Université Libre de Bruxelles
Département de Mathématique

Vrije Universiteit Brussel
Departement voor Wiskunde

ESPACES NUCLEAIRES

Quatrième foire estivale d'analyse fonctionnelle

TERNAT 1969

Ces notes ont été rédigées à la suite de la Quatrième Foire Estivale de Mathématiques, Nucléaire, qui s'est réunie au Mathematisch Instituut te Ternat en juillet 1969.
Des exposés antérieurs ont été incorporés lorsque les responsables ont jugé cette incorporation opportune. Les participants croient que ces notes peuvent être utiles à un débutant qui souhaiterait se mettre rapidement au courant de quelques aspects de la théorie des espaces et opérateurs nucléaires. Ils sont tout aussi convaincus du fait que de grosses lacunes subsistent.

Les exposés à la Quatrième Foire Estivale ont été faits par Ivan CNOP, Francine CNOP-GRANDSARD, Freddy DELBAEN, Jean-Pierre GOSSEZ, Jean HAEZENDONCK, Enrique LAMI-DOZO, Guy NOEL et moi-même. Chacun a rédigé sa partie une première fois. Guy NOEL a rerédigé l'ensemble, uniformisant notamment la terminologie, les définitions, les notations. André DUCAMP, Georges ELENCWAJG, Fonny OOMS, Georges PAPACOSTAS, et Emmanuel VERGISON, ont participé aux discussions sans toutefois faire d'exposé ni rédiger de syllabus.

On ne peut réunir treize mathématiciens dans une maison de campagne sans résoudre de problèmes d'intendance importants. Nos épouses ont collaboré à la solution de ces problèmes avec leur allant et leur bonne humeur habituels. Des surprises sont toujours possibles, une grande boîte de thon pouvant se révéler plus grande que prévu par exemple.

Que toutes les personnes nommées ci-dessus acceptent mes remerciements pour leur collaboration à la réussite de cette Foire Estivale, Nucléaire. Je tiens à inclure dans ces remerciements le Secrétariat du Departement van Wiskunde de la Vrije Universiteit Brussel, et le Secrétariat du Département de Mathématique de l'Université Libre de Bruxelles, qui ont préparé les stencils. Le Fonds de la Recherche Fondamentale Collective et le Groupe de Recherche sur les Groupes de Lie ont fourni les stencils et le papier. Qu'ils trouvent l'expression de notre gratitude.

Je ne puis terminer sans citer à nouveau Guy NOEL, dont le travail a été sensiblement plus important que celui de n'importe lequel des autres participants à cette Foire, lors de la rédaction, puis de la préparation finale des manuscrits.

L. WAELBROECK.

TABLE DES MATIERES

CHAPITRE I

Sommabilité dans les espaces de Banach.

1. Sommabilité dans $\mathbb{C}$.

Nous rappellerons ici rapidement quelques propriétés bien connues de la sommabilité dans $\mathbb{C}$. Nous ne ferons pas de démonstrations.

Une famille $(\alpha_i)_{i\in I}$ de nombres complexes est dite sommable s'il existe un nombre complexe α ayant la propriété suivante :
A tout $\varepsilon > 0$, on peut associer une partie finie H de I telle que, quelle que soit la partie finie J de I, on ait

$$J \supset H \Longrightarrow \left| \alpha - \sum_{i\in J} \alpha_i \right| < \varepsilon$$

L'ensemble I n'étant pas ordonné, il s'agit en fait ici d'une convergence commutative. On écrit $\alpha = \sum_{i\in I} \alpha_i$

Le corps $\mathbb{C}$ étant complet, pour que la famille $(\alpha_i)_{i\in I}$ soit sommable, il faut et il suffit que le critère de Cauchy soit vérifié. C'est à dire :
La famille $(\alpha_i)_{i\in I}$ est sommable si et seulement si à tout $\varepsilon > 0$, on peut associer une partie finie H de I telle que, quelle que soit la partie finie J de I, on ait :

$$J \cap H = \emptyset \Longrightarrow \left| \sum_{i\in J} \alpha_i \right| < \varepsilon$$

Notons encore que :
Une famille de scalaires (α_i) est sommable si et seulement si elle est absolument sommable, c.à.d. si la famille des valeurs absolues $(|\alpha_i|)$ est sommable. De plus, si toutes les sommes partielles finies de (α_i) sont bornées par $A > 0$, alors $\sum_{i\in I} |\alpha_i| \leq 4A$.

Rappelons aussi que toute famille sommable comprend au plus une infinité dénombrable de termes non nuls.

On note $\ell^p(I)$, $(1 \leq p < +\infty)$ l'espace des familles $\xi = (\xi_i)_{i\in I}$ telles que la famille (ξ_i^p) soit sommable. Muni de la norme $\|\xi\|_p = \left(\sum_{i\in I} |\xi_i|^p\right)^{1/p}$, l'espace $\ell^p(I)$ est un espace de Banach. $\ell^2(I)$ est un espace de Hilbert. Le dual de $\ell^1(I)$ est l'espace $\ell^\infty(I)$ formé des familles $\xi = (\xi_i)_{i\in I}$ telles que $\sup_{i\in I} |\xi_i| = \|\xi\|_\infty < +\infty$.

Si $I = \mathbb{N}$, on écrit ℓ^p, ℓ^∞, plutôt que $\ell^p(\mathbb{N})$, $\ell^\infty(\mathbb{N})$.

2. Sommabilité absolue dans les espaces normés.

Contrairement à ce qui se passe dans le cas des scalaires, une famille de vecteurs d'un espace normé peut être sommable sans être absolument sommable. Il y a donc lieu de distinguer soigneusement les deux notions.

Définition 2.1 : Une famille de vecteurs $(x_i)_{i\in I}$ d'un espace normé est dite absolument sommable si la famille des normes $\|x_i\|$ est sommable.

Si E est un espace de Banach, on peut alors trouver dans E un vecteur somme de la famille (x_i).

Définition 2.2 : Soit E un espace normé, et I un ensemble d'indices. On désigne par $\ell^1(I,E)$ l'espace vectoriel des familles absolument sommables $\xi = (x_i)$ de vecteurs de E, muni de la norme

$$\|\xi\|_{as} = \sum_{i\in I} \|x_i\|$$

Une famille absolument sommable contient au plus une infinité dénombrable de vecteurs non nuls.

