u_1, \ldots, u_n, \ldots$ d'éléments de E est une suite de Cauchy si $u_n - u_m \to 0$ lorsque m, n tendent simultanément vers l'infini. E vérifie le second critère de Cauchy si toute suite de Cauchy a une limite. Nous dirons que E est un espace à bornés complet, ou *un espace complet* si l'espace $\beta(X, E)$ des applications bornées de X dans E vérifie le second critère de Cauchy quelque soit l'ensemble à bornés E.

La structure d'espace à bornés définie sur un espace normé est une structure d'espace complet si et uniquement si l'espace normé considéré est un espace de Banach.

L'espace $\beta(X, E)$ est un espace complet, si E est un espace complet, X étant un ensemble à bornés quelconque. En effet, $\beta(Y, \beta(X, E)) = \beta(Y \times X, E)$ et $\beta(Y \times X, E)$ vérifie le second critère de Cauchy puisque E est complet.

2. *L'espace de Banach* E_B. Soit B une partie bornée de l'espace complet E. Soit B′ sa fermeture convexe équilibrée, et soit E_0 l'ensemble des $u \in E$ tels que $u \in zB'$ pour un z complexe. Alors E_0 est le sous-espace vectoriel de E qui est engendré par B.

La fonction n_0 définie sur E_0 par la relation

$$n_0(u) = \inf \{ |z| \,|\, z \in \mathbf{C},\, u \in zB' \}.$$

est une semi-norme puisque B′ est convexe équilibré et engendre E_0. Cette semi-norme est même une norme puisque B′ ne contient pas d'espace vectoriel non nul.

Considérons l'espace E_0, normé par n_0, son complété $\mathcal{E}$, et la norme $\tilde{n}$ associée à n_0 sur $\mathcal{E}$. L'espace E_0 est dense dans $\mathcal{E}$. Il existe une suite $\varphi_1, \ldots, \varphi_r, \ldots$ d'applications de $\mathcal{E}$ dans E_0 qui est telle que

$$\tilde{n}[u - \varphi_r(u)] < 2^{-r}.$$

Chaque application $\varphi_r(u)$ appartient à $\beta(\mathcal{E}, E)$ puisque

$$n_0[\varphi_r(u)] = \tilde{n}[\varphi_r(u)] < \tilde{n}(u) + 2^{-r}$$

et que par conséquent

$$\varphi_r(u) \in [\tilde{n}(u) + 2^{-r}]B'.$$

La suite $\varphi_1, \ldots, \varphi_r, \ldots$ est une suite de Cauchy de $\beta(\mathcal{E}, E)$ puisque

$$n_0[\varphi_r(u) - \varphi_s(u)] = \tilde{n}[\varphi_r(u) - u + u - \varphi_s(u)] < 2^{-r} + 2^{-s}$$

si bien que $\varphi_r(u) - \varphi_s(u) \in (2^{-r} + 2^{-s})B'$.

E est un espace complet : la suite $\varphi_r(u)$ converge vers un $\varphi(u) \in \beta(\mathcal{E}, E)$ pour la structure à bornés de $\beta(\mathcal{E}, E)$. Cette limite ne dépend pas du choix arbitraire de $\varphi_1, \ldots, \varphi_r, \ldots$ évidemment.

De plus, $\varphi(u)$ est une application linéaire :

$$\varphi(zu) - z\varphi(u) = [\varphi(zu) - \varphi_r(zu)] - z[\varphi(u) - \varphi_r(u)] + \{\varphi_r(zu) - z\varphi_r(u)\}$$

et

$$\varphi(u + v) - \varphi(u) - \varphi(v) = [\varphi(u + v) - \varphi_r(u + v)]$$
$$- [\varphi(u) - \varphi_r(u)] - [\varphi(v) - \varphi_r(v)] + \{\varphi_r(u + v) - \varphi_r(u) - \varphi_r(v)\}.$$

Les expressions entre crochets tendent vers zéro lorsque r tend vers l'infini quels que soient z, u, v donnés, puisque $\varphi_r \to \varphi$. Quant aux expressions entre accolades, elles appartiennent à E_0 et tendent vers zéro puisque

$$\begin{aligned} n_0[\varphi_r(zu) - z\varphi_r(u)] &= \tilde{n}[\varphi_r(zu) - z\varphi_r(u)] \\ &\leqslant \tilde{n}[\varphi_r(zu) - zu] + |z|\,\tilde{n}[\varphi_r(u) - u] \\ &< (1 + |z|) \cdot 2^{-r} \end{aligned}$$

et, en vertu de calculs analogues,

$$n_0[\varphi_r(u + v) - \varphi_r(u) - \varphi_r(v)] < 3 \cdot 2^{-r}.$$

Les expressions $\varphi(zu) - z\varphi(u)$, $\varphi(u + v) - \varphi(u) - \varphi(v)$ sont indépendantes de r et tendent vers zéro lorsque r tend vers l'infini. Ces expressions sont donc nulles, φ est une application linéaire.

Le noyau de l'application linéaire bornée φ est un sous-espace fermé de l'espace de Banach $\mathcal{E}$. Soit F ce noyau. L'application φ induit un isomorphisme d'espace vectoriel de $\mathcal{E}/F$ avec $\varphi(\mathcal{E})$. L'image $\varphi(\mathcal{E})$ sera appelée E_B, et munie de la structure d'espace de Banach quotient de $\mathcal{E}$ modulo F.

L'espace de Banach E_B a les propriétés suivantes :

c_1. Son espace vectoriel sous-jacent est un sous-espace de celui de E.

c_2. Sa sphère unité est la fermeture convexe fermée (pour la structure d'espace vectoriel topologique de E_B) de l'ensemble B.

c_3. L'application identique de E_B dans E est bornée.

B *étant donné,* E_B *est caractérisé par ces trois propriétés :*

Soit B borné, et soient E′, E″ deux espaces de Banach qui vérifient chacun les conditions c_1, c_2, c_3. Soit n' la norme de E′ et n'' la norme de E″.

Soit $x \in E'$ et ϵ arbitrairement petit. Alors $x = \Sigma z_n u_n$ avec $u_n \in B$ pour tout n, z_n complexe, $\Sigma |z_n| \leqslant (1 + \epsilon) n'(x)$.

La série $\Sigma z_n u_n$ est une série absolument convergente de E″ puisque $u_n \in B$, et que donc $n''(u_n) \leqslant 1$. Mais la somme de cette série pour la structure de E″ est évidemment égale à sa somme pour la structure de E, celle-ci étant aussi égale à la somme de cette série pour la structure de E′, donc à x. Par conséquent $x \in E''$, et

$$n''(x) = n''(\Sigma z_n u_n) \leqslant \Sigma |z_n| \leqslant n'(x)(1 + \epsilon)$$

quel que soit ϵ, soit $n''(x) \leqslant n'(x)$.

Par conséquent $E' \subseteq E''$, $n' \geqslant n''$ sur E′. Les inclusion et inégalité inverses se démontrent de la même manière, $E' = E''$, et ont la même structure d'espace de Banach.

3. *L'espace à bornés* E *est complet si* $\beta(X, E)$ *vérifie le second critère de Cauchy chaque fois que* X *est un ensemble muni de la structure à bornés la moins fine.*

Supposons la condition vérifiée. Soit Y un espace à bornés quelconque, et X une partie bornée de Y. La structure à bornés induite sur X est la structure la moins fine.

Soit $u_1, \ldots, u_n, \ldots$ une suite de Cauchy de $\beta(Y, E)$. La suite $u_{X.1}, \ldots, u_{X.n}, \ldots$ des restrictions à X de la suite donnée est une suite de Cauchy de $\beta(X, E)$. Par hypothèse, cette suite a une limite, soit v_X.

Soient X′, X″ deux parties bornées de Y. Les limites $v_{X'}$ et $v_{X''}$ coïncident sur $X' \cap X''$. Il existe donc une application v de Y dans E qui a v_X pour restriction à X, lorsque X est borné dans Y.

Montrons que $u_1, \ldots, u_n, \ldots$ tend vers v dans $\beta(Y, E)$. (Il est évident que $v \in \beta(Y, E)$).

$u_1, \ldots, u_n, \ldots$ est une suite de Cauchy de $\beta(Y, E)$. Il existe une suite $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n, \ldots$ de réels positifs qui tend vers zéro et un borné B de $\beta(Y, E)$ qui sont tels que $u_n - u_{n'} \in \epsilon_n B$ lorsque $n' \geqslant n$. A chaque borné X de Y correspond un borné B(X) de E qui est tel que $u_n(x) - u_{n'}(x) \in \epsilon_n B(x)$ lorsque $x \in X$.

La suite $u_{X.n}$ converge d'autre part vers v_X pour la structure de $\beta(X, E)$. Il existe donc une suite $\epsilon'_1, \ldots, \epsilon'_n, \ldots$ de réels positifs tendant vers zéro et un borné B'(X) de E tels que $u_{X.n}(x) - v_X(x) \in \epsilon'_n B'(x)$, ou encore que $u_n(x) - v(x) \in \epsilon'_n B'(X)$ si $x \in X$.

Soit X donné. A tout n nous pouvons associer un $n'(n) > n$ tel que $\epsilon_{n'(n)} < \epsilon_n$. Et, si $x \in X$

$$u_n(x) - v(x) = [u_n(x) - u_{n'(n)}(x)] + [u_{n'(n)}(x) - v(x)]$$
$$\in \epsilon_n B(X) + \epsilon'_{n'(n)} B'(X) \subseteq \epsilon_n B''(X)$$

si B''(X) est la fermeture convexe équilibrée de B(X) + B'(X).

A tout borné X de Y nous associons ainsi un borné B''(X) qui est tel que $[(u_n - v)/\epsilon_n] \in B''(X)$ si $x \in X$. Par conséquent $u_n \to v$ dans $\beta(Y, E)$.

4. *Soit* E *un espace à bornés. L'espace* E *est complet si à tout borné* B *de* E *nous pouvons associer un espace de Banach* F(B), *dont l'espace vectoriel sous-jacent est un sous-espace de l'espace vectoriel sous-jacent de* E, *et dont la sphère unité est une partie bornée de* E *qui contient* B.

Soit en effet X un ensemble muni de la structure à bornés la moins fine, et soit $u_1, \ldots, u_n, \ldots$ une suite de Cauchy de $\beta(X, E)$. Nous pouvons trouver un borné B de E et une suite $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n, \ldots$ de réels positifs qui tend vers zéro et est telle que $u_n(x) - u_{n'}(x) \in \epsilon_n B$ lorsque $n' \geqslant n$. La suite $u_1, \ldots, u_n, \ldots$ est une suite de Cauchy de $\beta(X ; F(B))$. Sa limite, v, dans cet espace, est a fortiori une limite de cette suite dans $\beta(X, E)$.

5. *L'ensemble* γB. Soit E un espace à bornés qui vérifie le second critère de Cauchy. Soit B une partie bornée de E. Considérons une suite $z_1, \ldots, z_n, \ldots$ de nombres complexes telle que $\Sigma|z_n| \leqslant 1$ et une suite $b_1, \ldots, b_n, \ldots$ d'éléments de B. La suite des sommes partielles de la série $\Sigma z_n b_n$ est une suite de Cauchy de E. La série $\Sigma z_n b_n$ converge.

Nous appellerons γB l'ensemble des sommes des séries $\Sigma z_n b_n$ telles que $z_n \in \mathbf{C}$, $\Sigma|z_n| \leqslant 1$, et telles que $b_n \in B$ pour tout n. *Nous allons montrer que* E *est complet si et uniquement si* γB *est borné chaque fois que* B *l'est.*

La condition est nécessaire : γB est contenu dans la sphère unité de E_B, qui est bornée dans E, si E est complet.

Montrons que la condition est suffisante. Soit F(B) l'ensemble des $u \in E$ tels que $u = zv$ avec $z \in \mathbf{C}$; $v \in \gamma B$, et soit

$$n_B(u) = \inf\{|z| \mid u \in z\gamma B, z \in \mathbf{C}\}$$

γB est évidemment convexe équilibré ; F(B) est donc un espace vectoriel, et n_B une semi-norme sur F(B). Nous supposons γB borné, il ne contient pas d'espace non nul, et n_B est donc une norme. Appliquant le résultat démontré au paragraphe 2.4, il suffira de montrer que n_B est une norme d'espace de Banach sur F(B).

F(B) sera un espace de Banach si toute série Σu_r telle que $n_B(u_r) < 2^{-r}$ converge pour la structure de F(B). La suite des sommes partielles de Σu_r est une suite de Cauchy de E puisque $u_r \in 2^{-r}\gamma B$. Cette série a une somme dans E. Nous devons montrer que la somme appartient à F(B) et que la convergence a lieu pour la structure de F(B).

Nous savons que $u_r \in 2^{-r}\gamma B$, et par conséquent $u_r = \Sigma_s z_{rs} v_{rs}$, pour z_{rs}, v_{rs} convenables, avec $\Sigma_s |z_{rs}| \leqslant 2^{-r}$, $v_{rs} \in B$. Mais $\Sigma_{rs}|z_{rs}| < \Sigma 2^{-r} = 1$. Par conséquent $\Sigma_{rs} z_{rs} v_{rs}$ a une somme pour la structure à bornés de E, cette somme appartient à γB. Soit $w = \Sigma z_{rs} v_{rs}$.

La série $\Sigma z_{rs} v_{rs}$ converge vers w pour la structure normée de F(B). Soit en effet P une partie finie de $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ telle que $\Sigma_{rs \notin P}|z_{rs}| \leqslant \epsilon$. Alors, $w - \Sigma_{rs \notin P} z_{rs} v_{rs} \in \epsilon\gamma B$. Par conséquent, cette expression tend vers zéro lorsque nous faisons croître le nombre d'éléments de P de manière telle que la réunion des parties finies considérée soit l'ensemble $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$.

Un raisonnement analogue montre que $\Sigma_s z_{rs} v_{rs}$ tend vers u_r pour la structure de F(B). Et par conséquent

$$\Sigma_r u_r = \Sigma_r(\Sigma_s z_{rs} v_{rs}) = \Sigma_{rs} z_{rs} v_{rs}$$

puisque la série double converge, et que chaque terme de la série itérée a un sens. (F(B) est un espace vectoriel topologique). La série Σu_r a ainsi une limite dans F(B), cet espace est un espace de Banach. Le résultat annoncé est ainsi démontré.

3. Combinaisons linéaires formelles.

Soit X un ensemble à bornés. *Nous allons définir un espace à bornés complet, $\Gamma(X)$, qui contient X, induit sur X la structure à bornés donnée à priori, et est telle qu'une application bornée de X dans un espace complet ait un prolongement linéaire borné unique à $\Gamma(X)$.* Ces conditions déterminent $\Gamma(X)$ à un isomorphisme près.

L'ensemble X est immergé dans l'espace complet, $\Gamma(X)$. Les éléments de $\Gamma(X)$ seront appelés des combinaisons linéaires formelles convergentes d'éléments de X.

1. Commençons par montrer que $\Gamma(X)$ est déterminé à un isomorphisme près. Soient Γ_1, Γ_2 deux espaces complets qui vérifient les conditions énoncées. L'application identique de X dans Γ_2 est bornée. Prolongeons cette application à Γ_1 ; nous construisons une application linéaire bornée ψ_1 de Γ_1 dans Γ_2 qui laisse X fixe.

Nous pouvons définir de même une application linéaire bornée ψ_2 de Γ_2 dans Γ_1 qui laisse X fixe. La composée $\psi_2 \circ \psi_1$ est un endomorphisme borné de Γ_1 qui laisse X fixe. Mais l'application identique de X dans Γ_1 n'a qu'un prolongement à Γ_1, et l'application identique de Γ_1 en lui-même est déjà un tel prolongement.

La composée $\psi_2 \circ \psi_1$ est donc l'application identique de Γ_1 en lui-même. De même la composée $\psi_1 \circ \psi_2$ est l'application identique de Γ_2 en lui-même. Les applications ψ_1 et ψ_2 sont inverses l'une de l'autre. Chacune est un isomorphisme.

2. Soit Δ l'ensemble des fonctions $u(x)$, qui sont définies sur X, à valeurs complexes, nulles en dehors d'un borné de X, et telles que $\Sigma_{x \in X} |u(x)| < \infty$. (L'ensemble des x où $u(x) \neq 0$ est fini ou dénombrable). Δ est un sous-espace vectoriel de celui de toutes les applications de X dans les complexes.

Une partie B de Δ sera dite bornée si nous pouvons trouver un borné X_0 de X et un réel positif M, tels que $u(x) = 0$ si $u \in B$, $x \notin X_0$, et que $\Sigma |u(x)| < M$ si $u \in B$. L'ensemble des parties bornées de Δ définit évidemment sur cet ensemble une structure à bornés. Il est de plus évident que le second critère de Cauchy est vérifié et que γB est borné lorsque B est borné. Δ est un espace complet.

Δ ne contient pas X. Mais nous avons une injection $(y \to \varphi_y)$ de X dans Δ qui applique chaque $y \in X$ sur la fonction $\varphi_y(x)$ qui s'annule lorsque $x \neq y$ et est égale à l'unité lorsque $x = y$. Une partie B de X est bornée si et uniquement si son image par φ est bornée dans Δ.

Nous appellerons $\Gamma(X)$ un espace qui contient X, est en correspondance biunivoque avec Δ, l'application biunivoque de $\Gamma(X)$ dans Δ prolongeant φ. Nous définissons sur $\Gamma(X)$ une structure d'espace complet telle que cette application biunivoque ψ soit un isomorphisme. Ainsi défini, $\Gamma(X)$ est un espace à bornés complet qui contient X et induit sur X la structure donnée a priori.

3. Deux applications linéaires bornées, η_1 et η_2 de $\Gamma(X)$ dans un espace à bornés coïncident sur un sous-espace fermé de $\Gamma(X)$. Mais $\Gamma(X)$ n'a pas de sous-espace fermé propre qui contienne X. Les applications η_1 et η_2 coïncident donc sur tout $\Gamma(X)$ si elles coïncident sur X. Une application de X dans un espace à bornés ne peut avoir au maximum qu'un prolongement à $\Gamma(X)$.

Il reste à construire un prolongement linéaire borné de η lorsque η est une application bornée de X dans un espace complet E. Soit $u(x) \in \Delta$. La série

$$\eta'(u) = \Sigma_{x \in X} u(x)\eta(x)$$

converge dans E. L'ensemble des $\eta(x)$ tels que $u(x) \neq 0$ est en effet borné et $\Sigma |u(x)| < \infty$, la série est donc absolument convergente. L'application η' est évidemment une application linéaire bornée de Δ dans E. Posons enfin

$$\eta_1 = \eta' \circ \psi.$$

Alors η_1 est une application linéaire bornée de $\Gamma(X)$ dans E qui prolonge η.

L'ensemble des résultats énoncés est ainsi démontré.

4. Sous-espaces, quotients, sommes directes, produits tensoriels.

La structure induite par un espace complet sur un sous-espace fermé, et la structure quotient d'un espace complet par un sous-espace fermé sont des structures d'espace complet. La somme directe de deux espaces complets est un espace complet.

Deux espaces complets, E, F étant donnés, nous définissons un troisième espace complet, $E \,\overline{\otimes}\, F$. Les relations entre $E \,\overline{\otimes}\, F$ et les applications linéaires et multilinéaires bornées sont analogues aux relations entre le produit tensoriel ordinaire, $E \otimes F$ et les applications multilinéaires ordinaires. L'espace $E \,\overline{\otimes}\, F$ sera appelé le produit tensoriel complet des espaces E, F.

1. *Sous-espaces.* Soit E un espace complet, F un sous-espace vectoriel de E. *Pour que la structure à bornés induite par* E *sur* F *soit une structure d'espace complet, il faut et il suffit que* F *soit un sous-espace fermé.*

La condition est évidemment nécessaire : Si F n'est pas fermé, nous pouvons trouver une suite d'éléments de F qui tend vers un élément de E n'appartenant pas à F. Cette suite est une suite de Cauchy de F qui ne peut avoir aucune limite dans F. L'espace F ne vérifie pas le second critère de Cauchy, et n'est a fortiori pas complet.

Supposons alors F fermé. Une suite de Cauchy de F converge pour la structure de E vers un élément de E qui doit appartenir à F puisque F est fermé. La convergence a un sens pour la structure à bornés de F : la suite $(u_r - u)/\epsilon_r$ est bornée dans E si u_r est la suite donnée, u sa limite, et ϵ_r une suite réelle positive tendant vers zéro ; mais $(u_r - u)/\epsilon_r \in F$, et une suite d'éléments de F qui est bornée pour la structure de E est bornée pour la structure induite. L'espace F vérifie donc le second critère de Cauchy.

Soit ensuite B une partie bornée de F. L'ensemble γB calculé pour la structure de F est égal à l'ensemble γB calculé pour la structure de E. Le second est borné, le premier l'est donc aussi — F est complet, en vertu du paragraphe 2.5.

2. *Espaces quotients.* Soit E un espace complet, et soit F un sous-espace fermé de E. Nous avons défini une structure d'espace à bornés sur E/F. *Nous allons montrer que cette structure est une structure d'espace complet.* Il suffira de montrer que $\beta(X; E/F)$ vérifie le second critère de Cauchy si X est un ensemble muni de la structure à bornés la moins fine.

Soit $u_1, \ldots, u_r, \ldots$ une suite de Cauchy de $\beta(X; E/F)$. Nous pouvons extraire de cette suite une suite partielle $u'_1, \ldots, u'_r, \ldots$ telle que $u'_{r+1} - u'_r = 0\,(2^{-r})$ pour la structure à bornés de $\beta(X; E/F)$. La suite donnée convergera si cette suite partielle converge.

Nous supposons donc que $2^r[u'_{r+1}(x) - u'_r(x)]$ est borné dans E/F indépendamment de r, x. L'ensemble des valeurs de cette expression est l'image quotient d'une partie bornée de E. Il existe une suite bornée, $v_1(x), \ldots, v_r(x), \ldots$ d'éléments de $\beta(X; E)$ telle que l'application quotient de E sur E/F applique $v_r(x)$ sur $2^r[u'_{r+1}(x) - u'_r(x)]$. De même, $u'_1(x)$ est l'image quotient d'une fonction $\bar{u}'_1(x) \in \beta(X, E)$.

Posons

$$\bar{u}(x) = \bar{u}'_1(x) + \Sigma_1^\infty 2^{-r} v_r(x).$$

Alors $\bar{u} \in \beta(X, E)$, la série étant absolument convergente dans cet espace. L'image quotient de $\bar{u}$ appartient à $\beta(X; E/F)$. Et u'_r converge évidemment vers cette image quotient dans $\beta(X; E/F)$. L'espace E/F est donc complet.

3. *Sommes directes.* Nous avons défini une structure d'espace à bornés sur la somme directe de deux espaces à bornés. *Cette structure est une structure d'espace complet si les deux espaces considérés sont complets.* C'est évident : une suite de Cauchy de $\beta(X; E \oplus F)$ est la somme directe d'une suite de Cauchy de $\beta(X, E)$ et d'une suite de Cauchy de $\beta(X, F)$. Elle converge vers la somme directe de ses facteurs directs.

4. *Produits tensoriels.* Soient E, F deux espaces complets. Considérons leur produit cartésien, $E \times F$ avec sa structure d'ensemble à bornés. Considérons ensuite l'espace $\Gamma(E \times F)$ des combinaisons linéaires formelles convergentes d'éléments de $E \times F$, puis le plus petit sous-espace vectoriel fermé de $\Gamma(E \times F)$ qui contienne :

$$(ze, f) - z(e, f)\,; \quad (e, zf) - z(e, f) \tag{1}$$

$$(e + e', f) - (e, f) - (e', f)\,; \quad (e, f + f') - (e, f) - (e, f') \tag{2}$$

avec e, e' dans E, f, f' dans F, et z complexe. Soit Γ' ce sous-espace. Le produit tensoriel complet, $E \,\overline{\otimes}\, F$ sera par définition le quotient $\Gamma(E \times F)/\Gamma'$ avec sa structure d'espace complet quotient.

Nous avons $E \times F \subseteq \Gamma(E \times F)$. L'application quotient envoie $(e, f) \in E \times F$ sur un élément de $E \overline{\otimes} F$ que nous appellerons $e \overline{\otimes} f$. L'application $(e, f) \to e \overline{\otimes} f$ est évidemment bilinéaire bornée.

Soit ensuite G un troisième espace complet, et soit ψ une application bilinéaire bornée de $E \times F$ dans G. L'application ψ a un prolongement linéaire borné ψ_1 à $\Gamma(E \times F)$. Le noyau de ψ_1 contient les diverses expressions (1), (2) et contient donc Γ'. L'application ψ_1 est la composée de l'application quotient par une application ψ_2 de $E \overline{\otimes} F$ dans G. Et ψ_2 vérifie la relation

$$\psi_2(e \overline{\otimes} f) = \psi(e, f). \tag{3}$$

L'application ψ_2 vérifiant la relation (3) est unique. En effet, deux applications linéaires bornées de $E \overline{\otimes} F$ dans G qui vérifient la relation (3) coïncident sur l'ensemble des éléments $e \overline{\otimes} f$ $(e \in E,\ f \in F)$, et $E \overline{\otimes} F$ n'a pas de sous-espace fermé propre contenant tous ces éléments.

Deux espaces complets, E, F *étant donnés, nous pouvons construire un troisième espace complet* $E \overline{\otimes} F$ *et une application* $(e, f) \to e \overline{\otimes} f$ *de* $E \times F$ *dans* $E \overline{\otimes} F$ *qui est bilinéaire bornée et telle qu'à toute application bilinéaire bornée* ψ *de* $E \times F$ *dans un espace complet* G *corresponde une application linéaire bornée* ψ' *de* $E \overline{\otimes} F$ *dans* G, *et une seule, telle que*

$$\psi(e, f) = \psi'(e \overline{\otimes} f).$$

Ces conditions caractérisent $E \overline{\otimes} F$ à un isomorphisme près évidemment.

5. Filtrations.

Une *filtration* sur un espace complet, E, est une *application de l'ensemble des parties bornées* de E dans $\mathbf{Z}^* = \mathbf{Z} \cup \{-\infty\}$, qui a certaines propriétés généralisant les propriétés des filtrations usuelles. Par abus de langage, nous appellerons « filtration d'un élément de E » la filtration de la partie de E qui est réduite à ce seul élément.

Soit $k \in \mathbf{Z}^*$. Les éléments de E dont la filtration est au maximum égale à k constituent un sous-espace vectoriel, ${}_kE$ de E. Les parties bornées de E dont la filtration est au maximum égale à k définissent sur ${}_kE$ une structure d'espace complet.

Soient $E_1, \ldots, E_m$ des espaces complets filtrés, et φ une application multilinéaire bornée de $E_1 \times \ldots \times E_m$ dans un nouvel espace complet filtré F. La filtration de φ est définie et inférieure ou égale à N si la filtration de $\varphi(B_1, \ldots, B_m)$ est inférieure ou égale à $k_1 + \ldots + k_m + N$ lorsque $k_1, \ldots, k_m$ sont les filtrations de $B_1, \ldots, B_m$. La restriction de φ au produit des espaces ${}_{k_i}E_i$ est une application multilinéaire bornée de ce produit dans ${}_{\Sigma k_i + N}F$.

1. Nous appellerons $\mathbf{Z}^*$ le demi-groupe ordonné obtenu en adjoignant l'élément minimum, $-\infty$, au groupe ordonné $\mathbf{Z}$ des entiers rationnels. La structure de $\mathbf{Z}^*$ est déterminée si l'on veut que $-\infty$ soit un élément minimum, et que la structure de demi-groupe ordonné de $\mathbf{Z}^*$ prolonge la structure de groupe (additif) ordonné de $\mathbf{Z}$:

$$-\infty \leqslant n, \quad -\infty + n = -\infty$$

si n est un élément quelconque de $\mathbf{Z}^*$.

Soit E un espace complet, $\mathcal{B}$ l'ensemble des parties bornées de E. Une *filtration* sur E est une application ν de $\mathcal{B}$ dans $\mathbf{Z}^*$ qui a les propriétés suivantes :

d_1. $\nu(B_1 \cup B_2) = \sup[\nu(B_1), \nu(B_2)]$,

d_2. $\nu(B) \geqslant \nu(B')$ si $B \supseteq B'$,

e_1. $\nu(z_1B_1 + z_2B_2) \leqslant \sup[\nu(B_1), \nu(B_2)]$ si z_1, z_2 sont scalaires, B_1, B_2 étant bornés,

e_2. $\nu(\gamma B) = \nu(B)$,

e_3. $\nu(\{O\}) = -\infty$.

(Nous appelons $\{O\}$ l'ensemble réduit au seul élément nul). Nous ne supposons pas que $\nu(B) > -\infty$ si B est un borné qui a des éléments non nuls.

Les filtrations sont définies sur l'ensemble des parties bornées de E, et pas sur E lui-même. Nous parlerons toutefois de la filtration d'un élément de E, celle-ci étant par définition égale à la filtration de la partie réduite à cet élément :

$$\nu(u) = \nu(\{u\}),$$

$\nu(u)$ a les propriétés suivantes :

$$\nu(O) = -\infty \tag{1}$$

$$\nu(zu + z'u') \leqslant \sup[\nu(u), \nu(u')]. \tag{2}$$

De plus,

$$\nu(u) \leqslant \nu(\mathrm{B}) \text{ si } u \in \mathrm{B}. \tag{3}$$

2. *L'espace* ${}_k\mathrm{E}$. Soit $k \in \mathbf{Z}^*$. Appelons ${}_k\mathrm{E}$ l'ensemble des $u \in \mathrm{E}$ dont la filtration est au maximum k, et ${}_k\mathcal{B}$ l'ensemble des parties bornées de E dont la filtration est au plus k. L'ensemble ${}_k\mathrm{E}$ est un sous-espace vectoriel de E (inégalité 2). Et l'inégalité 3 montre que chaque élément de ${}_k\mathcal{B}$ est une partie de ${}_k\mathrm{E}$. Il est évident que ${}_k\mathcal{B}$ définit une structure d'espace à bornés sur ${}_k\mathrm{E}$. *Nous allons montrer que cette structure est une structure d'espace complet.*

Considérons une suite de Cauchy de ${}_k\mathrm{E}$. Cette suite a une suite partielle, $u_1, \ldots, u_r, \ldots$ telle que l'ensemble B ayant les éléments u_1, $2^r(u_{r+1} - u_r)$ $(r = 1, \ldots)$ appartienne à ${}_k\mathrm{B}$. La suite donnée converge si cette suite partielle converge.

Posons $v_r = 2^r(u_{r+1} - u_r)$, et $u = u_1 + \Sigma_1^\infty 2^{-r} v_r$. Alors, $v_r \in \mathrm{B}$, et $u \in 2\gamma\mathrm{B}$. Mais $\nu(2\gamma\mathrm{B}) \leqslant \nu(\mathrm{B}) \leqslant k$, et par conséquent $\nu(u) \leqslant k$, $u \in {}_k\mathrm{E}$. Ensuite, u est la limite de u_r pour la structure à bornés de ${}_k\mathrm{E}$ puisque $u - u_r = \Sigma_{r+1}^\infty 2^{-r'} v_{r'} \in 2^{-r}\gamma\mathrm{B}$ tend vers zéro dans ${}_k\mathrm{E}$ puisque $\mathrm{B} \in {}_k\mathcal{B}$. L'espace ${}_k\mathrm{E}$ vérifie le second critère de Cauchy.

Nous achevons la démonstration en observant que l'ensemble $\gamma\mathrm{B}$ défini à partir de B à l'aide de la structure à bornés de ${}_k\mathrm{E}$ est le même que l'ensemble $\gamma\mathrm{B}$ défini à partir de B à l'aide de la structure à bornés de E. Le second ensemble $\gamma\mathrm{B}$ est borné dans ${}_k\mathrm{E}$. Le premier l'est donc aussi.

3. *Applications linéaires et multilinéaires*. Soient $\mathrm{E}_1, \ldots, \mathrm{E}_m$, F des espaces complets filtrés, $\nu_1, \ldots, \nu_m, \nu'$ les filtrations respectives. Nous dirons que la filtration de l'application multilinéaire bornée φ est définie si l'on peut trouver un $\mathrm{N} \in \mathbf{Z}^*$ tel que l'inégalité suivante soit vraie lorsque $\mathrm{B}_1, \ldots, \mathrm{B}_m$ sont bornés dans $\mathrm{E}_1, \ldots, \mathrm{E}_m$ respectivement :

$$\nu'[\varphi(\mathrm{B}_1, \ldots, \mathrm{B}_m)] \leqslant \mathrm{N} + \Sigma\nu_i(\mathrm{B}_i).$$

La borne inférieure des $\mathrm{N} \in \mathbf{Z}^*$ qui vérifient cette inégalité sera dite être la filtration de φ. Lorsque nous dirons que φ est de filtration N, ou de filtration au plus N, nous sous-entendrons toujours que la filtration de φ est définie.

Soit φ multilinéaire de filtration au plus N, soient $k_1, \ldots, k_m$ dans $\mathbf{Z}^*$, et $u_1, \ldots, u_m$ dans ${}_{k_1}\mathrm{E}_1, \ldots, {}_{k_m}\mathrm{E}_m$ respectivement,

$$\nu'[\varphi(u_1, \ldots, u_m)] \leqslant \mathrm{N} + \Sigma k_i.$$

La restriction de φ au produit des espaces ${}_{k_i}\mathrm{E}_i$ prend donc ses valeurs dans ${}_{\mathrm{N}+\Sigma k}\mathrm{F}$. De même $\varphi(\mathrm{B}_1, \ldots, \mathrm{B}_m)$ est borné dans ${}_{\mathrm{N}+\Sigma k}\mathrm{F}$ si $\mathrm{B}_1, \ldots, \mathrm{B}_m$ sont respectivement bornés dans ${}_{k_1}\mathrm{E}_1, \ldots, {}_{k_m}\mathrm{E}_m$.

La restriction d'une application multilinéaire bornée de filtration au plus N, de $\mathrm{E}_1 \times \ldots \times \mathrm{E}_m$ dans F, est donc une application multilinéaire bornée de ${}_{k_1}\mathrm{E}_1 \times \ldots \times {}_{k_m}\mathrm{E}_m$ dans ${}_{k_1+\ldots+k_m+\mathrm{N}}\mathrm{F}$.

Lorsque $m = 1$, les définitions et résultats démontrés ici sont encore valables, et sont des propriétés des applications linéaires.

6. Algèbres et modules.

Nous définissons les algèbres à bornés complètes, éventuellement filtrées, et les modules complets, éventuellement filtrés sur ces algèbres. Nous établissons quelques propriétés simples de ces structures.

Une algèbre à bornés, $\mathbf{A}$, est une algèbre, sur l'espace vectoriel sous-jacent de laquelle on définit une structure d'espace à bornés telle que l'application produit $(a, b) \to ab$ soit bornée. L'algèbre $\mathbf{A}$ est dite complète si l'espace à bornés sous-jacent est complet.

Soit $\mathbf{A}$ une algèbre à bornés. Un $\mathbf{A}$-module à bornés est un $\mathbf{A}$-module sur l'espace vectoriel sous-jacent duquel on définit une structure d'espace à bornés telle que l'application $(a, m) \to am$ de $\mathbf{A} \times \mathbf{M}$ dans $\mathbf{M}$ soit bornée. Le module $\mathbf{M}$ sera complet si sa structure d'espace à bornés est une structure d'espace complet.

Une sous-algèbre est fermée si toute suite convergente d'éléments de la sous-algèbre converge vers un élément de celle-ci. Le centre d'une algèbre est par exemple fermé. Une sous-algèbre fermée d'une algèbre complète est une algèbre complète.

De même un idéal, ou un sous-module, est fermé si chacune de ses suites convergentes tend vers un élément de l'idéal ou du sous-module. Le quotient d'une algèbre complète par un idéal bilatère fermé est une algèbre complète. Le quotient d'un module complet par un sous-module fermé est un module complet.

Soit u_r une suite d'éléments d'une algèbre à bornés, et soit v_r une suite d'éléments de cette même algèbre ou d'un module à bornés sur cette algèbre. Alors $u_r v_r = \mathrm{O}(c_r d_r)$ si $u_r = \mathrm{O}(c_r)$, $v_r = \mathrm{O}(d_r)$, et $u_r v_r \to uv$ si $u_r \to u$, $v_r \to v$.

Une algèbre complète est filtrée si une filtration est définie sur son espace vectoriel sous-jacent, de manière telle que le produit

$(a, b) \to ab$ ait une filtration négative ou nulle. Un **A**-module complet filtré est un **A**-module complet sur l'espace vectoriel duquel l'on définit une filtration telle que le produit $(a, m) \to am$ soit de filtration négative ou nulle.

La restriction du produit est alors une application bilinéaire bornée de ${}_{k_1}\mathbf{A} \times {}_{k_2}\mathbf{A}$ dans ${}_{k_1+k_2}\mathbf{A}$ et de ${}_{k_1}\mathbf{A} \times {}_{k_2}\mathbf{M}$ dans ${}_{k_1+k_2}\mathbf{M}$.

7. Exemples.

Nous donnons quelques exemples d'espaces complets et d'algèbres complètes. Nous définissons notamment une structure d'algèbre complète sur une catégorie importante d'algèbres localement convexes à l'alinéa 4. Les résultats établis dans cette dissertation pourront être appliqués aux algèbres localement convexes de cette catégorie.

1. *Espaces fini-dimensionnels. Il n'est possible de définir qu'une seule structure d'espace à bornés sur un espace à un nombre fini de dimensions.* L'espace étant identifié avec $\mathbf{C}^n$, une partie de cet espace sera bornée si et uniquement si elle est contenue dans une boule de rayon fini.

La fermeture convexe d'un ensemble fini est bornée. Une boule est contenue dans la fermeture convexe d'un ensemble fini. Elle est donc bornée pour toute structure à bornés définie sur $\mathbf{C}^n$.

Réciproquement, un convexe équilibré, B, de $\mathbf{C}^n$ est contenu dans une boule s'il ne contient aucun espace vectoriel non nul. L'ensemble des $u \in \mathbf{C}^n$ tels que $u = \lim (v_n/n)$ avec $v_n \in B$ est en effet un sous-espace vectoriel de $\mathbf{C}^n$ qui est contenu dans B et ne serait pas nul si B n'était pas contenu dans une boule.

Un borné, B_0, est contenu dans sa fermeture convexe équilibrée, B ; celle-ci est bornée et ne contient donc pas d'espace vectoriel non nul. L'ensemble B_0 est donc contenu dans une boule.

2. *Structure la plus fine. Parmi toutes les structures d'espace à bornés définies sur un espace vectoriel,* E, *il en est une plus fine que toutes les autres.* C'est celle pour laquelle les seules parties bornées sont celles qui sont contenues dans les fermetures convexes d'ensembles finis. L'espace à bornés ainsi défini est isomorphe à $\Gamma(X)$, si X est une base de E, sur laquelle on met la structure d'ensemble à bornés la plus fine. L'espace E est donc complet.

Soient $E_1, \ldots, E_m$ des espaces vectoriels, munis chacun de la structure d'espace à bornés la plus fine. Soit F un espace à bornés quelconque. Une application multilinéaire de $E_1 \times \ldots \times E_m$ dans F est toujours bornée. Soit par exemple E une algèbre. La structure à bornés la plus fine est une structure d'algèbre complète.

3. *Espaces localement convexes.* Soit E un espace localement convexe séparé. On dit classiquement qu'une partie B de E est bornée si à tout voisinage V de zéro on peut associer un ϵ réel positif tel que $\epsilon B \subseteq V$. *Cet ensemble de parties bornées définit sur* E *une structure d'espace à bornés.* Il faut observer que la convergence pour la pseudo-topologie que nous avons définie sur l'espace à bornés n'est pas équivalente à la convergence pour la structure d'espace topologique, mais plus fine que celle-ci.

On dit qu'un espace localement convexe est quasi-complet si la structure uniforme de cet espace induit sur les parties bornées fermées une structure d'espace uniforme complet. Toute suite de Cauchy pour la topologie converge alors. Une suite de Cauchy pour la structure d'espace à bornés converge a fortiori. De plus, l'ensemble γB est contenu dans la fermeture convexe équilibrée fermée de B et est donc borné si B l'est.

La structure à bornés associée à une structure d'espace localement convexe quasi-complet est une structure d'espace à bornés complet.

4. *Algèbres localement convexes.* Soit **A** une algèbre complexe. Supposons définie sur l'espace vectoriel sous-jacent de **A** une structure d'espace localement convexe quasi-complet, et supposons le produit $(a, b) \to ab$ séparément continu. *La structure à bornés associée est une structure d'algèbre à bornés complète.* Il suffit pour cela de montrer que BB′ est borné si B et B′ le sont.

Un ensemble d'applications d'un espace vectoriel quasi-complet E dans un espace vectoriel topologique F est en effet borné pour la convergence uniforme sur les bornés s'il est borné pour la convergence simple [2]. Soit B borné. Associons à chaque $b \in B$ l'homothétie gauche $g_b : a \to ba$. L'ensemble des homothéties g_b $(b \in B)$ est borné pour la convergence simple, et donc pour la convergence uniforme sur les bornés. L'ensemble BB′ est borné si B′ est un nouvel ensemble borné. (Voir aussi [16]).

CHAPITRE II

FONCTIONS TEMPÉRÉES

Dans l'étude spectrale des algèbres complètes, nous devrons considérer des espaces, et des algèbres de fonctions de plusieurs variables complexes, à valeurs dans l'algèbre considérée, ou dans des espaces complets associés. Le chapitre II est consacré à la définition, et à l'étude préliminaire de ces espaces et de ces algèbres.

Les propriétés que nous établissons dans ce chapitre relèvent de la théorie des fonctions de variables réelles, et pas de celle des fonctions de variables complexes. Les raisonnements auront une allure plus simple si nous considérons des fonctions de variables réelles à valeurs dans une algèbre. Il sera possible d'appliquer les propositions établies ici, lorsque nous en aurons besoin, en identifiant $\mathbf{C}^n$ avec $\mathbf{R}^{2n}$.

Notations. Chaque espace $\mathbf{R}^n$ (et ultérieurement $\mathbf{C}^n$) sera normé par la norme Euclidéenne

$$|s|^2 = |(s_1, \ldots, s_n)|^2 = |s_1|^2 + \ldots + |s_n|^2.$$

Nous définissons sur cet espace la fonction

$$\delta_0(s) = (1 + |s|^2)^{-1/2}$$

qui est analytique-réelle, positive, et tend vers zéro à l'infini comme $|s|^{-1}$. Nous ne rappelons pas dans les notations sur quel espace $\mathbf{R}^n$ nous considérons les fonctions $|s|$, $\delta_0(s)$, le nombre n pouvant toujours être déterminé par le contexte. Supposons par exemple que $s \in \mathbf{R}^n$, $s' \in \mathbf{R}^{n'}$, alors $(s, s') \in \mathbf{R}^{n+n'}$ et $|(s, s')|^2 = |s|^2 + |s'|^2$.

Le choix de la norme Euclidéenne et de la fonction $\delta_0(s)$ est arbitraire. Mais l'arbitraire du choix ne nuira pas à la généralité des résultats, et le fait que le choix ait été fait simplifiera les raisonnements et les notations.

8. Fonctions tempérées quelconques.

Soient E un espace complet, $s_1, \ldots, s_n$ des variables réelles, et $\delta(s)$ une fonction bornée, réelle non négative définie sur $\mathbf{R}^n$ de ces variables. Nous appellerons $\Theta(s ; \delta ; \mathrm{E})$ un espace des fonctions $u(s)$, de $s = (s_1, \ldots, s_n)$, qui sont définies lorsque $\delta(s) > 0$, et à valeurs dans E. Un élément de $\Theta(s ; \delta ; \mathrm{E})$ est par définition une fonction δ-tempérée à valeurs dans E.

Une structure d'espace à bornés complet filtré est définie sur $\Theta(s ; \delta ; \mathrm{E})$. Des espaces à bornés complets, $\mathrm{E}_1, \ldots, \mathrm{E}_m$, F et une application multilinéaire bornée, φ, de $\mathrm{E}_1 \times \ldots \times \mathrm{E}_m$ dans F étant donnés, nous pouvons trouver canoniquement une application multilinéaire bornée, φ^* ayant une filtration $\leqslant 0$ du produit des espaces $\Theta(s ; \delta ; \mathrm{E}_i)$ dans $\Theta(s ; \delta ; \mathrm{F})$. Par abus de langage, nous écrirons souvent φ pour φ^*.

Nous montrons enfin comment les espaces complets $\Theta(s ; \delta ; \Theta(t ; \delta' ; \mathrm{E}))$ et $\Theta(s, t ; \delta\delta' ; \mathrm{E})$ peuvent être identifiés canoniquement.

1. *Définition.* Soient $s_1, \ldots, s_n$ des variables réelles indépendantes, $s = (s_1, \ldots, s_n)$, et soit $\delta(s)$ une fonction bornée, réelle non négative de s qui est définie sur $\mathbf{R}^n$. Soit E un espace complet, et u une fonction de s à valeurs dans E. La fonction $u(s)$ sera dite δ-tempérée si son domaine de définition est l'ensemble $\delta(s) > 0$ et si $\delta(s)^{\mathrm{N}} u(s)$ est borné indépendamment de s pour N suffisamment grand.

L'ensemble des fonctions δ-tempérées à valeurs dans E est un espace vectoriel complexe que nous appellerons $\Theta(s ; \delta ; \mathrm{E})$. Une partie B de $\Theta(s ; \delta ; \mathrm{E})$ sera dite bornée s'il existe un $\mathrm{N} \in \mathbf{Z}$ tel que $\delta(s)^{\mathrm{N}} u(s)$ reste borné dans E indépendamment de $u \in \mathrm{B}$ et de $s \in \mathbf{R}^n$, avec $\delta(s) > 0$. La filtration de B sera dite être inférieure ou égale à N.

Ces conventions sont légitimes : Nous allons montrer qu'elles définissent une structure d'espace complet filtré sur $\Theta(s ; \delta ; \mathrm{E})$. Il est bien entendu évident que l'ensemble des bornés vérifie les conditions $\mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2, \mathrm{a}_3, \mathrm{b}_1, \mathrm{b}_2, \mathrm{b}_3$, du paragraphe 1.1. et que $\Theta(s ; \delta ; \mathrm{E})$ est donc un espace à bornés.

Pour montrer que cette structure à bornés est complète, nous montrerons que $\beta(\mathrm{X} ; \Theta(s ; \delta ; \mathrm{E}))$ vérifie le second critère de

Cauchy quel que soit l'ensemble à bornés X. Nous appellerons d'autre part S l'ensemble des $s \in \mathbf{R}^n$ tels que $\delta(s) > 0$ et mettrons sur S la structure d'ensemble à bornés la plus fine.

Soit $\{u_n(x, s)\}_{n \in \mathbf{N}}$ une suite de Cauchy de $\beta(X ; \Theta(s ; \delta ; E))$. Nous pouvons évidemment trouver un entier N tel que la suite $\delta(s)^N u_n(x, s)$ soit une suite de Cauchy de $\beta(X \times S ; E)$. Cette suite a une limite, $v(x, s) \in \beta(X \times S ; E)$, et $u_n(x, s)$ tend vers $\delta(s)^{-N} v(x, s)$ pour la structure de $\beta(X ; \Theta(s ; \delta ; E))$. Le second critère de Cauchy est vérifié.

Nous devons encore montrer que E est un espace filtré. Une application ν de l'ensemble de ses parties bornées dans $\mathbf{Z}^*$ est définie par la relation

$$\nu(B) = \inf\{N \mid N \in \psi(B)\}$$

si $\psi(B)$ est l'ensemble des $N \in \mathbf{Z}$ tels que $\delta(s)^N u(s)$ soit borné indépendamment de $s \in S$, $u \in B$. (L'ensemble $\psi(B)$ ne peut être vide si B est borné).

L'application ν vérifie évidemment les conditions d_1, d_2, e_1, e_3 du paragraphe 5.1. Pour montrer que ν est une filtration, il faut encore montrer que e_2 est vérifié. Il suffit même de montrer que $\psi(\gamma B) \supseteq \psi(B)$, l'inclusion opposée étant évidente.

Nous supposons donc que $\delta(s)^N u(s)$ est borné indépendamment de $u \in B$, $s \in S$, et voulons montrer que $\delta(s)^N u(s)$ est borné indépendamment de $u \in \gamma B$, $s \in S$. Mais c'est évident : $\delta(s)^N u(s) \in \gamma B'$ si $s \in S$, $u \in \gamma B$, appelant B' l'ensemble des $\delta(s)^N u(s)$ tels que $s \in S$, $u \in B$. Nous supposons que B' est borné, $\gamma B'$ l'est donc aussi.

Nous avons ainsi défini sur $\Theta(s ; \delta ; E)$ une structure d'espace complet filtré.

2. *Applications linéaires et multilinéaires*. Considérons ensuite des espaces complets, $E_1, \dots, E_m$, F, et une application multilinéaire bornée φ de $E_1 \times \dots \times E_m$ dans F. Soit $u_i \in \Theta(s ; \delta ; E_i)$ pour $i = 1, \dots, m$, et posons

$$v = \varphi^*(u_1, \dots, u_m)$$

si v est la fonction définie sur l'ensemble $S : \delta(s) > 0$ par

$$v(s) = \varphi(u_1(s), \dots, u_m(s)).$$

Il est évident que φ^* est multilinéaire. Nous allons montrer *qu'elle est bornée, et de filtration négative ou nulle, du produit des espaces* $\Theta(s ; \delta ; E_i)$ *dans* $\Theta(s ; \delta ; F)$.