Si E est un espace de Banach, il est immédiat que $\ell^1(I,E)$ en est un aussi. D'autre part, il est assez évident que l'espace $E^{(I)}$ des familles presque nulles est dense dans $\ell^1(I,E)$.

3. Sommabilité dans les espaces normés.

Nous avons affirmé ci-dessus qu'une famille peut être sommable sans être absolument sommable. En voici un exemple : soient H un espace de Hilbert séparable, et (e_n) une base orthonormée de H. Posons $x_n = \frac{1}{n} e_n$. Tenant compte de ce que $\sum_n \frac{1}{n^2} < +\infty$, on voit sans peine que la série $\sum_n x_n$ est commutativement convergente. Par contre, elle n'est pas absolument convergente puisque $\|x_n\| = \frac{1}{n}$. Enonçons maintenant avec précision la définition :

Définition 3.1 : Soit E un espace normé. Une famille $\xi = (x_i)_{i\in I}$ de vecteurs de E est sommable si à tout $\varepsilon > 0$, on peut associer une partie finie J de I telle que, pour toute partie finie K de I, on ait :

$$K \cap J = \emptyset \implies \Big\| \sum_{i\in K} x_i \Big\| < \varepsilon$$

Si E est un espace de Banach, on peut alors trouver dans E un vecteur somme de la famille (x_i). Si $\xi = (x_i)$ est sommable, les sommes partielles finies de cette famille sont bornées. Il en résulte que les sommes partielles finies de la famille de scalaires $\langle x_i, x'\rangle$ sont bornées, uniformément sur la boule unité de E'. Par conséquent, on a aussi

$$\sup_{\|x'\|\leq 1} \sum_{i\in I} |\langle x_i, x'\rangle| < +\infty .$$

On a ainsi légitimé la définition suivante :

Définition 3.2 : Soient E un espace normé et I un ensemble d'indices. On désigne par $\ell^1((I,E))$ l'espace vectoriel des familles sommables $\xi = (x_i)$ de vecteurs de E, muni de la norme

$$\|\xi\|_s = \sup_{\|x'\|\leq 1} \sum_{i\in I} |\langle x_i, x'\rangle|$$

Si E est un espace de Banach, $\ell^1((I,E))$ en est un aussi. En effet, soit (ξ^n) une suite de Cauchy de $\ell^1((I,E))$. Si $\xi^n = (x_i^n)$, on a $\|x_i^n - x_i^m\| = \sup_{\|x'\|\leq 1} |\langle x_i^n - x_i^m, x'\rangle| \leq \|\xi^n - \xi^m\|_s$

Ainsi la suite (x_i^n) est de Cauchy dans E. Si $x_i = \lim_{n\to\infty} x_i^n$, on vérifie alors que la famille $\xi = (x_i)$ est sommable et que $\xi^n \xrightarrow[n]{} \xi$.

D'autre part, l'espace $E^{(I)}$ des familles presque nulles est dense dans $\ell^1((I,E))$. En effet, si $\xi \in \ell^1((I,E))$, et si J est une partie finie de I, désignons par ξ^J la famille presque nulle (x_i^J) :

$$x_i^J = \begin{cases} x_i & \text{si } i \in J \\ 0 & \text{si } i \notin J \end{cases}$$

La famille ξ étant sommable, à tout $\varepsilon > 0$, on peut associer une partie finie J de I telle que les sommes partielles finies $\sum_{i\in H} x_i$, $H \cap J = \emptyset$, soient dans la boule de rayon ε. Il en résulte alors $\|\xi - \xi^J\|_s \leq 4\varepsilon$.

Ceci montre également qu'une famille sommable comporte au plus une infinité dénombrable de termes non nuls, (elle est limité d'une suite de familles presque nulles).

Enfin, toute famille absolument sommable est sommable.

De plus :

Proposition 3.3 : L'injection canonique de $\ell^1(I,E)$ dans $\ell^1((I,E))$ est continue.

En effet $\|\xi\|_s \leq \sum_{i\in I} \sup_{\|x'\|\leq 1} |\langle x_i, x'\rangle| = \|\xi\|_{as}$

CHAPITRE 2

Idéaux d'opérateurs.

1. Opérateurs à trace et opérateurs nucléaires.

Tous les espaces vectoriels considérés ont le corps des complexes comme corps de base. Si E et F sont deux espaces de Banach, on note L(E,F) l'espace de Banach des applications linéaires continues de E dans F.

A la base de la théorie des opérateurs de types particuliers entre espaces de Hilbert, se trouve la théorie de Riesz des opérateurs compacts. Nous rappellerons l'énoncé fondamental de cette théorie, renvoyant pour la démonstration à n'importe quel traité d'analyse fonctionnelle qui la contient, par exemple [4] ou [24].

Théorème 1.1 : Soient H_1 et H_2 deux espaces de Hilbert. A tout opérateur linéaire compact T de H_1 dans H_2, on peut associer une suite orthonormée (e_n) de vecteurs de H_1, une suite othonormée (u_n) de vecteurs de H_2 et une suite de scalaires, (μ_n), convergeant vers 0, telles que, pour tout $x \in H_1$, on ait :

$$T\,x = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n \, (x|e_n)\, u_n .$$

Si $x \in H_1$ et $y \in H_2$, nous désignerons par $\bar{x} \otimes y$ l'opérateur de H_1 dans H_2 défini par :

$$u \longmapsto (u|x)y$$

Le théorème 1.1 affirme donc que l'opérateur T est la limite simple-forte de la série $\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n \, \bar{e}_n \otimes u_n$. Mais on voit sans peine que cette série converge en fait vers T pour la topologie de la norme (dans l'espace $L(H_1,H_2)$). En effet :

$$\Big\| T - \sum_{1}^{N} \mu_n \, \bar{e}_n \otimes u_n \Big\| = \sup_{\|x\|\le 1} \Big\| \sum_{N+1}^{\infty} \mu_n (x|e_n)\, u_n \Big\| .$$

$$= \sup_{\|x\|\le 1} \Big(\sum_{N+1}^{\infty} |\mu_n|^2 \, |(x|e_n)|^2 \Big)^{1/2} \le \sup_{n>N} |\mu_n|$$