Il suffira pour cela de montrer que $\overline{B} = \varphi^*(B_1, \dots, B_m)$ est une partie bornée de filtration au maximum égale à ΣN_i dans $\Theta(s ; \delta ; F)$ si B_i est une partie bornée de filtration au maximum égale à N_i dans $\Theta(s ; \delta ; E_i)$, pour $i = 1, \dots, m$.

Nous supposons donc que chacun des ensembles B_i', des $x \in E_i$ tels que $x = \delta(s)^{N_i} u_i(s)$, est une partie bornée de E_i. Soit $v \in \overline{B}$. Alors $v = \varphi^*(u_1, \dots, u_m)$ avec $u_i \in B_i$, et

$$\delta(s)^{\Sigma N_i} v(s) = \varphi[\delta(s)^{N_1} u_1(s), \dots, \delta(s)^{N_m} u_m(s)] \in \varphi(B_1', \dots, B_m').$$

L'ensemble $\overline{B}$ est borné, de filtration inférieure ou égale à ΣN_i, puisque $\varphi(B_1', \dots, B_m')$ est borné dans F.

Par la suite, nous écrirons souvent $\varphi(u_1, \dots, u_m)$ plutôt que $\varphi^*(u_1, \dots, u_m)$ lorsque cette notation abusive ne pourra pas induire en erreur.

3. Soient $s_1, \dots, s_n, t_1, \dots, t_m$ des variables réelles indépendantes, $s = (s_1, \dots, s_n)$, $t = (t_1, \dots, t_m)$, puis $\delta(s)$, $\delta'(t)$ des fonctions réelles non négatives de s, t. Le produit $\delta(s)\delta'(t)$ est une fonction réelle non négative de (s, t).

Une fonction de s à valeurs dans un espace de fonctions de t peut être identifiée avec une fonction de (s, t) qui est définie sur le produit des domaines de définitions. Nous identifions ainsi les espaces

$$\Theta(s ; \delta(s) ; \Theta(t ; \delta'(t) ; E)), \quad \Theta(s, t ; \delta(s)\delta'(t) ; E)$$

avec leur structure à bornés. (Les filtrations sont différentes).

Appelons S, T les ensembles $\delta(s) > 0$, $\delta'(t) > 0$. Un élément u du premier espace est une fonction de (s, t) définie sur $S \times T$. Et $u(s, t)$ appartient à $\Theta(t ; \delta' ; E)$ pour s constant, $\delta(s)^{N_1} u(s, t)$ est borné indépendamment de s dans $\Theta(t ; \delta' ; E)$ pour N_1 suffisamment grand. Il existe donc un entier N_2, tel que $\delta(s)^{N_1} \delta'(t)^{N_2} u(s, t)$ soit borné indépendamment de $(s, t) \in S \times T$. Soit $N = \max(N_1, N_2)$. Alors $[\delta(s)\delta'(t)]^N u(s, t)$ est borné indépendamment de $(s, t) \in S \times T$, c'est-à-dire, $u(s, t) \in \Theta(s, t ; \delta\delta' ; E)$.

Réciproquement, soit $u(s, t) \in \Theta(s, t ; \delta\delta' ; E)$, donc soit $u(s, t)$ défini sur $S \times T$ et tel que $[\delta(s)\delta'(t)]^N u(s, t)$ soit borné indépendamment de (s, t). Alors $\delta(s)^N u(s, t)$ appartient à $\Theta(t ; \delta' ; E)$ pour chaque s, et est borné indépendamment de s, dans $\Theta(t ; \delta' ; E)$. Par conséquent, $u(s, t) \in \Theta(s ; \delta ; \Theta(t ; \delta' ; E))$.

Des raisonnements analogues montrent qu'une partie bornée de l'un des deux espaces est bornée dans l'autre. Les structures d'espace complet sont identiques.

9. Fonctions différentiables tempérées.

Nous aurons besoin d'un espace $\theta_r(s\,;\,\delta\,;\,E)$ de fonctions r fois différentiables à valeurs dans E, δ-tempérées ainsi que leurs dérivées d'ordre inférieur ou égal à r, lorsque la fonction δ est Lipschitzienne, et telle que $|s|\cdot\delta$ soit bornée. Nous définissons ici des espaces fonctionnels ayant des propriétés analogues aux espaces de fonctions r fois continûment différentiables. Leur définition n'est pas immédiate, l'espace E n'est pas topologique.

Nous commencerons par définir l'espace dont nous aurons besoin lorsque E est un espace de Banach (donc topologique). La définition pourra ensuite être généralisée au cas où E est un espace à bornés quelconque, en considérant la famille d'espaces E_B définie au paragraphe 2.2.

Une structure d'espace à bornés complet et filtré peut être définie sur $\theta_r(s\,;\,\delta\,;\,E)$. Des opérateurs de dérivation partielle appliquent cet espace dans $\theta_{r-1}(s\,;\,\delta\,;\,E)$. Ce sont des applications linéaires, bornées, de filtration $+1$.

Soit φ une application multilinéaire bornée d'un produit d'espaces complets $E_1 \times \dots \times E_m$ dans F. La restriction de l'application φ^* définie au paragraphe 8.2. applique le produit des espaces $\theta_r(s\,;\,\delta\,;\,E_i)$ dans $\theta_r(s\,;\,\delta\,;\,F)$, et est multilinéaire, bornée, de filtration négative ou nulle pour les structures définies sur ces divers espaces. Une loi de dérivation du produit permet de calculer les dérivées de $\varphi^*(u_1, \dots, u_m)$.

1. Considérons un espace de Banach E, un entier non négatif r, un n-uple de variables réelles $s = (s_1, \dots, s_n)$, et une fonction $\delta(s)$ qui est réelle non négative définie sur $\mathbf{R}^n$. Nous supposerons de plus que δ est Lipschitzienne et que $|s|\delta$ est bornée. Cette hypothèse supplémentaire sera toujours vérifiée lorsque nous voudrons appliquer les résultats établis ici.

Une fonction u de s à valeurs dans E sera dite r fois différentiable δ-tempérée si cette fonction appartient à $\Theta(s\,;\,\delta\,;\,E)$, a des dérivées continues jusqu'à l'ordre r sur le domaine $\delta(s) > 0$, ses dérivées d'ordre inférieur ou égal à r appartenant toutes à $\Theta(s\,;\,\delta\,;\,E)$. L'ensemble de ces fonctions est un sous espace vectoriel de $\Theta(s\,;\,\delta\,;\,E)$ que nous appellerons $\theta_r(s\,;\,\delta\,;\,E)$. Une partie B de $\theta_r(s\,;\,\delta\,;\,E)$ sera dite bornée pour la structure de cet espace si l'ensemble des dérivées d'ordre inférieur ou égal à r de ses éléments est borné dans $\Theta(s\,;\,\delta\,;\,E)$. La filtration de B sera dite inférieure ou égale à N si l'ensemble des dérivées d'ordre r' d'éléments de B est un borné de filtration au maximum égal à $N + r'$ dans $\Theta(s\,;\,\delta\,;\,E)$ pour chaque $r' = 0, 1, \dots, r$.

Nous allons montrer que ces conventions définissent effectivement une structure d'espace complet filtré sur $\theta_r(s\,;\,\delta\,;\,E)$.

L'ensemble des parties bornées a évidemment les propriétés $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$, du paragraphe 1.1. Une suite de Cauchy pour la structure à bornés définie ainsi converge vers un élément de $\theta_r(s\,;\,\delta\,;\,E)$. En effet, la suite, et ses suites dérivées sont localement uniformément convergentes pour la structure topologique de E.

Il suffira de montrer que γB est borné lorsque B l'est pour montrer que E est complet. Soit $B_{r'}$ l'ensemble des dérivées d'ordre r' d'éléments de B, si $0 \leqslant r' \leqslant r$. Chaque ensemble $B_{r'}$ est borné. Une dérivée d'ordre r' d'un élément de γB est définie et appartient à $\gamma B_{r'}$. Ceci montre que γB est borné, et donc que $\theta_r(s\,;\,\delta\,;\,E)$ est complet.

Nous devons encore considérer la filtration de $\theta_r(s\,;\,\delta\,;\,E)$. Une application ν_r de l'ensemble des parties bornées de $\theta_r(s\,;\,\delta\,;\,E)$ dans $\mathbf{Z}^*$ est définie par la relation

$$\nu_r(B) = \inf\{N \mid N \in \psi_r(B)\}$$

si $\psi_r(B)$ est l'ensemble des $N \in \mathbf{Z}$ tels que la filtration de $B_{r'}$ pour la structure de $\Theta(s\,;\,\delta\,;\,E)$ soit inférieure ou égale à $N + r'$ pour tout r' $(0 \leqslant r' \leqslant r)$. Il est évident que les conditions d_1, d_2, e_1, e_3, du paragraphe 5.1. sont vérifiées par ν_r. Quant à la condition e_2, elle est également vérifiée puisque

$$\nu_r(B) = \sup\,[\nu(B_{r'}) - r'] = \sup\,[\nu(\gamma B_{r'}) - r'] \geqslant \nu_r(\gamma B).$$

L'inégalité opposée est une conséquence de d_2 puisque $B \subseteq \gamma B$. (Nous avons appelé ν la filtration définie sur $\Theta(s\,;\,\delta\,;\,E)$.)

Remarque 9.1.1. Il est évident, vu les définitions que nous avons posées, que la dérivée partielle d'un élément de $\theta_r(s\,;\,\delta\,;\,E)$

appartient à $\theta_{r-1}(s\,;\,\delta\,;\,E)$, et que l'application $u \to \partial u/\partial s_i$ est une application linéaire bornée de filtration $+1$ de $\theta_r(s\,;\,\delta\,;\,E)$ dans $\theta_{r-1}(s\,;\,\delta\,;\,E)$.

Remarque 9.1.2. Soient E, F, deux espaces de Banach, et φ une application linéaire bornée de E dans F. Nous définissons une application φ^* de $\theta_r(s\,;\,\delta\,;\,E)$ dans $\theta_r(s\,;\,\delta\,;\,F)$ en posant $\varphi^*(u) = \varphi \circ u$. Il est évident que φ^* est une application linéaire bornée, de filtration négative ou nulle.

Remarque 9.1.3. Pour qu'une partie B de $\theta_r(s\,;\,\delta\,;\,E)$ soit bornée, il faut et il suffit que B soit bornée dans $\Theta(s\,;\,\delta\,;\,E)$ et que l'ensemble des dérivées de B soit borné dans $\theta_{r-1}(s\,;\,\delta\,;\,E)$. La filtration de B sera inférieure ou égale à N si la filtration de B dans $\Theta(s\,;\,\delta\,;\,E)$ est inférieure ou égale à N, la filtration de l'ensemble des dérivées d'éléments de B étant inférieure ou égale à $N+1$ dans $\theta_{r-1}(s\,;\,\delta\,;\,E)$.

2. Soit E un espace complet quelconque. Une fonction $u(s)$, des variables $s_1, \ldots, s_n$, à valeurs dans E, appartiendra à $\theta_r(s\,;\,\delta\,;\,E)$ si $u(s) \in \theta_r(s\,;\,\delta\,;\,E_B)$ pour un borné B de E. Une partie $\overline{B}$ de $\theta_r(s\,;\,\delta\,;\,E)$ sera dite bornée si elle est contenue et bornée dans $\theta_r(s\,;\,\delta\,;\,E_B)$ pour un borné B de E. La filtration de $\overline{B}$ est inférieure ou égale à N dans $\theta_r(s\,;\,\delta\,;\,E)$ si nous pouvons trouver un borné B de E tel que $\overline{B}$ soit borné et de filtration inférieure ou égale à N dans $\theta_r(s\,;\,\delta\,;\,E_B)$.

Pour légitimer ces définitions, nous devrons montrer que les deux définitions de $\theta_r(s\,;\,\delta\,;\,E)$ que nous avons données lorsque E est un espace de Banach sont équivalentes, puis que la définition que nous avons donnée lorsque F est un espace complet quelconque définit un espace complet filtré. Nous commencerons par démontrer l'équivalence des définitions. En attendant, nous appellerons $\theta^*{}_r(s\,;\,\delta\,;\,E)$ l'espace défini au paragraphe 9.1., puis $\theta_r(s\,;\,\delta\,;\,E)$ l'espace défini ici, en considérant les espaces $\theta^*{}_r(s\,;\,\delta\,;\,E_B)$, l'espace E étant supposé être un espace de Banach bien entendu.

Soit B la sphère unité de E,

$$\theta^*{}_r(s\,;\,\delta\,;\,E) = \theta^*{}_r(s\,;\,\delta\,;\,E_B) \subseteq \theta_r(s\,;\,\delta\,;\,E).$$

Une partie de $\theta^*{}_r(s\,;\,\delta\,;\,E)$, qui est bornée et de filtration inférieure ou égale à N, est bornée et de filtration inférieure ou égale à N dans $\theta_r(s\,;\,\delta\,;\,E)$.

Soit ensuite $\overline{B}$ un borné de $\theta_r(s\,;\,\delta\,;\,E)$ dont la filtration est inférieure ou égale à N. Alors $\overline{B}$ est borné et de filtration inférieure ou égale à N dans $\theta^*_r(s\,;\,\delta\,;\,E_{B'})$, pour B′ convenable, borné dans E. L'ensemble B′ est contenu dans kB pour k réel suffisamment grand. L'application identique de $E_{B'}$ dans E étant linéaire et bornée, une partie bornée de $\theta^*_r(s\,;\,\delta\,;\,E_{B'})$ est contenue et bornée dans l'espace $\theta^*_r(s\,;\,\delta\,;\,E)$, la filtration de cette partie dans $\theta^*_r(s\,;\,\delta\,;\,E)$ étant au maximum égale à sa filtration dans $\theta^*_r(s\,;\,\delta\,;\,E_B)$. En particulier, $\overline{B}$ est une partie bornée, de filtration au maximum égale à N, de $\theta^*_r(s\,;\,\delta\,;\,E)$.

Les deux définitions sont donc équivalentes lorsque E est un espace de Banach, il n'y a pas de distinction à faire entre $\theta^*_r(s\,;\,\delta\,;\,E)$ et $\theta_r(s\,;\,\delta\,;\,E)$.

Considérons maintenant un espace complet quelconque E. Soient u_1, u_2, des éléments de $\theta_r(s\,;\,\delta\,;\,E)$ et B_1, B_2, des bornés de E tels que $u_i \in \theta_r(s\,;\,\delta\,;\,E_{B_i})$. Posons $B = B_1 \cup B_2$. Chaque espace E_{B_i} est contenu dans E_B, l'application identique étant bornée. Chaque espace $\theta_r(s\,;\,\delta\,;\,E_{B_i})$ est donc contenu dans $\theta_r(s\,;\,\delta\,;\,E_B)$. Les combinaisons linéaires de u_1 et u_2 appartiennent ainsi à $\theta_r(s\,;\,\delta\,;\,E_B)$, et donc à $\theta_r(s\,;\,\delta\,;\,E)$. Cet espace est un espace vectoriel.

Soient ensuite $\overline{B}_1$ et $\overline{B}_2$ deux parties bornées de $\theta_r(s\,;\,\delta\,;\,E)$. Le raisonnement que nous venons d'appliquer nous permet de construire un borné B de E qui est tel que $\overline{B}_1$ et $\overline{B}_2$ soient bornés dans $\theta_r(s\,;\,\delta\,;\,E_B)$. On vérifie alors facilement les conditions a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 du paragraphe 1.1., puis le second critère de Cauchy, et finalement que $\gamma\overline{B}$ est borné si $\overline{B}$ l'est, puisque ces diverses conditions sont vérifiées dans chaque espace $\theta_r(s\,;\,\delta\,;\,E_B)$. L'espace $\theta_r(s\,;\,\delta\,;\,E)$ est un espace complet.

Il reste à montrer que la fonction

$$\nu_r(\overline{B}) = \inf\{N \,|\, N = \nu_{Br}(\overline{B})\}$$

est une filtration sur E, si $\nu_{Br}(\overline{B})$ est un élément de $\mathbf{Z}^*$, qui est défini lorsque $\overline{B}$ est borné dans $\theta_r(s\,;\,\delta\,;\,E_B)$, et est égal à la filtration de $\overline{B}$ dans $\theta_r(s\,;\,\delta\,;\,E_B)$. Mais c'est évident, si l'on applique de nouveau le même raisonnement, et si l'on tient compte de l'inégalité $\nu_{B'r}(\overline{B}) \leqslant \nu_{Br}(\overline{B})$, qui est vraie si le second membre est défini, et si $B \subseteq B'$, le premier membre étant toujours défini lorsque le second l'est (si $B' \supseteq B$).

3. *Dérivations partielles.* Les dérivations partielles sont définies lorsque E est un espace de Banach, l'application $\partial/\partial s_i$ est alors une application linéaire bornée de filtration inférieure ou égale à $+1$ de $\theta_r(s\,;\,\delta\,;\,E)$ dans $\theta_{r-1}(s\,;\,\delta\,;\,E)$. Soit ensuite E un espace complet quelconque, et $u \in \theta_r(s\,;\,\delta\,;\,E)$. Alors $u \in \theta_r(s\,;\,\delta\,;\,E_B)$ pour un borné convenable de E, soit B. La dérivée $\partial u/\partial s_i$ est définie pour la structure topologique de E_B, elle appartient à $\theta_{r-1}(s\,;\,\delta\,;\,E_B)$, et a fortiori à $\theta_{r-1}(s\,;\,\delta\,;\,E)$. Soit $(\partial u/\partial s_i)_B$ cette dérivée partielle. Nous allons montrer que $(\partial u/\partial s_i)_B$ ne dépend pas du choix arbitraire de B.

Soit en effet B′ un nouveau borné de E tel que $u \in \theta_r(s\,;\,\delta\,;\,E_{B'})$. Alors $u \in \theta_r(s\,;\,\delta\,;\,E_{B\cup B'})$, et

$$\left(\frac{\partial u}{\partial s_i}\right)_B = \left(\frac{\partial u}{\partial s_i}\right)_{B\cup B'} = \left(\frac{\partial u}{\partial s_i}\right)_{B'}$$

puisque la topologie de $E_{B\cup B'}$ est moins fine que celle de E_B et que celle de $E_{B'}$. Il n'est donc pas nécessaire d'expliciter B, nous pouvons écrire $(\partial u/\partial s_i)$.

L'application $u \to \partial u/\partial s_i$ est évidemment une application linéaire bornée de filtration inférieure ou égale à $+1$, de $\theta_r(s\,;\,\delta\,;\,E)$ dans $\theta_{r-1}(s\,;\,\delta\,;\,E)$, puisque ces propriétés sont vraies lorsque E est un espace de Banach. Par conséquent, un borné de filtration inférieure ou égale à N dans $\theta_r(s\,;\,\delta\,;\,E)$ est borné de filtration inférieure ou égale à N dans $\Theta(s\,;\,\delta\,;\,E)$, l'ensemble des dérivées partielles de ses éléments étant borné de filtration inférieure ou égale à $N+1$ dans $\theta_{r-1}(s\,;\,\delta\,;\,E)$.

Un critère récurrent, réciproque, peut parfois être utile : Soit $r \geqslant 1$, $\overline{B} \subseteq \theta_r(s\,;\,\delta\,;\,E)$. *L'ensemble* $\overline{B}$ *est un borné de filtration inférieure ou égale à* N *de* $\theta_r(s\,;\,\delta\,;\,E)$ *si* $\overline{B}$ *est un borné de filtration inférieure ou égale à* N *de* $\Theta(s\,;\,\delta\,;\,E)$ *tel que l'ensemble* $\overline{B}'$ *des dérivées partielles de ses éléments soit borné de filtration inférieure ou égale à* $N+1$ *dans* $\theta_{r-1}(s\,;\,\delta\,;\,E)$.

Nous pouvons en effet trouver une partie bornée B de E telle que $\overline{B}$ soit bornée et de filtration inférieure ou égale à N dans $\Theta(s\,;\,\delta\,;\,E_B)$, et telle que $\overline{B}'$ soit bornée de filtration inférieure ou égale à $N+1$ dans $\theta_{r-1}(s\,;\,\delta\,;\,E_B)$. La remarque 9.1.3. est applicable.

Ce critère récurrent permet de déterminer la structure d'espace complet filtré de $\theta_r(s\,;\,\delta\,;\,E)$ au moyen de celle de $\theta_0(s\,;\,\delta\,;\,E)$ lorsque les opérateurs de dérivation partielle sont connus. Mais

une partie de $\theta_0(s\,;\,\delta\,;\,E)$ est bornée, et de filtration inférieure ou égale à N si, et uniquement si cette partie est bornée et de filtration inférieure ou égale à N dans $\Theta(s\,;\,\delta\,;\,E)$.

4. *Applications multilinéaires.* Soient $E_1, \ldots, E_m$, F des espaces complets, et φ une application multilinéaire bornée de $E_1 \times \ldots \times E_m$ dans F. Nous avons défini une application φ^* du produit des espaces $\Theta(s\,;\,\delta\,;\,E_i)$ dans $\Theta(s\,;\,\delta\,;\,F)$ au paragraphe 8.2. La restriction de φ^* au produit des espaces $\theta_r(s\,;\,\delta\,;\,E_i)$ est une application multilinéaire bornée de filtration négative ou nulle de ce produit dans $\theta_r(s\,;\,\delta\,;\,F)$, les divers espaces θ_r étant bien entendu munis de leur structure d'espace complet filtré propre. La loi de dérivation du produit peut être appliquée à φ^* sous la forme ci-dessous :

$$\frac{\partial}{\partial s_i}\varphi^*(u_1, \ldots, u_m) = \Sigma_1^m \varphi^*\left(u_1, \ldots, u_{k-1}, \frac{\partial u_k}{\partial s_i}, u_{k+1}, \ldots, u_m\right).$$

Nous supposerons pour commencer que $E_1, \ldots, E_m$, F sont des espaces de Banach. Il est alors évident que $\varphi^*(u_1, \ldots, u_m)$ est r fois dérivable sur le domaine $\delta(s) > 0$, et que la loi de dérivation du produit est applicable. On montre par récurrence sur r que $\varphi^*(u)$ appartient à $\theta_r(s\,;\,\delta\,;\,F)$ — toutes ses dérivées appartiennent à $\Theta(s\,;\,\delta\,;\,F)$ — puis que l'application φ^* est bornée et de filtration négative ou nulle. L'application φ^* a les propriétés voulues dans le cas particulier envisagé.

Soient ensuite $E_1, \ldots, E_m$, F des espaces complets quelconques et soient $u_1, \ldots, u_m$ des éléments de $\theta_r(s\,;\,\delta\,;\,E_1), \ldots, \theta_r(s\,;\,\delta\,;\,E_m)$ respectivement. Nous pouvons trouver pour chaque $i = 1, \ldots, m$ un borné B_i de E_i, tel que $u_i \in \theta_r(s\,;\,\delta\,;\,E_{i\cdot B_i})$.

Et $\varphi^*(u_1, \ldots, u_m) \in \theta_r(s\,;\,\delta\,;\,F_{B'}) \subseteq \theta_r(s\,;\,\delta\,;\,F)$, si $B' = \varphi(B_1, \ldots, B_m)$. Le produit des espaces $\theta_r(s\,;\,\delta\,;\,E_i)$ est donc appliqué dans $\theta_r(s\,;\,\delta\,;\,F)$.

L'application φ^* est bien entendu multilinéaire, et vérifie la loi de dérivation du produit indiquée. On vérifie sans peine que cette application est bornée, et de filtration négative ou nulle, en considérant des espaces $E_{i\,.\,B_i}$ convenables.

Nous écrirons de nouveau $\varphi(u_1, \ldots, u_m)$ pour $\varphi^*(u_1, \ldots, u_m)$ lorsque cela ne risquera pas d'induire en erreur.

10. Fonctions de filtration négative.

Soit $N \in \mathbf{Z}^*$, $N < 0$, et ${}_N\theta_r(s\,;\,\delta\,;\,E)$ l'espace des éléments de $\theta_r(s\,;\,\delta\,;\,E)$ muni de la structure à bornés définie par l'ensemble des parties bornées de filtration inférieure ou égale à N de $\theta_r(s\,;\,\delta\,;\,E)$ (cf. paragraphe 5.2.). Un $u(s) \in {}_N\theta_r(s\,;\,\delta\,;\,E)$ tend vers zéro à l'infini et à la frontière du domaine $\delta > 0$. La décroissance est rapide si $|N|$ est grand (rappelons que $N < 0$).

Soit $\delta' \geqslant \epsilon\delta$ pour un ϵ réel positif, constant, et $N < -r$. Nous associons à tout $u \in {}_N\theta_r(s\,;\,\delta\,;\,E)$ un élément u' de ${}_N\theta_r(s\,;\,\delta'\,;\,E)$ en posant $u' = u$ lorsque $\delta > 0$, et $u' = 0$ lorsque $\delta' > \delta = 0$. L'application $u \to u'$ est une application linéaire bornée de ${}_N\theta_r(s\,;\,\delta\,;\,E)$ dans ${}_N\theta_r(s\,;\,\delta'\,;\,E)$.

Soit $N < -n$. Un élément $u(s)$ de ${}_N\theta_r(s\,;\,\delta\,;\,E)$ tend vers zéro comme $\delta_0(s)^{n+1}$ à l'infini, et est absolument sommable sur le domaine $\delta(s) > 0$. L'application $u \to \int u\,ds_1 \ldots ds_n$ peut être définie, et est une application linéaire bornée de ${}_N\theta_r(s\,;\,\delta\,;\,E)$ dans E.

1. Supposons que $N < -r$. La fonction δ est Lipschitzienne. Soit K une constante de Lipschitz pour cette fonction. L'inégalité $\delta(s) < K\,|s - s_0|$ est vérifiée pour cette fonction quel que soit s, et quel que soit s_0 tel que $\delta(s_0) = 0$.

Supposons que E est un espace de Banach. Appelons $\|x\|$ la norme de l'élément x de E. Soit $u(s)$ un élément de ${}_N\theta_r(s\,;\,\delta\,;\,E)$. Définissons $u'(s)$ sur $\mathbf{R}^n$ en posant $u' = u$ si $\delta > 0$ (si u est défini) et $u' = 0$ si $\delta = 0$. Nous allons montrer que u' est r fois dérivable sur $\mathbf{R}^n$, et que les dérivées de u' peuvent être obtenues en prolongeant les dérivées de u hors de leur domaine de définition par la constante nulle.

Nous appellerons S l'ouvert $\delta(s) > 0$. Soit $u \in {}_N\theta_r(s\,;\,\delta\,;\,E)$ et v une dérivée de u d'ordre r', avec $0 \leqslant r' \leqslant r$. Alors $v \in {}_{N+r'}\theta_{r-r'}(s\,;\,\delta\,;\,E)$. La fonction v' qui est égale à v sur S et nulle hors de S est une fonction continue sur $\mathbf{R}^n$ puisque $N + r' < 0$, et que v tend donc vers zéro à la frontière de s.

Soit ensuite $0 \leqslant r' < r$. La fonction v est dérivable sur S, ses dérivées $\partial v/\partial s_i$ tendent vers zéro à la frontière de S. La fonction v' est elle aussi dérivable sur S, puisque $v' = v$ sur S.

Et v' a une dérivée nulle en tout point du complément de S. Supposons en effet que $s_0 \in S$, alors $\delta(s) \leqslant K\,|s - s_0|$, et

$$\|v(s)\| \leqslant L\delta(s)^{-N-r'} \leqslant LK^{-N-r'}\,|s - s_0|^{-N-r'} \leqslant LK^{-N-r'}\,|s - s_0|^2$$

si L est un nombre réel suffisamment grand, si s est suffisamment voisin de s_0, puisque $N + r' \leqslant -2$. Cette inégalité montre que v' a une dérivée nulle en s_0. Nous montrons ainsi que v' est continûment dérivable sur tout $\mathbf{R}^n$: elle est en effet dérivable sur tout $\mathbf{R}^n$, sa dérivée est continue sur S, tend vers zéro à la frontière de S, et est nulle en dehors de S.

La fonction u' est par conséquent r fois continûment dérivable sur $\mathbf{R}^n$. Une dérivée de u' est égale à la dérivée correspondante de u sur l'ouvert S, et est nulle en dehors de S.

Soit $\delta' \geqslant \epsilon\delta$, avec ϵ réel, positif, et constant. La restriction de u' au domaine $\delta' > 0$, appartient à ${}_N\theta_r(s\,;\,\delta\,;\,E)$. En effet, $N < -r$, $N + r' < 0$ si $r' \leqslant r$; soit v' une dérivée de u d'ordre r'

$$\|v'(s)\| = \|v(s)\| \leqslant L\delta(s)^{-N-r'} \leqslant L\epsilon^{-N-r'}\delta'(s)^{-N-r'}$$

sur S, l'inégalité $\|v'\| \leqslant L\epsilon^{-N-r'}\delta'(s)^{-N-r'}$ étant évidente hors de S puisque le premier membre est alors nul, et que le second membre est positif, $u' \in {}_N\theta_r(s\,;\,\delta'\,;\,E)$. (Rappelons que $N + r' < 0$, et que $-N - r' > 0$ dans toutes les inégalités considérées ici).

Soit ensuite $\overline{B}$ une partie bornée de ${}_N\theta_r(s\,;\,\delta\,;\,E)$. Nous pouvons trouver une constante réelle L telle que l'inégalité établie soit vraie pour tout $u \in B$. L'ensemble $\overline{B}'$ des prolongements correspondants est borné dans ${}_N\theta_r(s\,;\,\delta\,;\,E)$. Nous avons démontré le résultat voulu lorsque E est un espace de Banach,

Soit maintenant E un espace complet quelconque, $\overline{B}$ une partie bornée de ${}_N\theta_r(s\,;\,\delta\,;\,E)$. Nous pouvons trouver un borné B de E tel que $\overline{B}$ soit borné dans ${}_N\theta_r(s\,;\,\delta\,;\,E_B)$.

L'ensemble $\overline{B}'$ des prolongements d'éléments de $\overline{B}$ est contenu, et borné dans ${}_N\theta_r(s\,;\,\delta'\,;\,E_B)$, et est à fortiori contenu et borné dans ${}_N\theta_r(s\,;\,\delta'\,;\,E)$. Ceci achève la démonstrarion.

Remarque 10.1.1. Soit $\delta' = \delta_0$. Nous pouvons trouver une constante réelle positive ϵ telle que $\delta' \geqslant \epsilon\delta$, puisque δ est borné et que $|s|\delta$ est borné. Le prolongement u' appartient à ${}_N\theta_r(s\,;\,\delta_0\,;\,E)$.

2. *Intégrales.* Soit ensuite $u(s) \in {}_{-n-1}\theta_0(s\,;\,\delta_0\,;\,\mathrm{E})$. Nous pouvons donner un sens à l'expression suivante :

$$v = \int_{\mathbf{R}^n} u(s)\,ds_1 \dots ds_n.$$

L'élément v appartient à E, l'application $u(s) \to v$ est une application linéaire bornée de ${}_{-n-1}\theta_0(s\,;\,\delta\,;\,\mathrm{E})$ dans E. Soit φ une application linéaire bornée de E dans un autre espace complet E', et φ^* l'application associée de ${}_{-n-1}\theta_0(s\,;\,\delta_0\,;\,\mathrm{E})$ dans ${}_{-n-1}\theta_0(s\,;\,\delta_0\,;\,\mathrm{E}')$. Alors

$$\int \varphi^*(u)ds_1 \dots ds_n = \varphi(\int u\,ds_1 \dots ds_n).$$

C'est évident lorsque E est un espace de Banach, puisque $\delta_0(s)^{n+1}$ est sommable sur $\mathbf{R}^n$, et que $u(s)$ est une fonction continue.

Soit E un espace complet quelconque, et $u \in {}_{-n-1}\theta_r(s\,;\,\delta\,;\,\mathrm{E})$. Alors $u \in {}_{-n-1}\theta_r(s\,;\,\delta\,;\,\mathrm{E_B})$ pour un borné convenable B. Nous pouvons définir $\psi_\mathrm{B}(u) = \int u\,ds_1 \dots ds_n$ pour la structure de $\mathrm{E_B}$. Et il est évident que $\psi_\mathrm{B}(u) = \psi_{\mathrm{B}\cup\mathrm{B}'}(u) = \psi_{\mathrm{B}'}(u)$ si B' est un nouveau borné tel que $u \in {}_{-n-1}\theta_r(s\,;\,\delta\,;\,\mathrm{E_{B'}})$, puisque la topologie de $\mathrm{E}_{\mathrm{B}\cup\mathrm{B}'}$ est moins fine que celle de $\mathrm{E_B}$ et que celle de $\mathrm{E_{B'}}$. La valeur de l'intégrale ne dépend pas du choix arbitraire de B. Et il est clair que l'application $u \to \int u\,ds_1 \dots ds_n$ est une application linéaire bornée.

Soit φ une application linéaire de E dans F, et $u \in {}_{-n-1}\theta_r(s\,;\,\delta\,;\,\mathrm{E_B})$. Alors $\varphi^*(u) \in {}_{-n-1}\theta_r(s\,;\,\delta\,;\,\mathrm{F}_{\varphi(\mathrm{B})})$, et définissant ψ_B comme ci-dessus, $\varphi(\psi_\mathrm{B}(u)) = \psi_{\varphi(\mathrm{B})}(\varphi^*(u))$. Par conséquent

$$\int \varphi^*(u)\,ds_1 \dots ds_n = \varphi(\int u\,ds_1 \dots ds_n)$$

quel que soit $u \in {}_{-n-1}\theta_r(s\,;\,\delta\,;\,\mathrm{E})$.

Remarque. Soit $\delta(s)$ une fonction quelconque telle que $\theta_r(s\,;\,\delta\,;\,\mathrm{E})$ soit défini, $\mathrm{N} \in \mathbf{Z}^*$ avec $\mathrm{N} \leqslant -n-1$, et soit r un entier non négatif quelconque. Alors ${}_\mathrm{N}\theta_r(s\,;\,\delta\,;\,\mathrm{E}) \subseteq {}_{-n-1}\theta_0(s\,;\,\delta\,;\,\mathrm{E})$, l'application identique est bornée. Un élément u de ${}_\mathrm{N}\theta_r(s\,;\,\delta\,;\,\mathrm{E})$ a un prolongement u' nul hors de l'ouvert $\delta(s) > 0$; l'application $u \to u'$ est une application linéaire bornée de ${}_\mathrm{N}\theta_r(s\,;\,\delta\,;\,\mathrm{E})$ dans ${}_{-n-1}\theta_r(s\,;\,\delta\,;\,\mathrm{E})$ (voir n. 10.1. ci-dessus). Composons cette application avec l'intégrale définie ici. La composée est une application linéaire bornée de ${}_\mathrm{N}\theta_r(s\,;\,\delta\,;\,\mathrm{E})$, dans E que nous appellerons encore $\int u(s)\,ds_1 \dots ds_n$.

11. Algèbres et modules.

Soit **A** une algèbre complète, et **M** un **A**-module complet. Nous pouvons définir les espaces $\theta_r(s\,;\,\delta\,;\,\mathbf{A})$, et $\theta_r(s\,;\,\delta\,;\,\mathbf{M})$. Des applications bilinéaires bornées produit, de $\mathbf{A} \times \mathbf{A}$ dans **A**, et de $\mathbf{A} \times \mathbf{M}$ dans **M**, sont définies. La multiplication ordinaire des fonctions définit des applications bilinéaires bornées, de filtration négative ou nulle, de $\theta_r(s\,;\,\delta\,;\,\mathbf{A}) \times \theta_r(s\,;\,\delta\,;\,\mathbf{A})$ dans $\theta_r(s\,;\,\delta\,;\,\mathbf{A})$, et de $\theta_r(s\,;\,\delta\,;\,\mathbf{A}) \times \theta_r(s\,;\,\delta\,;\,\mathbf{M})$ dans $\theta_r(s\,;\,\delta\,;\,\mathbf{M})$.

Une structure d'algèbre complète filtrée est ainsi définie sur $\theta_r(s\,;\,\delta\,;\,\mathbf{A})$, *et une structure de* $\theta_r(s\,;\,\delta\,;\,\mathbf{A})$*-module complet filtré est définie sur* $\theta_r(s\,;\,\delta\,;\,\mathbf{M})$.

Le corps des complexes, **C** est une algèbre complexe. Tout espace vectoriel est un **C**-module. L'algèbre $\theta_r(s\,;\,\delta\,;\,\mathbf{C})$ est ainsi une algèbre complète filtrée, tandis que $\theta_r(s\,;\,\delta\,;\,\mathrm{E})$ est un $\theta_r(s\,;\,\delta\,;\,\mathbf{C})$-module filtré.

Nous allègerons les notations en posant $\theta_r(s\,;\,\delta\,;\,\mathbf{C}) = \theta_r(s\,;\,\delta)$.

12. Régularisation de δ.

A une fonction δ telle que $\theta_r(s\,;\,\delta)$ soit défini, nous associons une fonction δ' telle que $\theta_r(s\,;\,\delta')$ soit défini et isomorphe à $\theta_r(s\,;\,\delta)$ en tant qu'espace complet filtré [1]. La fonction est indéfiniment dérivable sur le domaine $\delta(s) > 0$, et a la filtration -1 dans $\theta_r(s\,;\,\delta)$ $(= \theta_r(s\,;\,\delta'))$. Les espaces complets filtrés $\theta_r(s\,;\,\delta\,;\,\mathrm{E})$ et $\theta_r(s\,;\,\delta'\,;\,\mathrm{E})$ sont isomorphes quel que soit E.

La fonction δ'^{r+1} est r fois dérivable sur $\mathbf{R}^n$, bornée avec ses dérivées d'ordre inférieur ou égal à r. Les espaces complets $\theta_r(s\,;\,\delta\,;\,\mathrm{E})$ et $\theta_r(s\,;\,\delta'^{r+1}\,;\,\mathrm{E})$ sont encore isomorphes, mais ont des filtrations différentes.

1. Supposons que $\theta_r(s\,;\,\delta)$ est défini, donc que δ est une fonction réelle, non négative, Lipschitzienne, et telle que $|s|\,\delta(s)$ soit

(1) La construction de δ' utilise des méthodes dues à H. Whitney [18], [19] dans l'étude des idéaux de fonctions différentiables.

borné indépendamment de s. Soit $M \geqslant 1$ et suffisamment grand pour que

$$|\delta(s) - \delta(t)| \leqslant M \sup_i |s_i - t_i|. \tag{1}$$

Soit P l'ensemble des $p \in \mathbf{R}^n$ tels que $2^k p$ soit à coordonnées entières pour un $k \in \mathbf{N}$ tel que $2^k \delta(p) \leqslant 12M$. Considérons une fonction $\psi(s)$ indéfiniment dérivable sur $\mathbf{R}^n$ avec $0 \leqslant \psi(s) \leqslant 1$, $\psi(s) = 0$ si $\sup |s_i| > 0{,}15$, et $\psi(s) = 1$ si $\sup |s_i| > 0{,}12$. Posons

$$\delta'(s) = \begin{cases} \Sigma_{p \in P}\, \delta(p)\, \psi\left(\dfrac{M(s-p)}{\delta(p)}\right) & \text{si } \delta(s) \neq 0 \quad (2a) \\ 0 & \text{si } \delta(s) = 0. \quad (2b) \end{cases}$$

Nous savons à priori que $\delta' = 0$ si $\delta = 0$, et que $0 \leqslant \delta' \leqslant \infty$ lorsque $\delta \neq 0$, puisque δ' est alors la somme d'une série à termes non négatifs. Nous allons montrer que $\theta_r(s\,;\,\delta')$ est défini, est un espace complet filtré isomorphe à $\theta_r(s\,;\,\delta)$ et que la restriction de δ' au domaine $\delta > 0$ est indéfiniment dérivable et dans ${}_{-1}\theta_r(s\,;\,\delta)$ quel que soit r. (En particulier, δ' est toujours fini).

2. Soit $s \in \mathbf{R}^n$, $\delta(s) \neq 0$. Nous allons minorer un terme de la série (2a). Appelons k l'entier positif qui vérifie les inégalités :

$$2^{-k} \geqslant 0{,}1\, M^{-1}\delta(s) > 2^{-k-1}. \tag{3}$$

Le cube centré en s de côté 2^{-k-1} contient un point p tel que $2^k p$ soit à coordonnées entières, et

$$\sup |s_i - p_i| \leqslant 0{,}1\, M^{-1}\delta(s), \tag{4}$$

Appliquant (1), nous obtenons l'inégalité

$$0{,}9\, \delta(s) \leqslant \delta(p) \leqslant 1{,}1\, \delta(s) \tag{5}$$

et $p \in P$ puisque $2^k p$ est à coordonnées entières, et puisque

$$2^k\delta(p) \leqslant (0{,}1\, M^{-1}\delta(s))^{-1}(1{,}1\, \delta(s)) = 11M$$

en vertu des relations (3), (5).

Ensuite, $\psi[M(s-p)/\delta(p)] = 1$ puisque $\psi = 1$ sur le cube de demi-côté 0,12 centré à l'origine, et que

$$M\, \frac{\sup_i |s_i - p_i|}{\delta(p)} \leqslant M\, \frac{0{,}1\, M^{-1}\delta(s)}{\delta(p)} \leqslant 0{,}11$$

en vertu de (4), puis de (5). D'autre part, $\delta(p) \geqslant 0{,}9\, \delta(s)$ en vertu de (5). Le terme de la somme (2a) correspondant à p est supérieur ou égal à $0{,}9\, \delta(s)$

Mais la série (2a) est à termes non négatifs,

$$\delta'(s) \geqslant 0{,}9\, \delta(s). \tag{6}$$

3. Nous majorons ensuite le nombre des termes de cette série qui ne s'annulent pas identiquement sur un voisinage de s, et majorons et minorons la valeur de $\delta(p)$ correspondant à chacun de ces termes. Les inégalités obtenues nous permettront d'obtenir des majorations pour $\delta'(s)$ et pour ses dérivées.

Pour que $\psi[M(s-p)/\delta(p)]$ ne s'annule pas identiquement sur le cube de demi-côté $0{,}01\, M^{-1}\delta(s)$ centré au point s, il faut bien entendu que

$$M \sup |s_i - p_i| \leqslant 0{,}15\, \delta(p) + 0{,}01\, \delta(s). \tag{7}$$

Appliquant l'inégalité (1), nous tirons

$$|\delta(s) - \delta(p)| \leqslant 0{,}15\, \delta(p) + 0{,}01\, \delta(s)$$

et par conséquent

$$0{,}84\, \delta(s) < \delta(p) < 1{,}2\, \delta(s) \tag{8}$$

$$0{,}84\, \delta(p) < \delta(s) < 1{,}2\, \delta(p). \tag{9}$$

Considérons ensuite l'entier k' qui vérifie la relation

$$15\; 2^{-k'} \leqslant M^{-1}\, \delta(s) < 15\; 2^{-k'-1}. \tag{10}$$

Un point p vérifiant (7) vérifie l'inégalité

$$2^{k'+1}\delta(p) > 0{,}84\; 2^{k'+1}\delta(s) > 0{,}84 \cdot 15\, M > 12\, M.$$

Il faut que $2^{k'} p$ soit à coordonnées entières pour que $p \in P$. Mais

$$\begin{aligned} \sup |s_i - p_i| &\leqslant 0{,}15\, M^{-1}\delta(p) + 0{,}01\, M^{-1}\delta(s) \\ &< (1{,}2 \,.\, 0{,}15 + 0{,}01)\, M^{-1}\delta(s) \\ &= 0{,}19\, M^{-1}\delta(s) < 3 \cdot 2^{-k'} \end{aligned}$$

en vertu de 7, 8, 10. L'ensemble des $p \in P$ qui vérifient 7 est contenu dans celui des points q qui appartiennent au cube ouvert de demi-côté $3 \cdot 2^{-k'}$ centré en s, tels que $2^{k'} q$ soit à coordonnées entières. Cet ensemble a au maximum 6^n éléments.

4. Le nombre de termes de (2a) qui ne s'annulent pas identiquement au voisinage de s est toujours fini — inférieur ou égal à 6^n. Chaque terme est indéfiniment dérivable. La fonction δ' l'est donc aussi (pour $\delta' > 0$). Nous allons majorer δ' et ses dérivées.

Soient $q_1, \ldots, q_n$ des entiers non négatifs, $q = (q_1, \ldots, q_n)$, et $r' = q_1 + q_2 + \ldots + q_n$. Appelons ∂_q l'opérateur $\partial^{r'}/(\partial s_1^{q_1} \ldots \partial s_n^{q_n})$, et posons $\psi_q = \partial_q \psi$,

$$\partial_q \delta'(s) = \Sigma_{p \in P} \delta(p) \partial_q \psi\left(\frac{M(s-p)}{\delta(p)}\right)$$
$$= M^{r'} \Sigma_{p \in P_s} \delta(p)^{1-r'} \psi_q\left(\frac{M(s-p)}{\delta(p)}\right)$$

si P_s est l'ensemble des $p \in P$ qui vérifient la relation (7). La fonction $\psi_q(s)$ est bornée supérieurement, soit L_q sa borne supérieure. Les relations 8, 9 montrent que $\delta(p)^\epsilon < 1{,}2\, \delta(s)^\epsilon$ si $\epsilon = \pm 1$, lorsque $p \in P_s$, si bien que $\delta(p)^{1-r'} < 1{,}2^{|1-r'|} \delta(s)^{1-r'}$. Par conséquent

$$\begin{aligned} |\partial_q \delta'(s)| &\leqslant \Sigma_{p \in P_s} (1{,}2)^{|1-r'|} \delta(s)^{1-r'} L_q \\ &\leqslant 6^n (1{,}2)^{|1-r'|} \delta(s)^{1-r'} L_q \\ &= M_q \delta(s)^{1-r'}. \end{aligned} \tag{11}$$

5. La fonction δ' est réelle non négative. Elle est nulle là où $\delta = 0$, et différente de zéro là où $\delta \neq 0$. Elle tend vers zéro si $\delta \to 0$ puisque $\delta' < M_0 \delta$. Ses dérivées premières sont bornées, δ' est donc Lipschitzienne. Ensuite, $|s|\, \delta' \leqslant M_0 |s|\, \delta$ est donc borné. L'algèbre $\theta_r(s\,;\,\delta')$ est donc définie.

Nous avons les inégalités $0{,}9\ \delta(s) \leqslant \delta'(s) \leqslant M_0 \delta(s)$ sur tout R^n. Les espaces $\theta_r(s\,;\,\delta\,;\,E)$ et $\theta_r(s\,;\,\delta'\,;\,E)$ sont donc des espaces complets filtrés isomorphes, l'isomorphisme étant fourni par l'application identique.

La restriction de δ' à l'ouvert $\delta > 0$ est indéfiniment dérivable. Sa filtration dans $\theta_r(s\,;\,\delta)$ est égale à -1, puisque la filtration d'une de ses dérivées d'ordre r', pour la structure de $\theta_{r-1}(s\,;\,\delta)$ est inférieure ou égale à $-1 + r'$ (voir 11) et que la filtration de δ' dans $\Theta(s\,;\,\delta)$ est supérieure ou égale à -1 (voir 6).

6. Par abus de langage, nous appellerons ici δ' la restriction de cette fonction au domaine $\delta' > 0$. Il est évident que δ'^k

appartient à $\theta_r(s\,;\,\delta)$ lorsque $k > 0$, et a une filtration inférieure ou égale à $-k$, lorsque k est entier positif. Nous allons montrer que δ'^k appartient à $\theta_r(s\,;\,\delta)$ quel que soit k entier, et que la filtration de cette fonction est toujours égale à $-k$.

Commençons par montrer que $1/\delta'$ appartient à $\theta_r(s\,;\,\delta)$ et a une filtration inférieure ou égale à $+1$. C'est évident lorsque $r = 0$. Nous pouvons supposer par récurrence que la filtration de $1/\delta'$ dans $\theta_{r-1}(s\,;\,\delta)$ est au maximum égale à $+1$. Il suffira de montrer que les dérivées de $1/\delta'$ ont une filtration inférieure ou égale à $+2$ dans $\theta_{r-1}(s\,;\,\delta)$. Mais

$$\frac{\partial}{\partial s_i}\frac{1}{\delta'} = -\left(\frac{1}{\delta'}\right)^2 \frac{\partial \delta'}{\partial s_i}.$$

La filtration du second membre est inférieure ou égale à $+2$ puisque les dérivées de δ' ont une filtration négative ou nulle.

La fonction δ'^N appartient à $\theta_r(s\,;\,\delta)$ quel que soit N et a une filtration inférieure ou égale à $-N$, pour tout $N \in \mathbf{Z}$, puisque δ'^ϵ a une filtration $-\epsilon$ dans $\theta_r(s\,;\,\delta)$, si $\epsilon = \pm 1$. La filtration de δ'^N est même égale à $-N$ quel que soit N. Sinon, nous aurions un δ'^N de filtration $-N' < -N$, et $1 = \delta'^{+N}\delta'^{-N}$ aurait une filtration inférieure ou égale à $-N + N' < 0$, ce qui est absurde.

7. Enfin, la fonction $\delta'(s)^{r+1}$ appartient à ${}_{-r-1}\theta_r(s\,;\,\delta_0)$. En effet, $\delta'(s)^{r+1}$ est le prolongement nul hors de l'ouvert $\delta(s) > 0$ de sa restriction à l'ouvert. Et cette restriction appartient à ${}_{-r-1}\theta_r(s\,;\,\delta)$. La fonction δ'^{r+1} est obtenue en prolongeant sa restriction de la manière décrite au n. 10.1. et appartient par conséquent à ${}_{-r-1}\theta_r(s\,;\,\delta_0)$.

La fonction δ'^{r+1} est donc r fois dérivable sur $\mathbf{R}^n$, elle est bornée ainsi que toutes ses dérivées. Les algèbres complètes $\theta_r(s\,;\,\delta\,;\,E)$ et $\theta_r(s\,;\,\delta'^{r+1}\,;\,E)$ sont évidemment isomorphes. (Mais ont des filtrations différentes.)

8. Pour terminer, observons qu'il existe des fonctions $g_i(s, t)$, $i = 1, \ldots, n$, qui appartiennent à ${}_0\theta_r(s\,;\,t\,;\,\delta_0(s, t))$ et vérifient la relation

$$\delta'(t)^{r+2} - \delta'(s)^{r+2} = \Sigma(t_i - s_i) g_i(s,t)$$

En effet, le premier membre de cette relation est une fonction $F(s, t)$ qui est $r + 1$ fois dérivable, bornée avec ses dérivées sur

R^{2n}, et s'annule si $s = t$. Les fonctions $F_i(s, t) = \partial F/\partial t_i$ sont, elles, r fois dérivables, bornées avec leurs dérivées ; enfin

$$g_i(s, t) = \int_0^1 F_i(s ; s + \lambda(t - s))d\lambda$$

est encore r fois dérivable, bornée avec ses dérivées. Et $g_i(s, t)$ résoud le problème posé puisque

$$\Sigma(s_i - t_i)g_i(s, t) = F_i(s, t) - F_i(s, s) = F_i(s, t).$$

CHAPITRE III

FORMES EXTÉRIEURES ET COHOMOLOGIE

Au chapitre V, nous devrons considérer un espace différentiel gradué, qui a $\theta_r(s ; \delta ; E)$ pour éléments de degré nul, est tel que les fonctions holomorphes à valeurs dans E soient des formes fermées, et a quelques autres propriétés. L'espace $\Omega_r(s ; \delta ; E)$ qui est défini ici a les propriétés dont nous aurons besoin.

Une structure d'espace complet, gradué et filtré est définie sur $\Omega_r(s ; \delta ; E)$. Nous étudions la cohomologie (relative) de cet espace. Divers espaces de cohomologie sont définis, en tenant compte de la structure filtrée de $\Omega_r(s ; \delta ; E)$.

Une application linéaire dans E/F, de l'un des espaces de cohomologie que nous avons défini (l'espace $\mathbf{H}^*(s ; \delta ; E/F)$) est considérée. La définition de cette application utilise l'intégrale sur $\mathbf{C}^n$.

Nous étudions les propriétés fonctorielles de la correspondance existant entre E, $\Omega_r(s ; \delta ; E)$, et les divers espaces d'homologie étudiés.

Les résultats ainsi établis sont appliqués aux algèbres à bornés complètes.

13. L'espace $\Omega_r(s ; \delta ; E)$.

Nous définissons un espace $\Omega_r(s ; \delta ; E)$ de formes extérieures en $d\bar{s}_1, \ldots, d\bar{s}_n$. Cet espace a $\theta_r(s ; \delta ; E)$ comme éléments de degré nul. Une différentielle, homogène de degré $+1$ y est définie — cette différentielle est appelée classiquement d''.

Pour simplifier les notations, nous l'appellerons généralement d. Nous reprendrons toutefois la notation d'' dans les quelques raisonnements où nous devrons considérer simultanément l'opérateur d'' et l'opérateur de différentiation totale, qui sera alors appelé d. Le lecteur sera alors averti du changement de notation.

Une structure filtrée est définie sur $\Omega_r(s\,;\,\delta\,;\,E)$. L'opérateur d a une filtration nulle. $\Omega_r(s\,;\,\delta\,;\,E)$ est un espace complet gradué filtré.

A une application multilinéaire bornée, φ, de $E_1 \times \dots \times E_m$ dans E (les divers espaces étant à bornés complets), nous associons une application multilinéaire bornée, de filtration nulle, $\hat{\varphi}$ du produit des espaces $\Omega_r(s\,;\,\delta\,;\,E_i)$ dans $\Omega_r(s\,;\,\delta\,;\,F)$. Nous écrirons encore φ pour $\hat{\varphi}$ lorsque l'abus de notation ne risque pas d'induire en erreur.

1. *Définition.* Soient $s_1, \dots, s_n$ des variables complexes, et $\delta(s)$ une fonction Lipschitzienne de s, définie sur $\mathbf{C}^n$, réelle non négative et telle que $|s|\delta$ soit borné indépendamment de s. Soit r entier, avec $r \geqslant n$, et E un espace complet. Nous pouvons définir $\theta_{r-q}(s\,;\,\delta\,;\,E)$, si $0 \leqslant q \leqslant n$.

Considérons les différentielles $d\bar{s}_1, \dots, d\bar{s}_n$ des conjuguées des variables $s_1, \dots, s_n$. L'espace $\Omega_r(s\,;\,\delta\,;\,E)$ sera l'espace des formes extérieures en $d\bar{s}_1, \dots, d\bar{s}_n$ dont les termes de degré q ont leur coefficient dans $\theta_{r-q}(s\,;\,\delta\,;\,E)$.

En fait, considérons les parties réelles et imaginaires $t_1, \dots, t_n$, $t'_1, \dots, t'_n$ de $s_1, \dots, s_n$. Ce sont $2n$ variables réelles indépendantes. L'espace $\theta_r(s\,;\,\delta\,;\,E)$ est défini comme étant l'espace $\theta_r(t, t'\,;\,\delta(t+it')\,;\,E)$. Les différentielles $d\bar{s}_1, \dots, d\bar{s}_n$ ne sont ici que des indéterminées. Mais nous définirons sur $\Omega_r(s\,;\,\delta\,;\,E)$ des opérations telles que $d\bar{s}_i$ sera la différentielle de la conjuguée de la variable s_i.

Un élément ω de $\Omega_r(s\,;\,\delta\,;\,E)$ s'écrit d'une manière unique sous la forme

$$\omega = \Sigma_{q=0}^{n} \Sigma_{1 \leqslant i_1 < \dots < i_q \leqslant n}\, g_{i_1 \dots i_q} d\bar{s}_{i_1} d\bar{s}_{i_2} \dots d\bar{s}_{i_q}$$

avec $g_{i_1 \dots i_q} \in \theta_{r-q}(s\,;\,\delta\,;\,E)$ si $i_1, \dots, i_q$ est une suite croissante de q entiers compris entre 1 et n.

Le polynôme extérieur ω est homogène de degré q, ou une forme de degré q, si $g_{i_1 \dots i_{q'}} = 0$ lorsque $q' \neq q$. Un polynôme extérieur a une décomposition unique comme somme de $n+1$ formes, de degré $0, 1, \dots, n$.

Ainsi défini, $\Omega_r(s\,;\,\delta\,;\,E)$ est la somme directe de 2^n espaces

vectoriels, dont $\binom{n}{q}$ sont isomorphes à $\theta_{r-q}(s\,;\,\delta\,;\,E)$. Chaque $\theta_{r-q}(s\,;\,\delta\,;\,E)$ est un espace complet. $\Omega_r(s\,;\,\delta\,;\,E)$ sera muni de la structure d'espace complet somme directe correspondant à cette décomposition. Une partie B de $\Omega_r(s\,;\,\delta\,;\,E)$ sera donc bornée si, et uniquement si, nous pouvons trouver des $B_{i_1 \dots i_q}$ tels que

$$B \subseteq \Sigma B_{i_1 \dots i_q} d\bar{s}_{i_1} \dots d\bar{s}_{i_q}$$

avec $B_{i_1 \dots i_q}$ borné dans $\theta_{r-q}(s\,;\,\delta\,;\,E)$.

B sera dit de filtration inférieure ou égale à N si nous pouvons choisir $B_{i_1 \dots i_q}$ de filtration inférieure ou égale à $N+q$ dans $\theta_{r-q}(s\,;\,\delta\,;\,E)$. Cette définition est légitime, les conditions du paragraphe 5 sont évidemment vérifiées. L'espace ${}_N\Omega_r(s\,;\,\delta\,;\,E)$ est ainsi la somme directe de 2^n espaces complets, dont $\binom{n}{q}$ sont isomorphes à ${}_{N+q}\theta_{r-q}(s\,;\,\delta\,;\,E)$.

[Rappelons qu'en vertu des définitions du paragraphe 5, ${}_N\Omega_r(s\,;\,\delta\,;\,E)$ est l'ensemble des éléments de $\Omega_r(s\,;\,\delta\,;\,E)$ dont la filtration est au plus égale à N, une partie de cet espace étant bornée si elle est bornée, de filtration inférieure ou égale à N, dans $\Omega_r(s\,;\,\delta\,;\,E)$.]

L'espace des formes de degré q est un sous espace vectoriel fermé de $\Omega_r(s\,;\,\delta\,;\,E)$ que nous appellerons $\Omega_r^q(s\,;\,\delta\,;\,E)$. La restriction de la filtration de Ω_r filtre chacun de ces espaces. L'espace $\Omega_r^q(s\,;\,\delta\,;\,E)$ est la somme directe de $\binom{n}{q}$ espaces complets isomorphes à $\theta_{r-q}(s\,;\,\delta\,;\,E)$, tandis que ${}_N\Omega_r^q(s\,;\,\delta\,;\,E)$ est la somme directe de $\binom{n}{q}$ espaces complets isomorphes à ${}_{N+q}\theta_{r-q}(s\,;\,\delta\,;\,E)$.

2. *La différentielle.* Appelons t_k, t'_k les parties réelles et imaginaires de s_k. La différentielle extérieure totale de l'espace des formes en dt, dt' ne conserve pas $\Omega_r(s\,;\,\delta\,;\,E)$. Nous considérerons par la suite une différentielle différente, qui conserve, elle, cet espace.

Nous savons que $ds_k = dt_k + i\,dt'_k$, $d\bar{s}_k = dt_k - i\,dt'_k$. Définissons ∂_{s_k}, $\partial_{\bar{s}_k}$ par

$$\partial_{s_k} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial t_k} - i\frac{\partial}{\partial t'_k}\right), \quad \partial_{\bar{s}_k} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial t_k} + i\frac{\partial}{\partial t'_k}\right).$$

Il vient

$$\Sigma \frac{\partial f}{\partial t_k}\, dt_k + \Sigma \frac{\partial f}{\partial t'_k}\, dt'_k = \Sigma \partial_{s_k} f\, ds_k + \Sigma \partial_{\bar{s}_k} f\, d\bar{s}_k = d'f + d''f.$$

La différentielle totale de f est ainsi décomposée en la somme d'une forme **C**-linéaire, $d'f$, et d'une forme **C**-antilinéaire, $d''f$. Nous nous intéresserons à $d''f$, et poserons généralement $d''f = df$, pour alléger les notations. Nous aurons ainsi

$$df = \Sigma \partial_{\bar{s}_i} f d\bar{s}_i$$

et plus généralement

$$du = \Sigma_{n=1}^{q} \Sigma_{1 \leqslant i_1 < \dots < i_q \leqslant n}\, h_{i_1 \dots i_q} d\bar{s}_{i_q} \wedge \dots \wedge d\bar{s}_{i_q}$$

si

$$u = \Sigma_{q=0}^{n} \Sigma_{1 \leqslant i_1 < \dots < i_q \leqslant n}\, g_{i_1 \dots i_q} d\bar{s}_{i_q} \wedge \dots \wedge d\bar{s}_{i_q}$$

et

$$h_{i_1 \dots i_q} = \Sigma_{p=1}^{q} (-1)^{p-1} \partial \bar{s}_p g_{i_1 \dots \hat{i}_p \dots i_q}$$

(suivant l'usage, nous désignons par $i_1 \dots \hat{i}_p \dots i_q$ la suite d'indices $i_1 \dots i_{p-1}\, i_{p+1} \dots i_q$). L'opérateur d est linéaire, borné, de filtration nulle et de carré nul, de $\Omega_r(s\,;\,\delta\,;\,\mathrm{E})$ en lui-même. Ceci, en vertu du fait que $\partial \bar{s}_i$ est une application linéaire bornée de filtration $+1$ de $\theta_r(s\,;\,\delta\,;\,\mathrm{E})$ dans $\theta_{r-1}(s\,;\,\delta\,;\,\mathrm{E})$ quel que soit $r < 0$.

3. *Applications multilinéaires*. Soient $\mathrm{E}_1, \dots, \mathrm{E}_m$, F des espaces complets, et φ une application multilinéaire bornée de $\mathrm{E}_1 \times \dots \times \mathrm{E}_m$ dans F. Nous allons construire une application multilinéaire bornée, $\hat{\varphi}$ qui applique le produit des espaces $\Omega_r(s\,;\,\delta\,;\,\mathrm{E}_k)$ dans $\Omega_r(s\,;\,\delta\,;\,\mathrm{E})$.

Soit $i_1, \dots, i_q$ une suite quelconque de nombres entiers compris entre 1 et n. L'on convient de poser

$$d\bar{s}_{i_1} \wedge \dots \wedge d\bar{s}_{i_q} = 0$$

si $i_1, \dots, i_q$ ne sont pas tous différents, (ce qui est certainement le cas si $q < \mathrm{N}$) et, ces indices étant tous différents :

$$d\bar{s}_{i_1} \wedge \dots \wedge d\bar{s}_{i_q} = \epsilon d\bar{s}_{i'_1} \wedge \dots \wedge d\bar{s}_{i'_q}$$

si les nombres $i'_1, \dots, i'_q$ sont les mêmes que $i_1, \dots, i_q$ à l'ordre près, l'ordre de $i'_1, \dots, i'_q$ étant déterminé par la condition $i'_1 < \dots < i'_q$, et si le nombre ϵ est égal à $+1$ ou à -1 suivant que la permutation $(i_1, \dots, i_q) \to (i'_1, \dots, i'_q)$ est paire ou impaire.

Chaque espace $\Omega_r\,(s\,;\,\delta\,;\,\mathrm{E}_k)$ est la somme directe de 2^n espaces complets. Il suffira de définir $\hat{\varphi}$ lorsque ses arguments appartiennent chacun à un facteur direct de l'espace correspondant, donc lorsque

$$u_k = g_k(s) d\bar{s}_{i_{k.1}} \wedge \dots \wedge d\bar{s}_{i_{k.q_k}} = g_k(s)\sigma_k.$$

Nous poserons alors

$$\hat{\varphi}(u_1, \dots, u_m) = \varphi^*(g_1, \dots, g_m)\sigma_1 \wedge \dots \wedge \sigma_m$$

si φ^* est l'application définie au numéro 9.4, et si

$$\sigma_1 \wedge \dots \wedge \sigma_m = d\bar{s}_{1 \cdot 1} \wedge \dots \wedge d\bar{s}_{1 \cdot q_1} \wedge \dots \wedge d\bar{s}_{m \cdot 1} \wedge \dots \wedge d\bar{s}_{m \cdot q_m}$$

Lorsque $\sigma_1 \wedge \dots \wedge \sigma_{q_k} \neq 0$, nous avons $\Sigma q_k \leqslant n \leqslant r$, et

$$\varphi^*(g_1, \dots, g_m) \in \theta_{r - \max q_k}\,(s\,;\,\delta\,;\,\mathrm{E}) \subseteq \theta_{r - \Sigma q_k}\,(s\,;\,\delta\,;\,\mathrm{E}).$$

Dans ces conditions, $\hat{\varphi}(u_1, \dots, u_m) \in \Omega_r(s\,;\,\delta\,;\,\mathrm{E})$; l'application $\hat{\varphi}$ est une application multilinéaire bornée du produit des espaces $\Omega_r(s\,;\,\delta\,;\,\mathrm{E}_k)$ dans $\Omega_r(s\,;\,\delta\,;\,\mathrm{E})$.

Un raisonnement en tout point analogue au précédent montre que cette application est bornée et a une filtration nulle.

Remarque 13.1. Soient $\mathrm{E}_{1 \cdot 1}, \dots, \mathrm{E}_{1 \cdot \mu_1}, \dots, \mathrm{E}_{m \cdot 1}, \dots, \mathrm{E}_{m \cdot \mu_m}$, $\mathrm{F}_1, \dots, \mathrm{F}_m$, G des espaces à bornés complets. Supposons donnée une application multilinéaire bornée, φ_k, de $\mathrm{E}_{k \cdot 1} \times \dots \times \mathrm{E}_{k \cdot \mu_k}$ dans F_k, pour $k = 1, \dots, m$, puis une application multilinéaire bornée ψ de $\mathrm{F}_1 \times \dots \times \mathrm{F}_m$ dans G. L'application

$$\tau = \psi(\varphi_1, \dots, \varphi_m)$$

est une application multilinéaire bornée de

$$\mathrm{E}_{1 \cdot 1} \times \dots \times \mathrm{E}_{1 \cdot \mu_1} \times \dots \times \mathrm{E}_{m \cdot 1} \times \dots \times \mathrm{E}_{m \cdot \mu_m}$$

dans G. Nous pouvons définir $\hat{\varphi}_k, \hat{\psi}, \hat{\tau}$. Il est évident que

$$\hat{\tau} = \hat{\psi}(\hat{\varphi}_1, \dots, \hat{\varphi}_m)$$

(il suffit de le démontrer lorsque chaque argument de chaque k a la forme $g\sigma$).

Remarque 13.2. Soit $(1, \dots, m) \to (k_1, \dots, k_m)$ une substitution de $(1, \dots, m)$. Soient $\mathrm{E}_1, \dots, \mathrm{E}_m$, et F des espaces à bornés complets φ une application de $\mathrm{E}_1 \times \dots \times \mathrm{E}_m$ dans F qui est multilinéaire et bornée. Définissons l'application multilinéaire bornée φ' de $E_{k_1} \times \ldots \times E_{k_m}$ dans F par

$$\varphi(u_1, \ldots, u_m) = \varphi'(u_{k_1}, \ldots, u_{k_m}).$$

Soient ensuite $v_1, \ldots, v_m$ des éléments homogènes de degrés $q_1, \ldots, q_m$ de $\Omega_r(s\,;\,\delta\,;\,E_1), \ldots, \Omega_r(s\,;\,\delta\,;\,E_m)$ respectivement ;

$$\hat{\varphi}(v_1, \ldots, v_m) = \pm\, \hat{\varphi}'(v_{k_1}, \ldots, v_{k_m})$$

le signe étant $+$ ou $-$ suivant la parité du nombre de couples (r, s) tels que $q_r q_s$ soit impair, $r < s$, $k_r > k_s$.

Remarque 13.3. Soient $E_1, \ldots, E_m$, F des espaces complets, et φ une application linéaire bornée du produit des espaces $E_1, \ldots, E_m$ dans F. Considérons pour $k = 1, \ldots, m$ une forme u_k de degré q_k. Alors

$$d\hat{\varphi}(u_1, \ldots, u_m) = \Sigma_1^m (-1)^{q_1 + \cdots q_{k-1}} \hat{\varphi}(u_1, \ldots, u_{k-1}, du_k, u_{k+1}, \ldots, u_m).$$

Les trois propriétés que nous venons de citer sont évidentes. La première correspond à l'associativité du produit extérieur, la seconde à son anticommutativité, et la troisième à la loi de dérivation du produit. Les démonstrations de ces propriétés sont tout à fait analogues aux démonstrations classiques des propriétés correspondantes du produit extérieur.

14. Homologie.

Soient E, F deux espaces complets, $F \subseteq E$, l'application identique de F dans E étant linéaire et bornée. (Nous ne supposons donc pas qu'une partie de F qui est bornée pour la structure de E est bornée pour la structure de F). Nous étudions la cohomologie de $\Omega_r(s\,;\,\delta\,;\,E)$ modulo $\Omega_r(s\,;\,\delta\,;\,F)$ et certains rapports de cette cohomologie avec la filtration.

L'espace de cohomologie de $\Omega_r(s\,;\,\delta\,;\,E)$ modulo $\Omega_r(s\,;\,\delta\,;\,F)$ sera appelé $\mathbf{H}_r(s\,;\,\delta\,;\,E/F)$. Celui de ${}_N\Omega_r(s\,;\,\delta\,;\,E)$ modulo ${}_N\Omega_r(s\,;\,\delta\,;\,F)$ sera appelé ${}_N\mathbf{H}_r(s\,;\,\delta\,;\,E/F)$. Une application, $J_{N'N}$, de ${}_N\mathbf{H}_r(s\,;\,\delta\,;\,E/F)$ dans ${}_{N'}\mathbf{H}_r(s\,;\,\delta\,;\,E/F)$ est définie lorsque $N' \geqslant N$.

La limite inductive des espaces ${}_N\mathbf{H}_r(s\,;\,\delta\,;\,E/F)$ pour $N \to +\infty$ relativement aux applications $J_{N'N}$, est isomorphe à $\mathbf{H}_r(s\,;\,\delta\,;\,E/F)$.

La limite projective de ces espaces, pour $N \to -\infty$ est un nouvel espace de cohomologie que nous appelons $\mathbf{H}_r^*(s\,;\,\delta\,;\,E/F)$.

1. Soit E un espace complet, F un sous-espace vectoriel de E, muni d'une structure d'espace complet plus fine que la structure à bornés induite par E sur F. Les bornés de F sont donc bornés dans E, mais E peut avoir des parties bornées contenues dans F sans être bornées dans F.

Un $u \in {}_N\Omega_r(s\,;\,\delta\,;\,E/F)$ sera dit fermé modulo F, pour la filtration N si nous pouvons trouver un $v \in {}_N\Omega_r(s\,;\,\delta\,;\,E/F)$ tel que $du = v$. L'élément u sera dit exact modulo F pour la filtration N si nous pouvons trouver un $u' \in {}_N\Omega_r(s\,;\,\delta\,;\,E)$ et un $v \in {}_N\Omega_r(s\,;\,\delta\,;\,F)$ tels que $u = du' + v$. La différentielle d étant de carré nul, tout exact est fermé.

L'ensemble des fermés (modulo F pour la filtration N) est un espace vectoriel appelé ${}_N\mathcal{Z}_r(s\,;\,\delta\,;\,E/F)$, celui des exacts est un sous-espace vectoriel de celui-ci, soit ${}_N\mathcal{B}_r(s\,;\,\delta\,;\,E/F)$. Nous pouvons considérer le quotient

$${}_N\mathbf{H}_r(s\,;\,\delta\,;\,E/F) = {}_N\mathcal{Z}_r(s\,;\,\delta\,;\,E/F)/{}_N\mathcal{B}_r(s\,;\,\delta\,;\,E/F).$$

Ce quotient sera appelé l'homologie de $\Omega_r(s\,;\,\delta\,;\,E)$ modulo F, pour la filtration N.

Par la suite, nous écrirons souvent ${}_N\mathcal{Z}_r$, ${}_N\mathcal{B}_r$, ${}_N\mathbf{H}_r$, Ω_r, etc. lorsque le choix des arguments est clair d'après le contexte, ou lorsqu'il suffit que le choix soit le même dans les divers termes d'une relation pour que la relation soit vraie.

2. Soit $N' \geqslant N$. Nous savons que ${}_N\Omega_r \subseteq {}_{N'}\Omega_r$, et que par conséquent ${}_N\mathcal{Z}_r \subseteq {}_{N'}\mathcal{Z}_r$, ${}_N\mathcal{B}_r \subseteq {}_{N'}\mathcal{B}_r$. Un élément de ${}_N\mathbf{H}_r$ est une classe d'équivalence de ${}_N\mathcal{Z}_r$ modulo ${}_N\mathcal{B}_r$. Cette classe est contenue dans une classe d'équivalence bien déterminée de ${}_{N'}\mathcal{Z}_r$ modulo ${}_{N'}\mathcal{B}_r$.

Nous appellerons $J_{N'N}$ l'application de ${}_N\mathbf{H}_r(s\,;\,\delta\,;\,E/F)$ dans ${}_{N'}\mathbf{H}_r(s\,;\,\delta\,;\,E/F)$ qui est telles que $J_{N'N}(\omega) \subseteq \omega$. Cette application est linéaire, et définie lorsque $N' \geqslant N$. Cette famille d'applications vérifie la loi de composition $J_{N''N'} \circ J_{N'N} = J_{N''N}$ lorsque $N'' \geqslant N' \geqslant N$.

Il est possible de définir la limite inductive de ${}_N\mathbf{H}_r(s\,;\,\delta\,;\,E/F)$ pour $N \to +\infty$, et la limite projective de ces espaces pour $N \to -\infty$, chaque fois par rapport aux applications $J_{N'N}$.

3. Un élément u de $\Omega_r(s\,;\,\delta\,;\,E)$ sera dit fermé modulo F si $du = v$ avec $v \in \Omega_r(s\,;\,\delta\,;\,F)$ donc si cet élément est fermé modulo F pour une filtration suffisamment grande.

L'élément u sera dit exact modulo F si $u = du' + v$ avec $u' \in \Omega_r(s\,;\,\delta\,;\,E)$, $v \in \Omega_r(s\,;\,\delta\,;\,F)$, donc de nouveau si u est exact modulo F pour une filtration suffisamment grande.

L'ensemble des fermés modulo F est l'espace vectoriel

$$\mathcal{Z}_r(s\,;\,\delta\,;\,E/F) = \bigcup {}_N\mathcal{Z}_r(s\,;\,\delta\,;\,E/F).$$

Celui des exacts modulo F est l'espace vectoriel

$$\mathcal{B}_r(s\,;\,\delta\,;\,E/F) = \bigcup {}_N\mathcal{B}_r(s\,;\,\delta\,;\,E/F).$$

Le quotient

$$\mathcal{Z}_r(s\,;\,\delta\,;\,E/F)/\mathcal{B}_r(s\,;\,\delta\,;\,E/F)$$

est l'homologie de $\Omega_r(s\,;\,\delta\,;\,E)$ modulo F.

Nous avons les inclusions ${}_N\mathcal{Z}_r \subseteq \mathcal{Z}_r$, ${}_N\mathcal{B}_r \subseteq \mathcal{B}_r$. Comme précédemment, nous définissons une application J_N de ${}_N\mathbf{H}_r$ dans $\mathbf{H}_r$ qui est telle que $J_N(\omega) \supseteq \omega$. L'application J_N est linéaire, et vérifie la loi de composition $J_N = J_{N'} \circ J_{N'N}$ lorsque $N' \geqslant N$.

De plus, des relations $\mathcal{Z}_r = \bigcup {}_N\mathcal{Z}_r$, $\mathcal{B}_r = \bigcup {}_N\mathcal{B}_r$, on tire que $\mathbf{H}_r = \bigcup J_N({}_N\mathbf{H}_r)$, et d'autre part, que $J_N(u) = J_{N'}(u')$ si et uniquement si l'on peut trouver un $N'' \geqslant \sup(N, N')$ tel que $J_{N''N}(u) = J_{N''N'}(u')$. L'espace $\mathbf{H}_r(s\,;\,\delta\,;\,E/F)$ est ainsi la limite inductive des espaces ${}_N\mathbf{H}_r(s\,;\,\delta\,;\,E/F)$ relativement aux applications $J_{N'N}$, pour $N \to +\infty$.

4. Considérons ensuite la limite projective des espaces ${}_N\mathbf{H}_r(s\,;\,\delta\,;\,E/F)$ pour $N \to -\infty$. Un élément de cet espace est une famille $\{\omega_N\}_{N\in\mathbf{Z}}$ telle que $\omega_N \in {}_N\mathbf{H}_r$ pour tout N, et $\omega_{N'} = J_{N'N}(\omega_N)$ lorsque $N' \geqslant N$. Et $\mathbf{H}_r^*$ est un sous-espace du produit direct des ${}_N\mathbf{H}_r$. Soit $\omega = \{\omega_N\}_{N\in\mathbf{Z}} \in \mathbf{H}_r^*$. Nous poserons

$$J_N^*(\omega) = \omega_N.$$

Nous savons que $J_{N'N}(\omega_N) = \omega_{N'} = J_{N'}(\omega)$:

$$J_{N'}^* = J_{N'N} \circ J_N^*$$

lorsque $N' \geqslant N$, finalement

$$J_N \circ J_N^* = J_{N'} \circ J_{N'N} \circ J_{N'}^* = J_{N'} \circ J_{N'}^*$$

est indépendant de N. Nous appellerons J^* cette application linéaire [de $\mathbf{H}_r^*(s\,;\,\delta\,;\,E/F)$ dans $\mathbf{H}_r(s\,;\,\delta\,;\,E/F)$].

5. On peut associer à la graduation de $\Omega_r(s\,;\,\delta\,;\,E)$ une graduation des divers espaces de cohomologie définis.

L'espace des formes de degré q a été appelé Ω_r^q. L'espace $\mathcal{Z}_r$ est évidemment la somme directe des espaces $\mathcal{Z}_r^q = \mathcal{Z}_r \cap \Omega_r^q$, et $\mathcal{B}_r$, celle des espaces $\mathcal{B}_r^q = \mathcal{B}_r \cap \Omega_r^q$. Les espaces $\mathcal{Z}_r$ sont donc des sous-espaces gradués de Ω_r. Le quotient $\mathbf{H}_r$ est alors gradué, l'ensemble $\mathbf{H}_r^q$ des éléments homogènes de degré q de cet espace étant l'image quotient de $\mathcal{Z}_r^q$. Et $\mathbf{H}_r^q$ est isomorphe à $\mathcal{Z}_r^q/\mathcal{B}_r^q$.

Nous pouvons appliquer la même construction à ${}_N\Omega_r$, et à l'espace ${}_N\Omega_r^q$ de ses formes de degré q. Un degré est ainsi défini sur ${}_N\mathbf{H}_r$, l'espace ${}_N\mathbf{H}_r^q$ est isomorphe au quotient ${}_N\mathcal{Z}_r^q/{}_N\mathcal{B}_r^q$ si ${}_N\mathcal{Z}_r^q = {}_N\mathcal{Z}_r \cap {}_N\Omega_o^q$, et ${}_N\mathcal{B}_r^q = {}_N\mathcal{B}_r \cap {}_N\Omega_r^q$.

Finalement, $\omega \in \mathbf{H}_r^*(s\,;\,\delta\,;\,E/F)$ sera dit homogène de degré q si $J_N^*(\omega)$ est homogène de degré q quel que soit N. L'espace $\mathbf{H}_r^*$ est la somme directe des espaces $\mathbf{H}^{*r}_q$, si $\mathbf{H}^{*r}_q$ est l'ensemble des éléments homogènes de degré q de $\mathbf{H}_r^*$. L'espace $\mathbf{H}_r^*$ est donc gradué.

15. Applications multilinéaires.

Nous étudions les propriétés fonctorielles de la correspondance entre (E, F) et les espaces de cohomologie définis.

Soient $E_1, F_1, \ldots, E_m, F_m, E', F'$ des espaces complets, $E_k \supseteq F_k$, $E' \supseteq F'$, les applications identiques étant linéaires et bornées. Soit φ une application multilinéaire de $E_1 \times \ldots \times E_m$ dans E dont la restriction à $E_1 \times \ldots \times E_{k-1} \times F_k \times E_{k+1} \times \ldots \times E_m$ est multilinéaire, bornée, de ce produit d'espaces dans F'. Diverses applications multilinéaires de produits d'espaces de cohomologie peuvent être associées à φ.

Supposons tout d'abord que $N_k \in \mathbf{Z}$ pour $k = 1, \ldots, m$. Nous avons une application du produit des espaces ${}_{N_k}\mathbf{H}_r(s\,;\,\delta\,;\,E_k/F_k)$ dans ${}_{\Sigma N_k}\mathbf{H}_r(s\,;\,\delta\,;\,E'/F')$.

Faisant $N_k \to +\infty$ pour tout k, nous obtenons à la limite une application du produit des espaces $\mathbf{H}_r(s\,;\,\delta\,;\,E_k/F_k)$ dans $\mathbf{H}_r(s\,;\,\delta\,;\,E'/F')$.

Faisant $N_k \to -\infty$ pour un k, puis $N_{k'} \to +\infty$ pour tout $k' \neq k$, nous construisons une application de $\Pi G_{k'}$ dans $\mathbf{H}_r(s\,;\,\delta\,;\,E'/F')$, avec $G_{k'} = \mathbf{H}_r(s\,;\,\delta\,;\,E_k/F_k)$ si $k' \neq k$, $G_k = \mathbf{H}_r^*(s\,;\,\delta\,;\,E_k/F_k)$.

Les applications que l'on pourrait construire au moyen d'autres passages à la limite pourraient être construites en composant les applications ci-dessus avec les applications J_N, J_N^*, J^*, $J_{N'N}$ du paragraphe 14. Nous ne les expliciterons pas.

1. Soient E_1, F_1, ..., E_m, F_m, E', F' des espaces complets, supposons que $F_k \subseteq E_k$, $F' \subseteq E'$, les applications identiques étant linéaires et bornées. Nous pouvons ainsi définir les espaces de cohomologie du paragraphe 14.

Nous considérons ensuite une application multilinéaire bornée φ de $E_1 \times \dots \times E_m$ dans E' telle que la restriction de φ à $E_1 \times \dots \times E_{k-1} \times F_k \times E_{k+1} \times \dots \times E_m$ applique ce produit d'espaces dans F', et soit encore une application multilinéaire bornée pour $k = 1, \dots, m$. L'application multilinéaire $\hat{\varphi}$ du paragraphe 13 applique les produits des espaces ${}_{N_k}\Omega_r(s\,;\,\delta\,;\,E_k)$ dans ${}_{\Sigma N_k}\Omega_r(s\,;\,\delta\,;\,E')$; $\hat{\varphi}(u_1, \dots, u_m)$ appartient même à ${}_{\Sigma N_k}\Omega_r(s\,;\,\delta\,;\,F')$ si l'un des u_k appartient à ${}_{N_k}\Omega_r(s\,;\,\delta\,;\,F_k)$.

Appliquons la remarque 13.3 (loi de dérivation du produit). Nous montrons que $\hat{\varphi}(u_1, \dots, u_m)$ est fermé modulo F' si chaque u_k est fermé modulo F_k, et que cet élément est même exact modulo F' si chaque u_k est fermé modulo F_k, l'un d'entre eux étant exact. L'élément considéré est de même fermé, ou exact, pour la filtration ΣN_k si u_k est fermé, ou exact, pour la filtration N_k.

2. A l'application φ, nous pouvons associer une application $\hat{\varphi}$ de

$$\mathbf{H}_r(s\,;\,\delta\,;\,E_1/F_1) \times \dots \times \mathbf{H}_r(s\,;\,\delta\,;\,E_m/F_m)$$

dans $\mathbf{H}_r(s\,;\,\delta\,;\,E'/F')$, et pour chaque $N = (N_1, \dots, N_m) \in \mathbf{Z}^m$, une application $\hat{\varphi}_N$ de

$${}_{N_1}\mathbf{H}_r(s\,;\,\delta\,;\,E_1/F_1) \times \dots \times {}_{N_m}\mathbf{H}_r(s\,;\,\delta\,;\,E_m/F_m)$$

dans ${}_{\Sigma N_k}\mathbf{H}_r(s\,;\,\delta\,;\,E'/F')$.

Supposons maintenant que $N = (N_1, \dots, N_m)$, $N' = (N'_1, \dots, N'_m)$ appartiennent à $\mathbf{Z}^m$, que $N'_k \geqslant N_k$ pour tout k, que $\nu = \Sigma N_k$, $\nu' = \Sigma N'_k$, et que $\omega_k \in {}_{N_k}\mathbf{H}_r(s\,;\,\delta\,;\,E_k/F_k)$. Nous avons les relations :

$$J_\nu[\hat{\varphi}_N(\omega_1, \dots, \omega_m)] = \hat{\varphi}[J_{N_1}(\omega_1), \dots, J_{N_m}(\omega_m)]$$
$$J_{\nu'\nu}[\hat{\varphi}_N(\omega_1, \dots, \omega_m) = \hat{\varphi}_{N'}[J_{N'_1N_1}(\omega_1), \dots, J_{N'_mN_m}(\omega_m)].$$

3. Nous allons encore construire une application $\hat{\varphi}_k$ du produit

$$\mathbf{H}_{1\cdot r} \times \dots \times \mathbf{H}_{k-1\cdot r} \times \mathbf{H}^*_{k\cdot r} \times \mathbf{H}_{k+1\cdot r} \times \dots \times \mathbf{H}_{m\cdot r}$$

dans $\mathbf{H}^*_r(s\,;\,\delta\,;\,E'/F')$, si $\mathbf{H}_{kr} = \mathbf{H}_r(s\,;\,\delta\,;\,E_k/F_k)$, $\mathbf{H}^*_{kr} = \mathbf{H}^*_r(s\,;\,\delta\,;\,E_k/F_k)$. Il suffira de construire $\hat{\varphi}_1$. Nous considérerons donc un $\omega_1 \in \mathbf{H}^*_{1r}$, et des $\omega_k (k = 2, \dots, m)$ appartenant à $\mathbf{H}_{kr}$.

a. Par hypothèse, l'élément ω_1 est une famille $\{\zeta_M\}_{M \in \mathbf{Z}}$ telle que $\zeta_M \in {}_M\mathbf{H}_{1r}$, et que $J_{M'M}(\zeta_M) = \zeta_{M'}$ lorsque $M' \geqslant M$.

b. Considérons ensuite ω_k, $k = 2, \dots, m$. Nous pouvons trouver un entier N_k, et un $\eta_k \in {}_{N_k}\mathbf{H}_{kr}$ tel que $\omega_k = J_{N_k}(\eta_k)$.

Considérons un autre couple (N'_k, η'_k), tel que $\eta'_k \in {}_{N'_k}\mathbf{H}_{kr}$ $\omega_k = J_{N'_k}(\eta'_k)$. Nous pouvons trouver un entier N''_k suffisamment grand pour que $J_{N''_kN_k}(\eta_k) = J_{N_kN'_k}(\eta'_k)$. Appelons η''_k cet élément de ${}_{N''_k}\mathbf{H}_{kr}$.

c. Choisissons donc un $N_k \in \mathbf{Z}$ et un élément $\eta_k \in {}_{N_k}\mathbf{H}_{kr}$ tels que $\omega_k = J_{N_k}(\eta_k)$ si $k = 2, \dots, m$. Soit $\nu \in \mathcal{Z}$, et $M = \nu - \Sigma_2^m N_k$. Posons, si $N = (M, N_2, \dots, N_m)$,

$$\varpi_\nu = \hat{\varphi}_N(\zeta_M, \eta_2, \dots, \eta_m) \in {}_\nu\mathbf{H}_r(s\,;\,\delta\,;\,E'/F').$$

La famille $\varpi = \{\varpi_\nu\}$ appartient à $\mathbf{H}^*_r(s\,;\,\delta\,;\,E'/F')$ puisque

$$\begin{aligned} J_{\nu'\nu}(\varpi_\nu) &= J_{\nu'\nu}[\hat{\varphi}_N(\zeta_M, \eta_2, \dots, \eta_m)] \\ &= \hat{\varphi}_{N'}[J_{M'M}(\zeta_M, \eta_2, \dots, \eta_M)] \\ &= \hat{\varphi}_{N'}(\zeta_{M'}, \eta_2, \dots, \eta_m) = \varpi_{\nu'}. \end{aligned}$$

d. Considérons d'autres (N'_k, η'_k), $k = 2, \dots, m$, avec $J_{N'_k}(\eta'_k) = \omega_k$. Définissons N''_k, η''_k comme sous b :

$$J_{N''_kN_k}(\eta_k) = J_{N''_kN'_k}(\eta'_k) = \eta''_k.$$

Soient $M' = \nu - \Sigma_2^m N'_k$, $M'' = \nu - \Sigma_2^m N''_k$, $N' = (M', N'_2, \dots, N'_m)$, $N'' = (M'', N'', \dots, N''_m)$. Montrons que

$$\hat{\varphi}_N(\zeta_M, \eta_2, \dots, \eta_m) = \hat{\varphi}_{N''}(\zeta_{M''}, \eta''_2, \dots, \eta''_m).$$

Nous supposons que $N''_k \geqslant N_k$, et que $M + N_2 + \dots + N_m = M'' + N''_2 + \dots + N''_m$; et par conséquent, $M \geqslant M''$. Le premier membre de l'équation est égal à

$$\hat{\varphi}_N[J_{MM''}(\zeta_{M''}), \eta_2, \dots, \eta_m] = J_{\nu\nu''}[\hat{\varphi}_{N''}, (\zeta_{M''}, \eta_2, \dots, \eta_m)]$$

si $M''' = (M'', N_2, \ldots, N_m)$, $\nu''' = M'' + \Sigma_2^m N_k$. Le second membre de cette équation est égal à

$$\widetilde{\varphi}_{N''}[\zeta_{,M''}, J_{N_2''N_2}(\eta_2), \ldots, J_{N_m''N_n}(\eta_m) = J_{\nu\nu''}[\widetilde{\varphi}_{N'''}(\zeta_{M'''}, \eta_2, \ldots, \eta_m)]$$

et est par conséquent égal au premier.

On montre de même que

$$\widetilde{\varphi}_{N'}(\zeta_{M'}, \eta_2', \ldots, \eta_m') = \widetilde{\varphi}_{N''}(\zeta_{M''}, \eta_2'', \ldots, \eta_m'')$$

et par conséquent que

$$\widetilde{\varphi}_{N}(\zeta_{M}, \eta_2, \ldots, \eta_m) = \widetilde{\varphi}_{N'}(\zeta_{M'}, \eta_2', \ldots, \eta_m').$$

L'élément $\varpi \in \mathbf{H}_r^*(s\,;\ \delta\,;\ E'/F')$ que nous avons construit ne dépend donc que de $\omega_1, \ldots, \omega_m$, et pas du choix de $(N_2, \eta_2, \ldots, N_m, \eta_m)$. Nous poserons

$$\varpi = \widetilde{\varphi}_1(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m).$$

L'application $\widetilde{\varphi}_1$ est multilinéaire, de $\mathbf{H}_{1r}^* \times \mathbf{H}_{2r} \times \ldots \times \mathbf{H}_{mr}$ dans $\mathbf{H}_r^*(s\,;\delta\,;E'/F')$.

On définit de même les applications $\widetilde{\varphi}_2, \ldots, \widetilde{\varphi}_m$.

16. Intégrales.

Nous définissons une application linéaire de $\mathbf{H}_r^*(s\,;\ \delta\,;\ E/F)$ dans E/F qui a des rapports étroits avec l'intégrale sur le domaine $\delta(s) < 0$.

Nous devrons considérer simultanément l'opérateur différentiel du paragraphe 13.2 et l'opérateur de différentiation totale. Nous distinguerons ces opérateurs en appelant ici d'' l'opérateur défini au paragraphe 13.2 et d l'opérateur de différentiation totale. Nous aurons d'ici la fin du paragraphe (et lorsque nous devrons appliquer les résultats établis ici) :

$$d''s_i = 0,\quad d''\bar{s}_i = d\bar{s}_i,\quad df = \Sigma\partial_{s_i}f ds_i + \Sigma\partial_{\bar{s}_i}f d\bar{s}_i.$$

Soient t_k, t_k' les parties réelle et imaginaire pure de la variable s_k :

$$d\bar{s}_1 \wedge \ldots \wedge d\bar{s}_n \wedge ds_1 \wedge \ldots \wedge ds_n = (2i)^n dt_1 \wedge \ldots \wedge dt_n \wedge dt_1' \wedge \ldots \wedge dt_n'$$

est le produit par $(2i)^n$ d'une forme réelle que nous conviendrons de prendre positive.

Soit $N < -3n - 1$ et

$$u = g(s)\ d\bar{s}_1 \wedge \ldots \wedge d\bar{s}_n \in {}_N\Omega_r^n(s\,;\ \delta\,;\ E).$$

Alors u est fermée (puisque Ω_r n'a pas d'élément de degré supérieur à n, à part zéro). Nous pouvons intégrer la forme

$$u \wedge ds_1 \wedge \ldots \wedge ds_n = g(s)\ d\bar{s}_1 \wedge \ldots \wedge d\bar{s}_n \wedge ds_1 \wedge \ldots \wedge ds_n$$

comme au paragraphe 10.2. L'application

$$u \to \int u \wedge ds_1 \wedge \ldots \wedge ds_n$$

est une application linéaire de ${}_N\Omega_r^n(s\,;\ \delta\,;\ E)$ dans E.

L'intégrale est nulle si u est exact pour la filtration N, donc si $u = d''v$ avec $v \in {}_N\Omega_r^{n-1}(s\,;\ \delta\,;\ E)$. Il suffit de considérer le cas où

$$v = h(s) \wedge d\bar{s}_2 \wedge \ldots \wedge d\bar{s}_n$$

donc où $g(s) = \partial_{\bar{s}_1} h(s)$. La fonction $h(s)$ tend rapidement vers zéro — à l'infini ; la formule de Stokes établit le résultat voulu.

L'intégrale appartient évidemment à F si $u \in {}_N\Omega_r{}^n(s\,;\ \delta\,;\ F)$, et appartient donc à F si u est exact modulo F pour la filtration N (soit $u = d''u_1 + v$ avec $u_1 \in {}_N\Omega_r(s\,;\ \delta\,;\ E)$, $v \in {}_N\Omega_r(s\,;\ \delta\,;\ F)$.

Soit alors $\omega \in \mathbf{H}_r^*(s\,;\ \delta\,;\ E/F)$ et $\omega_N = J_N^*(\omega)$. L'élément

$$\mathcal{L}(\omega) = \left(\int u \wedge ds_1 \wedge \ldots \wedge ds_n\right) + F$$

ne dépend pas du choix de u dans la classe de cohomologie ω_N, ni bien entendu de N si $N < -3n - 1$.

Nous avons ainsi défini une application linéaire, $\mathcal{L}$, de $\mathbf{H}_r^*(s\,;\ \delta\,;\ E/F)$ dans E/F.

17. Algèbres et modules.

Soit **A** une algèbre complète. Le produit défini sur **A** est une application bilinéaire bornée de $\mathbf{A} \times \mathbf{A}$ dans **A**. Considérons un idéal bilatère $\mathfrak{b}$ de A. Supposons $\mathfrak{b}$ muni d'une structure à bornés complète plus fine que celle induite par **A**, et telle que $\mathfrak{b}$ soit un bimodule complet sur **A**. Nous dirons que $\mathfrak{b}$ est un idéal bilatère complet de **A** (une telle structure peut être définie canoniquement sur l'idéal engendré par un nombre fini d'éléments du centre de **A**).

Une structure multiplicative peut être définie sur $\Omega_r(s\,;\,\delta\,;\,\mathbf{A})$ qui devient ainsi une algèbre complète, et sur divers espaces de cohomologie qui ont été définis dans ce chapitre. $\mathbf{H}_r(s\,;\,\delta\,;\,\mathbf{A}/\mathfrak{b})$ est par exemple une algèbre complète, $\mathbf{H}^*_r(s\,;\,\delta\,;\,\mathbf{A}/\mathfrak{b})$ est un bimodule complet sur $\mathbf{H}_r(s\,;\,\delta\,;\,\mathbf{A}/\mathfrak{b})$.

Plus généralement, soient $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ deux $\mathbf{A}$-modules complets, tels que $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{M}$, l'application identique étant linéaire et bornée, et tels que $\mathfrak{b} \cdot \mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$, l'application $(b, m) \to bm$ de $\mathfrak{b} \times \mathcal{M}$ dans $\mathcal{N}$ étant bornée. Alors $\mathbf{H}_r(s\,;\,\delta\,;\,\mathcal{M}/\mathcal{N})$, $\mathbf{H}^*_r(s\,;\,\delta\,;\,\mathcal{M}/\mathcal{N})$ sont des modules à gauche sur $\mathbf{H}_r(s\,;\,\delta\,;\,\mathbf{A}/\mathfrak{b})$. Un produit appliquant $\mathbf{H}^*_r(s\,;\,\delta\,;\,\mathbf{A}/\mathfrak{b}) \times \mathbf{H}_r(s\,;\,\delta\,;\,\mathcal{M}/\mathcal{N})$ dans $\mathbf{H}^*_r(s\,;\,\delta\,;\,\mathcal{M}/\mathcal{N})$ est également défini.

Ces divers produits peuvent être associés lorsqu'ils sont définis.

1. Considérons une algèbre complète, $\mathbf{A}$, et l'espace $\Omega_r(s\,;\,\delta\,;\,\mathbf{A})$. Le produit est une application bilinéaire bornée de $\mathbf{A} \times \mathbf{A}$ dans $\mathbf{A}$. Au paragraphe 13.2, nous avons associé à cette application une application bilinéaire bornée de $\Omega_r(s\,;\,\delta\,;\,\mathbf{A}) \times \Omega_r(s\,;\,\delta\,;\,\mathbf{A})$ dans $\Omega_r(s\,;\,\delta\,;\,\mathbf{A})$, qui définit une structure d'algèbre complète sur cet espace. Et $\Omega_r(s\,;\,\delta\,;\,\mathbf{A})$ sera associative si $\mathbf{A}$ est associative. Par contre, si $\mathbf{A}$ est commutative, $\Omega_r(s\,;\,\delta\,;\,\mathbf{A})$ ne sera pas commutative, mais anticommutative.

De même, soit $\mathcal{M}$ un $\mathbf{A}$-module complet. Nous avons une application bilinéaire bornée de $\mathbf{A} \times \mathcal{M}$ dans $\mathcal{M}$, et par conséquent une application bilinéaire bornée de $\Omega_r(s\,;\,\delta\,;\,\mathbf{A}) \times \Omega_r(s\,;\,\delta\,;\,\mathcal{M})$ dans $\Omega_r(s\,;\,\delta\,;\,\mathcal{M})$ qui définit sur ce dernier espace une structure de $\Omega_r(s\,;\,\delta\,;\,\mathbf{A})$-module complet.

Enfin, $\Omega_r(s\,;\,\delta\,;\,\mathcal{M})$ sera un $\Omega_r(s\,;\,\delta\,;\,\mathbf{A})$-bimodule complet si $\mathcal{M}$ est un $\mathbf{A}$-bimodule complet.