Définition 1.2 : Soient H_1 et H_2 deux espaces de Hilbert. Un opérateur linéaire compact T de H_1 dans H_2 est appelé un opérateur à trace s'il peut s'écrire $T = \sum_n \mu_n \, \bar{e}_n \otimes x_n$, avec

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\mu_n| < \infty$$

La définition suivante donne une généralisation aux espaces de Banach des opérateurs à trace :

Définition 1.3 : Soient E, F deux espaces de Banach. Un opérateur $T \in L(E,F)$ est dit nucléaire s'il existe une suite équicontinue (e'_n) de vecteurs de E', une suite bornée (u_n) de vecteurs de F et une suite (μ_n) de scalaires telles que : $\sum_{n=1}^{\infty} |\mu_n| < \infty$

et pour tout $x \in E$: $\quad T\,x = \sum_n \mu_n \langle x, e'_n\rangle \, u_n .$

On note encore $T = \sum_n \mu_n \, e'_n \otimes u_n$. Remarquons que cette série converge également pour la norme de L(E,F). En effet :

$$\Big\| T - \sum_{1}^{N} \mu_n \, e'_n \otimes u_n \Big\| = \sup_{\|x\|\le 1} \Big\| \sum_{N+1}^{\infty} \mu_n \langle x, e'_n\rangle u_n \Big\| \le A.B. \sum_{N+1}^{\infty} |\mu_n|$$

où $A = \sup_n \|e'_n\|$ et $B = \sup_n \|u_n\|$. Tout opérateur nucléaire est donc compact.

Il est clair que tout opérateur à trace d'un espace de Hilbert dans un autre est un opérateur nucléaire. La réciproque est vraie :

Proposition 1.4 : Soient H_1 et H_2 des espaces de Hilbert. Un opérateur $T \in L(H_1,H_2)$ est un opérateur à trace si et seulement s'il est nucléaire.

Si T est nucléaire, on a $T = \sum_n \mu_n e'_n \otimes u_n$ avec $\sum_n |\mu_n| < +\infty$, $\sup_n \|e'_n\| = A < +\infty$ et $\sup_n \|u_n\| = B < +\infty$. Ainsi qu'on vient de le remarquer, ceci entraine que T est compact.

Le théorème 1.1 permet alors d'écrire $T = \sum_n \lambda_n \overline{f_n} \otimes v_n$, où (f_n) est une suite orthonormée de vecteurs de H_1 et (v_n) une suite orthonormée de vecteurs de H_2. Il reste à montrer que $\sum_n |\lambda_n| < +\infty$.

On a : $\lambda_n = (T f_n | v_n) = \sum_m \mu_m \langle f_n, e'_m \rangle \ (u_m | v_n)$

D'où :

$$\sum_n |\lambda_n| \leq \sum_m |\mu_m| \left(\sum_n |\langle f_n, e'_m \rangle| \ |(u_m|v_n)| \right)$$

Une forme linéaire continue sur H_1 est définie par un vecteur de H_1 ; écrivons $\langle f_n, e'_m \rangle = (f_n | e_m)$ et remarquons que les suites (f_n) et (v_n) étant orthonormées, les suites de scalaires $(f_n|e_m)$ et $(u_m|v_n)$ appartiennent, pour m fixé, à l'espace ℓ^2. Appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans cet espace, on obtient :

$$\sum_n |\lambda_n| \leq \sum_m |\mu_m| \ \|e_m\| \ \|u_m\| \leq A.B \sum_m |\mu_m| < +\infty$$

<u>Définition 1.5</u> : <u>Si</u> E <u>et</u> F <u>sont deux espaces de Banach, on notera</u> $\mathfrak{n}(E,F)$ <u>l'ensemble des opérateurs nucléaires de</u> E <u>dans</u> F.

On voit sans peine que $\mathfrak{n}(E,F)$ est un sous-espace vectoriel de L(E,F). De plus :

<u>Proposition 1.6</u> : <u>Soient</u> E, F, G, H <u>des espaces de Banach. On a alors</u> :

(i) $\mathfrak{n}(E,F)$ <u>est un sous-espace vectoriel de</u> L(E,F)

(ii) <u>Si</u> $T \in L(E,F)$, $U \in \mathfrak{n}(F,G)$ et $V \in L(G,H)$, <u>alors</u> $V\,U\,T \in \mathfrak{n}(E,H)$.

En effet, si $U = \sum_n \mu_n f'_n \otimes v_n$, alors

$$V\,U\,T = \sum_n \mu_n (T'f'_n) \otimes V\,v_n$$

Les propositions suivantes sont toutes aussi faciles à établir :

Si $T \in \mathfrak{n}(E,F)$, l'application

$$T \longmapsto \|T\|_1 = \inf \sum_n |\mu_n| \ \|e'_n\| \ \|u_n\|$$

où l'infimum porte sur toutes les représentations possibles de T sous la forme $T = \sum_n \mu_n e'_n \otimes u_n$, est une norme sur $\mathfrak{n}(E,F)$. De plus, tout opérateur linéaire continu de rang fini est nucléaire, et l'espace $\mathfrak{n}f(E,F)$ de ces opérateurs est dense dans $\mathfrak{n}(E,F)$ pour la norme $\| \ \|_1$. Si $T \in \mathfrak{n}(E,F)$, on a $\|T\| \leq \|T\|_1$. En effet

$$\|T\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \left\| \sum_n \mu_n \langle x, e'_n \rangle u_n \right\| \leq \sum_n |\mu_n| \ \|e'_n\| \ \|u_n\|.$$

Notons aussi que :

<u>Proposition 1.7</u> : <u>Soient</u> E, F <u>deux espaces de Banach. Muni de la norme</u> $\|\cdot\|_1$, $\mathfrak{n}(E,F)$ <u>est un espace de Banach</u>.