2. Soit $\mathbf{A}$ une algèbre complète. Soient $b_1, \ldots, b_m$ des éléments du centre de $\mathbf{A}$. L'idéal engendré par $(b_1, \ldots, b_m)$ dans $\mathbf{A}$ est l'ensemble des $u \in \mathbf{A}$ tels $u = b_1v_1 + \ldots + b_mv_m$ avec $v_1, \ldots, v_m$ dans $\mathbf{A}$. Cet idéal est encore appelé $idl(b)$, ou $idl_{\mathbf{A}}(b)$, ou enfin $idl(b|\mathbf{A})$. Il est bilatère puisque $b_1, \ldots, b_m$ sont dans le centre de $\mathbf{A}$.

On définit une structure à bornés complète naturelle sur $idl(b)$ en disant qu'une partie B de cet ensemble est bornée si l'on peut trouver des parties bornées $B_1, \ldots, B_m$ de $\mathbf{A}$ telles que $B \subseteq b_1B_1 + \ldots + b_mB_m$. Cette structure est effectivement une structure d'espace complet : $idl(b)$ est isomorphe au quotient de $\mathbf{A}^m$ par le noyau de l'application $(v_1, \ldots, v_m) \to b_1v_1 + \ldots + b_mv_m$, donc au quotient d'un espace complet par un sous-espace fermé.

D'une manière générale, nous dirons qu'un idéal bilatère $\mathfrak{b}$ de $\mathbf{A}$ qui a les propriétés suivantes est un idéal bilatère complet :

a_1. Une structure d'espace complet est définie sur $\mathfrak{b}$.

a_2. L'application identique de $\mathfrak{b}$ dans $\mathbf{A}$ est linéaire et bornée.

a_3. Les applications bilinéaires $(a, b) \to ab$ et $(a, b) \to ba$ de $\mathbf{A} \times \mathfrak{b}$ dans $\mathfrak{b}$ sont bornées.

La structure que nous avons définie sur $idl\ b$ est évidemment une structure d'idéal bilatère complet.

Deux idéaux bilatères, $\mathfrak{b}_1$ et $\mathfrak{b}_2$ étant donnés, considérons leur somme, $\mathfrak{b}_1 + \mathfrak{b}_2$. On définit la structure d'idéal bilatère complet somme, sur $\mathfrak{b}_1 + \mathfrak{b}_2$ en disant que B est borné dans cet espace si $B \subseteq B_1 + B_2$ avec B_1 borné dans $\mathfrak{b}_1$, B_2 borné dans $\mathfrak{b}_2$. L'espace $\mathfrak{b}_1 + \mathfrak{b}_2$ est isomorphe au quotient de $\mathfrak{b}_1 \oplus \mathfrak{b}_2$ par le noyau de l'application $b_1 \oplus b_2 \to b_1 + b_2$.

Soit 1 l'unité de $\mathbf{A}$, et $\mathfrak{b}$ un idéal bilatère complet tel que $1 \in \mathfrak{b}$. On sait que $\mathfrak{b}$ a comme support $\mathbf{A}$. La structure à bornés de $\mathfrak{b}$ est la même que celle de $\mathbf{A}$. Soit en effet B borné dans $\mathbf{A}$. Alors $B \cdot 1$ est borné dans $\mathfrak{b}$. Mais $B \cdot 1 = B$. Les parties bornées de $\mathbf{A}$ sont bornées dans $\mathfrak{b}$. Nous avons supposé d'autre part que les parties bornées de $\mathfrak{b}$ sont bornées dans $\mathbf{A}$.

L'on pourrait définir d'une manière analogue des idéaux à gauche ou à droite complets.

Soient maintenant $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ deux $\mathbf{A}$-modules tels que $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{M}$, l'application identique de $\mathcal{N}$ dans $\mathcal{M}$ étant linéaire et bornée. Soit $\mathfrak{b}$ un idéal bilatère complet de $\mathbf{A}$. Supposons que $\mathfrak{b}\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$, l'application bilinéaire $(b, m) \to bm$ de $\mathfrak{b} \times \mathcal{M}$ dans $\mathcal{N}$ étant bornée. Je dirai dans ces conditions que $\mathcal{N}$ est subordonné à $\mathfrak{b}$ dans $\mathcal{M}$.

3. Soit $\mathbf{A}$ une algèbre complète, $\mathfrak{b}$ un idéal bilatère complet de $\mathbf{A}$. Soit $\mathcal{M}$ un $\mathbf{A}$-module, et $\mathcal{N}$ un $\mathbf{A}$-module subordonné à $\mathfrak{b}$ dans $\mathcal{M}$. Considérons les espaces de cohomologie de $\mathbf{A}$ modulo $\mathfrak{b}$, et de $\mathcal{M}$ modulo $\mathcal{N}$ qui sont définis au paragraphe 14.

Deux multiplications sont définies. L'une, φ, applique $\mathbf{A} \times \mathbf{A}$ dans $\mathbf{A}$, ses restrictions à $\mathbf{A} \times \mathfrak{b}$ et à $\mathfrak{b} \times \mathbf{A}$ sont des applications bornées du produit considéré dans $\mathfrak{b}$. L'autre, ψ, applique $\mathbf{A} \times \mathcal{M}$

dans $\mathcal{M}$, et a des restrictions qui sont des applications bilinéaires bornées de $\mathbf{A} \times \mathcal{N}$ et de $\mathfrak{b} \times \mathcal{M}$ dans $\mathcal{N}$. Nous pouvons appliquer les résultats du paragraphe 15, et définir des structures multiplicatives sur les cohomologies.

Considérons d'abord $\mathbf{A}$ modulo $\mathfrak{b}$. Nous pouvons définir les applications suivantes :

$$\breve{\varphi} : \mathbf{H}_r(s\,;\delta\,;\mathbf{A}/\mathfrak{b}) \times \mathbf{H}_r(s\,;\delta\,;\mathbf{A}/\mathfrak{b}) \to \mathbf{H}_r(s\,;\delta\,;\mathbf{A}/\mathfrak{b}),$$
$$\breve{\varphi}_1 : \mathbf{H}^*_r(s\,;\delta\,;\mathbf{A}/\mathfrak{b}) \times \mathbf{H}_r(s\,;\delta\,;\mathbf{A}/\mathfrak{b}) \to \mathbf{H}^*_r(s\,;\delta\,;\mathbf{A}/\mathfrak{b}).$$
$$\breve{\varphi}_2 : \mathbf{H}_r(s\,;\delta\,;\mathbf{A}/\mathfrak{b}) \times \mathbf{H}^*_r(s\,;\delta\,;\mathbf{A}/\mathfrak{b}) \to \mathbf{H}^*_r(s\,;\delta\,;\mathbf{A}/\mathfrak{b})$$

$\breve{\varphi}$ définit une structure d'algèbre sur $\mathbf{H}_r(s\,;\delta\,;\mathbf{A}/\mathfrak{b})$, $\breve{\varphi}_1$, $\breve{\varphi}_2$ définissent une structure de bimodule à coefficients dans $\mathbf{H}_r(s\,;\delta\,;\mathbf{A}/\mathfrak{b})$ sur $\mathbf{H}^*_r(s\,;\delta\,;\mathbf{A}/\mathfrak{b})$.

Les applications suivantes peuvent être associées à ψ :

$$\breve{\psi} : \mathbf{H}_r(s\,;\delta\,;\mathbf{A}/\mathfrak{b}) \times \mathbf{H}_r(s\,;\delta\,;\mathcal{M}/\mathcal{N}) \to \mathbf{H}_r(s\,;\delta\,;\mathcal{M}/\mathcal{N}),$$
$$\breve{\psi}_1 : \mathbf{H}^*_r(s\,;\delta\,;\mathbf{A}/\mathfrak{b}) \times \mathbf{H}_r(s\,;\delta\,;\mathcal{M}/\mathcal{N}) \to \mathbf{H}^*_r(s\,;\delta\,;\mathcal{M}/\mathcal{N}),$$
$$\breve{\psi}_2 : \mathbf{H}_r(s\,;\delta\,;\mathbf{A}/\mathfrak{b}) \times \mathbf{H}^*_r(s\,;\delta\,;\mathcal{M}/\mathcal{N}) \to \mathbf{H}^*_r(s\,;\delta\,;\mathcal{M}/\mathcal{N}).$$

$\breve{\psi}$ définit une structure de $\mathbf{H}_r(s\,;\delta\,;\mathbf{A}/\mathfrak{b})$-module sur $\mathbf{H}_r(s\,;\delta\,;\mathcal{M}/\mathcal{N})$. L'application $\breve{\psi}_2$ définit une structure de $\mathbf{H}_r(s\,;\delta\,;\mathbf{A}/\mathfrak{b})$-module sur $\mathbf{H}^*_r(s\,;\delta\,;\mathcal{M}/\mathcal{N})$, tandis que $\breve{\psi}_1$ est une nouvelle structure multiplicative intéressante entre ces divers espaces.

Les applications $\breve{\varphi}_{\mathrm{MN}}$ et $\breve{\psi}_{\mathrm{MN}}$ ne nous seront pas spécialement utiles.

CHAPITRE IV

LE SPECTRE

Soit $\mathbf{A}$ une algèbre complète à unité, $\mathfrak{b}$ un idéal complet de $\mathbf{A}$. Soient $a_1, \ldots, a_n$ des éléments du centre de $\mathbf{A}$ et $a = (a_1, \ldots, a_n)$. Le spectre de a modulo $\mathfrak{b}$ ou $\Delta(a\,;\mathbf{A}/\mathfrak{b})$ est un filtre sur le lattice des fonctions bornées réelles non négatives de n variables complexes. Nous définissons et étudions $\Delta(a\,;\mathbf{A}/\mathfrak{b})$ dans ce chapitre.

L'ensemble $\Delta_r(a\,;\mathbf{A}/\mathfrak{b}) = \Delta(a\,;\mathbf{A}/\mathfrak{b}) \cap_{-1} \theta_r(s\,;\delta_0)$ est une base du filtre $\Delta(a\,;\mathbf{A}/\mathfrak{b})$.

Par définition, $\delta(s) \in \Delta(a\,;\mathbf{A}/\mathfrak{b})$ si l'on peut trouver des coefficients largement arbitraires, mais vérifiant certaines conditions. Si l'on peut trouver des coefficients vérifiant ces conditions, on peut trouver de tels coefficients, aussi souvent dérivables que l'on veut.

Une propriété importante du spectre ne sera établie qu'au chapitre suivant : la constante nulle (l'élément minimum de l'ensemble des fonctions réelles non négatives) ne peut appartenir à $\Delta(a\,;\mathbf{A}/\mathfrak{b})$ que si l'idéal $\mathfrak{b}$ est impropre. Le spectre est un filtre propre si l'idéal $\mathfrak{b}$ est un idéal propre. (Le cas où $\mathfrak{b}$ est impropre est trivial).

18. Lemme fondamental.

Soit $\mathfrak{b}$ *un idéal complet de* $\mathbf{A}$. *Supposons qu'il existe une suite* $u_1, \ldots, u_r, \ldots$ *d'éléments de* $\mathfrak{b}$ *telle que* $u_r = 0(k_1^r)$ *dans la structure de* $\mathfrak{b}$, *et* $1 - u_r = 0(k_2^{-r})$ *dans la structure de* $\mathbf{A}$, *avec* k_1, k_2 *réels,* k_1 *fini,* $k_2 > 1$. *Alors* $\mathfrak{b}$ *est l'idéal impropre de* $\mathbf{A}$.

Choisissons un entier N suffisamment grand pour que $k_2^{\mathrm{N}} > k_1$. Soit $y_r = 1 - u_r$, puis $U_r = u_r(1 + y_r + \ldots + y_r^{\mathrm{N}-1})$, $Y_r = y_r^{\mathrm{N}}$. Alors $U_r \in \mathfrak{b}$, et $U_r = 0(k_1^r)$ dans la structure de $\mathfrak{b}$, tandis que $Y_r = 0(k_2^{-\mathrm{N}r})$ dans la structure de $\mathbf{A}$. De plus $U_r + Y_r = 1$, évidemment.

La série $\Sigma(U_{r+1}\, Y_r - Y_{r+1}U_r)$ converge absolument dans $\mathfrak{b}$, son terme général étant un $0(k_1^r k_2^{-Nr})$, et

$$U = U_1 + \Sigma(U_{r+1}Y_r - Y_{r+1}U_r) \in \mathfrak{b}.$$

Mais

$$U_{r+1}Y_r - Y_{r+1}U_r = (1 - Y_{r+1})Y_r - Y_{r+1}(1 - Y_r) = Y_r - Y_{r+1}:$$

$$U = 1 - Y_1 + \Sigma(Y_r - Y_{r+1}) = 1 \qquad \text{c. q. f. d.}$$

Ce lemme nous permet de démontrer que $1 \in \mathfrak{b}$ si 1 appartient à la fermeture de $\mathfrak{b}$, et si certaines conditions supplémentaires sont vérifiées. Il a le corollaire suivant :

Soit $\mathfrak{b}$ un idéal bilatère complet de **A**. *Supposons possible de trouver une suite* $u_1, \ldots, u_r, \ldots$, *bornée dans $\mathfrak{b}$ qui tend vers* 1 *dans* **A**. *L'idéal $\mathfrak{b}$ est l'idéal impropre.*

Nous supposons que $1 - u_r = o(1)$. Extrayons une suite partielle $u'_1, \ldots, u'_r, \ldots$ telle que $1 - u'_r = 0(k_2^{-r})$. La suite partielle est bornée dans $\mathfrak{b}$, et à fortiori, est un $0(k_1^r)$. Nous pouvons appliquer le lemme fondamental.

19. Le spectre.

Nous définissons le spectre $\Delta(a\,;\,\mathbf{A}/\mathfrak{b})$, d'éléments $a_1, \ldots, a_n$ du centre de **A**, modulo un idéal bilatère complet $\mathfrak{b}$. Le spectre n'est pas une partie de $\mathbf{C}^n$, mais un ensemble de fonctions bornées, réelles non négatives sur $\mathbf{C}^n$. Le lien entre le spectre défini ici et le spectre considéré classiquement est obtenu en considérant les ensembles $\delta(s) > 0$ tels que $\delta \in \Delta(a\,;\,\mathbf{A}/\mathfrak{b})$.

La fonction $\delta(s)$ appartient au spectre de a modulo $\mathfrak{b}$ (à $\Delta(a\,;\,\mathbf{A}/\mathfrak{b})$) si l'idéal : $idl(a - s,\ \delta) + \Theta(s\,;\,\delta_0\,;\,\mathfrak{b})$ de $\Theta(s\,;\,\delta_0\,;\,\mathbf{A})$ est impropre. $\Delta(a\,;\,\mathbf{A}/\mathfrak{b})$ est un filtre sur le lattice des fonctions réelles non négatives bornées, qui est stable pour l'application $\delta \to \delta^N$ et contient la fonction $\delta_0(s)$.

Le spectre $\Delta(a\,;\,\mathbf{A}/(\mathfrak{b} + idl\, a'))$ peut être déterminé, comme un ensemble de restrictions d'éléments de $\Delta(a,\, a'\,;\,\mathbf{A}/\mathfrak{b})$.

D'autres propriétés importantes du spectre seront démontrées dans les paragraphes suivants.

1. *Définition*. Considérons une algèbre complète, associative et à unité, soit **A**, et un idéal bilatère complet $\mathfrak{b}$ de **A**. Soit $a = (a_1, \ldots, a_n)$ avec $a_1, \ldots, a_n$ dans le centre de **A**. Soient $s_1, \ldots, s_n$ des variables complexes, et $s = (s_1, \ldots, s_n)$ et soit finalement $\delta(s)$ une fonction bornée réelle non négative de s qui est définie sur $\mathbf{C}^n$.

La fonction $\delta(s)$ est spectrale pour a modulo $\mathfrak{b}$ si l'idéal

$$idl(a - s,\ \delta \mid \Theta(s\,;\,\delta_0\,;\,\mathbf{A})) + \Theta(s\,;\,\delta_0\,;\,\mathfrak{b})$$

est impropre dans $\Theta(s\,;\,\delta_0\,;\,\mathbf{A})$. (Rappelons que $\delta_0(s) = (1 + |s|^2)^{-1/2}$; l'algèbre $\Theta(s\,;\,\delta_0\,;\,\mathbf{A})$ est définie au paragraphe 8.)

Le spectre de a modulo $\mathfrak{b}$ est l'ensemble des fonctions spectrales pour a modulo $\mathfrak{b}$. Nous appellerons encore cet ensemble $\Delta(a\,;\,\mathbf{A}/\mathfrak{b})$

2. Le spectre a les propriétés immédiates suivantes :

a. $\delta_0(s) \in \Delta(a\,;\,\mathbf{A}/\mathfrak{b})$ quels que soient a, $\mathfrak{b}$.

b. $\epsilon\delta^N \in \Delta(a\,;\,\mathbf{A}/\mathfrak{b})$ si $\delta \in \Delta(a\,;\,\mathbf{A}/\mathfrak{b})$, avec ϵ constant positif, N entier positif.

c. $\delta' \in \Delta(a\,;\,\mathbf{A}/\mathfrak{b})$ si $\delta' \geqslant \delta \in \Delta(a\,;\,\mathbf{A}/\mathfrak{b})$.

d. $\delta_3(s) = \min[\delta_1(s),\ \delta_2(s)] \in \Delta(a\,;\,\mathbf{A}/\mathfrak{b})$ si $\delta_1 \in \Delta(a\,;\,\mathbf{A}/\mathfrak{b})$, $\delta_2 \in \Delta(a\,;\,\mathbf{A}/\mathfrak{b})$.

Nous savons que $1/\delta_0 \in \Theta(s\,;\,\delta_0\,;\,\mathbf{A})$, et par conséquent $1 \in idl\,\delta_0 \subseteq idl\,(a - s,\ \delta_0) + \Theta(s\,;\,\delta_0\,;\,\mathfrak{b})$. Ceci démontre *a*.

Il suffira de démontrer *b* lorsque $\epsilon = 1$ puisque $idl\,(\epsilon\delta^N) = idl\,(\delta^N)$ si $\epsilon \neq 0$. Élevons la relation [1] :

$$\langle a - s,\ u\rangle + v + \delta y_0 = 1$$

à la puissance N, et regroupons les termes d'une manière convenable :

$$\langle a - s,\ u_N\rangle + v_N + \delta^N y_{0N} = 1$$

avec u_N, y_{0N} dans $\Theta(s\,;\,\delta_0\,;\,\mathbf{A})$ et v_N dans $\Theta(s\,;\,\delta_0\,;\,\mathfrak{b})$. Ceci démontre le résultat [2].

---

[1] Dire que x appartient à l'idéal : $idl(a\text{-}s,\ \delta) + \Theta(s\,;\,\delta_0\,;\,\mathfrak{b})$ implique l'existence d'éléments $u_1, \ldots, u_n$, y_0 dans $\Theta(s\,;\,\delta_0\,;\,\mathbf{A})$, et d'un élément v dans $\Theta(s,\,\delta_0\,;\,\mathfrak{b})$ vérifiait la relation $(a_1\text{-}s_1)u_1 + \ldots + (a_n - s_n)u_n + v + \delta(s)y_0 = 1$.

[2] Nous appelons $\langle a,\, b\rangle$ l'élément $a_1b_1 + \ldots a_nb_n$ si $(a_1, \ldots, a_n)$ et $(b_1, \ldots, b_n)$ sont deux n-uples d'éléments d'une algèbre.

Supposons que $\delta \in \Delta(a\,;\,\mathbf{A}/\mathfrak{b})$, et que $\delta' \geqslant \delta$. Alors δ/δ' est borné, appartient à $\Theta(s\,;\,\delta_0\,;\,\mathbf{A})$, et $\delta \in idl\,(a-s,\delta')$:

$$1 \in idl\,(a-s,\delta) + \Theta(s\,;\,\delta_0\,;\,\mathfrak{b}) \subseteq idl\,(a-s,\delta') + \Theta(s\,;\,\delta_0\,;\,\mathfrak{b}).$$

La propriété c est démontrée.

Supposons enfin que δ_1 et δ_2 soient spectrales pour a modulo $\mathfrak{b}$.

$$\langle a-s, u'(s)\rangle + v'(s) + \delta_1(s)y_0'(s) = 1$$
$$\langle a-s, u''(s)\rangle + v''(s) + \delta_2(s)y_0''(s) = 1$$

pour un choix convenable de u', y_0', u'', y_0'' dans $\Theta(s\,;\,\delta_0\,;\,\mathbf{A})$, et de $v'(s)$, $v''(s)$ dans $\Theta(s\,;\,\delta_0\,;\,\mathfrak{b})$. Nous poserons $u(s) = u'(s)$, $v(s) = v'(s)$, $y_0(s) = y_0'(s)$ lorsque $\delta_1 \leqslant \delta_2$, et $u(s) = u''(s)$, $v(s) = v''(s)$, $y_0(s) = y_0''(s)$ lorsque $\delta_1(s) > \delta_2(s)$. Les fonctions u, y_0 appartiennent évidemment à $\Theta(s\,;\,\delta_0\,;\,\mathbf{A})$, $v \in \Theta(s\,;\,\delta_0\,;\,\mathfrak{b})$, et

$$\langle a-s, u(s)\rangle + v(s) + \delta_3(s)y_0(s) = 1$$

si $\delta_3(s) = \inf\,(\delta_1(s), \delta_2(s))$. En effet, le premier membre est égal à l'une ou l'autre des deux expressions, chacune des deux expressions étant égale à l'unité. La fonction $\delta_3 \in \Delta(a\,;\,\mathbf{A}/\mathfrak{b})$, d est vrai.

Les propriétés c, d montrent que le spectre est un filtre sur le lattice des fonctions réelles non négatives de s. Une partie Δ' de $\Delta(a\,;\,\mathbf{A}/\mathfrak{b})$ sera dite être une base du spectre si à tout $\delta \in \Delta(a\,;\,\mathbf{A}/\mathfrak{b})$ correspond un $\delta' \in \Delta$ tel que $\delta' \leqslant \delta$. Une fonction appartient au spectre si et uniquement si elle majore un élément de Δ'.

3. Soient $a_1', \ldots, a_{n'}'$, des éléments du centre de $\mathbf{A}$, $\mathfrak{b}$ un idéal complet, et $\tilde{a}' = idl\,(a_1', \ldots, a_{n'}')$, avec la structure d'espace complet définie au paragraphe 17. L'idéal complet $\tilde{a}' + \mathfrak{b}$ est également défini comme au paragraphe 17, et $\Theta(s\,;\,\delta_0\,;\,\tilde{a}' + \mathfrak{b}) = \Theta(s\,;\,\delta_0\,;\,\tilde{a}') + \Theta(s\,;\,\delta_0\,;\,\mathfrak{b})$. Un $w(s) \in \Theta(s\,;\,\delta_0\,;\,\tilde{a}')$ peut se mettre sous la forme $w = \Sigma a_i'u_i' = \langle a', u'(s)\rangle$ avec $u_i'(s) \in \Theta(s\,;\,\delta_0\,;\,\mathbf{A})$.

Soient alors $a_1, \ldots, a_n$ de nouveaux éléments du centre de $\mathbf{A}$. *Pour que* $\delta(s) \in \Delta(a\,;\,\mathbf{A}/\tilde{a}' + \mathfrak{b})$, *il faut et il suffit que* $\delta(s) = \delta'(s, 0)$ avec $\delta'(s, s') \in \Delta(a, a'\,;\,\mathbf{A}/\mathfrak{b})$. Nous connaissons donc le spectre $\Delta(a\,;\,\mathbf{A}/\mathfrak{b} + \tilde{a}')$ lorsque nous connaissons $\Delta(a, a'\,;\,\mathbf{A}/\mathfrak{b})$.

En fait, $\delta(s) \in \Delta(a\,;\,\mathbf{A}/\tilde{a}' + \mathfrak{b})$ si et uniquement si l'on peut trouver des fonctions u_i, u_i', y_0 dans $\Theta(s\,;\,\delta_0\,;\,\mathbf{A})$ et $v(s)$ dans $\Theta(s\,;\,\delta_0\,;\,\mathfrak{b})$ telles que

$$\langle a-s, u\rangle + \langle a', u'\rangle + v' + \delta(s)\,y_0(s) = 1$$

tandis que $\delta'(s), s') \in \Delta(a, a'\,;\,\mathbf{A}/\mathfrak{b})$ si et uniquement si l'on peut trouver des fonctions $U_i(s, s')$, $U_i'(s, s')$, $Y_0(s, s')$ dans $\Theta(s, s'\,;\,\delta_0(s, s')\,;\,\mathbf{A})$ et $V(s, s')$ dans $\Theta(s, s'\,;\,\delta_0\,;\,\mathfrak{b})$ telles que

$$\langle a-s, U\rangle + \langle a'-s', U'\rangle + V + \delta' Y_0 = 1.$$

Supposons que $\delta'(s, s') \in \Delta(a, a'\,;\,\mathbf{A}/\mathfrak{b})$. La seconde relation est alors vérifiée. Alors $\delta'(s, 0) \in \Delta(a\,;\,\mathbf{A}/\mathfrak{b} + \tilde{a}')$ ainsi qu'on le constate immédiatement en posant $s' = 0$ dans cette relation.

Supposons que $\delta(a) \in \Delta(a\,;\,\mathbf{A}/\mathfrak{b} + \tilde{a}')$. La première relation est vérifiée. Posons $\delta'(s, s') = \delta(s)$ si $s' = 0$, $\delta'(s, s') = 1$ si $s' \neq 0$, et supposons que $U(s, s')$, $U'(s, s')$, $V(s, s')$, $y_0(s, s')$ sont respectivement égaux à $u(s)$, $u'(s)$, $v(s)$, $y_0(s)$ lorsque $s' = 0$, tandis que $U = U' = V = 0$, $Y_0 = 1$ si $s' \neq 0$. Ces fonctions vérifient la seconde relation, $\delta'(s, s') \in \Delta(a, a'\,;\,\mathbf{A}/\mathfrak{b})$. Et $\delta(s) = \delta'(s, 0)$.

20. Régularisation des fonctions spectrales.

Soit r *entier positif ;* $\Delta_r(\mathrm{a}\,;\,\mathbf{A}/\mathfrak{b}) = \Delta(\mathrm{a}\,;\,\mathbf{A}/\mathfrak{b}) \cap {}_{-1}\theta_r(\mathrm{s}\,;\,\delta_0)$ *est une base de* $\Delta(\mathrm{a}\,;\,\mathbf{A}/\mathfrak{b})$.

On commence par montrer que $\Delta(a\,;\,\mathbf{A}/\mathfrak{b})$ a une base composée de fonctions lipschitziennes. C'est la seule partie de la démonstration où l'on utilise les propriétés des algèbres à bornés.

Des résultats établis au (12) nous permettent alors de montrer qu'un filtre du lattice des fonctions non négatives qui est stable pour l'application $\delta \to \epsilon\delta^N$ et a une base Lipschitzienne a une base dans ${}_{-1}\theta_r(s\,;\,\delta_0)$.

1. Soit $\delta(s) \in \Delta(a\,;\,\mathbf{A}/\mathfrak{b})$. Posons

$$\delta'(s) = \inf_{s' \in \mathbf{C}^n}[\delta(s') + |s - s'|]. \tag{1}$$

La fonction $\delta'(s)$ est Lipschitzienne de constante 1, au plus égale à $\delta(s)$. Elle est la plus grande fonction Lipschitzienne de constante 1 qui minore $\delta(s)$. *Nous allons montrer que* $\delta'(s) \in \Delta(a\,;\,\mathbf{A}/\mathfrak{b})$.

Soit $k \in \mathbf{N}$. Associons à tout $s \in \mathbf{C}^n$ un $t_k(s)$ tel que

$$\delta'(s) + 2^{-k} > \delta[t_k(s)] + |s - t_k(s)|. \tag{2}$$

Nous pouvons trouver par hypothèse des éléments $u_1, \ldots, u_n$, y_0 dans $\Theta(s\,;\,\delta_0\,;\,\mathbf{A})$ et v dans $\Theta(s\,;\,\delta_0\,;\,\mathfrak{b})$ qui vérifient

$$\langle a - s, u(s) \rangle + v(s) + \delta(s) y_0(s) = 1 \tag{3}$$

si $s \in \mathbf{C}^n$. Posons $U_{ik}(s) = u_i[t_k(s)]$, $V_k(s) = v_i[t_k(s)]$,

$$Y_{0k}(s) = \frac{\langle s - t_k(s), U_k(s) \rangle + \delta[t_k(s)]\, y_0\,[t_k(s)]}{\delta'(s) + 2^{-k}}. \tag{4}$$

Les suites U_{ik}, V_k, Y_{0k} sont des suites bornées de $\Theta(s\,;\,\delta\,;\,\mathbf{A})$ ou $\Theta(s\,;\,\delta_0\,;\,\mathfrak{b})$.

$\delta_0[t_k(s)]/\delta_0(s)$ est borné indépendamment de $(k, s) \in \mathbf{N} \times \mathbf{C}^n$. En effet, $\delta(t_k) \geqslant 0$, $|s - t_k| \leqslant \delta(s) + 2^{-k} \leqslant M + 1$ si M est la borne supérieure de δ. Et il est évident que $\delta_0(s')/\delta_0(s)$ est borné si $|s - s'|$ est borné. Soit $\delta_0(t_k)/\delta_0(s) \leqslant M'$.

Appelons w l'une quelconque des fonctions $u_1, \ldots, u_n, v, y_0$. Soit N un entier tel que $\delta_0(s)^N w(s)$ soit borné (dans $\mathbf{A}$ ou dans $\mathfrak{b}$ selon le cas), et soit B la fermeture convexe symétrique de l'ensemble des valeurs de $\delta_0^N w$. L'ensemble des valeurs de $\delta_0(t_k)^N w(t_k)$ est contenu dans B, et $\delta_0(s)^N w(t_k) \in M'^N B$. La suite $w(t_k)$ est donc une suite bornée.

Les suites $U_{ik}(s)$, $V_k(s)$, $y_0[t_k(s)]$ sont des suites bornées de $\Theta(s\,;\,\delta_0\,;\,\mathbf{A})$, ou $\Theta(s\,;\,\delta_0\,;\,\mathfrak{b})$ selon le cas.

Reste à considérer Y_{0k}. Les fonctions

$$g_{ik}(s) = \frac{s_i - t_{ik}(s)}{\delta'(s) + 2^{-k}}, \qquad h_k(s) = \frac{\delta(t_k(s))}{\delta'(s) + 2^{-k}}$$

sont inférieures à l'unité en valeur absolue (cf. (2)). Les suites g_{ik}, h_k sont des suites bornées de $\Theta(s\,;\,\delta_0\,;\,\mathbf{A})$. Et

$$Y_{0k}(s) = \langle g_k(s), U_k(s) \rangle + h_k(s) y_0[t_k(s)]$$

est encore une suite bornée, de $\Theta(s\,;\,\delta_0\,;\,\mathbf{A})$.

Considérons finalement $\langle a - s, U_k \rangle + V_k + \delta'\ Y_{0k}$. Le premier terme est égal à $\langle a - t_k, u(t_k) \rangle - \langle s - t_k, u(t_k) \rangle$, le second à $v(t_k)$, et le troisième à

$$\langle s - t_k, u(t_k) \rangle + \delta(t_k) y_0(t_k) - 2^{-k} Y_{0k}(s).$$

Mais $\langle a - t_k, u(t_k) \rangle + v(t_k) + \delta(t_k)\ y_0(t_k) = 1$, et par conséquent

$$\langle a - s, U_k(s) \rangle + V_k(s) + \delta'(s) Y_{0k}(s) = 1 - 2^{-k} Y_{0k}(s).$$

Le lemme fondamental peut être appliqué : le premier membre est borné dans $idl\,(a - s, \delta') + \Theta(s\,;\,\delta_0\,;\,\mathfrak{b})$. La différence entre le premier membre et l'unité est un $0(2^{-k})$ dans $\Theta(s\,;\,\delta_0\,;\,\mathrm{A})$. Par conséquent $idl(a - s, \delta') + \Theta(s\,;\,\delta_0\,;\,\mathfrak{b})$ est impropre, $\delta' \in \Delta(a\,;\,\mathbf{A}/\mathfrak{b})$.

2. La fonction $\delta''(s) = \min(\delta'(s), \delta_0(s))$ appartient encore à $\Delta(a\,;\,\mathbf{A}/\mathfrak{b})$. Elle est de nouveau Lipschitzienne de constante 1, et inférieure à δ. Le produit $|s|\,\delta''(s)$ est borné indépendamment de s.

Appliquons alors les résultats du paragraphe 12. Il existe une fonction réelle non-négative δ''' telle que $\delta'' \leqslant \delta''' \leqslant M\delta''$, la fonction δ''' étant indéfiniment dérivable sur le domaine $\delta'' \geqslant 0$, et ayant sa restriction dans ${}_{-1}\theta_r(s\,;\,\delta'')$. Et $\delta''' \geqslant \epsilon\delta''$ appartient donc à $\Delta(a\,;\,\mathbf{A}/\mathfrak{b})$.

Soit M_1 la borne supérieure de δ''. Posons $\delta_1 = M^{-r-1} M_1^{-r} \delta'''^{r+1}$. Alors $\delta_1 \in \Delta(a\,;\,\mathbf{A}/\mathfrak{b})$, et $\delta_1 \leqslant \delta$, évidemment. La restriction δ_1' de δ_1 au domaine $\delta > 0$ appartient à ${}_{-r-1}\theta_r(s\,;\,\delta_0)$. Le prolongement de δ_1' à $\mathbf{C}^n$, qui est nul là où $\delta = 0$, appartient à ${}_{-r-1}\theta_r(s\,;\,\delta_0)$. Mais ce prolongement est précisément δ_1.

Enfin, ${}_{-r-1}\theta_r(s\,;\,\delta_0) \subseteq {}_{-1}\theta_r(s\,;\,\delta_0)$. Appelons $\Delta_r(a\,;\,\mathbf{A}/\mathfrak{b})$ l'ensemble ${}_{-1}\theta_r(s\,;\,\delta_0) \cup \Delta(a\,;\,\mathbf{A}/\mathfrak{b})$. Alors $\Delta_r(a\,;\,\mathbf{A}/\mathfrak{b})$ est une base de $\Delta(a\,;\,\mathbf{A}/\mathfrak{b})$. C'est ce qu'il fallait démontrer.

21. Régularisation des coefficients.

Soit $\delta \in \Delta_{r+1}(a\,;\,\mathbf{A}/\mathfrak{b})$. Nous montrerons que l'idéal

$$idl(a\,;\,\delta \,|\, \theta_r(s\,;\,\delta_0\,;\,\mathbf{A})) + \theta_r(s\,;\,\delta_0\,;\,\mathfrak{b})$$

de $\theta_r(s\,;\,\delta_0\,;\,\mathbf{A})$ est impropre. Nous pouvons trouver des fonctions $u_1, \ldots, u_n, y_0$ dans $\theta_r(s\,;\,\delta_0\,;\,\mathbf{A})$ et v dans $\theta_r(s\,;\,\delta_0\,;\,\mathfrak{b})$ telles que

$$\langle a - s, u \rangle + v + \delta y_0 = 1.$$

1. Soit $\mathbf{A}_1$ l'algèbre $\Theta(s\,;\,\delta_0\,;\,\theta_r(t\,;\,\delta_0\,;\,\mathbf{A}))$ et soit $\mathfrak{b}_1$ l'idéal $\Theta(s\,;\,\delta_0\,;\,\theta_r(t\,;\,\delta_0\,;\,\mathfrak{b}))$. Alors $\mathfrak{b}_1$ est un idéal complet de $\mathbf{A}_1$. Identifions $\Theta(s\,;\,\delta_0\,;\,\mathbf{A})$ avec l'ensemble des éléments de $\mathbf{A}_1$ qui ne dépendent pas de t ; $\Theta(s\,;\,\delta_0\,;\,\mathfrak{b})$ est alors identifié avec l'ensemble des éléments de $\mathfrak{b}_1$ qui ne dépendent pas de t.

Considérons

$$idl\,(a_1 - t_1, \ldots, a_n - t_n, \delta(t), s_1 - t_1, \ldots, s_n - t_n \,|\, \mathbf{A}_1) + \mathfrak{b}_1.$$

C'est un idéal de $\mathbf{A}_1$ qui contient $a_i - s_i$, et $\Theta(s\,;\delta_0\,;\mathfrak{b})$. Il contient $\delta(s)$ puisque $\delta(s) - \delta(t) \in idl\,(s - t \,|\, \theta_r(s, t\,;\delta_0)$, et que $\theta_r(s, t\,;\delta_0) \subseteq \mathrm{A}_1$, le complexe 1 étant identifié avec l'unité de $\mathbf{A}$. Cet idéal est donc impropre, puisque $idl\,(a - s,\ \delta) + \Theta(s\,;\ \delta_0\,;\ \mathfrak{b})$ est impropre dans $\Theta(s\,;\delta_0\,;\mathbf{A})$.

Nous savons que $\xi + idl\ y^k$ est impropre si ξ est un idéal, et si $\xi + idl\ y$ est impropre. Appliquons cette propriété d'une manière récurrente :

$$idl\,(a - t,\ \delta(t),\ (s_1 - t_1)^{r+1},\ \ldots,\ (s_n - t_n)^{r+1}) + \mathfrak{b}_1$$

est l'idéal impropre. Nous pouvons trouver des $u_1, \ldots, u_n, w_1, \ldots, w_n, y_0$ dans A_1 et un v dans $\mathfrak{b}_1$ qui vérifient l'équation

$$\langle a - t, u\rangle + v + \delta(t)y_0 + \Sigma(s_i - t_i)^{r+1}w_i = 1.$$

Chaque u_i, v, w_i, y_0 est une fonction des variables s, t.

2. Appelons P l'ensemble $\mathbf{Z}^n + i\mathbf{Z}^n \subseteq \mathbf{C}^n$. Cet ensemble est identifié avec $\mathbf{Z}^{2n}$ lorsqu'on identifie $\mathbf{C}^n$ avec $\mathbf{R}^{2n}$. Soit $\varphi(s)$ une fonction indéfiniment dérivable à support compact sur $\mathbf{C}^n$ qui vérifie la relation $\Sigma_{p\in \mathrm{P}}\ \varphi(s - p) = 1$ sur $\mathbf{C}^n$. Il en existe une. Soit en effet $\psi(s)$ une fonction indéfiniment dérivable à support compact, non négative, de s, qui est positive sur le pavé de demi-côté 1/2 centré à l'origine. Nous pouvons prendre $\varphi(s) = \psi(s)/\,\Sigma_{p\in\mathrm{P}}\psi(s - p)$.

Soit q entier positif, et posons

$$\begin{aligned} \mathrm{U}_{iq}(t) &= \Sigma_{p\in\mathrm{P}}\varphi(2^q t - p)u_i(2^{-q}p, t) \\ \mathrm{V}_q(t) &= \Sigma_{p\in\mathrm{P}}\varphi(2^q t - p)v(2^{-q}p, t) \\ \mathrm{Y}_{0q}(t) &= \Sigma_{p\in\mathrm{P}}\varphi(2^q t - p)y_0(2^{-q}p, t). \end{aligned}$$

Ces fonctions vérifient la relation

$$\begin{aligned} &\langle a - t, \mathrm{U}_q(t)\rangle + \mathrm{V}_q(t) + \delta(t)\mathrm{Y}_{0q}(t) \\ &= \Sigma_{p\in\mathrm{P}}\varphi(2^q p - t)[\langle a - t, u(2^{-q}p, t)\rangle + v(2^{-q}p, t) + \delta(t)y_0(2^{-q}p, t)] \\ &= \Sigma_{p\in\mathrm{P}}\varphi(2^q p - t)[1 - \Sigma_1^n(2^{-q}p_i - t_i)^{r+1}w_i(2^{-q}p, t)] \\ &= 1 - 2^{-(r+1)q}\Sigma_1^n \mathrm{W}_{iq}(t) \end{aligned}$$

si

$$\mathrm{W}_{iq}(t) = \Sigma_{p\in\mathrm{P}}(p_i - 2^q t_i)^{r+1}\varphi(2^q t - p)\ w_i(2^{-q}p, t)$$

3. Nous supposerons démontrée la proposition auxiliaire suivante :

Soit E *un espace complet,* $\mathrm{z}(\mathrm{s},\ \mathrm{t}) \in \Theta(\mathrm{s}\,;\ \delta_0\,;\ \theta_r(\mathrm{t}\,;\ \delta_0\,;\ \mathrm{E}))$, *et soit* $\psi(\mathrm{t})$ *une fonction indéfiniment dérivable à support compact. Posons*

$$\mathrm{Z}_q(t) = \Sigma_{p\in\mathrm{P}}\ \psi(2^q t - p)z(2^{-q}p, t).$$

Alors $\mathrm{Z}_q(\mathrm{t}) \in \theta_r(\mathrm{t}\,;\ \delta_0\,;\ \mathrm{E})$ *et dans cet espace à borné,* $\mathrm{Z}_q(\mathrm{t}) = 0(2^{rq})$.

Supposons alors $\psi = \varphi$, et, $z(s, t) = u_i$, ou $z(s, t) = y_0$, $\mathrm{E} = \mathbf{A}$, ou encore $z(s, t) = v$, $\mathrm{E} = \mathfrak{b}$. Nous montrons que U_{iq}, Y_{0q} sont dans $\theta_r(s\,;\delta_0\,;\mathbf{A})$, que V_q est dans $\theta_r(s\,;\delta_0\,;\mathfrak{b})$, et que

$$\mathrm{U}_{iq} = 0(2^{rq}),\quad \mathrm{V}_q = 0(2^{rq}),\quad \mathrm{Y}_{0q} = 0(2^{rq})$$

dans la structure à bornés correspondante.

Supposons ensuite $\psi(s) = (-s_i)^{r+1}\varphi(s)$, $z(s,\ t) = w_i$. Nous montrons que $\mathrm{W}_{iq} \in \theta_r(t\,;\ \delta_0\,;\ \mathbf{A})$, et $\mathrm{W}_{iq} = 0(2^{rq})$. Par conséquent, $\mathrm{X}_q = 0(2^{-q})$ si $\mathrm{X}_q = 2^{-(r+1)q}\Sigma_1^n \mathrm{W}_{iq}$. Mais

$$\langle a - t, \mathrm{U}_q\rangle + \mathrm{V}_q + \delta\mathrm{Y}_{0q} + \mathrm{X}_q = 1.$$

Nous pouvons appliquer le lemme fondamental. L'idéal

$$idl\,(a - t, \delta\,|\,\theta_r(t\,;\ \delta_0\,;\ \mathbf{A})) + \theta_r(t\,;\ \delta_0\,;\ \mathfrak{b})$$

est impropre. Ceci est vrai, tout au moins, si la proposition auxiliaire est démontrée.

22. Proposition auxiliaire.

Il sera plus simple de démontrer une proposition un peu plus générale que celle utilisée au numéro 21.3, et notamment la suivante :

Soient $s_1, \ldots, s_n$ des variables réelles, $s = (s_1, \ldots, s_n)$. Soit $\psi(s)$ une fonction indéfiniment dérivable à support compact sur $\mathbf{R}^n$, et soit $z(s,\ t) \in \Theta(s\,;\ \delta_0\,;\ \theta_r(t\,;\ \delta_0\,;\ \mathrm{E}))$, E étant un espace à bornés complet. Posons pour h réel, $0 < h < 1$.

$$\mathrm{Z}_h(t) = \Sigma_{p\in\mathbf{Z}^n}\ \psi(h^{-1}t - p)z(hp, t).$$

La fonction $\mathrm{Z}_h(t)$ appartient à $\theta_r(t\,;\ \delta_0\,;\ \mathrm{E})$ quel que soit h et vérifie la relation $\mathrm{Z}_h(t) = 0(h^{-r})$ lorsque h tend vers zéro.

1. Montrons tout d'abord que

$$\Psi_h(t) = \Sigma_{p \in \mathbf{Z}^n} |\psi(h^{-1}t - p)| \,\delta_0(t)^{\mathrm{N}} \delta_0(hp)^{-\mathrm{N}}$$

est bornée pour $t \in \mathbf{R}^n$, $0 < h < 1$.

La fonction ψ est bornée. Soit M_1 sa borne supérieure.

Le support S de ψ est compact, et donc contenu dans une boule, de rayon M_2, centrée à l'origine ; d'autre part, $h \leqslant 1$, $|t - hp| < |h^{-1}t - p| < \mathrm{M}_2$ lorsque $\psi(h^{-1}t - p) \neq 0$. Mais, $\delta_0(s)/\delta_0(s') < \mathrm{M}_3$ si $|s - s'| < \mathrm{M}_2$, et si M_3 est convenable.

Le terme général de la somme est au maximum égal à $\mathrm{M}_1\mathrm{M}_3^{\mathrm{N}}$.

Soit S le support de ψ ; $\psi(h^{-1}t - p) = 0$ sauf si $p \in (h^{-1}t - \mathrm{S})$. Le nombre de points à coordonnées entières qui vérifient cette relation est borné indépendamment de h, t, puisque S est compact. Le nombre de termes non nuls de la somme est donc inférieur à un réel M_4 :

$$|\Psi_h(t)| \leqslant \mathrm{M}_1\mathrm{M}_3^{\mathrm{N}}\mathrm{M}_4.$$

2. Soit E un espace de Banach, $r = 0$. Appelons $\|u\|$ la norme de $u \in \mathrm{E}$.

$z(s, t)$ est une fonction continue de t pour s constant, et $\delta_0(s)^{\mathrm{N}} \delta_0(t)^{\mathrm{N}} \| z(s, t) \| < \mathrm{M}_5$ si N et M_5 sont suffisamment grands.

Nous devons montrer que $\mathrm{Z}_h(t)$ *est continue, et que* $\delta_0(t)^{\mathrm{N}'} \| \mathrm{Z}_h(t) \|$ *est bornée, si* N' *est suffisamment grand.*

Z_h est la somme d'une série à termes continus. Localement, il n'y a qu'un nombre fini de termes qui ne sont pas nuls. La somme est donc continue. D'autre part

$$\begin{aligned}
\delta_0(t)^{2\mathrm{N}} \| \mathrm{Z}_h(t) \| &= \| \Sigma_{p \in \mathbf{Z}^n} \psi(h^{-1}t - p)\delta_0(t)^{2\mathrm{N}} u(hp, t) \| \\
&\leqslant \Sigma_{p \in \mathbf{Z}^n} [\,|\psi(h^{-1}t - p)| \,\delta_0(t)^{\mathrm{N}} \delta_0(hp)^{-\mathrm{N}}] \\
&\quad \cdot \sup_{p \in \mathbf{Z}^n} [\delta_0(t)^{\mathrm{N}} \delta_0(hp)^{\mathrm{N}} \| u(hp, t) \|] \\
&\leqslant \Psi_h(t)\, \mathrm{M}_5 \leqslant \mathrm{M}_1\mathrm{M}_3{}^{\mathrm{N}}\mathrm{M}_4\mathrm{M}_5.
\end{aligned}$$

Le lemme est donc démontré dans ce cas particulier.

3. Soit de nouveau E un espace de Banach, soit $r > 0$. Raisonnons par récurrence sur r.

$z(s, t)$ est r fois dérivable par rapport à t pour s constant. $\mathrm{Z}_h(t)$ est localement la somme d'un nombre fini de fonctions r fois dérivables, et est donc r fois dérivable. Le lemme, démontré pour $r = 0$, montre que $\mathrm{Z}_h(t) \in \theta_0(t\,;\, \delta_0\,;\, \mathrm{E})$, et est borné indépendamment de h dans cet espace à borné. Il suffira de montrer que $\partial \mathrm{Z}/\partial t_i \in \theta_{r-1}(t\,;\, \delta_0\,;\, \mathrm{E})$ et que $h^r \partial \mathrm{Z}_h/\partial t_i$ est borné indépendamment de h dans la structure de $\theta_{r-1}(t\,;\, \delta_0\,;\, \mathrm{E})$.

Mais

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathrm{Z}_h}{\partial t_i} &= \Sigma_{p \in \mathbf{Z}^n} [h^{-1}\psi_i(h^{-1}t - p) z(hp, t) + \psi(h^{-1}t - p) z_i(hp, t)] \\
&= h^{-1}\mathrm{Z}_{ih}(t) + \mathrm{Z}'_{ih}(t)
\end{aligned}$$

si $\psi_i(t) = \partial\psi/\partial t_i$, $z_i(s, t) = \partial z(s, t)/\partial t_i$, et si

$$\begin{aligned}
\mathrm{Z}_{ih}(t) &= \Sigma_{p \in \mathbf{Z}^n} \psi_i(h^{-1}t - p) z(hp, t) \\
\mathrm{Z}'_{ih}(t) &= \Sigma_{p \in \mathbf{Z}^n} \psi(h^{-1}t - p) z_i(hp, t).
\end{aligned}$$

Appliquant le lemme par récurrence, nous montrons que Z_{ih}, Z'_{ih} appartiennent à $\theta_{r-1}(t\,;\, \delta_0\,;\, \mathrm{E})$, et que $h^{r-1}\mathrm{Z}_{ih}$, $h^{r-1}\mathrm{Z}'_{ih}$ sont bornés dans cet espace. Finalement

$$h^r \frac{\partial \mathrm{Z}_h}{\partial t_i} = h^{r-1}\mathrm{Z}_{ih} + h^r \mathrm{Z}'_{ih}$$

appartient à $\theta_{r-1}(t\,;\, \delta_0\,;\, \mathrm{E})$ et est borné indépendamment de h dans cet espace.

La proposition auxiliaire est donc démontrée lorsque E est un espace de Banach.

4. Soit finalement E un espace complet. A tout borné B de E, associons l'espace de Banach E_{B}. (Cf. paragraphe 2.2.)

Soit $z(s, t) \in \Theta(s\,;\, \delta_0(s)\,;\, \theta_r(t\,;\, \delta_0(t)\,;\, \mathrm{E}))$. L'ensemble B' des fonctions $g(t)$ telles que $g(t) = \delta_0(s)^{\mathrm{N}} z(s, t)$ est borné dans $\theta_r(t\,;\, \delta_0\,;\, \mathrm{E})$ si N est suffisamment grand. B' est donc contenu et borné dans $\theta_r(t\,;\, \delta_0\,;\, \mathrm{E}_{\mathrm{B}})$ pour B borné dans E, et convenablement choisi (cf. la définition de $\theta_r(s\,;\, \delta\,;\, \mathrm{E})$, paragraphe 9.2.).

Dans ces conditions, $z(s, t) \in \Theta(s\,;\, \delta_0\,;\, \theta_r(t\,;\, \delta_0\,;\, \mathrm{E}_{\mathrm{B}}))$. L'espace E_{B} est de Banach. Nous pouvons appliquer le lemme : $\mathrm{Z}_h(t) \in \theta_r(t\,;\, \delta_0\,;\, \mathrm{E}_{\mathrm{B}})$ l'ensemble des fonctions $h_r\mathrm{Z}_h(t)$ est borné. Mais $\theta_r(t\,;\, \delta_0\,;\, \mathrm{E}_{\mathrm{B}}) \subseteq \theta_r(t\,;\, \delta_0\,;\, \mathrm{E})$, l'application identique étant bornée. Chaque fonction $\mathrm{Z}_h(t)$ appartient à $\theta_r(t\,;\, \delta_0\,;\, \mathrm{E})$, $h^r\mathrm{Z}_h(t)$ est borné indépendamment de h. La démonstration est achevée.

23. Ordre de grandeur des coefficients.

Nous avons trouvé des fonctions u_i, y_o dans $\theta_r(s\,;\,\delta_o\,;\,\mathbf{A})$ et v dans $\theta_r(s\,;\,\delta_o\,;\,\mathfrak{b})$ qui vérifient

$$\langle a - s, u\rangle + v + \delta(s)y_o = 1.$$

Nous construirons ici des fonctions vérifiant ces conditions, et de filtration au maximum égale à -1, appartenant donc à ${}_{-1}\theta_r(s\,;\,\delta_o\,;\,\mathbf{A})$ ou ${}_{-1}\theta_r(s\,;\,\delta_o\,;\,\mathfrak{b})$ selon le cas.

Soit $\bar{s}_i$ la conjuguée complexe de s_i. Posons

$$U_i(s) = \frac{-\bar{s}_i}{1 + |s|^2}, \qquad Y(s) = \frac{1 + |s|^2}{1 + \langle a, \bar{s}\rangle}.$$

Alors, U, Y appartiennent à ${}_{-1}\theta_r(s\,;\,\delta_o\,;\,\mathbf{A})$, $\langle a - s, U\rangle + Y = 1$.

Soit N entier, supérieur à la plus grande des filtrations des fonctions u, v, y_o. Posons

$$U_N = U(1 + Y + \dots + Y^{N-1})$$
$$u' = U_N + Y^N u, \quad v' = Y^N v, \quad y'_o = Y^N y_o.$$

Les filtrations de u'_i, v', y_o sont au maximum égales à -1. (elles sont négatives). D'autre part

$$\begin{aligned}\langle a - s, u'\rangle + v' + \delta y'_o &\\ = \langle a - s, U_N\rangle &+ Y^N(\langle a - s, u\rangle + v + \delta y_o)\\ = \langle a - s, U_N\rangle &+ Y^N = 1.\end{aligned}$$

Les fonctions u', v', y'_o ont donc les propriétés voulues.

CHAPITRE V

UNE CLASSE DE COHOMOLOGIE

Soient $a_1, \dots, a_n$ des éléments du centre de l'algèbre complète **A**, soit $\mathfrak{b}$ un idéal bilatère complet, et soit $\delta \in \Delta_r(a\,;\,\mathbf{A}/\mathfrak{b})$. Nous définissons et étudions un élément $\omega(a\,;\,s\,;\,\delta\,;\,\mathbf{A}/\mathfrak{b})$ de $\mathbf{H}^*_r(s\,;\,\delta\,;\,\mathbf{A}/\mathfrak{b})$.

Une application linéaire $\mathcal{L}$ de $\mathbf{H}^{*n}_r(s\,;\,\delta\,;\,\mathbf{A}/\mathfrak{b})$ dans $\mathbf{A}/\mathfrak{b}$ a été définie au paragraphe 16. Et

$$\frac{1}{(2\pi i)^n}\mathcal{L}[\omega(a\,;\,s\,;\,\delta\,;\,\mathbf{A}/\mathfrak{b})] = 1 + \mathfrak{b} \qquad (a)$$

si d'une manière générale $u + \mathfrak{b}$ est l'image quotient de $u \in \mathbf{A}$ dans $\mathbf{A}/\mathfrak{b}$.

Soient $a_1, \dots, a_n, a'_1, \dots, a'_{n'}$, des éléments du centre de **A**, et $\delta \in \Delta_r(a\,;\,\mathbf{A}/\mathfrak{b})$, $\delta' \in \Delta_r(a'\,;\,\mathbf{A}/\mathfrak{b})$. La classe de cohomologie $\omega(a, a'\,;\,s, s'\,;\,\delta\delta'\,;\,\mathbf{A}/\mathfrak{b})$ est le produit direct des classes de cohomologie $\omega(a\,;\,s\,;\,\delta\,;\,\mathbf{A}/\mathfrak{b})$, et $\omega(a'\,;\,s'\,;\,\delta'\,;\,\mathbf{A}/\mathfrak{b})$.

$\omega(a\,;\,s\,;\,\delta\,;\,\mathbf{A}/\mathfrak{b}) \neq 0$ si $1 \notin \mathfrak{b}$, en vertu de l'équation a. Cette propriété de ω est déjà intéressante. Elle a de plus certaines propriétés importantes du spectre parmi ses conséquences.

24. Les espaces $\mathbf{A}^{*n}$.

L'algèbre **A** que nous étudions n'est pas commutative. Nous devrons considérer dans ce chapitre des combinaisons linéaires de produits d'éléments de **A**, l'ordre des facteurs seul différant.

Nous définissons ici des espaces et introduisons sur ces espaces un formalisme qui sera utile par la suite.

1. Soit **A** une algèbre à borné complète, et **A'** son centre. Considérons le produit tensoriel complet $\mathrm{A}\bar{\otimes}^n$ de n facteurs

isomorphes à $\mathbf{A}$ (cf. paragraphe 4.4), puis le plus petit sous-espace fermé, Γ_n, de $\mathbf{A}^{\overline{\otimes} n}$ qui contienne les éléments

$$u_1 \overline{\otimes} \ldots \overline{\otimes} u_{i-1} \overline{\otimes} a u_i \overline{\otimes} u_{i+1} \ldots \overline{\otimes} u_n - a u_1 \overline{\otimes} u_2 \overline{\otimes} \ldots \overline{\otimes} u_n$$

lorsque $u_1, \ldots, u_n$ sont des éléments de $\mathbf{A}$ et a un élément de $\mathbf{A}'$. Le quotient de $\mathbf{A}^n$ par Γ_n sera appelé $\mathbf{A}^{*n}$. L'image quotient de $u_1 \overline{\otimes} \ldots \overline{\otimes} u_n$ dans $\mathbf{A}^{*n}$ sera appelée $u_1 * \ldots * u_n$.

Une structure de module complet à coefficients dans $\mathbf{A}'$ est définie sur $\mathbf{A}^{*n}$ en posant

$$a \cdot (u_1 * \ldots * u_n) = (a u_1) * u_2 * \ldots * u_n.$$

L'application $(u_1, \ldots, u_n) \to u_1 * \ldots * u_n$ est $\mathbf{A}'$-multilinéaire de $\mathbf{A}^n$ dans $\mathbf{A}^{*n}$.

Soit $u \in \mathbf{A}^{*n}$ et $v \in \mathbf{A}^{*m}$. Alors $u = \bar{u} + \Gamma_n$ avec $\bar{u} \in \mathbf{A}^{\overline{\otimes} n}$, et $v = \bar{v} + \Gamma_m$, avec $\bar{v} \in \mathbf{A}^{\overline{\otimes} m}$. Et $\bar{u} \overline{\otimes} \bar{v} + \Gamma_{m+n}$ est un élément de $\mathbf{A}^{*m+n}$ qui ne dépend évidemment que de u, v. Nous appellerons $u * v$ cet élément.

L'application $(u, v) \to u * v$ est une application $\mathbf{A}'$-bilinéaire de $\mathbf{A}^{*n} \times \mathbf{A}^{*m}$ dans $\mathbf{A}^{*m+n}$, qui est telle que

$$(u_1 * \ldots * u_n) * (v_1 * \ldots * v_m) = u_1 * \ldots * u_n * v_1 * \ldots * v_m.$$

2. Soit φ une application $\mathbf{A}'$-multilinéaire bornée de $\mathbf{A}^n$ dans un $\mathbf{A}'$-module complet E. Nous pouvons associer à φ une application φ_1 et une seule, qui est $\mathbf{A}'$-linéaire bornée et telle que

$$\varphi(u_1, \ldots, u_n) = \varphi_1(u_1 * \ldots * u_n).$$

Le produit $(u_1, \ldots, u_n) \to u_1 \ldots u_n$, par exemple, est $\mathbf{A}'$-multilinéaire. Une application de $\mathbf{A}^{*n}$ dans $\mathbf{A}$, appelée mult, lui est associée, avec

$$\text{mult}\,(u_1 * \ldots * u_n) = u_1 \ldots u_n.$$

Plus généralement, soit ϖ une décomposition du segment $(1, n)$ de $\mathbf{Z}$ en une réunion de sous-segments. Nous nous donnons donc des entiers $i_1, \ldots, i_{r-1}$ avec $1 < i_1 < \ldots < i_{r-1} < n$ tels que ϖ ait pour éléments les segments $(1, i_1 - 1), (i_1, i_2 - 1), \ldots, (i_{r-1}, n)$. Nous appellerons mult_ϖ l'application linéaire de $\mathbf{A}^{*n}$ dans $\mathbf{A}^{*r}$ qui est telle que

$$\text{mult}_\varpi\,(u_1 * \ldots * u_n) = (u_1 \ldots u_{i_1-1}) * \ldots * (u_{i_{r-1}} \ldots u_n).$$

Soit $\mathcal{S}(n)$ le groupe des permutations de $(1, n)$. Soit $p \in \mathcal{S}(n)$, et $p(k) = p_k$ si $1 \leqslant k \leqslant n$. L'application $(u_1, \ldots, u_n) \to u_{p_1} * \ldots * u_{p_n}$ est $\mathbf{A}'$-multilinéaire de $\mathbf{A}^n$ dans $\mathbf{A}^{*n}$. Il lui est associé une transformation de $\mathbf{A}^{*n}$ que nous appellerons p par extension :

$$p(u_1 * \ldots * u_n) = u_{p_1} * \ldots * u_{p_n}.$$

La représentation du groupe $\mathcal{S}(n)$ sur $\mathbf{A}^{*n}$ ainsi définie sera étendue linéairement à l'algèbre du groupe symétrique. Soit

$$\tau = \Sigma_{p \in \mathcal{S}(n)} \lambda_p \cdot p$$

une combinaison linéaire formelle à coefficients complexes d'éléments de $\mathcal{S}(n)$, et soit $\mathrm{U} \in \mathbf{A}^{*n}$. Nous poserons

$$\tau\mathrm{U} = \Sigma_{p \in \mathcal{S}(n)} \lambda_p \cdot p(\mathrm{U}).$$

Nous poserons en particulier $\text{sym}_n = \dfrac{1}{n!} \Sigma_{p \in \mathcal{S}(n)} p$, et par conséquent

$$\text{sym}_n\,\mathrm{U} = \frac{1}{n!} \Sigma_{p \in \mathcal{S}(n)} p\mathrm{U}.$$

Nous écrirons souvent sym U plutôt que sym_n U, puisque sym_n U n'est défini que si $\mathrm{U} \in \mathbf{A}^{*n}$, et $\mathbf{A}^{*n} \cap \mathbf{A}^{*n'}$ est vide si $n \neq n'$.

Soient $u \in \mathbf{A}^{*m}$, $v \in \mathbf{A}^{*n}$; nous avons évidemment

$$\text{sym}(u * v) = \text{sym}(v * u) = \text{sym}(u * \text{sym}\, v).$$

3. Nous avons défini aux chapitres II, III des foncteurs, qui associent à l'espace E les espaces $\Theta(s\,;\delta\,;\mathrm{E})$, $\theta_r(s\,;\delta\,;\mathrm{E})$, $\Omega_r(s\,;\delta\,;\mathrm{E})$. Soit $\Phi(\mathrm{E})$ l'un de ces foncteurs, étudions les espaces $\Phi(\mathbf{A}^{*n})$.

A l'application bilinéaire bornée $(u, v) \to u * v$ de $\mathbf{A}^{*m} \times \mathbf{A}^{*n}$ dans $\mathbf{A}^{*m+n}$, est associée chaque fois une application de $\Phi(\mathbf{A}^{*m}) \times \Phi(\mathbf{A}^{*n})$ dans $\Phi(\mathbf{A}^{*m+n})$. Nous appellerons encore $u * v$ l'image du couple (u, v) par cette application.

De même, aux diverses applications linéaires, mult, mult_ϖ, p, sym, de $\mathbf{A}^{*n}$ dans $\mathbf{A}$, $\mathbf{A}^{*r}$, $\mathbf{A}^{*n}$ et $\mathbf{A}^{*n}$ respectivement, sont associées des applications linéaires de $\Phi(\mathbf{A}^{*n})$ dans $\Phi(\mathbf{A})$, dans $\Phi(\mathbf{A}^{*r})$, dans $\Phi(\mathbf{A}^{*n})$ et dans $\Phi(\mathbf{A}^{*n})$ respectivement. Nous appellerons encore ces applications mult, mult_ϖ, p, sym.

Il est loisible d'utiliser la même notation pour l'application linéaire ou multilinéaire définie sur les espaces $\mathbf{A}^{*n}$, et pour l'application correspondante sur les espaces $\Phi(\mathbf{A}^{*n})$. Lorsque l'on devra considérer l'image d'un élément ou d'un couple, on saura à quel espace l'élément, ou chaque composante du couple, appartient. Lorsque deux espaces $\Phi(\mathbf{A}^{*n})$, $\Phi'(\mathbf{A}^{*n})$ ont une intersection, les applications associées coïncident sur cette intersection.

Une seule remarque doit être faite. Ce sont les espaces $\Phi(\mathbf{A}^{*n})$ que nous étudions, et pas les espaces $[\Phi(\mathbf{A})]^{*n}$ (une structure d'algèbre a été définie sur $\Phi(\mathbf{A})$.) Les applications que nous considérons sont associées à des applications données sur les espaces $\mathbf{A}$, $\mathbf{A}^{*n}$, et ne sont donc pas les applications correspondantes, définies sur $[\Phi(\mathbf{A})]^{*n}$.

Ce fait est important lorsque nous considérons pour $\Phi(\mathrm{E})$ le foncteur $\Omega_r(s\,;\delta\,;\mathrm{E})$; soit p la substitution $(1, \ldots, n) \to (p_1, \ldots, p_n)$ soient $\omega_1, \ldots, \omega_n$ des formes de degrés $q_1, \ldots, q_n$:

$$p(\omega_1 * \ldots * \omega_n) = \pm\, \omega_{p_1} * \ldots * \omega_{p_n}$$

le signe étant $+$ ou $-$ suivant la parité du nombre de couples (i, j) tels que : $i > j$; $p_i < p_i$, $q_i\, q_i$ étant impair.

4. Soit $\mathfrak{b}$ un idéal bilatère complet ; considérons l'espace $\mathrm{X}_r = \mathrm{A}^{\overline{\otimes} r-1} \mathbin{\overline{\otimes}} \mathfrak{b} \mathbin{\overline{\otimes}} \mathrm{A}^{\overline{\otimes} n-r}$, puis l'espace $\mathrm{X} = \mathrm{X}_1 \mathbin{\overline{\otimes}} \ldots \mathbin{\overline{\otimes}} \mathrm{X}_n$. Alors X est un espace complet. L'application $u_1 \mathbin{\overline{\otimes}} \ldots \mathbin{\overline{\otimes}} u_n \to u_1 * \ldots * u_n$ applique X_r dans A^{*n} quel que soit r (puisque $\mathfrak{b} \subseteq \mathbf{A}$). La somme directe de ces applications applique X dans $\mathbf{A}^{*n}$.

Nous appellerons $\mathfrak{b}_n$ l'image de X dans $\mathbf{A}^{*n}$, une partie $\mathbf{B}$ de $\mathfrak{b}_n$ sera dite bornée pour la structure à bornés propre de $\mathfrak{b}_n$ si elle est l'image d'une partie bornée de X. Alors $\mathfrak{b}_n$ est un espace complet (isomorphe au quotient de X par le noyau de l'application de X dans $\mathbf{A}^{*n}$ que nous nous sommes donnée.) Son support est contenu dans $\mathbf{A}^{*n}$, l'application identique étant linéaire et bornée.

L'application $(u, v) \to u * v$ de $\mathbf{A}^{*n} \times \mathbf{A}^{*m}$ dans $\mathbf{A}^{*m+n}$ a des restrictions à $\mathfrak{b}_n \times \mathbf{A}^{*m}$, $\mathbf{A}^{*n} \times \mathfrak{b}_m$ qui sont bornées à valeurs dans $\mathfrak{b}_{m+n}$ (les espaces $\mathfrak{b}_n$, $\mathfrak{b}_m$, $\mathfrak{b}_{m+n}$, étant munis de leur structure à bornés propre). Nous pouvons associer à l'application $(u, v) \to u * v$ des applications définies sur les espaces de cohomologie relative, qui appliquent

$${}_{\mathrm{N}}\mathbf{H}_r(s\,;\delta\,;\mathbf{A}^{*n}/\mathfrak{b}_n) \times {}_{\mathrm{N}'}\mathbf{H}_r(s\,;\delta\,;\mathbf{A}^{*m}/\mathfrak{b}_m) \quad \text{dans} \quad {}_{\mathrm{N}+\mathrm{N}'}\mathbf{H}_r(s\,;\delta\,;\mathbf{A}^{*n+m}/\mathfrak{b}_{n+m})\,;$$

$$\mathbf{H}_r(s\,;\delta\,;\mathbf{A}^{*n}/\mathfrak{b}_n) \times \mathbf{H}_r(s\,;\delta\,;\mathbf{A}^{*m}/\mathfrak{b}_m) \text{ dans } \mathbf{H}_r(s\,;\delta\,;\mathbf{A}^{*n+m}/\mathfrak{b}_{n+m})\,;$$

$$\mathbf{H}_r(s\,;\delta\,;\mathbf{A}^{*n}/\mathfrak{b}_n) \times \mathbf{H}_r^*(s\,;\delta\,;\mathbf{A}^{*m}/\mathfrak{b}_m) \text{ dans } \mathbf{H}_r^*(s\,;\delta\,;\mathbf{A}^{*n+m}/\mathfrak{b}_{n+m})\,;$$

$$\mathbf{H}_r^*(s\,;\delta\,;\mathbf{A}^{*n}/\mathfrak{b}_n) \times \mathbf{H}_r(s\,;\delta\,;\mathbf{A}^{*m}/\mathfrak{b}_m) \text{ dans } \mathbf{H}_r^*(s\,;\delta\,;\mathbf{A}^{*n+m}/\mathfrak{b}_{n+m}).$$

L'image de (u, v) par l'une quelconque de ces applications sera appelée $u * v$.

Les restrictions à $\mathfrak{b}_n$ des applications mult, mult_{ϖ}, p, sym, sont linéaires bornées, de $\mathfrak{b}_n$ dans $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{b}_k$, $\mathfrak{b}_n$, et $\mathfrak{b}_n$ respectivement. On peut donc associer à ces applications des applications linéaires, définies sur les espaces ${}_{\mathrm{N}}\mathbf{H}_r$, $\mathbf{H}_r$, $\mathbf{H}_r^*$, et prenant leurs valeurs dans un espace ${}_{\mathrm{N}}\mathbf{H}_r$, $\mathbf{H}_r$, $\mathbf{H}_r^*$ correspondant. Les applications associées seront de nouveau appelées mult, mult_{ϖ}, p, sym.

Il est encore loisible d'utiliser les mêmes notations pour les applications définies sur les espaces $\mathbf{A}^{*n}$ et sur les espaces de cohomologie, les motifs invoqués au numéro 3 étant valables ici. Les divers espaces $\mathbf{H}_r$, ${}_{\mathrm{N}}\mathbf{H}_r$, $\mathbf{H}_r^*$ ont été définis au chapitre III. Nous écrirons souvent $\mathbf{A}^{*n}/\mathfrak{b}$ plutôt que $\mathbf{A}^{*n}/\mathfrak{b}_n$.

25. Une forme différentielle extérieure.

Soit $\mathbf{A}$ une algèbre à bornés complète, $\mathfrak{b}$ un idéal bilatère complet de $\mathbf{A}$. Soient $a_1, \ldots, a_n$ des éléments du centre de $\mathbf{A}$, et $a = (a_1, \ldots, a_n)$, puis $(s_1, \ldots, s_n)$ des variables complexes, $s = (s_1, \ldots, s_n)$. Considérons une fonction $\delta \in \Delta_r(a\,;\mathbf{A}/\mathfrak{b})$. Nous supposons que δ a la filtration -1 dans $\theta_r(s\,;\delta_o)$. Sa restriction à l'ouvert $\delta > 0$ a la filtration -1 dans $\theta_r(s\,;\delta)$.

Nous appellerons $\Xi(a\,;\delta\,;\mathbf{A}/\mathfrak{b})$, ou tout simplement Ξ lorsque aucune confusion n'est possible l'ensemble des $(u_1, \ldots, u_n, v, y)$ qui vérifient les relations

$$u_i \in {}_0\theta_r(s\,;\delta_o\,;\mathbf{A}),\ v \in {}_0\theta_r(s\,;\delta_o\,;\mathfrak{b}),\ y \in \delta(s)\,{}_0\theta_r(s\,;\delta_o\,;\mathbf{A}).$$
$$\langle a - s,\ u(s)\rangle + v(s) + y(s) = 1.$$

Cet ensemble n'est pas vide : il existe (paragraphe 23) des u, y dans ${}_{-1}\theta_r(s\,;\delta_o\,;\mathbf{A})$ et un v dans ${}_{-1}\theta_r(s\,;\delta_o\,;\mathfrak{b})$ qui vérifient

$$\langle a - s,\ u(s)\rangle + v(s) + \delta(s)y_o(s) = 1.$$

Soit $y = \delta y_o$. Alors $(u, v, y) \in \Xi$ puisque ${}_{-1}\theta_r \subseteq {}_0\theta_r$.

Supposons que $(u, v, y) \in \Xi$. Alors $y = \delta y_o$ avec $y_o \in {}_0\theta_r(s\,;\delta_o\,;\mathbf{A})$. La restriction de y_o à l'ouvert $\delta > 0$ appartient à ${}_0\theta_r(s\,;\delta\,;\mathbf{A})$, celle de δ à ${}_{-1}\theta_r(s\,;\,\delta\,;\,\mathbf{A})$. La restriction de y appartient donc à ${}_{-1}\theta_r(s\,;\,\delta\,;\,\mathbf{A})$.

Écrivons alors l'expression

$$\frac{(n+k)\,!}{k\,!}\,\mathrm{sym}\,(y^{*k} * du_1 * \dots * du_n) = \varphi_k(u, v, y)$$

(y^{*k} est bien entendu égal au produit $y * \dots * y$ de k facteurs égaux à y, l'opérateur que nous appelons ici d est celui que l'on appelle généralement d''). Cette expression est une forme extérieure, qui appartient à ${}_{-k}\Omega_r(s\,;\,\delta\,;\,\mathbf{A})$, est de degré n et donc fermée. (Plus exactement, c'est la restriction de $\varphi_k(u, v, y)$ à l'ouvert $\delta > 0$ qui appartient à ${}_{-k}\Omega_r(s\,;\,\delta\,;\,\mathbf{A})$).

Nous étudierons φ_k, et étudierons en particulier sa classe de cohomologie modulo $\mathfrak{b}$ pour la filtration $-k$. Cette classe de cohomologie ne dépend pas de u, v, y, mais uniquement de a (et bien entendu de $\mathfrak{b}$, dont l'espace ${}_{-k}\mathbf{H}_r(s\,;\,\delta\,;\,\mathbf{A}/\mathfrak{b})$ dépend).

Nous étudierons ensuite le comportement de φ_k en fonction de k, et rechercherons l'effet que les opérateurs mult, mult_ϖ, ont sur elle. Un élément de $\mathbf{H}^*_r(s\,;\,\delta\,;\,\mathbf{A}/\mathfrak{b})$ pourra être défini de cette manière. Cet élément, $\omega(a\,;\,s\,;\,\delta\,;\,\mathbf{A}/\mathfrak{b})$ ne dépend que de $\mathbf{A}$, il jouit de propriétés remarquables, et la classe de cohomologie de φ_k peut être retrouvée par un procédé régulier lorsque cet élément est donné.

26. Un groupe transitif sur $\Xi(a\,;\,\delta\,;\,\mathbf{A}/\mathfrak{b})$.

Nous voudrons montrer que la classe de cohomologie de $\varphi_k(u, v, y)$ ne dépend pas du choix de $(u, v, y) \in \Xi$. Un groupe transitif de transformations sur Ξ et un système de générateurs de ce groupe seront utiles dans cette démonstration. Nous introduisons ici ce groupe et ce système de générateurs.

1. Soient a_{ij} $(i, j = 1, \dots, n)$, β_i $(i = 1, \dots, n)$, ξ_i $(i = 1, \dots, n)$, η, des fonctions de s définies sur $\mathbf{C}^n$ qui vérifient les relations $a_{ij} + a_{ji} = 0$, et

$$a_{ij} \in {}_{-1}\theta_r(s\,;\,\delta_o\,;\,\mathbf{A}),\quad \beta_i \in {}_{-1}\theta_r(s\,;\,\delta_o\,;\,\mathfrak{b})$$
$$\xi_i \in \delta(s)_{-1}\theta_r(s\,;\,\delta_o\,;\,\mathbf{A}),\quad \eta \in \delta(s)_{-1}\theta_r(s\,;\,\delta_o\,;\,\mathfrak{b})$$

et considérons la transformation $\mathrm{T}(a\,;\,\beta\,;\,\xi\,;\,\eta)$ définie lorsque

$u_1, \dots, u_n$, y sont des fonctions de s à valeurs dans $\mathbf{A}$ et v une fonction de s à valeurs dans $\mathfrak{b}$, par

$$u'_i = u_i + \Sigma a_{ij}(a_j - s_j) + \beta_i + \xi_i$$
$$v' = v - \Sigma \beta_j(a_j - s_j) + \eta$$
$$y' = y - \Sigma \xi_j(a_j - s_j) - \eta$$

Montrons que l'ensemble des transformations $\mathrm{T}(a\,;\,\beta\,;\,\xi\,;\,\eta)$ est un groupe, $\mathfrak{T}$, qui conserve Ξ et opère transitivement sur Ξ.

2. $\mathfrak{T}$ est évidemment un groupe : $\mathrm{T}(\mathrm{O}\,;\,\mathrm{O}\,;\,\mathrm{O}\,;\,\mathrm{O})$ est la transformation identique ; $\mathrm{T}(a\,;\,\beta\,;\,\xi\,;\,\eta)^{-1} = \mathrm{T}(-a\,;\,-\beta\,;\,-\xi\,;\,-\eta)$; et enfin

$$\mathrm{T}(a\,;\,\beta\,;\,\xi\,;\,\eta)\cdot\mathrm{T}(\rho\,;\,\sigma\,;\,\tau\,;\,\mu)\,; = \mathrm{T}(a+\rho\,;\,\beta+\sigma\,;\,\xi+\tau\,;\,\eta+\mu).$$

L'expression $\langle a - s,\, u\rangle + v + y$ est invariante pour $\mathfrak{T}$; $\langle a - s,\, u'\rangle + v' + y' = 1$ si $\langle a - s,\, u\rangle + v + y = 1$. Pour montrer que $\mathfrak{T}$ conserve Ξ il suffit de montrer que $u'_i \in {}_0\theta_r(s\,;\,\delta_o\,;\,\mathbf{A})$, $v' \in {}_0\theta_r(s\,;\,\delta_o\,;\,\mathfrak{b})$ et que $y' \in \delta(s)\,{}_0\theta_r(s\,;\,\delta_o\,;\,\mathbf{A})$ si $u \in {}_0\theta_r(s\,;\,\delta_o\,;\,\mathbf{A})$, $v \in {}_0\theta_r(s\,;\,\delta_o\,;\,\mathbf{A})$, $y \in \delta(s)_0\theta_r(s\,;\,\delta_o\,;\,\mathbf{A})$. Mais

$$\begin{aligned} u'_i &= u_i + \Sigma a_{ij}(a_j - s_j) + \beta_i + \xi_i \\ &\in {}_0\theta_r(s\,;\,\delta_o\,;\,\mathbf{A}) + \Sigma(a_j - s_j)_{-1}\theta_r(s\,;\,\delta_o\,;\,\mathbf{A}) + {}_{-1}\theta_r(s\,;\,\delta_o\,;\,\mathfrak{b}) \\ &\qquad + \delta(s)_{-1}\theta_r(s\,;\,\delta_o\,;\,\mathbf{A}) \\ &\subseteq {}_0\theta_r(s\,;\,\delta_o\,;\,\mathbf{A}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v' &= v - \Sigma(a_j - s_j)\,\beta_j + \eta \\ &\in {}_0\theta_r(s\,;\,\delta_o\,;\,\mathfrak{b}) + \Sigma(a_j - s_j)_{-1}\theta_r(s\,;\,\delta_o\,;\,\mathfrak{b}) + \delta(s)_{-1}\theta_r(s\,;\,\delta_o\,;\,\mathfrak{b}) \\ &\subseteq {}_0\theta_r(s\,;\,\delta_o\,;\,\mathfrak{b}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y' &= y - \Sigma\xi_j(a_j - s_j) - \eta \\ &\in \delta(s)_0\theta_r(s\,;\,\delta_o\,;\,\mathbf{A}) + \Sigma(a_j - s_j)\delta(s)_0\theta_r(s\,;\,\delta_o\,;\,\mathbf{A}) \\ &\qquad + \delta(s)_0\theta_r(s\,;\,\delta_o\,;\,\mathfrak{b}) \\ &\subseteq \delta(s)_0\theta_r(s\,;\,\delta_o\,;\,\mathbf{A}). \end{aligned}$$

Le résultat voulu est démontré, $\mathfrak{T}$ est un groupe de transformations sur Ξ.

3. $\mathfrak{T}$ est transitif sur Ξ. Pour montrer cela, il suffit de considérer un élément $(\mathrm{U}, \mathrm{V}, \mathrm{Y}) \in \Xi$ particulier et d'associer à tout

$(u, v, y) \in \Xi$ un $T \in \mathcal{C}$ qui applique (U, V, Y) sur (u, v, y). Nous prendrons pour (U, V, Y) un système de fonctions qui vérifient les relations

$$U_i \in {}_{-1}\theta_r(s\,;\delta_o\,;\mathbf{A}),\qquad V \in {}_{-1}\theta_r(s\,;\delta_o\,;\mathfrak{b}),\qquad Y \in \delta(s)_{-1}\theta_r(s\,;\delta_o\,;\mathbf{A}),$$
$$\langle a - s, U\rangle + V + Y = 1.$$

Il existe un tel système : le système (u, v, y) décrit au paragraphe 25 pour montrer que Ξ n'était pas vide à ces propriétés.
Soit donc U, V, Y, ce système particulier, et $(u, v, y) \in \Xi$ quelconque :

$$u_i - U_i = u_i(\langle a - s, U\rangle + V + Y) - (\langle a - s, u\rangle + v + y)U_i$$
$$= \Sigma\alpha_{ij}(a_j - s_j) + \beta_i + \xi_i$$
$$v - V = v(\langle a - s, U\rangle + V + Y) - (\langle a - s, u\rangle + v + y)V$$
$$= -\Sigma\beta_j(a_j - s_j) + \eta$$
$$y - Y = y(\langle a - s, U\rangle + V + Y) - (\langle a - s, u\rangle + v + y)Y$$
$$= -\Sigma\xi_j(a_j - s_j) - \eta$$

si
$$\alpha_{ij} = u_iU_j - u_jU_i$$
$$\beta_i = u_iV - vU_i$$
$$\zeta_i = u_iY - yU_i$$
$$\eta = vY - yV$$

La transformation $T(\alpha\,;\beta\,;\zeta\,;\eta)$ appartient évidemment à $\mathcal{C}$; elle applique (U, V, Y) sur (u, v, y). Le groupe $\mathcal{C}$ est transitif.

4. L'ensemble des transformations suivantes est évidemment un système de générateurs de $\mathcal{C}$:

$A_{ij}(\alpha)\,;\, i, j, = 1, \ldots, n\,;\, i < j\,;\, \alpha \in {}_{-1}\theta_r(s\,;\delta_o\,;\mathbf{A})$
$$u'_i = u_i + \alpha(s)(a_j - s_j)$$
$$u'_j = u_j - \alpha(s)(a_i - s_i)$$
$$u'_k = u_k(k \neq i, j),\ v = v,\ y' = y$$

$B_i(\alpha)\,;\, i = 1, \ldots, n\,;\, \alpha \in {}_{-1}\theta_r(s\,;\delta_o\,;\mathfrak{b})$
$$u'_i = u_i + \alpha(s)$$
$$v'_j = v - \alpha(s)(a_i - s_i)$$
$$u'_k = u_k(k \neq i),\ y' = y$$

$C_i(\alpha)\,;\, i = 1, \ldots, n\,;\, \alpha \in \delta(s)_{-1}\theta_r(s\,;\delta_o\,;\mathbf{A})$:
$$u'_i = u_i + \alpha(s)$$
$$y' = y - \alpha(s)(a_i - s_i)$$
$$u'_k = u_k(k \neq i),\ v' = v$$

$D(\alpha)\,;\, \alpha(s) \in {}_{-1}\theta_r(s\,;\delta_o\,;\mathfrak{b}) \cdot \delta(s)$:
$$v' = v + \alpha(s)$$
$$y' = y - \alpha(s)$$
$$u'_k = u_k.$$

27. Invariance de la classe de cohomologie.

Nous montrons que la classe de cohomologie de $\varphi_k(u, v, y)$ ne dépend pas de $(u, v, y) \in \Xi$. Il suffira pour cela de montrer que $\varphi_k(u, v, y) - \varphi_k(u', v', y',)$ est cohomologue à zéro (modulo $\mathfrak{b}$, pour la filtration $-k$) lorsque $(u, v, y) \in \Xi$, et lorsque (u', v', y') est la transformée de (u, v, y) par une des transformations A_{ij}, B_i, C_i, D du paragraphe 26.4.
D'ici la fin de ce paragraphe, nous poserons

$$\tau = \frac{(n+k)\,!}{k\,!}\,\varphi_k(u', v', y') - \varphi_k(u, v, y)$$
$$= \operatorname{sym}(y'^{*k} * du'_1 * \ldots * du'_n - y^{*k} * du_1 * \ldots * du_n) \qquad (1)$$

et nous montrerons que τ est cohomologue à zéro dans chacun des quatre cas envisagés : nous supposerons que $(u, v, y) \in \Xi$:

$$u_i \in {}_0\theta_r(s\,;\delta_o\,;\mathbf{A}),\ v \in {}_0\theta_r(s\,;\delta_o\,;\mathfrak{b}),\ y \in \delta_0\theta_r(s\,;\delta_o\,;\mathbf{A}) \qquad (2)$$
$$\langle a - s, u\rangle + v + y = 1 \qquad (3)$$

Différentiant la relation 3, nous avons

$$\langle a - s, du\rangle + dv + dy = 0 \qquad (4)$$

1. Considérons pour commencer la transformation $A_{ij}(\alpha)$. Les variables $s_1, \ldots, s_n$ jouant le même rôle dans nos raisonnements, nous pouvons supposer que $i = 1$, $j = 2$, sans nuire à la généralité :

$$\left.\begin{aligned} u_1' &= u_1 + \alpha(s)\,(a_2 - s_2) \\ u_2' &= u_2 - \alpha(s)\,(a_1 - s_1) \\ u_3' &= u_3, \dots, u_n' = u_n, y' = y \\ \alpha(s) &\in {}_{-1}\theta_r(s\,;\,\delta_o\,;\,\mathbf{A}) \end{aligned}\right| \qquad (5)$$

Portons ces valeurs dans (1) :

$$\tau = \text{sym}\,(y^{*k} * \sigma * du_3 * \dots * du_n)$$

si $\sigma = \text{sym}\,(du_1' * du_2' - du_1 * du_2)$

$$= \text{sym}\,\{d[u_1 + \alpha(s)(a_2 - s_2)] * d[u_2 - \alpha(s)(a_1 - s_1)] - du_1 * du_2\}$$

$$= -\,\text{sym}\,\{[(a_1 - s_1)\,du_1 + (a_2 - s_2)du_2] * d\alpha\}.$$

D'autre part

$$\text{sym}\,(dy * du_3 * \dots * du_n) = -\,\text{sym}\,[(\langle a - s, du\rangle + dv) * du_3 * \dots * du_n]$$
$$= -\,\text{sym}\,\{[(a_1 - s_1)\,du_1 + (a_2 - s_2)du_2] * du_3 * \dots * du_n\}$$
$$- \,\text{sym}\,(dv * du_3 * \dots * du_n)$$

et par conséquent

$$\tau = \text{sym}\,(y^{*k} * dy * d\alpha * du_3 * \dots * du_n) + \text{sym}\,(y^{*k} * dv * d\alpha * du_3 * \dots * du_n)$$
$$= \frac{1}{k+1}\,d\,\text{sym}(y^{*k+1} * d\alpha * du_3 * \dots * du_n) + \text{sym}\,(y^{*k} * dv * d\alpha * du_3 * \dots * du_n). \qquad (6)$$

Cette expression est cohomologue à zéro puisque

$$\text{sym}\,(y^{*k+1} * d\alpha * du_3 * \dots * du_n) \in {}_{-k}\Omega_r(s\,;\,\delta\,;\,\mathbf{A}^{*n+k})$$
$$\text{sym}\,(y^{*k} * dv * d\alpha * du_3 * \dots * du_n) \in {}_{-k}\Omega_r(s\,;\,\delta\,;\,\mathfrak{b}_{n+k}).$$

(Ce sont plus exactement les restrictions à l'ouvert $\delta > 0$ qui appartiennent à ces espaces).

2. Nous étudions ensuite les transformations $C_i(\alpha)$. Nous pouvons supposer que $i = 1$ sans nuire à la généralité, et considérer $C_1(-\alpha)$ plutôt que $C_1(\alpha)$:

$$\left.\begin{aligned} u_1' &= u_1 - \alpha(s) \\ y' &= y + \alpha(s)(a_1 - s_1) \\ u_2' &= u_2, \dots, u_n' = u_n \\ \alpha(s) &\in \delta(s)_{-1}\theta_r(s\,;\,\delta_o\,;\,\mathbf{A}) \end{aligned}\right| \qquad (7)$$

Portons (7) dans (1) :

$$\tau = \text{sym}(\sigma * du_2 * \dots * du_n)$$

si

$$\sigma = \text{sym}\,(y'^{*k} * du_1' - y^{*k} * du_1).$$

Mais

$$y'^{*k} = \Sigma_0^k \binom{k}{k'} (a_1 - s_1)^{k-k'}\,\text{sym}\,(y^{*k'} * \alpha^{*k-k'})$$

et

$$du_1' = du_1 - d\alpha.$$

Par conséquent

$$\sigma = \Sigma_0^{k-1} \binom{k}{k'} (a_1 - s_1)^{k-k'}\,\text{sym}\,(y^{*k'} * \alpha^{*k-k'} * du_1)$$
$$- \,\Sigma_0^k \binom{k}{k'} (a_1 - s_1)^{k-k'}\,\text{sym}\,(y^{*k'} * \alpha^{*k-k'} * d\alpha).$$

Nous écrivons $k' - 1$ pour k' dans la première somme, combinons les deux sommes terme à terme, et mettons en évidence dans chaque terme le facteur

$$(a_1 - s_1)^{k-k'}\,\frac{k\,!}{(k')\,!\,(k - k' + 1)\,!}.$$

Il vient

$$\sigma = \Sigma_0^{k-1} \frac{k\,!}{k'\,!\,(k - k' + 1)\,!}\,(a_1 - s_1)^{k-k'}\rho_{k'} - (a_1 - s_1)^k\,\text{sym}\,(\alpha^{*k} * d\alpha) \qquad (8)$$

si

$$\rho_{k'} = k'(a_1 - s_1)\,\text{sym}\,(y^{*k'-1} * \alpha^{*k-k'+1} * du_1) - (k - k' + 1)\,\text{sym}\,(y^{*k'} * \alpha^{*k-k'} * d\alpha)$$
$$= \text{sym}\,(k'y^{*k'-1} * \alpha^{*k-k'+1} * (a_1 - s_1)du_1 - (k - k' + 1)y^{*k'} * \alpha^{*k-k'} * d\alpha).$$

Nous savons que

$$\text{sym}(dy * du_2 * \dots * du_n) = -\,\text{sym}\,(a_1 - s_1)du_1 * \dots * du_n - \,\text{sym}\,(dv * du_2 * \dots * du_n)$$

et par conséquent

$$\text{sym}\,(\rho_{k'} * du_2 * \dots * du_n)$$
$$= -\,\text{sym}\,[\{k'y^{*k'-2} * \alpha^{*k-k'+1} * dy + (k - k' + 1)y^{*k'} * \alpha^{*k-k'+1} * d\alpha)\}$$
$$- \,\text{sym}\,(k'y^{*k'-1} * \alpha^{*k-k'+1} * dv) * du_2 * \dots * du_n]$$
$$= d\varphi_{k'} + \psi_{k'} \qquad (9)$$

avec

$$\varphi_{k'} = -\operatorname{sym}(y^{*k'} * \alpha^{*k-k'+1} * du_2 * \dots * du_n)$$
$$\psi_{k'} = -\operatorname{sym}(y^{*k'-1} * \alpha^{*k-k'+1} * dv * du_2 * \dots * du_n).$$

Enfin, $\tau = \sigma * du_2 * \dots * du_n$; les relations (8) et (9) montrent que

$$\tau = \Sigma_0^{k-1} \frac{k!}{(k')!\,(k-k'+1)!}\{d[(a_1 - s_1)^{k-k'}\varphi_{k'}] + (a_1 - s_1)^{k-k'}\psi_{k'}\} - \frac{1}{k+1}\, d[(a_1 - s_1)^k \alpha^{*k+1}]$$

est cohomologue à zéro puisque

$$(a_1 - s_1)^{k-k'}\,\varphi_{k'} \in {}_{-k}\Omega_r(s\,;\delta\,;\mathbf{A})$$
$$(a_1 - s_1)^{k}\,\alpha^{*k+1} \in {}_{-k}\Omega_r(s\,;\delta\,;\mathbf{A})$$
$$(a_1 - s_1)^{k-k'}\,\psi_{k'} \in {}_{-k}\Omega_r(s\,;\delta\,;\mathfrak{b}).$$

3. Nous devons encore considérer les transformations B_i, D. Un calcul élémentaire montre, dans le premier cas, que

$$\tau = \operatorname{sym}(y^{*k} * d\alpha * du_2 * \dots * du_n)$$

avec $\alpha \in {}_{-1}\theta_r(s\,;\delta_o\,;\mathfrak{b})$, et dans le second, que

$$\tau = \Sigma_1^{k'}(-1)^{k'}\operatorname{sym}(y^{*k'} * \alpha^{*k-k'} * du_2 * \dots * du_n).$$

Dans chacun de ces cas, $\tau \in {}_{-k}\Omega_r(s\,;\delta\,;\mathfrak{b})$, et à fortiori, τ est cohomologue à zéro.

Nous avons ainsi démontré que $\varphi_k(u, v, y)$ est cohomologue à $\varphi_k(u', v', y')$ si $(u, v, y) \in \Xi$ et si (u', v', y') est la transformée de (u, v, y) par un élément quelconque d'un certain système de générateurs du groupe $\mathfrak{T}$. Les formes $\varphi_k(u, v, y)$, $\varphi_k(u', v', y')$ seront donc cohomologues si (u', v', y') est la transformée de (u, v, y) par un élément quelconque de $\mathfrak{T}$. Mais $\mathfrak{T}$ est transitif.

La classe de cohomologie de la forme

$$\varphi_k(u, v, y) = \frac{(n+k)!}{k!}\operatorname{sym}(y^{*k} * du_1 * \dots * du_n)$$

ne dépend pas du choix arbitraire de (u, v, y) *dans* Ξ.

28. Comportement en fonction de k.

Nous définissons ici un élément $\omega(a\,;s\,;\delta\,;\mathbf{A}/\mathfrak{b})$ qui est intéressant pour la raison suivante :

Soit $k \in \mathbf{N}$, considérons la classe de cohomologie de $\varphi_k(u, v, y)$ avec $(u, v, y) \in \Xi\ (a\,;s\,;\delta\,;\mathbf{A}/\mathfrak{b})$. Appliquons à cette classe de cohomologie les opérateurs mult, mult_{ϖ}, du paragraphe 24, et les opérateurs $J_{NN'}$ du paragraphe 14, ceci dans un ordre quelconque pourvu que la construction ait un sens. Nous construisons ainsi une classe de cohomologie ψ qui appartient à ${}_{N}\mathbf{H}_r(s\,;\delta\,;\mathbf{A}^{*p}/\mathfrak{b})$ pour N, p convenables. On montre que

$$\psi = J^*_N[\omega(a\,;s\,;\delta\,;\mathbf{A}/\mathfrak{b})] * 1^{*p-1}$$

ψ ne dépend donc que de N, p et ne dépend de (N, p) que d'une manière fort simple. Nous pouvons retrouver aisément ψ lorsque $\omega(a\,;s\,;\delta\,;\mathbf{A}/\mathfrak{b})$ est donné.

1. Considérons la forme

$$\varpi_k = \Sigma_1^n(-1)^i u_i * \operatorname{sym}(y^{*k} * du_1 * \dots * d\hat{u}_i * \dots * du_n) \quad (1)$$

(Suivant l'usage, le $\hat{}$ que nous plaçons au-dessus d'un facteur indique que ce facteur ne doit pas être considéré lorsque nous effectuons le produit :

$$du_1 * \dots * d\hat{u}_i * \dots * du_n = du_1 * \dots * du_{i-1} * du_{i+1} * \dots * du_n).$$

Alors

$$d\varpi_k = \Sigma_1^n(-1)^i du_i * \operatorname{sym}(y^{*k} * du_1 * \dots * d\hat{u}_i \dots * du_n)$$
$$+ k\Sigma_1^n(-1)^i u_i * \operatorname{sym}(y^{*k-1} * dy * du_1 * \dots * d\hat{u}_i * \dots * du_n). \quad (2)$$

Mais $dy = -\langle a - s, du\rangle - dv$;

$$\operatorname{sym}(dy * du_1 * \dots * d\hat{u}_i * \dots * du_n)$$
$$= (-1)^i(a_i - s_i)(\operatorname{sym}(du_1 * \dots * du_n) - \operatorname{sym}(dv * du_1 * \dots * d\hat{u}_i * \dots * du_n).$$

Le terme général de la seconde somme du second membre de (2) est égal à

$$(a_i - s_i)u_i * \operatorname{sym}(y^{*k-1} * du_1 * \dots * du_n)$$
$$-(-1)^i u_i * \operatorname{sym}(y^{*k-1} * dv * du_1 * \dots * d\hat{u}_i * \dots * du_n).$$

Portons cette valeur dans (2) et écrivons $1 - v - y$ pour $\Sigma(a_i - s_i)u_i$. Le second membre prend la forme

$$\begin{aligned}\Sigma_1^n(-1)^i du_i * \operatorname{sym}(y^{*k-1} * du_1 * \dots * d\hat{u}_i * \dots * du_n)\\ - k \cdot y * \operatorname{sym}(y^{*k-1} * du_1 * \dots * du_n) \qquad (3)\\ + k \cdot 1 * \operatorname{sym} y^{*k-1} * du_1 * \dots * du_n - \psi_k\end{aligned}$$

si

$$\begin{aligned}\psi_k = k \cdot \Sigma(-1)^i u_i * \operatorname{sym}(y^{*k-1} * dv * du_1 * \dots * d\hat{u}_i * \dots * du_n)\\ + k \cdot v * \operatorname{sym}(y^{*k-1} * du_1 * \dots * du_n).\end{aligned}$$

Mais il est évident que

$$\begin{aligned}(n+k) \operatorname{sym}(y^{*k} * du_1 * \dots * du_n)\\ = k \cdot y * \operatorname{sym}(y^{*k-1} * du_1 * \dots * du_n)\\ + \Sigma(-1)^{i-1} du_i * \operatorname{sym}(y^{*k} * du_1 * \dots * d\hat{u}_i * \dots * du_n).\end{aligned}$$

Portons cette relation dans (3), que nous pouvons égaler au premier membre de (2), faisons passer ψ_k au premier membre, nous obtenons la relation

$$\begin{aligned}d\varpi_k + \psi_k = k \cdot 1 * \operatorname{sym}(y^{*k-1} * du_1 * \dots * du_n)\\ - (n+k) \operatorname{sym}(y^{*k} * du_1 * \dots * du_n) \qquad (4)\end{aligned}$$

Mais $\varpi_k \in {}_{-k}\Omega_r(s\,;\,\delta\,;\,A^{*n+k})$, $\psi_k \in {}_{-k+1}\Omega_r(s\,;\,\delta\,;\,\mathfrak{b}_{n+k})$. Le premier membre est exact pour la filtration $-k+1$, le second membre l'est donc aussi. Le produit du second membre par $\dfrac{(n+k-1)!}{k!}$ est $\varphi_k(u, v, y) - [1 * \varphi_{k-1}(u, v, y)]$.