Soit (T_n) une suite de Cauchy dans $\mathfrak{n}(E,F)$. Puisque $\|\cdot\| \leq \|\cdot\|_1$, T_n est une suite de Cauchy dans L(E,F) et converge donc dans cet espace vers un opérateur T. A tout $m > 0$, on peut associer i_m tel que

$$\|T_h - T_k\|_1 < \frac{1}{2^m + 1} \quad \text{pour } h,k > i_m$$

On peut donc écrire, pour tout $x \in E$:

$$T_{i_{m+1}} x - T_{i_m} x = \sum_n \mu_n^{(m)} \ \langle x, e'^{(m)}_n \rangle \ u_n^{(m)}$$

avec
$$\sum_n |\mu_n^{(m)}| \ \|e'^{(m)}_n\| \ \|u_n^{(m)}\| < \frac{1}{2^{m+1}}$$

Par conséquent :

$$T_{i_{m+p}} x - T_{i_m} x = \sum_{r=m}^{m+p-1} \ \sum_n \mu_n^{(r)} \langle x, e'^{(r)}_n \rangle u_n^{(r)}$$

Lorsque p tend vers $+\infty$, $T_{i_{m+p}} x$ tend vers $T x$. Donc :

$$T x - T_{i_m} x = \sum_{r=m}^{\infty} \sum_n \mu_n^{(r)} \langle x, e_n'^{(r)} \rangle u_n^{(r)}$$

et $\| T - T'_{i_m} \|_1 \leq \sum_{r=m}^{\infty} \sum_n |\mu_n^{(r)}| \, \|e_n'^{(r)}\| \, \|u_n^{(r)}\| < \sum_{r=m}^{\infty} \frac{1}{2^{r+1}} = \frac{1}{2^m}$

$T - T_{i_m}$ est donc nucléaire, ainsi que T ; de plus T_{i_m} converge vers T dans $\mathcal{N}(E,F)$.

Voici maintenant une propriété fondamentale des opérateurs nucléaires :

Théorème 1.8 : Soient E,F deux espaces de Banach. Tout opérateur nucléaire T de E dans F se factorise à travers l'espace de Hilbert ℓ^2.

Etant nucléaire, T s'écrit $T = \sum_n \lambda_n e'_n \otimes u_n$, avec

$$\sum_n |\lambda_n| < \infty, \ \sup_n \|e'_n\| = A < +\infty, \ \sup_n \|u_n\| = B < +\infty.$$

En modifiant éventuellement les e'_n, on pourra supposer $\lambda_n > 0$.

A tout $x \in E$, associons la suite de carré sommable $U x = (\sqrt{\lambda_n} \langle x, e'_n \rangle)$.

U est un opérateur continu puisque

$$\| U x \| = \left(\sum_n \lambda_n |\langle x, e'_n \rangle|^2 \right)^{1/2} \leq A \left(\sum_n \lambda_n \right)^{1/2} \|x\|$$

A toute suite $\xi = (\xi_n) \in \ell^2$, associons le vecteur $V\xi = \sum_n \xi_n \sqrt{\lambda_n}\, u_n$

V est un opérateur continu puisque

$$\|V\xi\| \leq \sum_n |\xi_n| \sqrt{\lambda_n} \, \|u_n\| \leq B \sum_n |\xi_n| \sqrt{\lambda_n}$$

Et de l'inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée dans l'espace ℓ^2, on déduit $\quad \|V\xi\| \leq B \left(\sum_n \lambda_n \right)^{1/2} \|\xi\|$

Il est de plus clair que $T = V U$.

Proposition 1.9 : Soient E,F deux espaces de Banach. Si $T : E \longrightarrow F$ est un opérateur nucléaire, alors $T' : F' \longrightarrow E'$ est nucléaire.

En effet, si $T = \sum_n \lambda_n e'_n \otimes u_n$, alors $T' = \sum_n \lambda_n u_n \otimes e'_n$.

Par contre, rien ne prouve que T est nucléaire, lorsque T' l'est.

2. Idéaux d'opérateurs.

Nous désignerons par $\mathbb{B}$an la catégorie des espaces de Banach.

Définition 2.1 : Soit α une partie de la classe des morphismes de $\mathbb{B}$an. On dira que α est un idéal de $\mathbb{B}$an si :

(i) quels que soient les espaces de Banach E, F, $\alpha(E,F) = \alpha \cap L(E,F)$ est un sous-espace vectoriel de $L(E,F)$

(ii) si $T \in \alpha$ et si $U.T$ est défini, alors $U . T \in \alpha$

(iii) si $T \in \alpha$ et si $T . U$ est défini, alors $T . U \in \alpha$

La proposition 1.6 signifie que la classe $\mathcal{N}$ des opérateurs nucléaires est un idéal de $\mathbb{B}$an.

Si α est un idéal de $\mathbb{B}$an, on note α^* l'idéal engendré par la classe des transposés des opérateurs appartenant à α.

Pour tout entier $k>0$, on note α^k l'idéal engendré par la classe des composés de k éléments de α. Les éléments de $\mathcal{N}^2$ sont appelés des opérateurs binucléaires.

Définition 2.2 : Un idéal α de la catégorie $\mathbb{B}$an est dit "adapté à la théorie des espaces nucléaires" si un nombre entier naturel k existe tel que $\quad \alpha^k \subset \mathcal{N}$ et $\mathcal{N}^k \subset \alpha$.

Cette terminologie sera justifiée au chapitre 3. La suite du présent chapitre sera uniquement consacrée à construire des idéaux de $\mathbb{B}$an adaptés à la théorie des espaces nucléaires.

<u>Proposition 2.3</u> . <u>L'idéal $\underset{\sim}{\mathcal{N}}^*$ est adapté à la théorie des espaces nucléaires</u>.

Montrons d'abord que $\underset{\sim}{\mathcal{N}}^2 \subset \underset{\sim}{\mathcal{N}}^*$. Soient $T : E \longrightarrow F$ et $U : F \longrightarrow G$ deux opérateurs nucléaires. Factorisons U à travers un espace de Hilbert H : $U = U_2\, U_1$, avec $U_1 : F \longrightarrow H$, $U_2 : H \longrightarrow G$. (D'après le théorème 1.8, on peut même supposer $H = \ell^2$). Puisque T est nucléaire, $U_1\, T$ l'est aussi.
On a donc $U_1\, T = \sum_n \lambda_n\, e'_n \otimes x_n$, avec $e'_n \in E'$, $x_n \in H$.
Considérons l'opérateur $V : H \longrightarrow E'$: $V = \sum_n \lambda_n \bar{x}_n \otimes e'_n$.
V est nucléaire, et l'opérateur transposé est $V' = \sum_n \lambda_n\, e'_n \otimes x_n$: $E'' \longrightarrow H$. Sa restriction à E est $U_1\, T$. Donc $U_1\, T \in \underset{\sim}{\mathcal{N}}^*$, et $U\, T \in \underset{\sim}{\mathcal{N}}^*$.