Les formes $\varphi_k(\mathrm{u}, \mathrm{v}, \mathrm{y})$ *et* $1 * \varphi_{k-1}(\mathrm{u}, \mathrm{v}, \mathrm{y})$ *sont cohomologues modulo* $\mathfrak{b}$ *pour la filtration* $-\mathrm{k}+1$.

2. Soit $k > 0$, et ω_{-k} l'élément de ${}_{-k}\mathbf{H}_r(s\,;\,\delta\,;\,\mathbf{A}/\mathfrak{b})$ qui contient mult $\varphi_k(u, v, y)$ si $(u, v, y) \in \Xi(a\,;\,s\,;\,\delta\,;\,\mathbf{A}/\mathfrak{b})$. Alors ω_{-k} est défini si $\delta \in \Delta(a\,;\,\mathbf{A}/\mathfrak{b})$, appartient à ${}_{-k}\mathbf{H}_r(s\,;\,\delta\,;\,\mathbf{A}/\mathfrak{b})$, et ne dépend que de a, δ, $\mathfrak{b}$, $\mathbf{A}$. De plus, mult φ_k et mult φ_{k+1} sont cohomologues, en vertu du numéro 1, $J_{-k\,\cdot\,-k-1}(\omega_{-k-1}) = \omega_{-k}$, et par récurrence, $J_{N'N}(\omega_N) = \omega_{N'}$, si $0 > N' > N$.

La suite ω_N tend vers un élément de la limite projective, $\mathbf{H}^*{}_r(s\,;\,\delta\,;\,\mathbf{A}/\mathfrak{b})$ lorsque $N \to -\infty$. La limite de cette suite sera

appelée $\omega(a\,;\,s\,;\,\delta\,;\,\mathbf{A}/\mathfrak{b})$. Et $\omega(a\,;\,s\,;\,\delta\,;\,\mathbf{A}/\mathfrak{b}) \in \mathbf{H}^*_r(s\,;\,\delta\,;\,\mathbf{A}/\mathfrak{b})$ est caractérisé par la condition suivante :

$J^*_{-k}[\omega(a\,;\,s\,;\,\delta\,;\,\mathbf{A}/\mathfrak{b})]$ *est l'élément de* ${}_{-k}\mathbf{H}_r(s\,;\,\delta\,;\,\mathbf{A}/\mathfrak{b})$ *qui contient la forme* mult $\varphi_k(u, v, y)$ *lorsque* $(u, v, y) \in \Xi(a\,;\,\delta\,;\,\mathbf{A}/\mathfrak{b})$.

3. Les formes $\dfrac{(n+k)!}{k!}\varphi_k(u, v, y) * 1^{*n+k}$ et $\dfrac{(n+k)!}{k!} 1^{*n+k} * \varphi_k(u, v, y)$ sont cohomologues modulo $\mathfrak{b}$ pour la filtration $-k$. Elles sont en effet toutes deux cohomologues à $\varphi_{2n+2k}(u, v, y)$, en vertu de l'alinéa 1 de nouveau. Soit P la partition de $(1, 2n+2k)$ en $n+k+1$ segments, dont le premier est le segment $(1, n+k)$ et les $n+k$ autres sont de longueur 1. L'opérateur $\mathrm{mult}_{\mathrm{P}}$ applique les deux formes considérées sur (mult $\varphi_k(u, v, y) * 1^{*n+k}$) et $1 * \varphi_k(u, v, y)$ qui sont donc cohomologues. La première appartient à la classe de cohomologie $J^*_{-k}[\omega] * 1^{*n+k}$ la seconde appartient donc elle aussi à cette classe de cohomologie.

Soit ensuite P' la partition du segment $(1, n+k+1)$ en $n+k$ segments, dont le premier est de longueur 2, et les autres de longueur 1. Appliquons l'opérateur $\mathrm{mult}_{\mathrm{P'}}$, au résultat ci-dessus. La forme $\varphi_k(u, v, y)$ appartient à la classe de cohomologie $J^{*-k}(\omega) * 1^{*n+k-1}$.

Appliquons enfin à la classe de cohomologie de $\varphi_k(u, v, y)$ les opérateurs $J_{N'N}$, mult, mult_{ϖ}, dans une succession quelconque, et considérons le résultat obtenu dans ${}_{N}\mathbf{H}^*_r(s\,;\,\delta\,;\,\mathbf{A}^{*p}/\mathfrak{b})$. Il est évident que ce résultat sera égal à $J^*_N(\omega) * 1^{*p-1}$, ainsi que nous l'avons annoncé au début de ce paragraphe.

Mais de tous les résultats établis dans ce numéro, c'est probablement le suivant qui est le plus utile :

$1 * \varphi_k(u, v, y)$ *appartient à la classe de cohomologie* $J^*_{-k}[\omega(a\,;\,s\,;\,\delta\,;\,\mathbf{A}/\mathfrak{b})] * 1^{*n+k}$.

29. La classe de cohomologie $\omega(a, a'\,;\,s, s'\,;\,\delta\delta'\,;\,\mathbf{A}/\mathfrak{b})$.

1. Nous considérerons une algèbre complète à unité, $\mathbf{A}$, un idéal bilatère complet de $\mathbf{A}$, $\mathfrak{b}$, et des éléments $a_1, \dots, a_n, a'_1, \dots, a'_{n'}$, du centre de $\mathbf{A}$. Soient $\delta(s) \in \Delta(a\,;\,\mathbf{A}/\mathfrak{b})$, $\delta'(s') \in \Delta(a'\,;\,\mathbf{A}/\mathfrak{b})$. Il est évident que $\delta(s)\delta'(s') \in \Delta(a, a'\,;\,\mathbf{A}/\mathfrak{b})$.

Nous pouvons définir $\omega(a\,;\,s\,;\,\delta\,;\,\mathbf{A}/\mathfrak{b})$, $\omega(a'\,;\,s'\,;\,\delta'\,;\,\mathbf{A}/\mathfrak{b})$ et

$\omega(a, a' ; s, s' ; \delta\delta' ; \mathbf{A}/\mathfrak{b})$. Il existe une relation simple entre ces trois classes de cohomologie.

Soient $\varphi \in \mathbf{H}^*_r(s ; \delta ; \mathbf{A}/\mathfrak{b})$, $\varphi' \in \mathbf{H}^*_r(s' ; \delta' ; \mathbf{A}/\mathfrak{b})$. Alors $\varphi = \{\varphi_N\}_{N \in \mathbf{Z}}$, et $\varphi' = \{\varphi'_N\}_{N \in \mathbf{Z}}$, avec $\varphi_N \in {}_N\mathbf{H}_r(s ; \delta ; \mathbf{A}/\mathfrak{b})$, $\varphi'_N \in {}_N\mathbf{H}_r(s' ; \delta' ; \mathbf{A}/\mathfrak{b})$, et pour $N' > N$, $J_{N'N}(\varphi_N) = \varphi_{N'}$, $J_{N'N}(\varphi'_N) = \varphi'_{N'}$.

Le produit $w_N w'_N$ d'un élément w_N de la classe de cohomologie φ_N par un élément w'_N de la classe de cohomologie φ'_N est un élément d'une classe de cohomologie bien déterminée, $\varphi_N\varphi'_N \in {}_N\mathbf{H}_r(s ; s' ; \delta\delta' ; \mathbf{A}/\mathfrak{b})$. Et $\varphi_{N'}\varphi'_{N'} = J_{N'N}(\varphi_N\varphi'_N)$, c'est-à-dire $\{\varphi_N\varphi'_N\}_{N \in \mathbf{Z}} \in \mathbf{H}^*_r(s, s' ; \delta\delta' ; \mathbf{A}/\mathfrak{b})$. Nous poserons $\varphi \times \varphi' = \{\varphi_N\varphi'_N\}_{N \in \mathbf{Z}}$, et $\varphi \times \varphi'$ sera appelé le produit direct de φ par φ'.

Nous montrerons que $\omega(a, a' ; s, s' ; \delta\delta' ; \mathbf{A}/\mathfrak{b})$ est le produit direct de $\omega(a ; s ; \delta ; \mathbf{A}/\mathfrak{b})$ par $\omega(a' ; s' ; \delta' ; \mathbf{A}/\mathfrak{b})$.

2. Considérons les ensembles $\Xi(a ; \delta ; \mathbf{A}/\mathfrak{b})$, $\Xi(a' ; \delta' ; \mathbf{A}/\mathfrak{b})$ et $\Xi(a, a' ; \delta\delta' ; \mathbf{A}/\mathfrak{b})$. Supposons que $(u, v, y) \in \Xi(a ; \delta ; \mathbf{A}/\mathfrak{b})$ et que $(u', v', y') \in \Xi(a' ; \delta' ; \mathbf{A}/\mathfrak{b})$. Posons $U = y'u$, $U' = u'$, $V = v' + y'v$, $Y = y'y$. Alors $(U, U', V, Y) \in \Xi(a, a' ; \delta\delta' ; \mathbf{A}/\mathfrak{b})$.

En effet les fonctions U_i, U'_i appartiennent à ${}_0\theta_r(s ; \delta_0 ; \mathbf{A})$, $V \in {}_0\theta_r(s ; \delta_0 ; \mathfrak{b})$, $Y \in \delta(s)\delta'(s')\,{}_0\theta_r(s ; \delta_0 ; \mathbf{A})$, tandis que $\langle a - s, U\rangle + \langle a' - s', U'\rangle + V + Y = \langle a' - s', u'\rangle + v' + y'(\langle a - s, u\rangle + v + y) = 1$.

La classe de cohomologie $J^*_{-k}\,\omega(a, a' ; s, s' ; \tau' ; \mathbf{A}/\mathfrak{b})$ contient mult $\varphi_k(U, U', V, Y)$, et mult $\varphi_k(U, U', V, Y) =$ mult $(1 * \text{sym}\,\tau)$ si

$$\begin{aligned}\tau &= \text{sym}\,(Y^{*k} * dU_1 * \dots * dU_n) * dU'_1 * \dots * dU'_{n'}\\ &= \text{sym}\,[(y'y)^{*k} * d(y'u_1) * \dots * d(y'u_n)] * du'_1 * \dots * du'_{n'}\\ &= \text{sym}\,[(y'y)^{*k} * y'du_1 * \dots * y'\,du_n] * du'_1 * \dots * du'_1\end{aligned}$$

(la différence entre la deuxième et le troisième ligne est une somme de termes dont chacun est de degré supérieur à n' en $d\bar{s}'_1, \dots, d\bar{s}'_{n'}$).

3. Montrons que $1 * \tau$ est cohomologue à

$$\frac{k!}{(n+k)!}[\text{mult}\ \varphi_k(u, v, y)] * y'^{*n+k} * du'_1 * \dots * du'_{n'}.$$

Soit Q la partition du segment $(1, 2n + n' + 2k + 1)$ de $\mathbf{N}$ en les $n + n' + k + 1$ intervalles suivants :

$(1), (2, 3), (4,5), \dots, (2n + 2k, 2n + 2k + 1), (2n + 2k + 2), \dots, (2n + n' + 2k + 1)$ et soit d'autre part p la substituion suivante de ce segment :

$$\begin{aligned}p(i) &= 2i - 1 \quad (1 \leqslant i \leqslant n + k + 1)\\ p(n + k + 1 + i) &= 2i \quad (1 \leqslant i \leqslant n + k)\\ p(i) &= i \quad (2n + 2k + 2 \leqslant i \leqslant 2n + n' + 2k + 1).\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}1 * \tau &= \text{mult}_Q\, p[1 * \text{sym}\,(y^{*k} * du_1 * \dots * du_n)]\\ &\qquad * y'^{*n+k} * du'_1 * \dots * du'_{n'}\\ &= \frac{k!}{(n+k)!}\,\text{mult}_Q\, p[1 * \varphi_k(u, v, y)]\\ &\qquad * (y'^{*n+k} * du'_1 * \dots * du'_{n'}).\end{aligned}$$

Mais $1 * \varphi_k(u, v, y)$ est cohomologue à mult $\varphi_{k*}1^{*n+k}$. Le second facteur étant une forme fermée, $1 * \tau$ est cohomologue à τ_1 si

$$\begin{aligned}\tau_1 &= \frac{k!}{(n+k)!}\,\text{mult}_Q\, p[\text{mult}\ \varphi_k(u, v, y) * 1^{*n+k} * y'^{*n+k} * du'_1 * \dots * du'_{n'}]\\ &= \frac{k!}{(n+k)!}\,[\text{mult}\ \varphi_k(u, v, y)] * y'^{*n+k} * du'_1 * \dots * du'_{n'}.\end{aligned}$$

4. Soit T l'ensemble des substitutions du segment $(1, n + n' + k + 1)$ qui laissent 1 invariant, et $\rho = \left(\frac{1}{(n + n' + k)!}\Sigma_{p \in T}\,p\right)$. Alors ρ est l'opérateur de symétrisation sur les indices $(2, \dots, n + n' + k + 1)$. Il est clair que mult $\varphi_k(U, U', V, Y) = \frac{(n + n' + k)!}{k!}$ mult $\rho(1 * \tau)$, et est donc cohomologue à $\frac{(n + n' + k)!}{k!}$ mult $\rho\tau_1$. Mais

$$\frac{(n + n' + k)!}{k!}\,\text{mult}\ \rho\tau_1 = \text{mult}\ \varphi_k(u, v, y) \cdot \text{mult}\ \varphi_{n+k}(u', v', y')$$

en vertu de la définition de τ_1.

Par conséquent, $J^*_{-k}[\omega(a, a' ; s, s' ; \delta\delta' ; \mathbf{A}/\mathfrak{b})]$ est le produit direct des classes de cohomologie $J^*_{-k}[\omega(a ; s ; \delta ; \mathbf{A}/\mathfrak{b})]$ et $J^*_{-k}[\omega(a' ; s' ; \delta' ; \mathbf{A}/\mathfrak{b})]$. Le résultat requis est démontré :

$$\omega(a, a' ; s, s' ; \delta\delta' ; \mathbf{A}/\mathfrak{b}) = \omega(a ; s ; \delta ; \mathbf{A}/\mathfrak{b}) \times \omega(a' ; s' ; \delta' ; \mathbf{A}/\mathfrak{b}).$$

30. Calcul de $\mathcal{L}(\omega)$.

Une application linéaire, $\mathcal{L}$, de $\mathbf{H}^*_r(s ; \delta ; \mathbf{A}/\mathfrak{b})$ dans $\mathbf{A}/\mathfrak{b}$ a été définie au paragraphe 16. Nous montrerons ici que

$$\frac{1}{(2\pi i)^n}\mathcal{L}[\omega(a ; s ; \delta ; \mathbf{A}/\mathfrak{b})] = 1 + \mathfrak{b}$$

appelant d'une manière générale $u + \mathfrak{b}$ l'image quotient de $u \in \mathbf{A}$ dans $\mathbf{A}/\mathfrak{b}$.

Nous reprenons les notations utilisées au paragraphe 16. L'opérateur définissant la structure différentielle de $\Omega_r(s ; \delta ; \mathbf{A})$, qui a généralement été appelé d, sera appelé ici d'' ; nous appellerons dans ce paragraphe, d, l'opérateur de différentiation totale :

$$df = \Sigma \frac{\partial f}{\partial \bar{s}_i} d\bar{s}_i + \Sigma \frac{\partial f}{\partial s_i} ds_i = d'f + d''f.$$

Observons en passant que

$$dg_1 \dots dg_n\, ds_1 \dots ds_n = d''g_1 \dots d''g_n\, ds_1 \dots ds_n$$

la différence entre les deux membres étant de degré supérieur à n en $ds_1, \dots, ds_n$.

1. Nous commencerons par étudier le cas où $n = 1$, $\mathfrak{b} = 0$, $\delta(s) = (1 + |s|^2)^{-1/2}$. Nous supposerons que a appartient au centre de $\mathbf{A}$, que s est une variable complexe, et que $\bar{s}$ est sa complexe conjuguée.

Posons $u = -\bar{s}/(1 + |s|^2)$, $y = (1 + a\bar{s})/(1 + |s|^2)$. Alors, $(u, 0, y) \in \Xi(a ; \delta ; \mathbf{A})$, puisque $u \in {}_0\theta_r(s ; \delta_o ; \mathbf{A})$, $y \in \delta(s) \cdot {}_0\theta_r(s ; \delta_o ; \mathbf{A})$, et $(a - s)\, u + y = 1$.

$$\text{mult } \varphi_k(u, 0, y) = (k + 1) \text{ mult sym } (y^{*k} * d''u)$$
$$= -(k+1)\frac{(1 + a\bar{s})^k}{(1 + |s|^2)^k} d'' \frac{\bar{s}}{1 + |s|^2}$$
$$= -(k+1)\frac{(1 + a\bar{s})^k}{(1 + |s|^2)^{k+2}} d\bar{s}.$$

La classe de cohomologie $J^*_{-k}[\omega(a ; s ; \delta ; \mathbf{A}/\mathfrak{b})]$ contient la forme mult φ_k, et $\mathcal{L}(\omega)$ est égal à l'intégrale de mult $\varphi_k\, ds$. Mais

$$\int \text{mult } \varphi_k ds = -\int (k+1)\frac{(1 + a\bar{s})^k}{(1 + |s|^2)^{k+2}} d\bar{s} ds = 2\pi i$$

si $\mathbf{C}$ a été orienté de manière telle que $i d\bar{s} ds > 0$.

2. Soit n quelconque, $\mathfrak{b} = 0$, et

$$\delta(s) = \delta_1(s) = (1 + |s_1|^2)^{-1/2} \dots (1 + |s_n|^2)^{-1/2}$$

La classe de cohomologie $\omega(a ; s ; \delta_1 ; \mathbf{A}/\mathfrak{b})$ est le produit direct des classes $\omega(a_j ; s_j ; (1 + |s_j|^2)^{-1/2} ; \mathbf{A})$. L'intégrale définissant $\mathcal{L}(\omega)$ se décompose en un produit de facteurs égaux à $2\pi i$, et par conséquent, $\mathcal{L}(\omega) = (2\pi i)^n$.

Soit ensuite $\delta = \delta_o$, $\mathfrak{b}$ quelconque. Il est évident que

$$J^*_{-k}[\omega(a ; s ; \delta_1 ; \mathbf{A})] \subseteq J^*_{-k}[\omega(a ; s ; \delta_o ; \mathbf{A}/\mathfrak{b})]$$

et $\mathcal{L}(\omega) = u + \mathfrak{b}$ si $u = \int \psi ds_1 \dots ds_n$ avec $\psi \in J^*_{-k}(\omega)$. Nous pouvons prendre ψ dans la classe de cohomologie figurant au premier membre, $u = 1$,

$$\mathcal{L}(\omega(a ; s ; \delta_o ; \mathbf{A}/\mathfrak{b})) = (2\pi i)^n + \mathfrak{b}.$$

Enfin,

$$J^*_{-k}[\omega(a ; s ; \delta ; \mathbf{A}/\mathfrak{b})] \subseteq J^*_{-k}[\omega(a ; s ; \delta_o ; \mathbf{A}/\mathfrak{b})]$$

et par conséquent

$$\mathcal{L}(\omega(a ; s ; \delta ; \mathbf{A}/\mathfrak{b})) = \mathcal{L}(\omega(a ; s ; \delta_o ; \mathbf{A}/\mathfrak{b})) = (2\pi i)^n + \mathfrak{b}.$$

Le résultat voulu est ainsi démontré.

31. Quelques propriétés de ω.

1. *Le produit* $(s_i - a_i)\omega(a\,;\,s\,;\,\delta\,;\,\mathbf{A}/\mathfrak{b})$ *est nul.* En effet,

$$(s_i - a_i)\varphi_k(u, v, y)$$

$$= \frac{(n+k)!}{k!}(-1)^i \operatorname{sym}(y^{*k} * dy * du_1 * \dots * \widehat{du_i} * \dots * du_n)$$

$$+ \frac{(n+k)!}{k!}(-1)^i \operatorname{sym}(y^{*k} * dv * du_1 * \dots * \widehat{du_i} * \dots * du_n)$$

$$= d\varphi + \psi$$

si

$$\varphi = \frac{(n+k)!}{(k+1)!}(-1)^i \operatorname{sym}(y^{*k+1} * du_1 * \dots * \widehat{du_i} * \dots * du_n)$$

$$\psi = \frac{(n+k)!}{k!}(-1)^i \operatorname{sym}(y^{*k} * dv * du_1 * \dots * \widehat{du_i} * \dots * du_n).$$

Mais $\varphi \in {}_{-k}\Omega_r(s\,;\,\delta\,;\,\mathbf{A}^{*n+k})$, $\psi \in {}_{-k}\Omega_r(s\,;\,\delta\,;\,\mathfrak{b}_{n+k})$; la forme $(s_i - a_i)$ mult φ_k est donc exacte quel que soit k, la limite $(s_i - a_i)\omega$ des classes de cohomologie correspondante est nulle.

2. *Le spectre* $\Delta(a\,;\,\mathbf{A}/\mathfrak{b})$, *et la classe de cohomologie* $\omega(a\,;\,s\,;\,\delta\,;\,\mathbf{A}/\mathfrak{b})$ *ne dépendant de* a *que modulo* $\mathfrak{b}$.

En fait, d'une manière générale, les idéaux $(a - s,\ \delta \mid \Theta(s\,;\,\delta_o\,;\,\mathbf{A})) + \Theta(s\,;\,\delta_o\,;\,\mathfrak{b})$ et $(a' - s',\ \delta' \mid \Theta(s\,;\,\delta_o\,;\,\mathbf{A})) + \Theta(s\,;\,\delta_o\,;\,\mathfrak{b})$ sont égaux si $a - a' \in \mathfrak{b}$. Par conséquent, $\Delta(a\,;\,\mathbf{A}/\mathfrak{b}) = \Delta(a'\,;\,\mathbf{A}/\mathfrak{b})$.

Soit alors $\delta \in \Delta_r(a\,;\,\mathbf{A}/\mathfrak{b})$. Alors $\delta \in \Delta_r(a'\,;\,\mathbf{A}/\mathfrak{b})$. Considérons $(u, v, y) \in \Xi(a\,;\,\delta\,;\,\mathbf{A}/\mathfrak{b})$, posons $v' = v + \langle a - a', u\rangle$; alors $(u, v', y) \in \Xi(a'\,;\,\delta\,;\,\mathbf{A}/\mathfrak{b})$. Mais $\varphi_k(u, v, y) = \varphi_k(u, v', y)$. Le résultat est établi.

3. $\omega(a\,;\,s\,;\,\delta\,;\,\mathbf{A}/\mathfrak{b}) \neq 0$, sauf lorsque $1 \in \mathfrak{b}$. En effet, $\mathcal{L}(\omega) = 1 + \mathfrak{b}$. Mais $\mathcal{L}(0) = 0 + \mathfrak{b}$. Si ω était nul, nous aurions $0 \equiv 1$ mod. $\mathfrak{b}$.

Le cas où $1 \in \mathfrak{b}$ est trivial ; $\mathfrak{b} = \mathbf{A}$, les structures complètes des deux espaces coincident.

4. L'application $a \to \omega(a\,;\,s\,;\,\delta\,;\,\mathbf{A}/\mathfrak{b})$ applique une partie de $(\mathbf{A}/\mathfrak{b})^n$ dans $\mathbf{H}^*_r(s\,;\,\delta\,;\,\mathbf{A}/\mathfrak{b})$. *Cette application est biunivoque.*

Supposons en effet que

$$\omega = \omega(a\,;\,s\,;\,\delta\,;\,\mathbf{A}/\mathfrak{b}) = \omega(a'\,;\,s\,;\,\delta\,;\,\mathbf{A}/\mathfrak{b}).$$

Alors $(s - a)\omega = 0 = (s - a')\omega$, d'où $a\omega = a'\omega$, et $\mathcal{L}(a\omega) = \mathcal{L}(a'\omega)$. Mais $\mathcal{L}(a\omega) = a + \mathfrak{b}$, $\mathcal{L}(a'\omega) = a' + \mathfrak{b}$. Le résultat est établi.

32. Propriétés du spectre.

Les propositions de ce chapitre, et l'expression de $\varphi_k(u, v, y)$ nous permettent d'établir diverses propriétés importantes de $\Delta(a\,;\,\mathbf{A}/\mathfrak{b})$.

Nous généralisons le théorème classique disant que le spectre n'est pas vide, et établissons en même temps une proposition permettant d'affirmer que l'idéal b est impropre dans certaines conditions.

Appliquant ce critère, nous montrons quel rapport existe entre $\Delta(a\,;\,\mathbf{A}/\mathfrak{b})$ et $\Delta(a'\,;\,\mathbf{A}/\mathfrak{b})$ lorsque $a = (a_1, \dots, a_n)$, $a' = (a_1, \dots, a_{n'})$ avec $n' < n$.

1. Nous avons observé que l'idéal $\mathfrak{b}$ est impropre si $\omega(a\,;\,s\,;\,\delta\,;\,\mathbf{A}/\mathfrak{b}) = 0$. Mais $\omega(a\,;\,s\,;\,\delta\,;\,\mathbf{A}/\mathfrak{b})$ est certainement nul si $y = 0$, puisque $\varphi_k(u, v, y) = 0$ dans ces conditions. Et nous pouvons choisir $y = 0$ si la constante nulle appartient à $\Delta(a\,;\,\mathbf{A}/\mathfrak{b})$, donc si l'idéal $(a - s \mid \Theta(s\,;\,\delta_o\,;\,\mathbf{A})) + \Theta(s\,;\,\delta_o\,;\,\mathfrak{b})$ de $\Theta(s\,;\,\delta_o\,;\,\mathbf{A})$ contient la constante 1.

Cette remarque permet d'établir les deux résultats suivants :

A. *La constante nulle ne peut appartenir à* $\Delta(a\,;\,\mathbf{A}/\mathfrak{b})$ *que si l'unité de* $\mathbf{A}$ *appartient à* $\mathfrak{b}$.

B. *L'unité appartient à* $\mathfrak{b}$ *si* $1 \in \operatorname{idl}(a - s \mid \Theta(s\,;\,\delta_o\,;\,\mathbf{A})) + \Theta(s\,;\,\delta_o\,;\,\mathfrak{b})$.

A généralise le théorème qui affirme que le spectre est non vide. B est un critère permettant d'affirmer que $\mathfrak{b}$ est impropre.

2. Soit $n' < n$, soient $a_1, \dots, a_n$ des éléments du centre de $\mathbf{A}$, et soit $a' = (a_1, \dots, a_{n'})$. Soient $s_1, \dots, s_n$ des variables complexes, $s = (s_1, \dots, s_n)$, et $(s') = (s_1, \dots, s_{n'})$. Soit $\delta'(s')$ une fonction réelle non négative de s', définie sur $\mathbf{C}^n$, et posons $\delta(s) = \delta'(s')$:

$\delta'(s') \in \Delta(a' ; \mathbf{A}/\mathfrak{b})$ *si et uniquement si* $\delta(s) \in \Delta(a ; \mathbf{A}/\mathfrak{b})$. *Le spectre* $\Delta(a' ; \mathbf{A}/\mathfrak{b})$ *est connu lorsque* $\Delta(a ; \mathbf{A}/\mathfrak{b})$ *l'est.*

Il s'agit de démontrer l'équivalence des deux relations suivantes :

$$1 \in idl\,(a'' - s'', a' - s', \delta \mid \Theta(s ; \delta_o ; \mathbf{A})) + \Theta(s ; \delta_o ; \mathfrak{b})$$
$$1 \in idl\,(a' - s', \delta' \mid \Theta(s' ; \delta_o ; \mathbf{A})) + \Theta(s' ; \delta_o ; \mathfrak{b}).$$

Mais les algèbre et idéal $\Theta(s ; \delta_o ; \mathbf{A})$, $\Theta(s ; \delta_o ; \mathfrak{b})$ peuvent être respectivement identifiés à $\Theta(s'' ; \delta_o ; \Theta(s' ; \delta_o ; \mathbf{A}))$, et à $\Theta(s'' ; \delta_o ; \Theta(s' ; \delta_o ; \mathfrak{b}))$. La fonction $\delta(s)$ est alors identifiée à la fonction de s'' qui est constante, et égale à $\delta'(s')$. La première relation implique la seconde, en vertu de B ci-dessus. Quant à la seconde, elle implique évidemment la première.

Soit par exemple $\delta(s_1, \ldots, s_n) \in \Delta(a ; \mathbf{A}/\mathfrak{b})$, et posons

$$\delta'(s') = \sup_{s \in \mathbb{C}^{n-n'}} \delta(s', s'').$$

Alors $\delta'(s') \in \Delta(a' ; \mathbf{A}/\mathfrak{b})$. En effet, posons $\delta_1(s) = \delta'(s')$. Alors $\delta_1(s) \geqslant \delta(s)$, appartient donc à $\Delta(a ; \mathbf{A}/\mathfrak{b})$. Il suffit d'appliquer la proposition démontrée.

CHAPITRE VI

LE CALCUL SYMBOLIQUE

Soit $\mathbf{A}$ une algèbre complète, associative et unitale, et soit $\mathfrak{b}$ un idéal bilatère complet de $\mathbf{A}$. Soient $s_1, \ldots, s_n$ des variables complexes, et $\delta(s_1, \ldots, s_n)$ une fonction Lipschitzienne non négative de $s = (s_1, \ldots, s_n)$ qui est telle que $|s|\delta(s)$ soit borné.

Nous appellerons $\mathcal{O}_r(s ; \delta ; \mathbf{A}/\mathfrak{b})$ l'ensemble des $u(s) \in \theta_r(s ; \delta ; \mathbf{A})$ qui sont tels que $\partial_{\bar{s}_i} u(s) \in \theta_{r-1}(s ; \delta ; \mathfrak{b})$ pour $i = 1, \ldots n$. L'ensemble $\mathcal{O}_r(s ; \delta ; \mathbf{A}/\mathfrak{b})$ est encore l'ensemble des éléments de degré nul de $\Omega_r(s ; \delta ; \mathbf{A})$ qui sont fermés muldulo $\mathfrak{b}$. Cet ensemble est une algèbre complexe qui contient l'algèbre des fonctions holomorphes à valeurs dans $\mathbf{A}$, et est identique à cette algèbre si l'idéal $\mathfrak{b}$ est nul.

Nous dirons qu'un élément de $\mathcal{O}_r(s ; \delta ; \mathbf{A}/\mathfrak{b})$ est holomorphe modulo $\mathfrak{b}$.

Considérons ensuite des éléments $a_1, \ldots, a_n$ du centre de $\mathbf{A}$. Soient $a = (a_1, \ldots, a_n)$, $\delta(s) \in \Delta_r(a ; \mathbf{A}/\mathfrak{b})$. Un élément $\omega(a ; s ; \delta ; \mathbf{A}/\mathfrak{b}) \in \mathbf{H}_r^*(s ; \delta ; \mathbf{A}/\mathfrak{b})$ a été défini. Nous pouvons considérer le produit de cet élément par $\mathrm{F}(s)$ si $\mathrm{F}(s) \in \mathcal{O}_r(s ; \delta ; \mathbf{A}/\mathfrak{b})$. Ce produit appartient à $\mathbf{H}_r^*(s ; \delta ; \mathbf{A}/\mathfrak{b})$.

Soit $\mathcal{L}$ l'application linéaire de $\mathbf{H}_r^*(s ; \delta ; \mathbf{A}/\mathfrak{b})$ dans $\mathbf{A}/\mathfrak{b}$ qui a été définie au paragraphe 16. Posons

$$\mathbf{S}(\mathrm{F} ; a ; \mathbf{A}/\mathfrak{b}) = \frac{1}{(2\pi i)^n}\, \mathcal{L}[\mathrm{F}(s)\omega(a ; s ; \delta ; \mathbf{A}/\mathfrak{b})] = \xi + \mathfrak{b}$$

si

$$\xi = \frac{1}{(2\pi i)^n}\, \frac{(n+k)\,!}{k\,!} \int_{\mathbb{C}^n} \mathrm{F}(s) \text{ mult sym } (y^{*k} * du_1 * \ldots * du_n)\, ds_1 \ldots ds_n.$$

(L'entier positif k étant choisi suffisamment grand), tandis que $(u, v, y) \in \Xi(a ; \delta ; \mathbf{A}/\mathfrak{b})$.

$\mathbf{S}(F ; a ; \mathbf{A}/\mathfrak{b})$ appartient à $\mathbf{A}/\mathfrak{b}$, et est défini lorsqu'il existe un $\delta \in \Delta(a ; \mathbf{A}/\mathfrak{b})$ tel que $F \in \mathcal{O}_r(s ; \delta ; \mathbf{A}/\mathfrak{b})$. Nous montrerons dans ce chapitre que l'application $F \rightarrow \mathbf{S}(F ; a ; \mathbf{A}/\mathfrak{b})$ est un homomorphisme de l'algèbre $\mathcal{O}_r(s ; \delta ; \mathbf{A}/\mathfrak{b})$ dans $\mathbf{A}/\mathfrak{b}$ qui applique la constante 1 sur $1 + \mathfrak{b}$ et s_i sur $a_i + \mathfrak{b}$.

Dans tout ce chapitre, nous appellerons d'' l'opérateur différentiel défini sur $\Omega_r(s ; \delta ; E)$, et nous appellerons d l'opérateur de différentiation totale extérieure.

33. Propriétés élémentaires.

1. Par définition, $\mathbf{S}(1 ; a ; \mathbf{A}/\mathfrak{b}) = (2\pi i)^{-n}\mathcal{L}(\omega)$. D'autre part, nous avons montré au paragraphe 30 que $\mathcal{L}(\omega) = (2\pi i)^n + \mathfrak{b}$. Par conséquent,

$$\mathbf{S}(1 ; a ; \mathbf{A}/\mathfrak{b}) = 1 + \mathfrak{b}. \qquad 1.$$

Supposons que $G(s) \in \mathrm{idl}\,(s_j - a_j ; \ \mathcal{O}_r(s ; \ \delta ; \ \mathbf{A}/\mathfrak{b}))$. Alors $G(s)\ \omega = 0$ puisque $(s_j - a_j)\cdot\omega = 0$. Et par conséquent,

$$\mathbf{S}(G ; a ; \mathbf{A}/\mathfrak{b}) = \mathcal{L}(G\omega) = 0 + \mathfrak{b} \qquad 2.$$

Soit $P(s)$ un polynôme, et soit $F(s) \in \mathcal{O}_r(s ; \delta ; \mathbf{A}/\mathfrak{b})$. Alors, $[P(s) - P(a)]\ F(s)$ appartient à $\mathrm{idl}\,[s - a ; \mathcal{O}_r(s ; \delta ; \mathbf{A}/\mathfrak{b})]$, et donc

$$\mathbf{S}(PF ; a ; \mathbf{A}/\mathfrak{b}) = P(a)\mathbf{S}(F ; a ; \mathbf{A}/\mathfrak{b}). \qquad 3.$$

En particulier, si $F = 1$

$$\mathbf{S}(P ; a ; \mathbf{A}/\mathfrak{b}) = P(a) + \mathfrak{b}$$

et si $P(s) = s_i$

$$\mathbf{S}(s_i ; a ; \mathbf{A}/\mathfrak{b}) = a_i + \mathfrak{b}.$$

2. *Produits directs*. Soient $a_1, \ldots, a_n, a'_1, \ldots, a'_{n'}$ des éléments du centre de $\mathbf{A}$. Soient $\delta(s) \in \Delta_r(a ; \mathbf{A}/\mathfrak{b})$, $\delta'(s') \in \Delta_r(a' ; \mathbf{A}/\mathfrak{b})$, puis $F(s) \in \mathcal{O}_r(s ; \delta ; \mathbf{A}/\mathfrak{b})$, $F'(s') \in \mathcal{O}_r(s' ; \delta' ; \mathbf{A}/\mathfrak{b})$. Alors $\delta(s)\delta'(s') \in \Delta_r(a, a' ; \mathbf{A}/\mathfrak{b})$; $F(s)F'(s') \in \mathcal{O}_r(s, s' ; \delta\delta' ; \mathbf{A}/\mathfrak{b})$. Nous savons (paragraphe 29) que

$$1 * \omega(a, a' ; s, s' ; \delta\delta' ; \mathbf{A}/\mathfrak{b})$$
$$= \omega(a ; s ; \delta ; \mathbf{A}/\mathfrak{b}) * \omega(a' ; s' ; \delta' ; \mathbf{A}/\mathfrak{b}).$$

Soit τ égal à l'un ou l'autre membre de cette équation. Alors $\tau \in H^*_r(s, s' ; \delta\delta' ; \mathbf{A}^{*2}/\mathfrak{b})$. Appelons p la substitution $(1, 2, 3, 4) \rightarrow (1, 3, 2, 4)$:

$$FF'\omega(a, a' ; s, s' ; \delta\delta' ; \mathbf{A}/\mathfrak{b}) = F\omega(a ; s ; \delta ; \mathbf{A}/\mathfrak{b})F'\omega(a' ; s' ; \delta' ; \mathbf{A}/\mathfrak{b}).$$

Les deux membres de cette équation sont en effet égaux à mult $p(F * F' * \tau)$.

L'intégrale qui définit $\mathbf{S}(FF' ; a, a' ; \delta\delta' ; \mathbf{A}/\mathfrak{b})$ se décompose en un produit. La relation à démontrer est évidente, on a

$$\mathbf{S}(FF' ; a, a' ; \mathbf{A}/\mathfrak{b}) = \mathbf{S}(F ; a ; \mathbf{A}/\mathfrak{b})\mathbf{S}(F' ; a' ; \mathbf{A}/\mathfrak{b}).$$

3. Considérons des éléments $a_1, \ldots, a_n, a'_1, \ldots, a'_n$ du centre de $\mathbf{A}$ tels que $a_i - a'_i \in \mathfrak{b}$ pour $i = 1, \ldots, n$. Dans ces conditions, $\Delta(a ; \mathbf{A}/\mathfrak{b}) = \Delta(a' ; \mathbf{A}/\mathfrak{b})$, $\omega(a ; s ; \delta ; \mathbf{A}/\mathfrak{b}) = \omega(a' ; s ; \delta ; \mathbf{A}/\mathfrak{b})$, si $\delta \in \Delta(a ; \mathbf{A}/\mathfrak{b})$, et

$$\mathbf{S}(F ; a ; \mathbf{A}/\mathfrak{b}) = \mathbf{S}(F ; a' ; \mathbf{A}/\mathfrak{b})$$

si $F \in \mathcal{O}_r(s ; \delta ; \mathbf{A}/\mathfrak{b})$ pour un $\delta \in \Delta(a ; \mathbf{A}/\mathfrak{b})$.

En fait, de $\langle a - s, \ u(s)\rangle + v(s) + y(s)$ on tire $\langle a' - s, \ u(s)\rangle + v'(s) + y(s)$ en posant $v'(s) = v(s) + \langle a' - a, \ u(s)\rangle$. Supposons que $u_i \in \Theta(s ; \delta_o ; \mathbf{A})$, que $v \in \Theta(s ; \delta_o ; \mathfrak{b})$, et que $y \in \delta(s)\Theta(s ; \delta_o ; \mathbf{A})$. Alors $v' \in \Theta(s ; \delta_o ; \mathfrak{b})$, ce qui démontre l'inclusion $\Delta(a ; \mathbf{A}/\mathfrak{b}) \subset \Delta(a' ; \mathbf{A}/\mathfrak{b})$. L'inclusion réciproque se démontre d'une manière analogue. L'égalité des spectres est établie.

De même, $(u, v', y) \in \Xi(a' ; \delta ; \mathbf{A}/\mathfrak{b})$ si $(u, v, y) \in \Xi(a ; \delta ; \mathbf{A}/\mathfrak{b})$, et mult $\varphi_k(u, v, y) =$ mult $\varphi_k(u, v', y)$. Par définition, $\omega(a ; s ; \delta ; \mathbf{A}/\mathfrak{b})$ et $\omega(a' ; s ; \delta ; \mathbf{A}/\mathfrak{b})$ sont les limites projectives respectives de mult $\varphi_k(u ; v ; y)$ et de mult $\varphi_k(u ; v' ; y)$. Ces classes de cohomologie sont donc égales (Note : $\Xi(a ; \delta ; \mathbf{A}/\mathfrak{b})$ et $\varphi_k(u ; v ; y)$ sont définis au numéro 25).

Ensuite

$$\mathbf{S}(F ; a ; \mathbf{A}/\mathfrak{b}) = \mathcal{L}(F(s)\omega(a ; s ; \delta ; \mathbf{A}/\mathfrak{b}))$$
$$= \mathbf{S}(F ; a' ; \mathbf{A}/\mathfrak{b})$$

les résultats énoncés sont établis.

Soient enfin $a_1, \ldots, a_n, a'_1, \ldots, a'_n$ des éléments quelconques du centre de $\mathbf{A}$, et supposons que $\delta \in \Delta(a ; \mathbf{A}/\mathfrak{b}) \cap \Delta(a' ; \mathbf{A}/\mathfrak{b})$. Nous pouvons définir $\mathbf{S}(F ; a ; \mathbf{A}/\mathfrak{b}) = u$, et $\mathbf{S}(F ; a' ; \mathbf{A}/\mathfrak{b}) = u'$.

L'élément $u - u'$ de $\mathbf{A}/\mathfrak{b}$ est congru à zéro modulo l'idéal engendré dans $\mathbf{A}/\mathfrak{b}$ par les images quotients de $a_1 - a'_1, \ldots, a_n - a'_n$.

C'est évident. Soit $\mathfrak{b}_1$ la somme de $\mathfrak{b}$ et de l'idéal engendré dans $\mathbf{A}$ par $(a_1 - a'_1, \ldots, a_n - a'_n)$. Nous avons montré que $v = v'$ si $v = \mathbf{S}(F\,;\ a\,;\ \mathbf{A}/\mathfrak{b}_1)$, $v' = \mathbf{S}(F\,;\ a'\,;\ \mathbf{A}/\mathfrak{b}_1)$. Mais v est l'image quotient de u dans $\mathbf{A}/\mathfrak{b}_1$, v' celle de u'.

34. Cas où l'un des a est nul.

Nous considérons n éléments, $a_1, \ldots, a_n$, du centre de l'algèbre $\mathbf{A}$, étudions les propriétés spectrales de $(a, 0) = (a_1, \ldots, a_n, 0)$ et comparons celles-ci à celles de $a = (a_1, \ldots, a_n)$.

Soient $s_1, \ldots, s_n, t$ des variables complexes, et soit δ une fonction Lipschitzienne non négative de (s, t). Pour que $\delta(s, t) \in \Delta(a, 0\,;\ \mathbf{A}/\mathfrak{b})$, il faut et il suffit que $\delta_1(s) = \delta(s,0) \in \Delta(a\,;\ \mathbf{A}/\mathfrak{b})$.

Soit enfin $F(s, t) \in \mathcal{O}_r(s, t\,;\ \delta\,;\ \mathbf{A}/\mathfrak{b})$, puis $F_1(s) = F(s, 0)$. Alors $F_1(s) \in \mathcal{O}_r(s\,;\ \delta_1\,;\ \mathbf{A}/\mathfrak{b})$ évidemment. Nous montrons que

$$\mathbf{S}(F\,;\ a, 0\,;\ \mathbf{A}/\mathfrak{b}) = \mathbf{S}(F_1\,;\ a\,;\ \mathbf{A}/\mathfrak{b})$$

1. Soit $\delta_1(s) \in \Delta(a\,;\ \mathbf{A}/\mathfrak{b})$. Considérons des fonctions $u_1(s), \ldots, u_n(s)$, $v(s)$, $y_o(s)$ telles que $u_i(s) \in \Theta(s\,;\ \delta_o\,;\ \mathbf{A})$, $v(s) \in \Theta(s\,;\ \delta_o\,;\ \mathfrak{b})$, $y_o(s) \in \Theta(s\,;\ \delta_o\,;\ \mathbf{A})$ et telles que

$$\langle a - s, u \rangle + v + \delta_1(s) y_o = 1.$$

Soit d'autre part $\varphi(t)$ une fonction bornée réelle non négative d'une variable complexe, à support compact, et égale à l'unité sur un voisinage de l'origine. Soit $s \in \mathbf{C}^n$ tel que $\delta_1(s) \neq 0$.

$$\langle a - s, u \rangle - t\,\frac{\varphi(t/\delta_1) - 1}{t/\delta_1}\, y_o + v + \delta_1\, \varphi(t/\delta_1) y_o = 1.$$

Soit ensuite $\delta_1(s) = 0$:

$$\langle a - s, u \rangle + v = 1.$$

Définissons $\delta(s, t)$ comme étant la fonction nulle si $\delta_1(s) = 0$ et égale à $\delta_1(s)\varphi(t/\delta_1(s))$ si $\delta_1(s) \neq 0$. Posons ensuite $U(s, t) = u(s)$, $V(s, t) = v(s)$, $Y_o(s, t) = y_o(s)$ quels que soient $(s, t) \in \mathbf{C}^{n+1}$, et $W(s, t) = 0$ si $\delta_1(s) = 0$, $W(s, t) = [\varphi(t/\delta_1) - 1] Y_o/[t/\delta_1]$ si $\delta_1(s) \neq 0$. L'équation

$$\langle a - s, U \rangle' - tW + V + \delta(s, t)\, Y_o = 1$$

est vérifiée quels que soient $(s, t) \in \mathbf{C}^{n+1}$.

D'autre part, il est évident que $U_1, \ldots, U_n$, et Y_o appartiennent à $\Theta(s, t\,;\ \delta_o\,;\ \mathbf{A})$ et que V appartient à $\Theta(s, t\,;\ \delta_o\,;\ \mathfrak{b})$. Quant à W, c'est le produit de Y_o par une fonction bornée indépendamment de (s, t) — cette fonction appartient à $\Theta(s, t\,;\ \delta_o\,;\ \mathbf{A})$, et W également.

Par conséquent, $\delta(s, t) \in \Delta(a, 0\,;\ \mathbf{A}/\mathfrak{b})$.

2. Réciproquement, soit $\delta'(s, t) \in \Delta(a, 0\,;\ \mathbf{A}/\mathfrak{b})$. Soit $\delta''(s, t)$ Lipschitzienne de constante 1, et telle que $\delta''(s, t) \in \Delta(a, 0\,;\ \mathbf{A}/\mathfrak{b})$, $\delta''(s, t) \leqslant \delta'(s, t)$. Soit M une constante réelle positive telle que $\varphi(t) \leqslant \sup(M - |t|, 0)$. Il existe un tel M puisque φ est bornée à support compact.

Posons $\delta_1(s) = M^{-1}\, \delta''(s, 0)$. Alors $\delta_1(s) \in \Delta(a\,;\ \mathbf{A}/\mathfrak{b})$ évidemment, et

$$\begin{aligned}\delta'(s, t) \geqslant \delta''(s, t) &\geqslant \sup[\delta''(s, 0) - |t|, 0] \\ &= \delta_1(s) \sup[M - |t|/\delta_1(s), 0] \\ &\geqslant \delta_1(s)\varphi(t/\delta_1(s))\end{aligned}$$

si $\delta_1(s) \neq 0$, tandis que, lorsque $\delta_1(s) = 0$, nous avons $\delta'(s, t) \geqslant 0 = \delta''(s, t)$. C'est-à-dire, $\delta'(s, t) \geqslant \delta(s, t)$ quel que soit $(s, t) \in \mathbf{C}^{n+1}$.

L'ensemble des fonctions $\delta(s, t)$ parcourt donc une base de $\Delta(a, 0\,;\ \mathbf{A}/\mathfrak{b})$ lorsque $\delta_1(s)$ parcourt une base de $\Delta(a\,;\ \mathbf{A}/\mathfrak{b})$.

Ce raisonnement nous permet d'autre part de montrer que $\delta'(s, t) \in \Delta(a, 0\,;\ \mathbf{A}/\mathfrak{b})$ si $\delta(s, t)$ est Lipschitzienne non négative, et telle que $\delta(s, 0) \in \Delta(a\,;\ \mathbf{A}/\mathfrak{b})$.

3. Nous devrons construire des éléments de $\Delta_r(a, 0\,;\ \mathbf{A}/\mathfrak{b})$, et des fonctions U, W, V, Y telles que $(U, W, V, Y) \in \Xi(a, 0\,;\ \delta\,;\ \mathbf{A}/\mathfrak{b})$. Ces fonctions seront en particulier différentiables. Le lemme suivant sera utile pour établir la différentiabilité des fonctions que nous considérerons :

Soit $\psi(t)$ une fonction indéfiniment dérivable de la variable complexe t, dont les dérivées d'ordre p tendent vers zéro comme

$|t|^{-p}$ lorsque t tend vers l'infini. Soit $\delta_1(s)$ réelle non négative, avec $\delta_1(s) \in {}_{-1}\theta_r(s\,;\,\delta_o)$. Soit $\Psi(s, t) = 0$ lorsque $\delta_1(s) = 0$, et

$$\Psi(s, t) = \delta_1(s)^{r+1}\psi(t/\delta_1)$$

lorsque $\delta_1(s) \neq 0$. La fonction Ψ appartient à ${}_{-1}\theta_r(s, t\,;\,\delta_o(s, t))$.

C'est évident lorsque $r = 0$; Ψ est continue, et est inférieure à $MM'\delta_o$ si M est la borne supérieure de ψ et M' celle de δ_1/δ_o. (Ces deux fonctions sont bornées en vertu de nos hypothèses). Par conséquent, $\Psi \in {}_{-1}\theta_0(s, t\,;\,\delta_o)$.

Soit $r > 0$. Raisonnons par récurrence sur r. La fonction Ψ est évidemment dérivable sur $\mathbf{C}^{n+1}$. Soit Ψ' une dérivée partielle de Ψ par rapport à la partie réelle ou imaginaire pure de l'un de ses arguments. Il est immédiat que $\Psi'(s, t) = 0$ si $\delta_1(s) = 0$, et

$$\Psi'(s, t) = \delta_1(s)^r\psi_1(t/\delta_1)\rho(s)$$

si $\delta_1(s) \neq 0$, la fonction $\psi_1(t)$ étant une nouvelle fonction indéfiniment dérivable de t dont les dérivées d'ordre p tendent vers zéro comme $|t|^{-p}$ à l'infini, tandis que $\rho(s)$ est ou bien égal à une dérivée de $\delta_1(s)$ (si nous dérivons par rapport à la partie réelle ou imaginaire pure d'une variable $s_1, \ldots, s_n$) ou alors égal à l'unité (si nous dérivons par rapport à la partie réelle ou imaginaire pure de t). Par conséquent, $\Psi' \in {}_{-1}\theta_{r-1}(s, t\,;\,\delta_o)$.

Nous montrons ainsi que $\Psi \in {}_{-1}\theta_0(s, t\,;\,\delta_o)$, et que les dérivées premières de Ψ appartiennent à ${}_0\theta_{r-1}(s, t\,;\,\delta_o)$. Par conséquent, $\Psi \in {}_{-1}\theta_r(s, t\,;\,\delta_o)$.

4. Nous devrons appliquer ce lemme dans deux cas particuliers. Soit $\varphi(t)$ une fonction indéfiniment dérivable à support compact, égale à l'unité au voisinage de l'origine, et soit $\psi(t) = (1 - \varphi(t))/t$. Soit d'autre part $\delta_1(s) \in \Delta_r(a\,;\,\mathbf{A}/\mathfrak{b})$.

Posons $\delta(s, t) = \rho(s, t) = 0$ si $\delta_1(s) = 0$, et, si $\delta_1(s) \neq 0$:

$$\delta(s, t) = \delta_1(s)^{r+1}\varphi(t/\delta_1)$$

$$\rho(s, t) = \delta_1(s)^{r+1}\psi(t/\delta_1) = \delta_1(s)^{r+2}\frac{1 - \varphi(t/\delta_1)}{t}.$$

Les fonctions $\delta(s, t)$ et $\rho(s, t)$ appartiennent à ${}_{-1}\theta_r(s, t\,;\,\delta_o)$. Appliquant d'autre part le résultat du numéro 1 de ce paragraphe, nous montrons que $\delta(s, t) \in \Delta(a, O\,;\,\mathbf{A}/\mathfrak{b})$. Par conséquent, $\delta(s, t) \in \Delta_r(a, O\,;\,\mathbf{A}/\mathfrak{b})$.

Soit ensuite $(u, v, y) \in \Xi(a\,;\,\delta_1{}^{r+2}\,;\,\mathbf{A}/\mathfrak{b})$. Définissons des fonctions U, V, W, Y par $U(s, t) = u(s)$, $V(s, t) = v(s)$ pour tout $(s, t) \in \mathbf{C}^{n+1}$, et $W(s, t) = Y(s, t) = 0$ lorsque $\delta_1(s) = 0$, et

$$W(s, t) = \frac{\varphi(t/\delta_1) - 1}{t}\,y(s)$$

$$Y(s, t) = \varphi(t/\delta_1)\,y(s)$$

lorsque $\delta_1(s) \neq 0$.

Il est évident que les fonctions $U_i(s, t) \in {}_0\theta_r(s, t\,;\,\delta_o\,;\,\mathbf{A})$ et que $V(s, t) \in {}_0\theta_r(s, t\,;\,\delta_o\,;\,\mathfrak{b})$. Nous voulons montrer que $W(s, t) \in {}_0\theta_r(s, t\,;\,\delta_o\,;\,\mathbf{A})$ et que $Y(s, t) \in \delta(s, t)\,{}_0\theta_r(s, t\,;\,\delta_o\,;\,\mathbf{A})$.

Par hypothèse, $y(s) = \delta_1(s)^{r+2}\,y_o(s)$ avec $y_o(s) \in {}_0\theta_r(s\,;\,\delta_o\,;\,\mathbf{A})$. Et, $Y(s, t) = \delta(s, t)\,\delta_1(s)y_o(s)$, $W(s, t) = \rho(s, t)y_o(s)$.

Le résultat requis est effectivement démontré.

Finalement, l'équation

$$\langle a - s,\ U\rangle - tW + V + Y = 1$$

est vérifiée sur $\mathbf{C}^{n+1}$. Par conséquent, $(U, W, V, Y) \in \Xi(a, O\,;\,\delta\,;\,\mathbf{A}/\mathfrak{b})$.

5. Conservons les notations de numéro 4. La forme

$$\tau = \frac{(n + k + 1)!}{k!}\ \text{mult sym}\ (Y^{*k} * d''U_1 * \ldots * d''U_n * d''W)$$

appartient à $J^*_{-k}[\omega(a, O\,;\,s, t\,;\,\delta\,;\,\mathbf{A}/\mathfrak{b})]$ puisque $(U, W, V, Y) \in \Xi(a, O\,;\,\delta\,;\,\mathbf{A}/\mathfrak{b})$. Mais $d''U_1 \ldots d''U_n = d''u_1 \ldots d''u_n$ est de degré n en $d\bar{s}_1 \ldots d\bar{s}_n$. Nous pouvons écrire $d''_t W$ pour $d''W$, si $d''_t f(s, t) = \partial_{\bar{t}} f(s, t) \cdot d\bar{t}$. Et

$$d''_t W = d''_t\left[\frac{\varphi(t/\delta_1) - 1}{t}\,y\right] = \frac{d''_t\varphi(t/\delta_1)}{t}\,y.$$

La fonction $\varphi(t/\delta_1)$ est à valeurs scalaires ; la forme $d''_t\,\varphi(t/\delta_1)/t$ est à coefficients scalaires. L'une et l'autre peut être mise en évidence, en tenant compte des lois d'anticommutativité des formes extérieures :

$$\tau = \frac{(n + k + 1)!}{k!}\ \text{mult sym}\ (y^{*k+1} * d''u_1 * \ldots * d''u_n)\ \frac{\varphi^k(t/\delta_1)\ d''_t\ \varphi(t/\delta_1)}{t}$$

$$= \frac{(n + k + 1)!}{(k + 1)!}\ \text{mult sym}\ (y^{*k+1} * d''u_1 * \ldots * d''u_n)\ \frac{d''_t\varphi'(t/\delta_1)}{t}$$

si $\varphi'(t) = \varphi(t)^{k+1}$. La fonction $\varphi'(t)$ est une nouvelle fonction indéfiniment dérivable à support compact et égale à l'unité sur un voisinage de l'origine.

6. Soit maintenant $F(s, t) \in \mathcal{O}_r(s, t ; \delta ; \mathbf{A}/\mathfrak{b})$. Alors $F(s, O) = F_1(s) \in \mathcal{O}_r(s ; \delta_1 ;)\mathbf{A}/\mathfrak{b}$, et

$$\mathbf{S}(F ; a, 0 ; \mathbf{A}/\mathfrak{b}) = \xi + \mathfrak{b}$$

si

$$\xi = \frac{1}{(2\pi i)^{n+1}} \int F(s, t)\, \tau\, ds_1 \dots ds_n\, dt$$

$$= \frac{1}{(2\pi i)^{n+1}} \frac{(n+k+1)!}{(k+1)!} \int G(s) \text{ mult sym } (y^{*k+1} * d''u_1 * \dots * d''u_n) \cdot ds_1 \dots ds_n$$

en posant

$$G(s) = \frac{1}{2\pi i} \int F(s, t)\, d''_t \varphi'(t/\delta_1)\, dt/t.$$

Mais une intégration par parties montre que

$$G(s) = F(s, O) - \frac{1}{2\pi i} \int d''_t F(s, t) \varphi'(t/\delta_1) dt/t$$

$$= F(s, O) - \frac{1}{2\pi i} \int \partial_{\bar t} F(s,t) \varphi'(t/\delta_1) d\bar t dt/t$$

et, évidemment :

$$H(s) = \frac{1}{2\pi i} \int \partial_{\bar t} F(s, t) \varphi'(t/\delta_1) d\bar t dt \in \theta_{r-1}(s ; \delta_1 ; \mathfrak{b})$$

puisque $\partial_{\bar t} F(s, t) \in \theta_{r-1}(s, t ; \delta ; \mathfrak{b})$.
Par conséquent

$$\mathbf{S}(F ; a, O ; \mathbf{A}/\mathfrak{b}) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \frac{(n+k+1)!}{(k+1)!} \int G(s) \text{ mult sym } (y^{*k+1} * du_1 * \dots * du_n) \cdot ds_1 \dots ds_n + \mathfrak{b}$$

$$= \frac{1}{(2\pi i)^n} \frac{(n+k+1)!}{(k+1)!} \int F(s) \text{ mult sym } (y^{*k+1} * du_1 * \dots * du_n) ds_1 \dots ds_n + \mathfrak{b}$$

$$= \mathbf{S}(F ; a ; \mathbf{A}/\mathfrak{b}).$$

35. Applications linéaires.

1. Soit T une application linéaire de $\mathbf{C}^n$ dans $\mathbf{C}^{n'}$. Alors, $Ts = s' = (s'_1, \dots, s'_{n'})$ avec

$$s'_i = \Sigma_1^n T_{ij} s_j + \sigma_i$$

si $s = (s_1, \dots, s_n)$, et si T_{ij}, σ_i sont $nn' + n'$ nombres complexes convenables. Soient $a_1, \dots, a_n$ dans le centre de $\mathbf{A}$, puis $a = (a_1, \dots, a_n)$ et $Ta = a' = (a'_1, \dots, a'_{n'})$ avec $a'_i = \Sigma T_{ij} a_j + \sigma_i$. Les éléments $a'_1, \dots, a'_{n'}$ appartiennent également au centre de $\mathbf{A}$.
Soit $\mathfrak{b}$ un idéal bilatère complet de $\mathbf{A}$. L'énoncé suivant établit l'invariance du calcul symbolique pour la transformation T :

Soit $\delta'(s')$ une fonction Lipschitzienne définie sur $\mathbf{C}^{n'}$, et $\delta(s) = \delta'(Ts)$. Pour que $\delta'(s') \in \Delta(a' ; \mathbf{A}/\mathfrak{b})$, il faut et il suffit que $\delta(s) \in \Delta(a ; \mathbf{A}/\mathfrak{b})$. Considérons ensuite une fonction $F'(s') \in \mathcal{O}_r(s' ; \delta' ; \mathbf{A}/\mathfrak{b})$ et posons $F(s) = F'(Ts)$. Alors, $F(s) \in \mathcal{O}_r(s ; \delta ; \mathbf{A}/\mathfrak{b})$, et

$$S(F' ; a' ; \mathbf{A}/\mathfrak{b}) = \mathbf{S}(F ; a ; \mathbf{A}/\mathfrak{b}).$$

Nous appellerons P(T) la proposition que nous venons d'énoncer.

2. Soient T', T'' deux applications linéaires, de $\mathbf{C}^n$ dans $\mathbf{C}^{n'}$, et de $\mathbf{C}^{n'}$ dans $\mathbf{C}^{n''}$, et soit $T''' = T'' \circ T'$. La proposition P(T''') est vraie si P(T') et P(T'') sont vraies.
Soit ensuite T une application linéaire, de rang r, de $\mathbf{C}^n$ dans $\mathbf{C}^{n'}$. Alors T peut être construite en composant successivement :

a. une transformation linéaire inversible.

b. une projection $(s_1, \dots, s_n) \to (s_1, \dots, s_r)$.

c. une injection $(s_1, \dots, s_r) \to (s_1, \dots, s_r, 0, \dots, 0) \in C^{n'}$.

d. une transformation linéaire inversible.

Il suffira donc de démontrer P(T) dans les trois cas particuliers a, b, c.

3. Considérons pour commencer la projection T : $(s_1, \dots, s_n) \to (s_1, \dots, s_r)$. Soit $a = (a_1, \dots, a_n)$; $Ta = (a_1, \dots, a_r)$. Nous avons montré (paragraphe 32.2) que $\delta'(s'_1, \dots, s'_r) \in \Delta(Ta ; \mathbf{A}/\mathfrak{b})$ si

et uniquement si la fonction $\delta(s_1, \ldots, s_n) = \delta'(s_1, \ldots, s_r) \in \Delta(a\,;$ $\mathbf{A}/\mathfrak{b})$, et $\delta(s) = \delta'(\mathrm{T}s)$. La première partie de la proposition P(T) est ainsi démontrée.

Soit ensuite $\mathrm{F}'(s') \in \mathcal{O}_r(s'\,;\ \mathbf{A}/\mathfrak{b})$, puis $\mathrm{F}(s) = \mathrm{F}'(\mathrm{T}s)$. Alors F(s) est le produit direct de $\mathrm{F}'(s')$ par la fonction des variables $s_{r+1}, \ldots, s_n$, qui est constante et égale à l'unité. Appliquant le résultat du paragraphe 33.2, nous montrons que

$$\begin{aligned}\mathbf{S}(\mathrm{F}\,;a\,;\mathbf{A}/\mathfrak{b}) &= \mathbf{S}(\mathrm{F}'\,;a'\,;\mathbf{A}/\mathfrak{b})\cdot \mathrm{S}(1\,;a_{r+1},\ldots,a_n\,;\mathbf{A}/\mathfrak{b})\\ &= \mathbf{S}(\mathrm{F}'\,;a'\,;\mathbf{A}/\mathfrak{b}).\end{aligned}$$

Et démontrons ainsi la seconde partie de P(T).

Étudions ensuite l'injection $(s_1, \ldots, s_r) \to (s_1, \ldots, s_r, 0, \ldots, 0)$. Celle-ci est la composée de $n' - r$ injections telles que $(s_1, \ldots, s_k) \to (s_1, \ldots, s_k, 0)$. Il suffira de démontrer P(T) lorsque T est cette injection.

Mais, dans ce cas particulier, P(T) est précisément la proposition démontrée au paragraphe 34. La démonstration est donc achevée dans ce second cas particulier.

5. Il reste à considérer le cas où T est inversible. Soit T^{-1} son inverse, T_o sa partie homogène, et T_o^* la transposée de l'inverse de T_o. Soit $\delta(s) \in \Delta(a\,;\ \mathbf{A}/\mathfrak{b})$. Nous pouvons trouver $u_1, \ldots, u_m, y_o$ dans $\Theta(s\,;\delta_o\,;\mathbf{A})$, et une fonction v dans $\Theta(s\,;\delta_o\,;\mathfrak{b})$ telles que

$$\langle a - s, u\rangle + v + \delta(s)y_o(s) = 1.$$

Posons

$$u'(s) = \mathrm{T}_o^*u(\mathrm{T}^{-1}s'),\quad v'(s') = v(\mathrm{T}^{-1}s'),\quad y_o'(s') = y_o(\mathrm{T}^{-1}s').$$

Alors $u_1', \ldots, u_n', y_o'$ appartiennent à $\Theta(s'\,;\delta_o\,;\mathbf{A})$ tandis que v' appartient à $\Theta(s'\,;\delta_o\,;\mathfrak{b})$. D'autre part, ces fonctions vérifient

$$\langle \mathrm{T}a - s', u'(s')\rangle + v(s') + \delta(\mathrm{T}^{-1}s')y_o'(s') = 1$$

pour tout s'. Considérons en effet une valeur de s', et soit $s = \mathrm{T}^{-1}s'$. Le premier membre est égal à

$$\langle \mathrm{T}a - \mathrm{T}s, \mathrm{T}_o^*u(s)\rangle + v(s) + \delta(s)y_o(s) = 1.$$

Mais $\mathrm{T}a - \mathrm{T}s = \mathrm{T}_o(a-s)$, et $\langle \mathrm{T}_o(a-s), \mathrm{T}_o^*u(s)\rangle = \langle a - s, u(s)\rangle$. Le premier membre est effectivement égal à l'unité.

Par conséquent, $\delta'(s') \in \Delta(a'\,;\mathbf{A}/\mathfrak{b})$ si $\delta(s) = \delta'(\mathrm{T}s) \in \Delta(a\,;\mathbf{A}/\mathfrak{b})$.

On démontre la réciproque d'une manière analogue en considérant la transformation linéaire T^{-1}. La première partie de P(T) est donc vraie.

Supposons que $\delta(s) \in \Delta_r(a\,;\ \mathbf{A}/\mathfrak{b})$, et soit $\delta'(s') = \delta(\mathrm{T}^{-1}s)$. Alors $\delta'(s') \in \Delta_r(a\,;\mathbf{A}/\mathfrak{b})$. Soit $(u, v, y) \in \Xi(a\,;\delta\,;\mathbf{A}/\mathfrak{b}$, et posons

$$u'(s') = \mathrm{T}_o^*u(\mathrm{T}^{-1}s'),\quad v'(s') = v(\mathrm{T}^{-1}s'),\quad y_o'(s') = y_o(\mathrm{T}^{-1}s').$$

Alors $(u', v', y') \in \Xi(a'\,;\delta'\,;\mathbf{A}/\mathfrak{b})$. Définissons $g(s)$, $g'(s')$ par

$$\frac{(n+k)!}{k!}\text{ mult sym }(y^{*k} * d''u_1 * \ldots * d''u_n) = g(s)d\bar{s}_1 \ldots d\bar{s}_n,$$

$$\frac{(n+k)!}{k!}\text{ mult sym }(y'^{*k} * d''u_1' * \ldots * d''u_n') = g'(s')d\bar{s}_1' \ldots d\bar{s}_n'.$$

Il est évident que

$$g'(s') = |\,\text{dét } \mathrm{T}_o|^{-2}g(\mathrm{T}^{-1}s)$$

si dét T_o est le déterminant (non nul) de T_o.

Soit $\mathrm{F}(s) \in \mathcal{O}_r(s\,;\ \delta\,;\ \mathbf{A}/\mathfrak{b})$, et $\mathrm{F}'(s') = \mathrm{F}(\mathrm{T}^{-1}s')$. Il vient

$$\begin{aligned}\mathbf{S}(\mathrm{F}'\,;a'\,;\mathbf{A}/\mathfrak{b}) &= \frac{1}{(2\pi i)^n}\int \mathrm{F}'(s')g'(s')ds_1' \ldots ds_n'd\bar{s}_1' \ldots d\bar{s}_n'\\ &= \frac{1}{(2\pi i)^n}\int |\,\text{dét } \mathrm{T}_o|^{-2}\mathrm{F}(\mathrm{T}^{-1}s)g(\mathrm{T}^{-1}s)ds_1' \ldots ds_n'd\bar{s}_1' \ldots d\bar{s}_n'\\ &= \frac{1}{(2\pi i)^n}\int \mathrm{F}(s)g(s)ds_1 \ldots ds_nd\bar{s}_1d\bar{s}_n\\ &= \mathbf{S}(\mathrm{F}\,;\ a\,;\ \mathbf{A}/\mathfrak{b}).\end{aligned}$$

La proposition P(T) est vraie si T est linéaire inversible. Elle l'est donc quelle que soit la transformation linéaire T.

36. Propriété multiplicative.

Les diverses propriétés de l'application $\mathrm{F} \to \mathbf{S}(\mathrm{F}\,;\ a\,;\mathbf{A}/\mathfrak{b})$ permettent enfin d'établir que cette application est un homomorphisme de $\mathcal{O}_r(s\,;\ \delta\,;\ \mathbf{A}/\mathfrak{b})$ dans $\mathbf{A}/\mathfrak{b}$.

Il suffira de montrer que

$$\mathrm{S}(\mathrm{FG}\,;\ a\,;\ \mathbf{A}/\mathfrak{b}) = \mathbf{S}(\mathrm{F}\,;\ a\,;\ \mathbf{A}/\mathfrak{b}) \cdot \mathbf{S}(\mathrm{G}\,;\ a\,;\ \mathbf{A}/\mathfrak{b}).$$

Soit $H(s, t) = F(s)\,G(t)$, et T l'application linéaire $(s_1, \dots, s_n) \to (s_1, \dots, s_n, s_1, \dots, s_n)$ de $\mathbf{C}^n$ dans $\mathbf{C}^{2n}$. Alors $F(s)G(s) = H(Ts)$. D'autre part $Ta = (a, a)$, et $\mathbf{S}(H\,;\,a, a\,;\,\mathbf{A}/\mathfrak{b}) = \mathbf{S}(FG\,;\,a\,;\,\mathbf{A}/\mathfrak{b})$.

Mais $H(s, t)$ est le produit direct de $F(s)$ et $G(t)$:

$$\mathbf{S}(H\,;\,a, a\,;\,\mathbf{A}/\mathfrak{b}) = \mathbf{S}(F\,;\,a\,;\,\mathbf{A}/\mathfrak{b})\mathbf{S}(G\,;\,a\,;\,\mathbf{A}/\mathfrak{b}).$$

La démonstration est ainsi achevée.

CHAPITRE VII

APPLICATIONS

Ce chapitre contient un certain nombre d'applications des résultats établis dans ce travail. Nous ne chercherons pas à établir des théorèmes particulièrement fins. Nous essaierons plutôt d'indiquer quels problèmes nos méthodes permettent d'étudier.

37. Quelques cas particuliers.

Nous avons étudié un cas plus général que celui que l'on rencontre dans bien des applications. Il suffira fréquemment de se limiter au cas où l'algèbre **A** est commutative, ou au cas où l'idéal b est nul. Enfin, dans certains cas, il ne sera pas nécessaire de connaître le spectre de $\Delta(a\,;\,\mathbf{A}/\mathfrak{b})$, il suffira de savoir quels ensembles ont leur fonction caractéristique dans $\Delta(a\,;\,\mathbf{A}/\mathfrak{b})$.

Des simplifications se présentent dans chacun de ces cas. Nous indiquons ces simplifications ici.

1. *Algèbres commutatives*. Supposons l'algèbre **A** commutative. Elle coincide avec son centre, les éléments $a_1, \dots, a_n$ peuvent être choisis arbitrairement dans **A**.

L'espace $\mathbf{A}^{*n}$ s'identifie avec **A**, les opérateurs mult, mult_{ϖ}, sym, p sont alors identifiés avec l'application identique, $u * v$ est identifié avec uv. La classe de cohomologie $J^*_{-k}[\omega(a\,;\,s\,;\,\delta\,;\,\mathbf{A}/\mathfrak{b})$ contient la forme [1]

$$\frac{(n+k)!}{k!}\,y_k\,du_1 \dots du_n$$

[1] Tous les produits de formes différentielles sont supposés être des produits extérieurs.

si $\mathbf{S}(u, v, y) \in \Xi(a\,;\delta\,;\mathbf{A}/\mathfrak{b})$ et $\mathbf{S}(\mathrm{F}\,;a\,;\mathbf{A}/\mathfrak{b}) = \xi + \mathfrak{b}$ si

$$\xi = \frac{1}{(2\pi i)^n}\frac{(n+k)!}{k!}\int \mathrm{F}(s)y^k du_1 \dots du_n ds_1 \dots ds_n$$

avec k suffisamment grand.

2. *Cas où* $\mathfrak{b} = 0$. Supposons l'idéal $\mathfrak{b}$ nul. La constante nulle n'appartient pas à $\Delta(a\,;\mathbf{A})$. Soit $\delta \in \Delta_r(a\,;\mathbf{A})$. Le domaine de définition d'un élément de $\Theta(s\,;\delta\,;\mathbf{A})$, de $\theta_r(s\,;\delta\,;\mathbf{A})$, ou de $\mathcal{O}_r(s\,;\delta\,;\mathbf{A})$ est non vide.

L'algèbre $\mathcal{O}_r(s\,;\delta\,;\mathbf{A})$ est l'algèbre des fonctions holomorphes de s sur l'ouvert $\delta(s) \geqslant 0$, à valeur dans $\mathbf{A}$, qui appartiennent à $\Theta(s\,;\delta\,;\mathbf{A})$. Cette algèbre ne dépend pas de r. Nous l'appellerons $\mathcal{O}(s\,;\delta\,;\mathbf{A})$.

La représentation $\mathrm{F}(s) \to \mathbf{S}(\mathrm{F}\,;a\,;\mathbf{A})$ applique $\mathcal{O}(s\,;\delta\,;\mathbf{A})$ dans $\mathbf{A}$. C'est une application bornée, en effet :

$$\mathbf{S}(\mathrm{F}\,;a\,;\mathbf{A}) = \frac{1}{(2\pi i)^n}\frac{(n+k)!}{k!}\int \mathrm{F}(s)\,\text{mult sym}\,(y^{*k} * du_1 * \dots * du_n)ds_1 \dots ds_n$$

si k est suffisamment grand, et k peut être choisi indépendant de F sur chaque borné de $\mathcal{O}(s\,;\delta\,;\mathbf{A})$.

Supposons que $(u, 0, y) \in \Xi(a\,;\delta^k\,;\mathbf{A})$. Alors $(u, 0, y) \in \Xi(a\,;\delta\,;\mathbf{A})$. La classe de cohomologie $\mathrm{J}^*_{-k}[\omega(a\,;s\,;\delta\,;\mathbf{A})]$ contient la forme

$$\frac{(n+k)!}{k!}\,\text{mult sym}\,(y^{*k} * du_1 * \dots * du_n).$$

Mais reprenons l'équation 28.4, avec $v = 0$, et donc $\psi_k = 0$

$$d\varphi_{k'} = k' \cdot 1 * \text{sym}\,(y^{*k'-1} * du_1 * \dots * du_n) - (n+k')\,\text{sym}\,(y^{*k'} * du_1 * \dots * du_n).$$

Le premier membre est cohomologue à zéro dès que $k' \geqslant 1$. Les diverses formes

$$\frac{(n+k')!}{k'!}\,\text{mult sym}\,(y^{*k'} * du_1 * \dots * du_n)\,;\ k' \geqslant 0$$

sont donc cohomologues. La forme

$$n!\,\text{mult sym}\,(du_1 * \dots * du_n)$$

appartient à la classe de cohomologie $\mathrm{J}^*_{-k}[\omega(a\,;s\,;\delta\,;\mathbf{A})]$ si $(u, 0, y) \in \Xi(a\,;\delta^k\,;\mathbf{A})$. Lorsque $\mathbf{A}$ est commutative, cette classe de cohomologie contient même

$$n!\,du_1 \dots du_n.$$

3. *Ensembles spectraux.* Soient $a_1, \dots, a_n$ des éléments du centre de l'algèbre complète $\mathbf{A}$, et $\mathfrak{b}$ un idéal complet de $\mathbf{A}$. Soit S une partie de $\mathbf{C}^n$. Nous dirons que S est spectrale pour a modulo $\mathfrak{b}$ dans $\mathbf{A}$, que $\mathrm{S} \in \sigma(a\,;\mathbf{A}/\mathfrak{b})$, si sa fonction caractéristique $\chi_{\mathrm{S}}(s)$ appartient à $\Delta(a\,;\mathbf{A}/\mathfrak{b})$. (La fonction $\chi_{\mathrm{S}}(s)$ est égale à l'unité sur S et nulle hors de S.)

Certaines propriétés de $\sigma(a\,;\mathbf{A}/\mathfrak{b})$ sont évidentes :

a. $\mathrm{S} \in \sigma(a\,;\mathbf{A}/\mathfrak{b})$ si et uniquement si l'on peut trouver une fonction $\delta(s) \in \Delta(a\,;\mathbf{A}/\mathfrak{b})$ qui s'annule hors de S.

b. $\sigma(a\,;\mathbf{A}/\mathfrak{b})$ est un filtre, à base ouverte, sur $\mathbf{C}^n$.

c. Ce filtre est propre, $\varnothing \notin \sigma(a\,;\mathbf{A}/\mathfrak{b})$, si l'idéal $\mathfrak{b}$ est propre (si $1 \notin \mathfrak{b}$).

Soit $\mathrm{S} \in \sigma(a\,;\mathbf{A}/\mathfrak{b})$. Alors $\delta_{\mathrm{S}}(s) \in \Delta(a\,;\mathbf{A}/\mathfrak{b})$ si

$$\delta_{\mathrm{S}}(s) = \inf\,(1, |s|^{-1}, |s - t|\,/t \notin \mathrm{S}).$$

En effet, $\inf\,(1, |s|^{-1}) \geqslant \delta_o(s)$; cette fonction appartient donc à $\Delta(a\,;\mathbf{A}/\mathfrak{b})$. D'autre part, $\inf\,(1, |s - t|\,/t \notin \mathrm{S})$ est la plus grande fonction Lipschitzienne de constante 1 majorée par $\chi_{\mathrm{S}}(s)$. Cette fonction appartient donc à $\Delta(a\,;\mathbf{A}/\mathfrak{b})$. Enfin, $\delta_{\mathrm{S}}(s)$ est la borne inférieure de ces deux fonctions, et appartient également à $\Delta(a\,;\mathbf{A}/\mathfrak{b})$.

On peut remarquer que $\delta_{\mathrm{S}}(s)$ est égal, soit à l'unité, soit à $|s|^{-1}$, soit à la distance de s au complément de S, suivant que l'un, ou l'autre, ou le troisième de ces nombres est le plus petit.

38. Les algèbres de Banach.

Les algèbres de Banach sont parmi les algèbres topologiques les plus importantes, et les mieux étudiées. On peut se demander à quoi la théorie des chapitres IV, V, VI se ramène lorsque $\mathbf{A}$ est une algèbre de Banach.

Lorsque $\mathbf{A}$ est commutative, ces résultats se ramènent à des théorèmes classiques, ou au moins déjà publiés (voir [5] et [12]). Lorsque $\mathbf{A}$ n'est pas commutative, ils peuvent être démontrés à l'aide de raisonnements relativement simples, et apparentés à ceux de Gelfand. Nous montrerons ici comment l'on peut éviter d'utiliser les raisonnements plus fins développés dans cette dissertation, lorsque $\mathbf{A}$ est une algèbre de Banach.

Nous ferons des hypothèses même un peu plus générales. Les raisonnements seront valables dès que $\mathbf{A}$ est une algèbre localement convexe, quasi-complète, à produit continu, et telle que a^{-1} soit défini sur un voisinage de l'unité et tende vers 1 lorsque a tend vers 1. Une telle algèbre sera dite à inverse continu, ou à i. c. (cf. [13]). Toute algèbre de Banach est à i. c.

On sait que l'ensemble des inversibles d'une algèbre à i. c. est ouvert et que la topologie de l'algèbre définit sur cet ensemble une structure de groupe multiplicatif. Si $\mathbf{A}$ est à i. c., et si $a \in \mathbf{A}$, nous pouvons trouver un complexe s tel que $a - s$ n'ait pas d'inverse. Le quotient d'une algèbre à i. c. par un idéal fermé est à i. c.

1. *Les idéaux centraux maximaux.* Par définition, un idéal central de $\mathbf{A}$ sera un idéal de $\mathbf{A}$ qui a ses générateurs dans le centre de $\mathbf{A}$. Nous étudierons les éléments maximaux de l'ensemble des idéaux centraux propres de $\mathbf{A}$. *Ces idéaux centraux maximaux sont les idéaux propres de* $\mathbf{A}$ *qui sont engendrés par un idéal maximal du centre.* L'ensemble des idéaux centraux maximaux est ainsi en correspondance biunivoque naturelle avec l'ensemble des idéaux maximaux du centre qui engendrent un idéal propre de $\mathbf{A}$.

Nous appellerons $\mathbf{A}'$ le centre de $\mathbf{A}$. Un idéal central, α, de $\mathbf{A}$ est un idéal à générateurs dans $\mathbf{A}'$. L'idéal α est alors bilatère, et est engendré par $\alpha \cap \mathbf{A}' = \alpha'$.

L'idéal α est central maximal s'il est propre, et si α' est un idéal maximal de $\mathbf{A}'$. Soit en effet β un idéal central, $\beta \supseteq \alpha$, et $\beta' = \beta \cap \mathbf{A}'$. Alors $\beta' \supseteq \alpha'$, avec α' maximal : $\beta' = \alpha'$. D'autre part, β est central, est donc engendré par $\beta' = \alpha'$. Mais α' engendre α, $\beta = \alpha$. L'idéal α est effectivement central maximal.

Réciproquement, $\alpha' = \alpha \cap \mathbf{A}'$ est un idéal maximal de $\mathbf{A}'$ si α est central maximal — à priori, α' pourrait ne pas être maximal, mais être tel que toute partie de $\mathbf{A}'$ contenant strictement α' engendre l'idéal unité de $\mathbf{A}$.

L'unité de $\mathbf{A}$ a un voisinage dont tous les éléments sont inversibles, qu'aucun idéal propre ne rencontre donc. La fermeture $\bar{\alpha}$ de α ne contient pas l'unité, et est donc un idéal propre. Et $\bar{\alpha} \cap \mathbf{A}' \supseteq \alpha \cap \mathbf{A}'$. L'idéal β engendré par $\bar{\alpha} \cap \mathbf{A}'$ est un idéal central, qui est propre puisque $\beta \subseteq \bar{\alpha}$, mais contient l'idéal central maximal α ; $\beta = \alpha$. Et

$$\alpha \cap \mathbf{A}' \subseteq \bar{\alpha} \cap \mathbf{A}' \subseteq \beta \cap \mathbf{A}' = \alpha \cap \mathbf{A}'.$$

Par conséquent $\alpha \cap \mathbf{A}' = \bar{\alpha} \cap \mathbf{A}'$ est fermé.

Considérons le quotient $\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}/\bar{\alpha}$. Soit $\mathbf{A}_1'$ l'image quotient de $\mathbf{A}'$ dans $\mathbf{A}_1$. L'idéal α étant central maximal, l'algèbre $\mathbf{A}_1$ n'a pas d'idéal à base dans $\mathbf{A}_1'$ autre que l'idéal nul et l'idéal unité. Un $x \in \mathbf{A}_1'$ est nul s'il n'est pas inversible.

L'algèbre $\mathbf{A}_1'$ est de dimension 1. En effet, $\mathbf{A}_1$ est à i. c. A tout $x \in \mathbf{A}_1'$ correspond un $s \in \mathbf{C}$ tel que $x - s$ n'ait pas d'inverse. Mais $x - s \in \mathbf{A}_1'$ et est nul puisqu'il n'a pas d'inverse, $x = s \cdot 1$. L'unité est une base de l'espace vectoril $\mathbf{A}_1'$.

L'idéal $\alpha \cap \mathbf{A}'$ est de codimension 1 et donc maximal dans $\mathbf{A}'$.

2. *Le spectre central de* $\mathbf{A}$. Nous appellerons le « spectre central » de l'algèbre $\mathbf{A}$ l'ensemble de ses idéaux centraux maximaux. Nous savons que l'application $\psi : \alpha \to \alpha \cap \mathbf{A}'$ est une injection du spectre central de $\mathbf{A}$ dans le spectre de $\mathbf{A}'$. Montrons que l'image est une partie fermée du spectre de $\mathbf{A}'$, qui contient sa frontière de Šilov. Le spectre central de $\mathbf{A}$ sera muni d'une topologie compacte, telle que ψ soit un homéomorphisme de cet ensemble avec son image.

Considérons en effet un idéal maximal m de $\mathbf{A}'$, qui n'est pas dans l'image du spectre central de $\mathbf{A}$. L'idéal engendré par l'ensemble des $(x - \hat{x}(m))$ tels que $x \in \mathbf{A}'$ est l'idéal impropre de $\mathbf{A}$, si $x \to \hat{x}(m)$ est le caractère de $\mathbf{A}'$ qui s'annule sur m. Nous pouvons trouver $a_1, \ldots, a_n$ dans $\mathbf{A}'$ et $u_1, \ldots, u_n$ dans $\mathbf{A}$ tels que $\Sigma(a_i - \hat{a}_i(m))u_i = 1$. Soit m' un idéal de $\mathbf{A}'$, maximal et voisin de m ; alors $\hat{a}_i(m')$ est voisin de $\hat{a}_i(m)$ et $\Sigma(a_i - \hat{a}_i(m'))u_i = v$ est voisin de l'unité, a donc un inverse : $\Sigma(a_i - \hat{a}_i(m'))(u_i v^{-1}) = 1$; l'idéal m' n'est pas non plus dans l'image, celle-ci est fermée.

A tout $a \in \mathbf{A}'$, on associe une fonction $\hat{a}(m)$ sur le spectre (l'ensemble des idéaux maximaux) de $\mathbf{A}'$. La fonction $\hat{a}(m)$ prend les mêmes valeurs sur le spectre de $\mathbf{A}'$ et sur l'image du spectre central de $\mathbf{A}$. En effet, $\hat{a}$ prend la valeur s sur le spectre de $\mathbf{A}'$, et sur l'image de spectre central de $\mathbf{A}$, si et uniquement si $a - s$ n'a pas d'inverse dans $\mathbf{A}$. La frontière de Šilov du spectre de $\mathbf{A}'$, et celle de l'image du spectre central coincident.

Rappelons la définition de la frontière de Šilov du spectre : Soit X un compact, et F un ensemble de fonctions continues sur X séparant X. L'ensemble des parties fermées $Y \subseteq X$ telles que

$$\sup_{x \in Y} |f(x)| = \sup_{x \in Y} |f(x)|$$

pour tout $f \in F$ a un élément minimum. Cet élément minimum est la frontière de Silov de X pour l'ensemble de fonctions F.

Si X est le spectre d'une algèbre, $\mathbf{A}$, la « frontière de Silov » de X est sa frontière de Šilov relativement à l'ensemble des fonctions $\hat{a}(m) (a \in \mathbf{A})$.

3. *L'ensemble* $S(a_1, \dots, a_n)$. Soient $s_1, \dots, s_n$ des nombres complexes, et $a_1, \dots, a_n$ des éléments du centre de $\mathbf{A}$. Nous dirons que $(s_1, \dots, s_n) \in S(a_1, \dots, a_n)$ si l'idéal $(a_1 - s_1, \dots, a_n - s_n)$ est un idéal propre de $\mathbf{A}$. Pour que ce soit le cas, il faut et il suffit qu'il existe un idéal central maximal, m, de $\mathbf{A}$, tel que $s_i = \hat{a}_i(m)$. En effet, l'idéal $(a_1 - s_1, \dots, a_n - s_n)$ est un idéal central propre si $(s_1, \dots, s_n) \in S(a_1, \dots, a_n)$. Cet idéal est contenu dans un idéal central maximal, m, en vertu du théorème de Zorn, et $s_i = \hat{a}_i(m)$. Réciproquement, si m est central maximal, et si $s_i = \hat{a}_i(m)$, l'idéal $(a_1 - s_1, \dots, a_n - s_n)$ est contenu dans l'idéal propre m, et est donc propre.

L'ensemble $S(a_1, \dots, a_n)$ est l'image du spectre central de $\mathbf{A}$ par l'application $m \to (\hat{a}_1(m), \dots, \hat{a}_n(m))$. C'est une image continue de compact, et donc un ensemble compact.

4. Nous allons construire des fonctions $u_1(s), \dots, u_n(s)$, définies, indéfiniment dérivables, et vérifiant la relation $\langle s - a, u(s) \rangle = 1$ sur $\complement S(a_1, \dots, a_n)$, qui tendent vers zéro à l'infini comme $|s|^{-1}$.

Pour commencer, $\langle s - a, \bar{s} \rangle$ a un inverse si s est suffisamment grand, et, $\langle s - a, \bar{s} \rangle^{-1} = 0(|s|^{-2})$ à l'infini, puisque $|s|^{-2} \langle s - a, \bar{s} \rangle = 1 - |s|^{-2} \langle a, \bar{s} \rangle$ tend vers 1. Soit $g_\infty(s) = \bar{s} \langle s - a, \bar{s} \rangle^{-1}$ sur le domaine de définition du second membre. Alors, g_∞ est défini, indéfiniment dérivable au voisinage de l'infini, y vérifie la relation $\langle s - a, g_\infty(s) \rangle = 1$, et tend vers zéro comme $|s|^{-1}$ à l'infini.

Supposons ensuite que $(t_1, \dots, t_n) \in S(a_1, \dots, a_n)$. Alors, $\langle s - a, v_t \rangle = 1$ pour un choix convenable de $v_t = (v_{1t}, \dots, v_{nt}) \in \mathbf{A}^n$. Soit s voisin de t, $\langle s - a, v_t \rangle$ est voisin de 1, et est donc inversible. Posons $g_t = v_t \langle s - a, v_t \rangle^{-1}$. Alors, g_t est défini sur un voisinage de t, y vérifie la relation $\langle s - a, g_t \rangle = 1$, est indéfiniment dérivable sur son domaine de définition.

Soit $1 = \varphi_0(s) + \Sigma_1^\infty \varphi_k(s)$ une partition de l'unité sur $\complement S(a)$, le support de φ_0 étant compris dans le domaine de définition de $g_\infty(s)$, celui de φ_k dans le domaine de g_{t_k} pour un choix convenable de $t_k \in \complement S(a)$, la réunion des supports des fonctions $\varphi_k (k \neq 0)$ étant une partie bornée de $\mathbf{C}^n$. Posons $u(s) = \varphi_0(s) g_\infty(s) + \Sigma_1^\infty \varphi_k(s) g_{t_k}(s)$. Alors, $u(s) = (u_1(s), \dots, u_n(s))$ fournit évidemment une solution du problème posé.

5. *Le spectre* $\Delta(a_1, \dots, a_n ; \mathbf{A})$. *Une fonction* $\delta(s_1, \dots, s_n)$ *appartient à* $\Delta(a_1, \dots, a_n ; \mathbf{A})$ *si et uniquement si elle est bornée inférieurement sur un voisinage de* $S(a_1, \dots, a_n)$.

Supposons tout d'abord que $\delta(s) \in \Delta(a ; \mathbf{A})$. Soit $\delta' \leqslant \delta$, Lipschitzienne et appartenant à $\Delta(a ; \mathbf{A})$. La fonction δ' ne peut s'annuler sur $S(a ; \mathbf{A})$ puisque $\langle s - a, u \rangle = 1$ pour un choix convenable de u, si $\delta'(s) = 0$. Mais δ' est continue, et est donc bornée inférieurement sur un voisinage du compact $S(a ; \mathbf{A})$. La condition est nécessaire.

Un voisinage T de $S(a ; \mathbf{A})$ est spectral. Considérons en effet les fonctions $u_1, \dots, u_n$ définies ci-dessus au numéro 38.4 ; les fonctions $v_1, \dots, v_n$ égales à $u_1, \dots, u_n$ hors de T, et nulles sur T, sont bornées, et vérifient la relation $\langle a - s, v \rangle + \chi_T = 1$ si χ_T est la fonction caractéristique de T. Les fonctions χ_T, et $\epsilon \chi_T$ appartiennent donc à $\Delta(a ; \mathbf{A})$.

Supposons alors que $\delta(s)$ soit borné inférieurement au voisinage de $S(a ; \mathbf{A})$. Nous pouvons trouver un $\epsilon > 0$ et un voisinage T de $S(a ; \mathbf{A})$ tels que $\delta(s) \geqslant \epsilon \chi_T(s)$, si bien que $\delta(s) \in \Delta(a ; \mathbf{A})$.

Remarque. Nous pouvons ainsi déterminer $\Delta(a ; \mathbf{A})$ lorsque $S(a ; \mathbf{A})$ est connu. Réciproquement il est trivial que $S(a ; \mathbf{A})$ est connu lorsque $\Delta(a ; \mathbf{A})$ l'est. Les données de $\Delta(a ; \mathbf{A})$ et de $S(a ; \mathbf{A})$ sont équivalentes lorsque $\mathbf{A}$ est une algèbre à i. c.

39. L'ALGÈBRE DES FONCTIONS TEMPÉRÉES.

Soit **A** une algèbre complète à unité. Les variables complexes $z_1, \ldots, z_n$ appartiennent au centre de diverses algèbres de fonctions à valeurs dans **A**. Nous pouvons leur appliquer la théorie développée dans cette dissertation.

Nous étudions ici l'algèbre $\Theta(s\,;\,\delta\,;\,\mathbf{A})$. Nous supposons l'idéal $\mathfrak{b}$ nul. Cette hypothèse permet de simplifier certains raisonnements et d'éviter certaines difficultés.

1. Considérons n variables complexes, $z_1, \ldots, z_n$, et une fonction Lipschitzienne $\delta(z)$ qui est définie sur $\mathbf{C}^n$, réelle non négative bornée, et telle que $|z|\delta(z)$ soit borné sur $\mathbf{C}^n$. Nous pouvons définir $\Theta(z\,;\,\delta\,;\,\mathbf{A})$ si **A** est une algèbre complète, associative, à unité. Les variables $z_1, \ldots, z_n$ appartiennent au centre de cette nouvelle algèbre associative à unité.

$\delta(s) \in \Delta(z\,;\,\Theta(z\,;\,\delta\,;\,\mathbf{A}))$. En effet, la fonction $1/\delta(z)$, et les fonctions $g_i(s\,;\,z)$, nulles si $z = s$ et égales pour $s \neq z$

$$(\bar{s}_i - \bar{z}_i)\,\frac{\delta(s) - \delta(z)}{|s - z|^2}$$

appartiennent à $\Theta(s\,;\,\delta_o\,;\,\Theta(z\,;\,\delta\,;\,\mathbf{A})\,)$ et vérifient

$$\left\langle s - z, \frac{g(s,\,z)}{\delta(z)} \right\rangle + \frac{\delta(s)}{\delta(z)} = 1.$$

Réciproquement, soit $\delta'(s) \in \Delta(z\,;\,\Theta(z\,;\,\delta\,;\,\mathbf{A})\,)$. Nous pouvons trouver des éléments $u(s\,;\,z)$, $y_o(s\,;\,z)$ de $\Theta(s\,;\,\delta_o\,;\,\Theta(z\,;\,\delta\,;\,\mathbf{A}^1)$ qui vérifient

$$\langle s - z, u(s, z)\rangle + \delta'(s)y_o(s, z) = 1.$$

Et $y_o(z, z) = 1/\delta'(z)$. Mais $y_o(z, z) \in \Theta(z\,;\,\delta\,;\,\mathbf{A})$. Par conséquent, δ^N/δ' est borné si N est siffisamment grand. Nous pouvons trouver un N fini et un ϵ positif tels que $\delta' > \epsilon\delta^N$.

$\Delta(z\,;\,\Theta(z\,;\,\delta\,;\,\mathbf{A})\,)$ contient la fonction δ et toute fonction δ' telle que $\delta' \geqslant \epsilon\delta^N$ pour un ϵ positif et un N entier, mais ne contient aucune autre fonction que celles-ci.

2. Supposons maintenant que $f \in \Theta(s\,;\,\delta\,;\,\mathbf{A})$. Nous pouvons calculer $\mathbf{S}(f\,;\,z\,;\,\Theta(z\,;\,\delta\,;\,\mathbf{A}))$. C'est à priori un élément $g(z)$ de

$\Theta(z\,;\,\delta\,;\,\mathbf{A})$. Montrons que $f(z) = g(z)$. Il suffira de montrer que $f(z_o) = g(z_o)$ pour tout z_o tel que $\delta(z_o) > 0$.

L'application $f(z) \to f(z_o)$ est une représentation unitale bornée de $\Theta(z\,;\,\delta\,;\,\mathbf{A})$ dans **A** qui applique $z = (z_1, \ldots, z_n)$ sur $z_o = (z_{o1}, \ldots, z_{on})$ et applique par conséquent $\mathbf{S}(f\,;\,z\,;\,\Theta(z\,;\,\delta\,;\,\mathbf{A}))$ sur $\mathbf{S}(f\,;\,z_o\,;\,\mathbf{A})$:

$$\mathbf{S}(f\,;\,z_o\,;\,\mathbf{A}) = g(z_o).$$

Le spectre $\Delta(z_o\,;\,\mathbf{A})$ contient toutes les fonctions $\delta'(s)$ qui sont bornées inférieurement sur un voisinage de z_o. Considérons un $\delta'(s) \in \Delta(z_o\,;\,\mathbf{A})$ dont le support est un polydisque contenu dans le domaine $\delta(z) > 0$. Nous pouvons trouver des fonctions $G_1, \ldots, G_n$, appartenant à $\Theta(z\,;\,\delta'\,;\,\mathbf{A})$ telles que $f(z) - f(z_o) = \Sigma(z_i - z_{oi})G_i(z)$ sur l'ouvert $\delta' > 0$. Par conséquent, $\mathbf{S}(f(z) - f(z_o)\,;\,z_o\,;\,\mathbf{A}) = 0$, et

$$\mathbf{S}(f\,;\,z_o\,;\,\mathbf{A}) = f(z_o).$$

Nous démontrons ainsi que $f(z_o) = g(z_o)$ si $\delta(z_o) > 0$:

$$f(z) = \mathbf{S}(f\,;\,z\,;\,\Theta(z\,;\,\delta\,;\,\mathbf{A})).$$

3. Soit ensuite $\mathbf{A}_1$ une algèbre complète de fonctions de $z_1, \ldots, z_n$, à valeurs dans **A**, qui est contenue dans $\Theta(z\,;\,\delta\,;\,\mathbf{A})$, dont la structure à bornés est plus fine que la structure induite, et qui contient les fonctions $1, z_1, \ldots, z_n$.

Soit $\delta'(s)$ une nouvelle fonction Lipschitzienne réelle non négative bornée et telle que $|s|\delta'(s)$ soit bornée, et supposons que $\delta'(s) \in \Delta(z\,;\,\mathbf{A}_1)$. Alors A_1 contient les restrictions à l'ouvert $\delta > 0$ d'éléments de $\Theta(z\,;\,\delta'\,;\,\mathbf{A})$, et

$$\mathbf{S}(f\,;\,z\,;\,\mathbf{A}_1) = \text{rest } f(z) \tag{1}$$

lorsque $f \in \Theta(z\,;\,\delta'\,;\,\mathbf{A})$, si rest $f(z)$ est la restriction de la fonction f, définie sur le domaine $\delta' > 0$, au domaine $\delta > 0$.