Ainsi $\underset{\sim}{\mathcal{N}}^2 \subset \underset{\sim}{\mathcal{N}}^*$. La proposition 1.9 signifie que $\underset{\sim}{\mathcal{N}}^* \subset \underset{\sim}{\mathcal{N}}$. A fortiori a-t-on $(\underset{\sim}{\mathcal{N}}^*)^2 \subset \underset{\sim}{\mathcal{N}}$.

<u>Proposition 2.4</u> . <u>Si l'idéal α est adapté à la théorie des espaces nucléaires</u>, α^* <u>l'est aussi</u>.

On a $\alpha^k \subset \underset{\sim}{\mathcal{N}}$ et $\underset{\sim}{\mathcal{N}}^k \subset \alpha$. Donc $(\alpha^*)^k \subset \underset{\sim}{\mathcal{N}}^* \subset \underset{\sim}{\mathcal{N}}$ et $\underset{\sim}{\mathcal{N}}^{2k} \subset (\underset{\sim}{\mathcal{N}}^*)^k \subset \alpha^*$.

Si α^* est adapté à la théorie des espaces nucléaires, rien ne permet d'affirmer qu'il en est de même de α, car α et α^{**} ne sont pas nécessairement comparables. Remarquons cependant la proposition suivante :

<u>Proposition 2.5</u> : <u>Soit</u> α <u>un idéal engendré par des opérateurs</u> $T : E \longrightarrow F$ <u>tels que F admet un supplémentaire topologique dans</u> F''. <u>Alors</u>, α <u>est adapté à la théorie des espaces nucléaires s'il existe un entier</u> $k > 0$ <u>tel que</u> $\underset{\sim}{\mathcal{N}}^k \subset \alpha$ et $(\alpha^*)^k \subset \underset{\sim}{\mathcal{N}}$.

Soit $T : E \longrightarrow F$, où F admet un supplémentaire dans F''. Alors T se factorise à travers T''. On a donc $\alpha \subset \alpha^{**}$. Et de $(\alpha^*)^k \subset \underset{\sim}{\mathcal{N}}$, on déduit $(\alpha^{**})^k \subset \underset{\sim}{\mathcal{N}}^*$, et $\alpha^k \subset \underset{\sim}{\mathcal{N}}^* \subset \underset{\sim}{\mathcal{N}}$.

Notons que l'hypothèse de cette proposition est vérifiée si α est engendré par des opérateurs $T : E \longrightarrow F$ tels que F soit réflexif, ou soit un dual.

3. Opérateurs sous-nucléaires.

<u>Définition 3.1</u> : <u>Soient</u> E <u>et</u> F <u>deux espaces de Banach. Un opérateur linéaire continu</u> $T : E \longrightarrow F$ <u>est dit sous-nucléaire si on peut trouver une isométrie</u> U <u>de</u> F <u>sur un sous-espace fermé d'un troisième espace de Banach</u> G <u>telle que l'opérateur</u> U T <u>soit nucléaire</u>.

Bien entendu, si $U(F)$ admet un supplémentaire topologique dans G, alors T est lui-même nucléaire. Remarquons aussi que tout opérateur sous-nucléaire est compact
$U\,T$ étant nucléaire, nous pouvons écrire $U\,T = \sum_n \lambda_n\, e'_n \otimes u_n$ où $\sum_n |\lambda_n| < +\infty$, $e'_n \in E'$, $u_n \in G$, $\|e'_n\| \leq A$, $\|u_n\| \leq B$. On a alors, quel que soit $x \in E$:

$$\|Tx\| \leq B \sum_n |\lambda_n|\, |\langle x, e'_n \rangle|$$

Cette dernière formule ne fait plus intervenir aucun élément de G. Elle caractérise la sous-nucléarité ainsi que nous le verrons bientôt.

Tout espace de Banach F est isométrique à un sous-espace d'un espace de type $\ell^\infty(I)$. Il suffit de prendre pour I la boule unité fermée de F' et pour isométrie l'opérateur $u \longrightarrow (\langle u, i \rangle_{i \in I})$.

Rappelons aussi que si V est un opérateur linéaire continu d'un sous-espace F_1 de F dans $\ell^\infty(I)$, V se prolonge en un opérateur linéaire continu de F dans $\ell^\infty(I)$. Il suffit, si $V x = \xi = (\xi_i)$, de considérer les formes linéaires continues $x \longmapsto \xi_i$ $(i \in I)$ et d'appliquer le théorème de Hahn-Banach à chacune d'elles.

D'après ce qui précède, il est clair que si l'opérateur $T : E \longrightarrow F$ est sous-nucléaire, il existe une isométrie U de E sur un sous-espace fermé d'un espace du type $\ell^\infty(I)$ telle que U T soit nucléaire.

D'autre part :

Proposition 3.2 : Soient E et F des espaces de Banach et $T : E \longrightarrow F$ un opérateur linéaire continu. S'il existe une suite $(\lambda_n) \in \ell^1$, une suite équicontinue (e'_n) d'éléments de E' et une constante positive B telles que

$$\|T x\| \leq B \sum_n |\lambda_n| \, |\langle x, e'_n\rangle|$$

pour tout $x \in E$, alors, quelle que soit l'isométrie U de F sur un sous-espace de $\ell^\infty(I)$, l'opérateur U T est nucléaire.

L'opérateur $S : E \longrightarrow \ell^1 : x \longmapsto (\lambda_n \langle x, e'_n\rangle)$ est visiblement continu. De plus, d'après l'hypothèse, T s'annule sur le noyau de S et induit un opérateur continu V du sous-espace S(E) de ℓ^1 dans F. Prolongeons l'opérateur U V en un opérateur W de ℓ^1 dans $\ell^\infty(I)$. On a alors le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[rr, "T"] \arrow[d, "S"'] & & F \arrow[d, "U"] \\
S(E) \arrow[urr, "V"] \arrow[r] & \ell^1 \arrow[r, "W"'] & \ell^\infty(I)
\end{tikzcd}$$

Si $\delta^n = (\delta_{nm})_{m \in \mathbb{N}}$ est la base canonique de ℓ^1, posons $\xi^n = W \delta^n$. On a alors, quel que soit $x \in E$:

$$U T x = W S x = W(\sum_n \lambda_n \langle x, e'_n\rangle \delta^n) = \sum_n \lambda_n \langle x, e'_n\rangle \xi^n$$

Et ceci montre que U T est nucléaire.