En fait, il suffit de démontrer la relation (1). Mais l'application identique de $\mathbf{A}_1$ dans $\Theta(s\,;\,\delta\,;\,\mathbf{A})$ est une représentation unitale bornée qui applique $\mathbf{S}(f\,;\,z\,;\,\mathbf{A}_1)$ sur $\mathbf{S}(f\,;\,z\,;\,\Theta(z\,;\,\delta\,;\,\mathbf{A}) = \text{rest } f(z)$.

Ce résultat peut être appliqué d'une manière intéressante lorsque $\mathbf{A}_1 = \theta_r(s\,;\,\delta\,;\,\mathbf{A})$, et lorsque $\mathbf{A}_1 = \Theta(z\,;\,\delta\,;\,\mathbf{A})$.

40. Fonctions analytiques.

Nous étudions ici les algèbres $\mathcal{O}_r(s;\delta)$. Leur étude est intéressante pour le développement de la théorie spectrale. Ces algèbres jouent en effet un rôle fondamental dans cette théorie, par l'intermédiaire du calcul symbolique. D'autre part, la théorie spectrale permet d'aborder l'étude de ces algèbres.

Nous chercherons plutôt à indiquer des méthodes permettant d'aborder les problèmes, et surtout à indiquer certains des problèmes qui se posent, qu'à résoudre ceux-ci.

1. Considérons les variables complexes, $z_1, \ldots, z_n$, et une fonction $\delta(z)$ telle que $\theta_r(z\,;\,\delta)$ soit définie. Nous avons appelé $\mathcal{O}(z\,;\,\delta)$ l'algèbre des fonctions holomorphes δ-tempérées à valeurs complexes. Pour simplifier les raisonnements ci-dessous, nous supposerons que l'ouvert $\delta(z) > 0$ est connexe, et que le domaine d'holomorphie associé est univalent.

$\delta \notin \Delta(z\,;\,\mathcal{O}(z\,;\,\delta))$, en général. Pour que $\delta_1 \in \Delta(z\,;\,\mathcal{O}(z\,;\,\delta))$, il faut que l'on puisse trouver une fonction $\delta_2(z)$ telle que $-\log\delta_2$ soit plurisousharmonique (p. s. h.) et vérifie les inégalités $\delta_1(z) \geqslant \delta_2(z) \geqslant \epsilon\delta(z)^{\mathrm{N}}$ pour tout z, pour un $\epsilon > 0$, et pour un N fini.

Soit en effet $\psi(s)$ la borne supérieure des fonctions $\varphi(s)$, p. s. h. sur $\mathbf{C}^n$, et telles que $\varphi(s) \leqslant -\log\delta(s)$. Alors $\psi(s)$ est p. s. h. Posons $\delta'(s) = e^{-\psi(s)}$. Le domaine $\delta'(s) > 0$ est la fermeture d'holomorphie du domaine $\delta > 0$.

Soit $f(s) \in \mathcal{O}(s\,;\,\delta)$. La fonction f a un prolongement holomorphe unique $f'(s)$ au domaine $\delta'(s) > 0$. Et $f'(s) \in \mathcal{O}(s\,;\,\delta')$. En effet, $\delta(s)^{\mathrm{N}}f(s) \leqslant \mathrm{M}$ si M et N sont suffisamment grands ; $\log|f'| \leqslant \log\mathrm{M} - \mathrm{N}\log\delta$. Le premier membre est p. s. h. La borne supérieure des fonctions p. s. h. inférieures au second membre est $\log\mathrm{M} - \mathrm{N}\log\delta'$. Par conséquent, $\delta'(s)^{\mathrm{N}}f'(s) \leqslant \mathrm{M}$.

On montre de même que l'ensemble des prolongements des éléments d'une partie bornée de $\mathcal{O}(s\,;\,\delta)$ est une partie bornée de $\mathcal{O}(s\,;\,\delta')$. Les algèbres complètes $\mathcal{O}(s\,;\,\delta)$ et $\mathcal{O}(s\,;\,\delta')$ sont isomorphes,

$$\Delta(z\,;\,\mathcal{O}(z\,;\,\delta)) = \Delta(z\,;\,\mathcal{O}(z\,;\,\delta')) \subseteq \Delta(z\,;\,\Theta(z\,;\,\delta')).$$

La proposition est démontrée puisque $\delta_1 \geqslant \delta'^{\mathrm{N}}$ si $\delta_1 \in \Delta(z\,;\,\Theta(z\,;\,\delta))$.

* * *

Réciproquement, est-ce que $\delta_1 \in \Delta(z\,;\,\mathcal{O}(z\,;\,\delta))$ lorsque $\delta_1 \leqslant \delta$ avec $-\log\delta_1$ p. s. h. Ce problème semble d'une difficulté comparable à celui de la caractérisation des domaines d'holomorphie dans la théorie des fonctions holomorphes de plusieurs variables complexes. (Cf. E. E. Levi [7], et Norguet [9], Bremermann [3].)

2. Supposons ensuite que $\delta \in \Delta(z\,;\,\mathcal{O}(z\,;\,\delta))$. Soit $n' < n$, $z' = (z_1, \ldots, z_{n'})$ et $\delta'(z') = \delta(z', \mathrm{O})$. Alors $\delta' \in \Delta(z'\,;\,\mathcal{O}(z'\,;\,\delta'))$. En effet,

$$\Sigma_1^{n'}(z_i - s_i)\,u_i(z', \mathrm{O}\,;\,s', \mathrm{O}) + \delta'(s')\,y_o(z', \mathrm{O}\,;\,s', \mathrm{O}) = 1$$

si $u_i(z\,;\,s)$, $y_o(z\,;\,s)$ appartiennent à $\Theta(s\,;\,\delta_o\,;\,\mathcal{O}(z\,;\,\delta))$ et vérifient la relation

$$\Sigma_1^n(z_i - s_i)\,u_i(z\,;\,s) + \delta(s)\,y_o(z\,;\,s) = 1.$$

Soit T l'application $(z_1, \ldots, z_{n'}) \to (z_1, \ldots, z_{n'}, \mathrm{O}, \ldots, \mathrm{O})$ de $\mathbf{C}^{n'}$ dans $\mathbf{C}^n$, et $\check{\mathrm{T}}$ l'application $\mathrm{F}(z) \to \mathrm{F}(\mathrm{T}z')$ de $\mathcal{O}(z\,;\,\delta)$ dans $\mathcal{O}(z'\,;\,\delta')$. Alors $\check{\mathrm{T}}$ est surjectif ; son noyau est engendré par $(z_{n'+1}, \ldots, z_n)$.

Observons pour commencer que $\delta'(s') \in \Delta(z'\,;\,\mathcal{O}(z\,;\,\delta)/\mathfrak{b})$ si $\mathfrak{b}$ est l'idéal de $\mathcal{O}(z\,;\,\delta)$ engendré par $(z_{n'+1}, \ldots, z_n)$, puisque

$$\Sigma_1^{n'}(z_i - s_i)\,u_i(z\,;\,s', \mathrm{O}) + \Sigma_{n'+1}^n z_i u_i(z\,;\,s', \mathrm{O}) + \delta'(s')y_o(z\,;\,s', \mathrm{O}) = 1.$$

Montrons que $\check{\mathrm{T}}$ est surjectif. Soit $\mathrm{F}'(z) \in \mathcal{O}(z'\,;\,\delta')$. Nous pouvons définir

$$\mathrm{S}(\mathrm{F}'\,;\,z'\,;\,\mathcal{O}(z\,;\,\delta)/\mathfrak{b}) \in \mathcal{O}(z\,;\,\delta)/\mathfrak{b}.$$

Soit F un élément de la classe d'équivalence de $\mathcal{O}(z\,;\,\delta)/\mathfrak{b}$ ainsi définie ;

$$\begin{aligned}\check{\mathrm{T}}\mathrm{F} &= \check{\mathrm{T}}\mathrm{S}(\mathrm{F}'\,;\,z'\,;\,\mathcal{O}(z\,;\,\delta)/\mathfrak{b}),\\ &= \mathrm{S}(\mathrm{F}'\,;\,\check{\mathrm{T}}z'\,;\,\mathcal{O}(z'\,;\,\delta')),\\ &= \mathrm{F}'(z').\end{aligned}$$

La surjectivité est ainsi démontrée.

Supposons ensuite que $\mathrm{F} \in \mathcal{O}(z\,;\,\delta)$ et que $\check{\mathrm{T}}\mathrm{F}(z) = \mathrm{F}(z', \mathrm{O}) = 0$:

$$\begin{aligned}\mathrm{F}(z) + \mathfrak{b} &= \mathbf{S}(\mathrm{F}\,;\,z\,;\,\mathcal{O}(z\,;\,\delta)/\mathfrak{b})\\ &= \mathbf{S}(\mathrm{F}\,;\,z', \mathrm{O}\,;\,\mathcal{O}(z\,;\,\delta)/\mathfrak{b})\\ &= \mathrm{F}(z', \mathrm{O}) + \mathfrak{b} = \mathrm{O} + \mathfrak{b}.\end{aligned}$$

Par conséquent $\mathrm{F} \in \mathfrak{b}$. L'application $\check{\mathrm{T}}$ a le noyau $\mathfrak{b}$. Ceci achève la démonstration.

* * *

Nous avons établi certains résultats, élémentaires, assez aisément. Ceux-ci s'appliquent à des algèbres de fonctions définies sur $\mathbf{C}^n$. Des difficultés se présenteraient si nous devions étudier des fonctions sur des domaines plus généraux — sur des domaines non univalents, ou sur des variétés par exemple.

Pour pouvoir étudier ces domaines plus généraux, il faudrait modifier la définition du spectre, de manière telle que les « fonctions holomorphes sur le spectre » ne soient plus des fonctions sur des parties de $\mathbf{C}^n$. Il semble que les idées d'Arens et Calderòn [1] permettent des modifications telles, qu'il soit possible d'étudier des domaines « étalés sur $\mathbf{C}^n$ ». Des modifications plus profondes doivent être apportées à la théorie spectrale si l'on veut étudier des fonctions sur les variétés de Stein.

41. Idempotents centraux.

La construction d'idempotents est une application classique de la théorie spectrale des algèbres de Banach commutatives. Lorch [8] associe une famille $e_1, \ldots, e_n$, d'idempotents supplémentaires (¹) à une partition $S = S_1 \cup \ldots \cup S_n$ du spectre d'un élément en ouverts et fermés. Šilov [11] associe une famille analogue d'idempotents à une partition du spectre de l'algèbre en ouverts et fermés.

La théorie de cette dissertation permet de généraliser ces théorèmes à des cas où $\mathbf{A}$ n'est pas de Banach.

Nous supposons l'idéal $\mathfrak{b}$ nul, et considérons un ouvert $S \in \sigma(a_1, \ldots, a_n ; \mathbf{A})$. Alors S n'est pas vide, et est la réunion d'un nombre fini ou d'une infinité dénombrable de composantes connexes : $S = \cup S_i$.

A chaque composante connexe S_i, nous associerons un idempotent central e_i de $\mathbf{A}$. Les idemportents e_i sont orthogonaux deux à deux ; $e_i = 0$ si et uniquement si $\complement S_i \in \sigma(a ; \mathbf{A})$; la série Σe_i converge absolument, et a pour somme l'unité de $\mathbf{A}$.

En fait, la fonction $\epsilon_i(s)$ qui est égale à l'unité sur S_i et nulle sur le complément de S_i par rapport à S, appartient à $\Theta(s ; \delta_S(s))$. (La fonction $\delta_S(s)$ a été définie au numéro 37.3). Chaque $\epsilon_i(s)$ est idempotent, ces idempotents sont orthogonaux deux à deux. La série $\Sigma\epsilon_i$ est absolument convergente dans $\Theta(s ; \delta_S(s))$, et a la constante 1 pour somme.

L'application $F \to \mathbf{S}(F ; a ; \mathbf{A})$ est une représentation unitale bornée. L'image de chaque ϵ_i est un idempotent e_i ; les idempotents images sont orthogonaux deux à deux ; la série Σe_i est l'image de la série $\Sigma\epsilon_i$, converge donc absolument, et a l'unité pour somme.

Supposons $\complement S_i$ spectral. Alors $S \cup \complement S_i = S'$ est spectral. La restriction ϵ_i' de ϵ_i à S' est identiquement nulle, et $\mathbf{S}(\epsilon_i ; a ; \mathbf{A}) = \mathbf{S}(\epsilon_i' ; a ; \mathbf{A}) = 0$.

Réciproquement, soit $e_1 = 0$. Nous savons que $\epsilon_1 = \mathbf{S}(\epsilon_1 ; z ; \Theta(z ; \delta_S ; \mathbf{A}))$. D'autre part, $e_1 = \mathbf{S}(\epsilon_1 ; a ; \Theta(z ; \delta_S ; \mathbf{A})) = 0$, et $\epsilon_1 - e_1 = \epsilon_1 \in idl(z - a ; \Theta(z ; \delta_S ; \mathbf{A}))$. Par conséquent,

$$\epsilon_1 = \langle z - a, g \rangle$$

si $g_1, \ldots, g_n$ sont convenablement choisis dans $\Theta(z ; \delta_S ; \mathbf{A})$.

D'autre part, S est spectral pour a. L'idéal engendré par les fonctions $z - a$, δ_S^N, dans $\Theta(z ; \delta_o ; \mathbf{A})$ contient la constante 1. Il existe des $u_1, \ldots, u_n, y_o$ dans $\Theta(z ; \delta_o ; \mathbf{A})$ qui vérifient la relation

$$\langle z - a, u(z) \rangle + \delta_S(z)^N y_o(z) = 1$$

sur $\mathbf{C}^n$.

Supposons N choisi suffisamment grand pour que $\delta_S(z)^N g_j(z)$ soit borné sur S. Posons $U = u$ hors de S_1, $U = u + \delta_S^N g$ sur S_1, $Y_o = y_o$ sur tout $\mathbf{C}^n$. Ces fonctions vérifient la relation

$$\langle z - a, U \rangle + \delta_S(z)^N (1 - \epsilon_1(z)) Y_o(z) = 1$$

sur tout $\mathbf{C}^n$. La fonction $\delta_S(s)\,(1 - \epsilon_1(s))$ appartient au spectre, et s'annule sur S_1. Cet ensemble est donc spectral, et $\cup_{i \neq 1} S_i$ aussi.

Remarque. Soit S spectral pour $a_1, \ldots, a_n$, et $\{S_i\}$ l'ensemble des composantes connexes de S. Nous pouvons trouver une composante, S_1 par exemple, qui est telle que S_1 rencontre S' dès que S' est spectral. Sinon e_i serait nul quel que soit i, alors que $1 = \Sigma e_i$.

L'ensemble des spectraux pour a est un filtre ouvert propre, mais n'est pas un filtre ouvert propre quelconque.

(¹) C'est-à-dire, les e_1 sont orthogonaux 2 à 2, et ont la constante 1 pour somme.

42. Ensembles bornés d'inverses de polynomes.

Soit **A** une algèbre à bornés complète à unité. Soient $a_1, \ldots, a_n$ des éléments du centre de **A**, et soit B un ensemble borné de polynômes en n indéterminées $x_1, \ldots, x_n$. (C'est-à-dire, le degré, et la somme des valeurs absolues des coefficients de P, sont bornés indépendamment de $P \in B$). La proposition suivante peut être vraie ou fausse :

$\Phi(B\,;\,a\,;\,\mathbf{A})$: $P(a)^{-1}$ *est défini si* $P \in B$ *et borné indépendamment de* $P \in B$. Nous verrons comment la théorie développée dans cette dissertation permet d'établir certaines conséquences de cette proposition $\Phi(B\,;\,a\,;\,\mathbf{A})$.

Dans ce paragraphe 42, nous appellerons $\mathbf{C}[x]$, ou $\mathbf{C}[x_1, \ldots, x_n]$, l'algèbre des polynômes en $x = (x_1, \ldots, x_n)$ à coefficients complexes. L'algèbre $\mathbf{C}[x]$ sera munie de la structure d'espace à bornés la plus fine. Les parties bornées de $\mathbf{C}[x]$ seront exactement les ensembles bornés de polynômes.

1. Rappelons tout d'abord la démonstration d'une proposition de [14] dont nous aurons besoin par la suite :

Soit B borné dans $\mathbf{C}[x]$ et $\overline{B}$ la fermeture de B pour la topologie de l'espace des polynômes de degré au plus égal à N, si N est suffisamment grand. *Les propositions* $\Phi(B\,;\,a\,;\,\mathbf{A})$ *et* $\Phi(\overline{B}\,;\,a\,;\,\mathbf{A})$ *sont équivalentes.*

$\overline{B} \supseteq B$; par conséquent, $\Phi(\overline{B}\,;\,a\,;\,\mathbf{A})$ implique trivialement $\Phi(B\,;\,a\,;\,\mathbf{A})$. Nous devons démontrer la réciproque. $P(a)^{-1}$ sera supposé défini et borné sur B.

$\overline{B}$ est la fermeture de B. Il existe une suite d'applications de $\overline{B}$ dans B, soit $\varphi_1, \ldots, \varphi_r, \ldots$ qui tend uniformément vers l'application identique de $\overline{B}$ en lui-même. Et $\varphi_r = \varphi_r(P, x) \in \beta(\overline{B}, C[x])$ si $\overline{B}$ est muni de la structure d'ensemble à bornés la moins fine. (Rappelons que $\beta(E, F)$ est l'ensemble des applications bornées de E dans F ; une partie bornée de $\beta(E, F)$ est un ensemble également borné d'applications.)

Nous pouvons définir $\varphi_r(P\,;\,a)$ et $\varphi_r(P\,;\,a)^{-1}$ pour $P \in B$. Les fonctions $\varphi_r(P\,;\,a)$ et $\varphi_r(P\,;\,a)^{-1}$ appartiennent à $\beta(B\,;\,a)$ quel que soit r. La suite $\varphi_r(P\,;\,a)$ est évidemment une suite de Cauchy de $\beta(B\,;\,a)$. La suite $\varphi_r(P\,;\,a)^{-1}$ en est également une puisque

$$\varphi_r(P\,;\,a)^{-1} - \varphi_{r'}(P\,;\,a)^{-1}$$
$$= \varphi_r(P\,;\,a)^{-1}\varphi_{r'}(P\,;\,a)^{-1}[\varphi_{r'}(P\,;\,a) - \varphi_r(P\,;\,a)].$$

est le produit d'une expression qui tend vers zéro par deux expressions bornées indépendamment de r, r', et tend donc vers zéro.

La limite de $\varphi_r(P\,;\,a)^{-1}$ est une fonction $\psi(P) \in \beta(\overline{B}\,;\,a)$ telle que

$$\psi(P)P(a) = \lim \varphi_r(P\,;\,a)^{-1}P(a) = 1$$

$P(a)$ a donc l'inverse $\psi(P)$ lorsque $P \in \overline{B}$, l'ensemble des $P(a)^{-1}$ tels que $P \in \overline{B}$ est borné. La proposition $\Phi(\overline{B}\,;\,a\,;\,\mathbf{A})$ est vraie.

2. Supposons $\Phi(B\,;\,a\,;\,\mathbf{A})$ et par conséquent $\Phi(\overline{B}\,;\,a\,;\,\mathbf{A})$ vrai. Appelons S l'ensemble des $(s_1, \ldots, s_n) \in \mathbf{C}^n$ tels que $P(s)$ soit borné inférieurement pour $P \in B$. A priori, S est ouvert. Montrons que S est spectral pour $(a_1, \ldots, a_n)$.

S est évidemment l'ensemble des $s \in \mathbf{C}^n$ tels que $P(s) \neq 0$ si $P \in \overline{B}$. A tout $s \notin S$ correspond un $P_s(x) \in \overline{B}$ tel que $P_s(s) = 0$. L'inverse $P_s(a)^{-1}$ existe et est borné indépendamment de $s \notin S$.

Divisons $P_s(x)$ par $x_1 - s_1$, le reste par $x_2 - s_2$, et ainsi de suite. Les quotients sont des polynômes $Q_{1s}(x), \ldots, Q_{ns}(x)$ tels que

$$P_s(x) = \Sigma_1^n(x_i - s_i)Q_{is}(x).$$

Soit N la borne supérieure des degrés des polynômes P_s. Une analyse simple de l'algorithme de division montre que $\delta_o(s)^N Q_{is}(x)$ est borné indépendamment de $s \in S$ dans $C[x]$.

Soit $g_i(s)$ une fonction à valeurs dans **A** qui est nulle si $s \in S$ et est égale à $P_s(a)^{-1} Q_{is}(a)$ hors de S. Alors $g_i \in \Theta(s\,;\,\delta_o\,;\,\mathbf{A})$ et $\langle a - s, g\rangle + \chi_S(s) = 1$ si χ_S est la fonction caractéristique de S. Cet ensemble est spectral pour a.

3. B étant donné, on ne peut pas toujours trouver une algèbre **A**, et $a_1, \ldots, a_n$ dans le centre de **A** tels que $\Phi(B\,;\,a\,;\,\mathbf{A})$ soit vrai. Pour que ce soit le cas, il faut et, il suffit que S soit non-vide : si S est non-vide, $\Phi(B\,;\,s\,;\,\mathbf{C})$ est évident si $s \in S$; réciproquement, si $\Phi(B\,;\,a\,;\,\mathbf{A})$ est vrai, S est spectral pour a dans **A**, et n'est donc pas vide.

Soit $P \in B$. Alors $P \neq 0$ sur S, et $1/P$ est holomorphe sur S. Nous montrerons que $1/P \in \mathcal{O}(s\,;\,\delta_S(s))$, et que dans cette algèbre, $1/P$ est borné indépendamment de $P \in B$, c'est-à-dire, que $\Phi(B\,;\,s\,;\,\mathcal{O}(s\,;\,\delta_S(s))$ est vraie.

Il suffira de montrer que $\delta_S(z)^N/P(z)$ est borné indépendamment de $P \in B$, $z \in S$, si N est suffisamment grand, donc qu'il existe un $\epsilon > 0$ et un $N \in \mathbf{N}$ tels que $P(z) \geqslant \epsilon\delta_S(z)^N$ si $P \in B$, $z \in S$.

4. *Lemme* 1. Il existe une constante $\alpha_{Nn} > 0$ qui a la propriété suivante. Soit $P(x)$ un polynôme de degré au maximum égal à N en $x_1, \ldots, x_n$ qui ne s'annule pas sur la boule unité, et ν la somme des valeurs absolues de ses coefficients. Alors

$$|P(O)| \geqslant \alpha_{Nn} \cdot \nu.$$

Nous pouvons prendre $\alpha_{N1} = 2^{-N}$. En effet

$$P(x) = P(O)(1 - \sigma_1 x) \ldots (1 - \sigma_N x)$$

avec σ_k complexe convenable. Et $|\sigma_k| \leqslant 1$ puisque $P(x) \neq 0$ si $|x| \leqslant 1$. La somme ν des valeurs absolues des coefficients de P est au maximum égale à $2^N|P(O)|$, d'où l'inégalité voulue.

Soit ensuite $n > 1$. Choisissons un $v \in \mathbf{C}^n$ tel que $|v| = 1$ et tel que la somme ν' des valeurs absolues des coefficients de $Q_v(t) = P(tv)$ soit aussi grande que possible. Nous pouvons trouver un $\alpha'_{Nn} > 0$ indépendant de P et tel que $\nu' \geqslant \alpha'_{Nn}\nu$. Sinon il existerait une suite de polynômes de degré N qui convergerait uniformément vers zéro sur la boule unité sans que les coefficients ne tendent vers zéro. L'inégalité démontrée pour $n = 1$ montre que

$$|P(O)| = |Q_v(O)| \geqslant 2^{-N}\nu' \geqslant \alpha'_{Nn}2^{-N}\nu.$$

Nous pouvons poser $\alpha_{Nn} = 2^{-N}\alpha'_{Nn}$.

5. *Lemme* 2. Soit $P(x)$ un polynôme de degré N en $x = (x_1, \ldots, x_n)$ et ν_1 la somme des valeurs absolues des coefficients de P. Soient $s \in \mathbf{C}^n$, $\lambda \in \mathbf{C}$, $|\lambda| \leqslant 1$, et $Q(x) = P(s + \lambda x)$. Soit ν_2 la somme des valeurs absolues des coefficients de Q :

$$\nu_2 \geqslant 2^{-N}\delta_o(s)^N\lambda^N\nu_1.$$

Supposons d'abord que $s = 0$. Alors $P(x) = Q(x/\lambda)$. Le coefficient d'un terme de degré r de P est égal au produit du coefficient correspondant de Q par λ^{-r}. Mais $r \leqslant N$, $|\lambda| \leqslant 1$, et $|\lambda|^{-r} \leqslant |\lambda|^{-N}$;

$$\nu_2 \geqslant |\lambda|^N\nu_1$$

si $s = 0$.

Supposons ensuite que $\lambda = 1$, que $P(x) = Q(x - s)$. Soit

$$Q(x) = \Sigma c_{r_1 \ldots r_n} x_1^{r_1} \ldots x_n^{r_n}.$$

Alors, $\nu_2 = \Sigma|c_{r_1 \ldots r_n}|$. D'autre part

$$P(x) = \Sigma c_{r_1 \ldots r_n}(x_1 - s_1)^{r_1} \ldots (x_n - s_n)^{r_n}.$$

La somme, ν_1, des valeurs absolues des coefficients vérifie

$$\begin{aligned} \nu_1 &\leqslant \Sigma|c_{r_1 \ldots r_n}|(1 + |s_1|)^{r_1} \ldots (1 + |s_n|)^{r_n} \\ &\leqslant 2^N\delta_o(s)^{-N}\nu_2 \end{aligned}$$

puisque la somme des valeurs absolues des coefficients de $(x_1 - s_1)^{r_1} \ldots (x_n - s_n)^{r_n}$ est égale à

$$(1 + |s_1|)^{r_1} \ldots (1 + |s_n|)^{r_n} < 2^N\delta_o(s)^N\nu_1.$$

Nous avons ainsi l'inégalité

$$\nu_2 \geqslant 2^{-N}\delta_o(s)^N\nu_1$$

si $\lambda = 1$.

Soient ensuite s, λ quelconques, $Q_1(x) = P(x + s)$ et donc $Q(x) = Q_1(\lambda x)$. Soit ν' la somme des valeurs absolues des coefficients de Q_1, et soient ν_1, ν_2 les sommes de valeurs absolues des coefficients de P, Q respectivement :

$$\nu_2 \geqslant 2^{-N}\delta_o(s)^N\nu' \geqslant 2^{-N}\lambda^N\delta_o(s)^N\nu_1$$

en vertu des inégalités démontrées respectivement si $\lambda = 1$ ou si $s = 0$. L'inégalité voulue est démontrée.

6. *Lemme* 3. Soit S un ouvert, et B un ensemble borné fermé de polynômes dont aucun ne s'annule sur S. Il existe un $\epsilon > 0$ et un $N \in \mathbf{Z}$ tels que

$$|P(s)| > \epsilon\,\delta_S(s)^N$$

quels que soient $P \in B$ et $s \in S$.

Supposons S non vide (sinon le lemme est trivial). Appelons $\nu(P)$ la somme des valeurs absolues des coefficients du polynôme P. Alors $\nu(P) > \epsilon_1$ lorsque $P \in B$, avec $\epsilon_1 > 0$ indépendant de P. Sinon la constante nulle appartiendrait au fermé B, mais elle s'annule sur S. D'autre part, B est borné, le degré de chaque $P \in B$ est inférieur à N_1, avec $N_1 \in \mathbf{Z}$ indépendant de P.

Soient $s \in S$, et $Q_{sP}(x) = P(s + \delta_S(s)x)$. Appliquons le lemme 2 :

$$\nu(Q_{sP}) \geqslant 2^{-N_1}\delta_S(s)^{N_1}\delta_0(s)^{N_1}\nu(P) \geqslant 2^{-N_1}\delta_S(s)^{2N_1}\epsilon_1$$

Ensuite, $Q_{sP}(O) \neq 0$ si $x \leqslant 1$. Le lemme 1 montre que

$$|Q_{sP}(O)| \geqslant \alpha_{N_1 n}\nu(Q_{sP}) \geqslant 2^{-N_1}\alpha_{N_1 n}\delta_S(s)^{2N_1}\epsilon_1$$

Mais $Q_{sP}(O) = P(s)$. Le lemme 3 est démontré, avec $N = 2N_1$, et $\epsilon = 2^{-N_1}\alpha_{N_1 N}\epsilon_1$.

Nous avons observé au numéro 42.3 *que le lemme* 3 *suffisait à démontrer* $\Phi(B\,;\,z\,;\,\mathcal{O}(z\,;\,\delta_S(z))$. Cette proposition est donc vraie. (Si S est l'ouvert associé à B au numéro 42.2.)

7. Soit **A** une algèbre complète à unité, et soient $a_1, \ldots, a_n$ des éléments du centre de **A** qui vérifient $\Phi(B\,;\,a\,;\,\mathbf{A})$. Il existe une représentation unitale bornée de $\mathcal{O}(s\,;\,\delta_S(s))$ dans **A** qui applique z_i sur a_i. En effet, S est spectral pour a, la représentation $f \to \mathbf{S}(f\,;\,a\,;\,\mathbf{A})$ a les propriétés souhaitées.

Deux représentations unitales de $\mathcal{O}(s\,;\,\delta_S(s))$ dans **A** sont égales si elles appliquent toutes deux z_i sur a_i pour $i = 1, \ldots, n$. Ces deux représentations coincident évidemment sur une sous-algèbre unitale fermée de $\mathcal{O}(s\,;\,\delta_S(s))$ qui contient $z_1, \ldots, z_n$, et contient $1/P$ lorsque $P \in B$. Nous montrerons que $\mathcal{O}(s\,;\,\delta_S(s))$ n'a pas de telle sous-algèbre propre.

Soit en effet $\mathcal{O}_1$ une telle sous-algèbre, avec la structure à bornés induite par $\mathcal{O}(s\,;\,\delta_S)$. Alors $P(z)^{-1}$ est défini et borné dans $\mathcal{O}_1$ pour $P \in B$. La proposition $\Phi(B\,;\,z\,;\,\mathcal{O}_1)$ est vraie. S est spectral pour s dans $\mathcal{O}_1$.

Soit $f \in \mathcal{O}(s\,;\,\delta_S)$. Nous pouvons définir $\mathbf{S}(f\,;\,z\,;\,\mathcal{O}_1)$, et

$$\mathbf{S}(f\,;\,z\,;\,\mathcal{O}_1) = \mathbf{S}(f\,;\,z\,;\,\Theta(z\,;\,\delta_S)) = f(z).$$

Mais, $\mathbf{S}(f\,;\,z\,;\,\mathcal{O}_1) \in \mathcal{O}_1$ d'où $f(z) \in \mathcal{O}_1$. Par conséquent, $\mathcal{O}_1 \supseteq \mathcal{O}(z\,;\,\delta_S)$, et ne peut donc être une sous-algèbre fermée propre.

8. Nous pouvons résumer l'ensemble des résultats de ce paragraphe :

Soit B une partie bornée de l'algèbre $C[x]$. Appelons S l'ensemble des $s \in \mathbf{C}^n$ tels que $P(s)$ soit borné inférieurement pour $P \in B$. L'ensemble S est évidemment ouvert dans $\mathbf{C}^n$.

Nous pouvons trouver une algèbre **A**, et des éléments $a_1, \ldots, a_n$ du centre de **A** tels que $\Phi(B\,;\,a\,;\,\mathbf{A})$ soit vrait si et uniquement

si S n'est pas vide. La proposition $\Phi(B\,;\,a\,;\,\mathbf{A})$ est vraie si et uniquement si S est spectral pour a dans **A**.

L'algèbre $\mathcal{O}(s\,;\,\delta_S)$ a les propriétés suivantes :

a. La proposition $\Phi(B\,;\,s\,;\,\mathcal{O}(s\,;\,\delta_S(s))$ est vraie.

b. Étant donnée une algèbre **A** et des éléments $a_1, \ldots, a_n$ du centre de **A** qui vérifient $\Phi(B\,;\,a\,;\,\mathbf{A})$, nous pouvons trouver une représentation unitale bornée et une seule de $\mathcal{O}(s\,;\,\delta_S)$ dans **A** qui applique s_i sur a_i pour $i = 1, \ldots, n$.

Enfin, B étant donné, il ne peut exister, à un isomorphisme près, qu'une algèbre unitale à bornés complète, $\mathcal{G}(B)$, contenant des éléments privilégiés $s_1, \ldots, s_n$ et qui vérifie les propriétés a, b ci-dessus. L'algèbre $\mathcal{G}(B)$ est donc isomorphe à $\mathcal{O}(s\,;\,\delta_S)$, les éléments privilégiés de $\mathcal{G}(B)$ correspondent aux variables $s_1, \ldots, s_n$, qui appartiennent à $\mathcal{O}(s\,;\,\delta_S)$.

* * *

La proposition $\Phi(B\,;\,a\,;\,\mathbf{A})$ a déjà été étudiée, par moi-même, dans une note [14]. Les résultats qui s'y trouvent démontrés sont existentiels. B étant donné, deux cas sont possibles :

1. La proposition $\Phi(B\,;\,a\,;\,\mathbf{A})$ n'est jamais vraie.

2. Il existe une algèbre unitale complète, $\mathcal{G}(B)$ et des éléments $z_1, \ldots, z_r$ de $\mathcal{G}(B)$ tels que $\mathcal{G}(B), z_1, \ldots, z_n$ vérifient les conditions a, b ci-dessus. $\mathcal{G}(B), z_1, \ldots, z_n$ sont déterminés à un isomorphisme près par ces conditions.

Aucun critère pratique n'est explicité dans [14], qui permette de déterminer si nous nous trouvons dans le cas 1 ou le cas 2. Dans le cas 2, aucune construction pratique de $\mathcal{G}(B), z_1, \ldots, z_n$ n'est donnée. Les résultats démontrés ici sont plus précis, et sont applicables, tout au moins lorsque l'ouvert S n'est pas trop difficile à construire.

43. Le calcul de Heaviside.

Le calcul de Heaviside est un calcul symbolique en fonction des opérateurs de dérivation partielle. On le définit classiquement au moyen de la transformation de Laplace et de son inverse. Les résultats du paragraphe 6 nous permettront d'en donner une construction différente. (Voir [20], [21] pour le calcul de Heaviside à plusieurs variables).

Une algèbre, $A(\Gamma)$, de distributions pour la convolution (le produit de composition) est définie. Elle comprend entre autre la distribution δ de Dirac, et les dérivées partielles $\partial_1, \ldots, \partial_n$ de δ. Et $\Phi(B\,;\,\partial\,;\,A(\Gamma))$ est vrai si B est un ensemble borné convenable de polynômes. L'ouvert S correspondant à B est le tube considéré classiquement dans la théorie.

L'algèbre de fonctions holomorphes $\mathcal{O}(s\,;\,\delta_S)$ est plus petite que celle que l'on considère généralement dans le calcul de Heaviside. Mais la différence n'est pas essentielle. Nous retrouverions les résultats classiques avec des raisonnements un peu différents.

1. Nous considérons un espace vectoriel réel à n dimensions, X, son dual X^*, et l'espace vectoriel complexe Z^* des applications linéaires de X dans $\mathbf{C}$. (Z^* est le « dual complexe » de X). Alors $Z^* = X^* + iX^*$. Soit $z^* = x^* + iy^*$ avec $x^* \in X^*$, $y^* \in X^*$; on dit que x^* est la partie réelle de z^*, et que y^* est sa partie imaginaire. On écrira $\langle x, z^* \rangle$ pour $z^*(x)$ si $x \in X$, $z^* \in X^*$ ou $z^* \in Z^*$ (d'ailleurs $Z^* \supseteq X^*$).

X sera rapporté à une base, X^* à la base duale, et Z^* à la même base que X^*. Soit $x \in X$ et $z^* \in Z^*$ (ou $z^* \in X^*$). Appelons $x_1, \ldots, x_n$ les composantes de x, et $z_1^*, \ldots, z_n^*$ celles de z^* :

$$\langle x, z^* \rangle = \Sigma x_i z_i^*.$$

Par définition, une distribution bornée sur X sera une distribution $u(x)$ telle que $u(x - s)$ soit borné dans $\mathcal{D}'(x)$ indépendamment de $s \in X$ (1). Un ensemble B de distributions bornées sera également borné si $u(x - s)$ est borné dans $\mathcal{D}'(X)$ indépendamment de $(u, s) \in B \times X$.

Soit Γ une partie ouverte convexe de X^*, et soit D la fermeture des $x \in X$ tels que $\langle x, x^* \rangle$ soit borné inférieurement pour $x^* \in \Gamma$. Le cône fermé D est le dual de cône directeur de Γ. Nous

(1) Voir L. Schwartz [10] pour la définition de la notion de distribution. $\mathcal{D}(X)$ est l'espace des fonctions indéfiniment dérivables sur S ; $\mathcal{D}'(X)$ est son dual. l'espace des distributions quelconques sur X. Une distribution de la variable x sur X sera notée $u(x)$, la valeur prise par u en un $f \in \mathcal{D}$ sera notée $\int f(x)u(x)dx$.

appellerons $\mathbf{A}(\Gamma)$ l'ensemble des distributions $u(x)$ à support dans D telles que $e^{\langle x, x^* \rangle}u(x)$ soit une distribution bornée quel que soit $x^* \in \Gamma$. Une partie B de $\mathbf{A}(\Gamma)$ sera dite bornée si l'ensemble des distributions $e^{\langle x, x^* \rangle}u(x)$ telles que $u \in B$ est un ensemble également borné de distributions quel que soit $x^* \in \Gamma$. La convolution $u * v$ de deux éléments, u, v de $\mathbf{A}(\Gamma)$ est définie et appartient à $\mathbf{A}(\Gamma)$; l'application $(u, v) \to u * v$ définit sur $\mathbf{A}(\Gamma)$ une structure d'algèbre commutative, associative, à bornés, complète.

La distribution δ de Dirac appartient à $\mathbf{A}(\Gamma)$, est l'élément unité de cette algèbre, qui est ainsi une algèbre unitale. Les dérivées partielles $\partial_1, \ldots, \partial_n$ de δ appartiennent également à $\mathbf{A}(\Gamma)$, et $\partial_i * u = \partial u / \partial x_i$ si $u \in \mathbf{A}(\Gamma)$.

2. Soit B_o l'ensemble des $(s_1, \ldots, s_n, t) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{C}$ tels que

a. $|(s_1, \ldots, s_n, t)|^2 = \Sigma |s_i|^2 + |t|^2 = 1$.

b. $\Sigma s_i s_i^* - \mathrm{Re}\, t \geqslant 0$ si $s_1^*, \ldots, s_n^*$ sont les composantes d'un $s^* \in \Gamma$, $\mathrm{Re}\, t$ étant la partie réelle du complexe t.

Nous identifierons $(s_1, \ldots, s_n)$ avec le $s \in X$ qui a les composantes $(s_1, \ldots, s_n)$. Alors $s \in D$ puisque $\langle s, s^* \rangle \geqslant \mathrm{Re}\, t$ est borné inférieurement sur Γ ; $B_o \subseteq D \times \mathbf{C}$.

Soit $(s, t) \in B_o$, $s \neq 0$. Appelons $u_{st}(x)$ la distribution (la mesure) telle que

$$\int f(x) u_{st}(x) dx = \int_0^\infty f(\lambda s) e^{\lambda t} d\lambda$$

si $f \in \mathcal{D}(X)$. Alors u_{st} a son support dans D. En effet, ce support est la demi-droite issue de l'origine vers s, et $s \in D$, qui est un cône.

Montrons que $u_{st}(x) \in \mathbf{A}(\Gamma)$ lorsque $(s, t) \in B_o$, $s \neq 0$, et que $|s|\, u_{st}$ est borné indépendamment de (s, t) dans la structure de $\mathbf{A}(\Gamma)$; c'est-à-dire, que $|s|\, e^{\langle x, s^* \rangle} u_{st}$ est un ensemble également borné de distributions pour tout $s^* \in \Gamma$:

$$\int f(x)\, e^{-\langle x, s^* \rangle} u_{st}(x) dx = \int_0^\infty f(\lambda s) e^{\lambda(t - \langle s, s^* \rangle)} d\lambda.$$

La mesure $e^{-\langle x, s^* \rangle} u_{st}$ a la masse

$$\int_0^\infty \left| e^{\lambda(t - \langle s, s^* \rangle)} \right| d\lambda = \frac{1}{\langle s, s^* \rangle - \mathrm{Re}\, t}$$

le premier membre étant fini et égal au second si $\langle s, s^* \rangle - \mathrm{Re}\, t > 0$.

Nous supposons que $\langle s, s^*\rangle - \mathrm{Re}\, t \geqslant 0$ lorsque $s^* \in \Gamma$, et que $s \neq 0$. L'hyperplan $\langle s, s^*\rangle = \mathrm{Re}\, t$ ne peut rencontrer Γ puisque Γ est ouvert ; Γ aurait sinon des points des deux côtés de l'hyperplan, ce qui est impossible sans que le signe de $\langle s, s^*\rangle - \mathrm{Re}\, t$ ne change sur Γ. Par conséquent $\langle s, s^*\rangle - \mathrm{Re}\, t > 0$, $u_{st} \in \mathbf{A}(\Gamma)$.

Ensuite, $\langle s, s^*\rangle - \mathrm{Re}\, t$ est égal au produit par $|s|$ de la distance de s^* à l'hyperplan $\langle s, s^*\rangle = \mathrm{Re}\, t$, et celle-ci est au moins égale à $\varphi(s^*)$ si $\varphi(s^*)$ est la distance de s^* au complément de Γ :

$$\frac{1}{\langle s, s^*\rangle - \mathrm{Re}\, t} \leqslant \frac{1}{|s|\ \varphi(s^*)}$$

La masse de la mesure $|s|\, e^{(x, s^*)}\, u_{st}(x)$ est donc bornée. Cet ensemble de mesures est un ensemble également borné de distributions. L'ensemble des distributions $|s|\, u_{st}$ est borné dans $\mathbf{A}(\Gamma)$, si $(s, t \in \mathrm{B}_o,\ s \neq 0)$.

3. Montrons maintenant que $\langle s, \partial\rangle - t$ a un inverse dans $\mathbf{A}(\Gamma)$ lorsque $(s, t) \in \mathrm{B}_o$, et que l'ensemble de ces inverses estborné.

Soit $(s, t) \in \mathrm{B}_o$. Si $s = 0$, $|t| = 1 \neq 0$, $(\langle s, \partial\rangle - t)^{-1} = -t^{-1}$ existe. Si $s \neq 0$, nous pouvons définir u_{st}, et $(\langle s, \partial\rangle - t) * u_{st} = \delta$; l'élément $(\langle s, \partial\rangle - t)$ a de nouveau un inverse dans $\mathrm{A}(\Gamma)$, cet inverse est égal à u_{st}.

L'inverse $(\langle s, \partial\rangle - t)^{-1}$ est borné pour $(s, t) \in \mathrm{B}_o$, $s = 0$ puisque cet inverse est un complexe de valeur absolue unité.

Soit ensuite $(s, t) \in \mathrm{B}_o$, $s \neq 0$:

$$\begin{aligned}(\langle s, \partial\rangle - t)^{-1} &= -t^{-1}[1 + \langle s, \partial\rangle(\langle s, \partial\rangle - t)^{-1}] \\ &= u_{st} = -t^{-1}(1 + \langle s, \partial\rangle u_{st}).\end{aligned}$$

La première expression est bornée, sauf peut-être au voisinage de $s = 0$. La seconde, sauf peut-être au voisinage de $t = 0$. Ces deux expressions sont égales, et bornées puisque s et t ne deviennent pas simultanément petits sur B_o. Et $(\langle s, \partial\rangle - t)^{-1}$ est donc borné sur B_o.

Soient $x_1^*, \ldots, x_n^*$ des indéterminées, et B l'ensemble des polynômes $\langle s, x^*\rangle - t$ tels que $(s, t) \in \mathrm{B}_o$. Nous avons démontré $\Phi(\mathrm{B}\,;\partial\,;\mathbf{A}(\Gamma))$.

4. Recherchons ensuite l'ensemble S correspondant à B et montrons que $\mathrm{S} = \Gamma + i\mathrm{X}$.

Supposons d'abord que $z^* \in \Gamma + i\mathrm{X}$ et que $(s, t) \in \mathrm{B}_o$. Si $s = 0 : t \neq 0$ et $\langle s, z^*\rangle - t = -t \neq 0$. Si $s \neq 0$, $\mathrm{Re}\,(\langle s, z^*\rangle - t) = \langle s, x^*\rangle - \mathrm{Re}\, t > 0$, si $x^* = \mathrm{Re}\, z^*$, puisque $x^* \in \Gamma$, $(s, t) \in \mathrm{B}_o$, $s \neq 0$. Par conséquent $\langle s, z^*\rangle - t \neq 0$ si $z^* \in \Gamma + i\mathrm{X}^*$, et $(s, t) \in \mathrm{B}_o$. L'ensemble B_o étant compact, $|\langle s, z^*\rangle - t|$ est borné inférieurement sur B_o si $z^* \in \Gamma + i\mathrm{X}^*$, et par conséquent $\Gamma + i\mathrm{X}^* \subseteq \mathrm{S}$.

Supposons ensuite que $z^* \notin \Gamma + i\mathrm{X}^*$. La partie réelle x^* de z^* n'appartient pas à Γ. Nous pouvons trouver un $s \in \mathrm{X}$ tel que $\langle s, x^*\rangle < \langle s, x^*_1\rangle$ pour tout $x_1^* \in \Gamma$. Posons

$$s = \frac{s_1}{|s_1|^2 + |\langle s_1, z^*\rangle|^2}, \qquad t = \frac{\langle s_1, z^*\rangle}{|s_1|^2 + |\langle s_1, z^*\rangle|^2}.$$

Alors $(s, t) \in \mathrm{B}_o$ et $\langle s, z^*\rangle - t = 0$, ce qui montre que $z^* \notin \mathrm{S}$ et $\mathrm{S} \subseteq \Gamma + i\mathrm{X}^*$.

Nous avons les deux inclusions, et donc l'égalité voulue.

* * *

La représentation unitale bornée de $\Theta(z^*, \Gamma + i\mathrm{X}^*)$ dans $\mathbf{A}(\Gamma)$, dont nous pouvons établir l'existence, et qui applique z_i^* sur ∂_i, définit le calcul de Heaviside. On appelle généralement $f(\partial)$ l'image de $f(z^*)$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] R. Arens et A. P. Calderon. Analytic functions of several Banach Algebra elements. *Annals of Math.*, 62, 1955, p. 204-216.

[2] N. Bourbaki, Espaces vectoriels topologiques. Chapitre III. Paris, Hermann et Cie, 1955.

[3] H. J. Bremermann, Über die Äquivalenz der pseudokonvexen Gebiete und der Holomorphiegebiete im Raum von n komplexen Veränderlichen. *Math. Ann.*, 126, p. 63-91, 1954.

[4] L. Fantappiè, *Annali di Math.*, t. 22, 1943.

[5] I. Gelfand, Normierte Ringe. (*Math Sbornik*, t. 51, 1941).

[6] J. Leray, Fonction de variables complexes : sa représentation comme somme de puissances négatives de fonctionelles linéaires. R. C. Acad. Lincei, 1956, p. 589-590.

[7] E. E. Levi, Sulle ipersuperficio dello spazio a 4 dimensione. *Ann. di Math. P. et App.*, 18, 1911.

[8] E. R. Lorch, The spectrum of linear operations. *Trans. Am. Math. Soc.*, t. 52, 1942.

[9] F. Norguet, Sur les domaines d'holomorphie des fonctions uniformes de plusieurs variables complexes. (passage du local au global). *Bull. Soc. Math. France*, 82, 1954, p. 137-159.

[10] L. Schwartz, Théorie des Distributions. Paris, Herman et Cie.

[11] G. E. Silov, O razlogeni'a kommutativnovo koltza pr'amuu summu idealov. *Mat. Sbornik*, 32, 1953, p. 353-364.

[12] L. Waelbroeck, Le calcul symbolique dans les algèbres commutatives. *Journal de Math. P. et App.*, 33, 1954, p. 147-186.

[13] L. Waelbroeck, Les algèbres à inverse continu. C. R., Paris, t. 238, 1954, p. 640-641.

[14] L. Waelbroeck, Calcul symbolique et ensembles bornés de fonctions rationelles. *Bull. Acad. Belgique*, (5) 43, 1957.

[15] L. Waelbroeck, Algèbres commutatives : Éléments réguliers. *Bull. Soc. Math. Belgique*, 9, 1957.

[16] L. Waelbroeck, Note sur les algèbres du calcul symbolique. *Journal de Math. P. et App.*, 37, 1958, p. 41-44.

[17] A. Weil, L'intégrale de Cauchy et les fonctions de plusieurs variables. *Math. Ann.*, 111, 1935.

[18] H. Whitney, On analytic extensions of differentiable functions defined on closed sets. *Trans Am. Math. Soc.*, 36, 1934, p. 63-89.

[19] H. Whitney, On ideals of differentiable functions. *Am. Journ. of Math.*, 70, 1948, p. 635-658.

[20] J. Leray, Hyperbolic differential equations. (Mimeographed) Institute for Advanced Study, Princeton.

[21] J. Leray, La résolution des problèmes de Cauchy et de Dirichlet au moyen du calcul symbolique et des projections orthogonales et obliques. Second Colloque sur les Équations aux Dérivées Partielles. C. B. R. M., Bruxelles, 1954.

2

TABLE DES MATIÈRES

IMPRIMERIE DES ÉDITIONS J. DUCULOT, S. A., GEMBLOUX (*Imprimé en Belgique*).