Corollaire 3.3 : Tout opérateur sous-nucléaire, à valeurs dans un espace de Banach du type $\ell^\infty(I)$ est nucléaire.

Corollaire 3.4 : Soient E et F des espaces de Banach. Un opérateur linéaire continu $T : E \longrightarrow F$ est sous-nucléaire si et seulement s'il existe une suite $(\lambda_n) \in \ell^1$, une suite équicontinue (e'_n) d'éléments de E' et une constante positive B telle que

$$\forall x \in E : \|T x\| \leq B \sum_n |\lambda_n| \, |\langle x, e'_n\rangle|$$

Théorème 3.5 : La classe $s\mathfrak{N}$ des opérateurs sous-nucléaires est un idéal de la catégorie $\mathbb{B}$an. De plus :

(i) Si $T : E \longrightarrow F$ est sous-nucléaire et s'annule sur le sous-espace fermé S de E, alors l'opérateur induit $E/S \longrightarrow F$ est sous-nucléaire.

(ii) Si la transposée de l'opérateur T est nucléaire, alors T est sous-nucléaire.

Que $s\mathfrak{N}$ coupe chaque espace L(E,F) suivant un espace vectoriel est assez évident. D'autre part, si $T \in s\mathfrak{N}$ et U T S est défini, alors de la relation $\|T x\| \leq B \sum_n |\lambda_n| \, |\langle x, e'_n\rangle|$, on déduit

$$\|U T S x\| \leq B \|U\| \sum_n |\lambda_n| \, |\langle x, S' e'_n\rangle|$$

ce qui montre que $U T S \in s\mathfrak{N}$. L'affirmation (i) est immédiate. Pour établir (ii), remarquons que si T' est nucléair, T'' l'est aussi. Ainsi, l'application T est nucléaire si on la considère comme prenant ses valeurs dans F''. Par conséquent, l'opérateur $T : E \longrightarrow F$ est sous-nucléaire.

Pour montrer que l'idéal $s\mathcal{N}$ est adapté à la théorie des espaces nucléaires, nous utiliserons la proposition suivante :

Proposition 3.6 : Tout opération sous-nucléaire se factorise à travers un opérateur linéaire continu de ℓ^∞ dans ℓ^2.

Supposons $T : E \longrightarrow F$ sous-nucléaire. On a alors, d'après le corollaire 3.4 : $\|T x\| \leq B \sum_n |\lambda_n| \; |\langle x, e'_n \rangle|$

Considérons alors les opérateurs

$$S : E \longrightarrow \ell^\infty : x \longmapsto (\langle x, e'_n \rangle)$$

$$U : \ell^\infty \longrightarrow \ell^2 : (\xi_n) \longmapsto (|\lambda_n|^{1/2} \xi_n)$$

Il est clair que S et U sont continus, et que T s'annule sur le noyau de U S. Par conséquent T induit un opérateur $V : U\,S(E) \longrightarrow F$ tel que $V\,U\,S = T$. Montrons que V est continu pour la norme de ℓ^2 ; si $x \in E$, on a :

$$\|V(U\,S\,x)\| = \|T\,x\| \leq B \sum_n |\lambda_n|^{1/2} \, |\lambda_n|^{1/2} \, |\langle x, e'_n \rangle|$$

De l'inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée à l'espace ℓ^2, on déduit $\|V(U\,S\,x)\| \leq B(\sum_n |\lambda_n|)^{1/2} (\sum_n |\lambda_n| \; |\langle x, e'_n \rangle|^2)^{1/2}$

c.à.d. $\|V(U\,S\,x)\| \leq B(\sum_n |\lambda_n|)^{1/2} \; \|U\,S\,x\|$

On prolonge alors l'opérateur V en un opérateur continu de ℓ^2 dans F en posant $V(\xi) = 0$ si ξ appartient à l'orthogonal de $U\,S(E)$ dans ℓ^2. Ceci achève la démonstration.

Théorème 3.7 : L'idéal $s\mathcal{N}$ est adapté à la théorie des espaces nucléaires.

Tout opérateur nucléaire est sous-nucléaire. Donc $\mathcal{N}^k \subset s\mathcal{N}$, pour tout entier $k > 0$. D'autre part, si S et T sont sous-nucléaires, on peut factoriser S, à travers ℓ^∞ :

$$S = S_2 \, S_1 \qquad \text{où le but de } S_1 \text{ est } \ell^\infty.$$

L'opérateur $S_1\,T$ est sous-nucléaire puisque $s\mathcal{N}$ est un idéal. Du corollaire 3.3, on déduit que $S_1\,T$ est nucléaire. Donc $S\,T \in \mathcal{N}$. Ainsi $(s\mathcal{N})^2 \subset \mathcal{N}$, et $s\mathcal{N}$ est adapté à la théorie des espaces nucléaires.

4. Opérateurs de Hilbert-Schmidt.

Dans tout ce paragraphe, on désigne par H_1 et H_2 des espaces de Hilbert (complexes).

Définition 4.1 : Soient H_1 et H_2 deux espaces de Hilbert. Un opérateur $T : H_1 \longrightarrow H_2$ est dit de Hilbert-Schmidt s'il existe une base orthonormée $(e_i)_{i \in I}$ de H_1 et une base orthonormée $(u_j)_{j \in J}$ de H_2 telles que

$$\sum_{i \in I} \sum_{j \in J} |(T\,e_i | u_j)|^2 < +\infty$$

Il est à remarquer que si T est de Hilbert-Schmidt, la série double $\sum_i \sum_j |(T\,e_i | u_j)|^2$ est convergente quelles que soient les bases (e_i) et (u_j), et sa somme est indépendante du choix de ces bases.

Il est en effet évident que

$$\sum_i \sum_j |(T\,e_i | u_j)|^2 = \sum_i \|T\,e_i\|^2 = \sum_j \|T^* u_j\|^2$$

Et les deuxième et troisième membres de cette égalité sont indépendants l'un de (u_j), l'autre de (e_i).

Si T est un opérateur de Hilbert-Schmidt, on pose

$$\|T\|_2 = (\sum_i \|T\,e_i\|^2)^{1/2}$$

On définit ainsi une norme sur l'espace vectoriel des opérateurs de Hilbert-Schmidt de H_1 dans H_2 (lequel est même complet pour cette norme). De plus, on a $\|T\| \leq \|T\|_2$. En effet, si $x \in H_1$:

$$\|T\,x\|^2 = \sum_j |(T\,x | u_j)|^2 \leq \|x\|^2 \sum_j \|T^* u_j\|^2.$$

<u>Proposition 4.2</u> : <u>Soient</u> H_1 <u>et</u> H_2 <u>des espaces de Hilbert, et</u> $T : H_1 \longrightarrow H_2$ <u>un opérateur linéaire continu.</u> T <u>est de Hilbert-Schmidt si et seulement si</u> T <u>est compact et admet une représentation</u> $T = \sum_n \lambda_n \bar{e}_n \otimes u_n$ <u>où</u> (e_n) <u>est une famille orthonormée de vecteurs de</u> H_1, (u_n) <u>une famille orthonormée de vecteurs de</u> H_2 <u>et où</u> $\sum_n |\lambda_n|^2 < +\infty$.

Si $t = \sum_n \lambda_n \bar{e}_n \otimes u_n$, prolongeons (e_n) en une base orthonormée $(e_i)_{i\in I}$ de H_1, et (u_n) en une base orthonormée $(u_j)_{j\in J}$. On a alors $\sum_{i\in I} \sum_{j\in J} |(Te_i|u_j)|^2 = \sum_n |(Te_n|u_n)|^2 = \sum_n |\lambda_n|^2 < +\infty$.

Réciproquement, supposons T de Hilbert-Schmidt. Si l'on sait déjà que T est compact, on peut écrire $T = \sum_n \lambda_n \bar{e}_n \otimes u_n$, procéder comme ci-dessus et déduire $\sum_n |\lambda_n|^2 < +\infty$ de ce que $\sum_i \sum_j |(Te_i|u_j)|^2 < +\infty$. Il suffit donc de montrer que T est compact, c.à.d. que T est une limite en norme d'opérateurs de rang fini. Soit $(e_i)_{i\in I}$ une base orthonormée de H_1. Pour toute partie finie de J de I . désignons par T_J l'opérateur $T_J = \sum_{i\in J} \bar{e}_i \otimes Te_i$.

On a alors pour tout $x \in H_1$.

$$\|Tx - T_J x\| \leqslant \sum_{i\notin J} |(x|e_i)| \, \|Te_i\|$$

Appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans l'espace $\ell^2(I-J)$, on en déduit

$$\|T - T_J\| \leqslant \sum_{i\in I-J} \|Te_i\|^2$$

La thèse se déduit alors de ce que la série $\sum_{i\in I} \|Te_i\|^2$ est convergente.

Le lemme suivant nous fournira une nouvelle caractérisation des opérateurs de Hilbert-Schmidt :

<u>Lemme 4.3</u> : <u>Si</u> $(\xi^{(n)})$ $(n = 1, \dots, p)$ <u>est une famille finie d'éléments de</u> ℓ^1, <u>alors</u>

$$\sum_{n=1}^{p} \|\xi^{(n)}\|_2 \leqslant K \sup \left\{ \sum_{n=1}^{p} |\langle \xi^{(n)}, \eta \rangle| \;\middle|\; \eta \in \ell^\infty, \|\eta\|_\infty \leqslant 1 \right\}$$

Notons que les normes apparaissant au premier membre de cette inégalité sont les normes dans l'espace ℓ^2 (rappelons que $\ell^1 \subset \ell^2$).

Nous admettrons provisoirement ce lemme qui apparaîtra comme un corollaire du théorème 5.4. D'ici là, nous ne l'utilisons que pour démontrer la proposition suivante :

<u>Proposition 4.4</u> : <u>Soient</u> H_1 <u>et</u> H_2 <u>deux espaces de Hilbert. Un opérateur</u> $T : H_1 \longrightarrow H_2$ <u>est de Hilbert-Schmidt si et seulement s'il existe une constante</u> C <u>telle que pour toute famille finie</u> $(x_j)_{j\in J}$ <u>de vecteurs de</u> H_1, <u>on ait</u> :

$$\sum_{j\in J} \|Tx_j\| \leqslant C \sup_{\|x'\|\leqslant 1} \sum_{j\in J} |(x_j|x')|$$

Si T est de Hilbert-Schmidt, écrivons $T = \sum_n \lambda_n \bar{e}_n \otimes u_n$, où (e_n) et (u_n) sont deux familles orthonormées, et $\sum_n |\lambda_n|^2 < +\infty$.

Décomposons T en un produit de trois opérateurs :

$T_1 : H_1 \longrightarrow \ell^1 : x \longmapsto (\lambda_n (x|e_n))$ (on a $\|T_1\| \leqslant (\sum_n |\lambda_n|^2)^{1/2}$)

$T_2 : id : \ell^1 \longrightarrow \ell^2$

$T_3 : \ell^2 \longrightarrow H_2 : \xi = (\xi_n) \longmapsto \sum_n \xi_n u_n$ (on a $\|T_3\| \leqslant 1$)

Si $(x_j)_{j\in J}$ est une famille finie de vecteurs de H_1, on a d'après le lemme 4.3 :

$$\begin{aligned} \sum_{j\in J} \|Tx_j\| &\leqslant \sum_{j\in J} \|T_1 x_j\|_2 \\ &\leqslant K \sup \left\{ \sum_{j\in J} |\langle T_1 x_j, \eta \rangle| \;\middle|\; \eta \in \ell^\infty, \|\eta\|_\infty \leqslant 1 \right\} \\ &\leqslant K \|T_1'\| \sup \left\{ \sum_{j\in J} |(x_j|x')| \;\middle|\; x' \in H_1, \|x'\| \leqslant 1 \right\} \end{aligned}$$

Réciproquement, soit $(e_i)_{i\in I}$ une base orthonormée de H_1, et soit $\alpha = (\alpha_i)_{i\in I}$ un élément de l'espace de Hilbert $\ell^2(I)$.

Si J est une partie finie de I, on a :

$$\sum_{i\in J} |\alpha_i| \, \|T e_i\| = \sum_{i\in J} \|T(\alpha_i e_i)\|$$

$$\leq C \sup_{\|x'\|\leq 1} \sum_{i\in J} |(\alpha_i e_i|x')|$$

Mais $\sum_{i\in J} |(\alpha_i e_i|x')| \leq \sum_{i\in I} |\alpha_i (e_i|x')|$ et de l'inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée dans $\ell^2(I)$, on déduit que le second membre vaut plus $\|\alpha\|_2$. Mais alors, on a :

$$\left|\sum_{i\in I} \alpha_i \|T e_i\|\right| \leq C \|\alpha\|_2$$

ce qui signifie que le premier membre est une forme linéaire continue sur $\ell^2(I)$.

Par conséquent la famille $(\|T e_i\|)_{i \, I}$ qui définit cette forme appartient elle-même à $\ell^2(I)$, et T est un opérateur de Hilbert-Schmidt.

Nous aurions pu démontrer maintenant que le produit de deux opérateurs de Hilbert-Schmidt est un opérateur à trace (donc nucléaire). Nous nous en abstenons car nous démontrerons dans la suite deux généralisations de ce résultat. (Théorèmes 6.4 et 7.6).

5. Opérateurs absolument sommants.

La proposition 4.4 fournit une caractérisation des opérateurs de Hilbert-Schmidt qui ne fait plus intervenir aucune notion d'orthogonalité ni de base, mais uniquement le couplage entre un espace et son dual. Ceci permet de généraliser les opérateurs de Hilbert-Schmidt aux espaces normés. On utilise alors l'expression "opérateur absolument sommant" (Grothendieck, [11] parle d'application "semi-intégrale à droite").

<u>Définition 5.1</u> : <u>Soient</u> E <u>et</u> F <u>deux espaces normés. Un opérateur</u> $T : E \longrightarrow F$ <u>est dit absolument sommant (en abrégé : a-sommant) s'il existe une constante</u> C <u>telle que, pour toute famille finie</u> (x_i) $(i = 1, \ldots, n)$ <u>de vecteurs de</u> E <u>, on ait</u> :

$$\sum_{i=1}^{n} \|T x_i\| \leq C \sup_{\|e'\|\leq 1} \sum_{i=1}^{n} |\langle x_i, e'\rangle|$$

Le lemme 4.3 signifie que l'injection canonique $\ell^1 \longrightarrow \ell^2$ est a-sommante. L'expression absolument sommant se justifie à l'aide de la proposition suivante :

<u>Théorème 5.2</u> : <u>Soient</u> E <u>et</u> F <u>deux espaces normés. Pour qu'un opérateur</u> $T : E \longrightarrow F$ <u>soit a-sommant, il faut que pour toute famille sommable</u> $(x_i)_{i\in I}$ <u>de vecteurs de</u> E, <u>la famille</u> $(T x_i)_{i\in I}$ <u>soit absolument sommable dans</u> F, <u>et il suffit que cette propriété soit vraie pour</u> $I = \mathbb{N}$. <u>De plus, dans ce cas l'opérateur</u> $\ell^1((I,E)) \longrightarrow \ell^1(I,F) : (x_i) \longrightarrow (T x_i)$ <u>est continu</u>.

Supposons T a-sommant ; si $\xi = (x_i)$ est une famille sommable, on déduit immédiatement de l'hypothèse que $\sum_{i\in J} \|T x_i\| \leq C \|\xi\|_s$ pour toute partie finie J de I. Il en résulte que T définit un opérateur de norme au plus 1 de $\ell^1((I,E))$ dans $\ell^1(I,F)$.

Réciproquement, supposons $(T x_n)$ absolument sommable dès que (x_n) est sommable. Si $\xi = (x_n)$, écrivons $\hat{T}\xi = (T x_n)$. La relation à démontrer signifie que $\hat{T}$ applique continûment $E^{(\mathbb{N})}$ dans $F^{(\mathbb{N})}$, si on considère $E^{(\mathbb{N})}$ comme sous-espace de $\ell^1((\mathbb{N},E))$ et $F^{(\mathbb{N})}$ comme sous-espace de $\ell^1(\mathbb{N},F)$. Soit B la boule unité de $E^{(\mathbb{N})}$. Supposons qu'on ait

$$\sup_{\xi\in B} \|\hat{T}\xi\|_{as} = \infty$$

Pour tout n, choisissons alors $\xi^{(n)} \in B$, tel que $\|\hat{T}\xi^{(n)}\|_{as} \leq 2^n$.

Si $\xi^{(n)} = (x_m^{(n)})_{m \in \mathbb{N}}$. soit $S = \{(n,m) \mid x_m^{(n)} \neq 0\}$. A tout $s = (n,m) \in S$. associons le vecteur $y_s = \frac{1}{2^n} x_m^{(n)}$, et montrons que la famille $(y_s)_{s\in S}$ est sommable. A $\varepsilon > 0$, on peut associer un entier N tel que $\sum_{n>N} \frac{1}{2^n} < \varepsilon$. L'ensemble J : $\{s \in S \mid n \leq N \text{ si } s=(n,m)\}$ est fini (puisque chaque famille $\xi^{(n)} = (x_m^{(n)})$ est presque nulle).
Si H est une partie finie de S, disjointe de J, on a alors $\sum_{s\in H} y_s = \sum_n \frac{1}{2^n} \sum_m x_m^{(n)}$ (où (n,m) parcourt H). De la relation $\|\xi^{(n)}\|_s \leq 1$, on déduit pour toute partie finie P de $\mathbb{N}$: $\|\sum_{m\in P} x_m^{(n)}\| \leq 1$. Par conséquent :

$$\Big\|\sum_{s\in H} y_s\Big\| \leq \sum_n \frac{1}{2^n} \Big\|\sum_m x_m^{(n)}\Big\| \leq \sum_{n>N} \frac{1}{2^n} < \varepsilon$$

On a ainsi montré que la famille $(y_s)_{s\in S}$ est sommable.
L'ensemble S étant dénombrable, la famille $(T\, y_s)_{s\in S}$ est absolument sommable. Donc

$$\sum_{s\in S} \|T\, y_s\| = \sum_n \frac{1}{2^n} \sum_m \|T\, x_m^{(n)}\| = \sum_n \frac{1}{2^n} \|\hat{T}\, \xi^{(n)}\|_{as} < \infty$$

Ceci contredit évidemment l'hypothèse $\|\hat{T}\, \xi^{(n)}\|_{as} \geq 2^n$ et achève la démonstration du théorème.

Le théorème 5.2 rend immédiate la démonstration du théorème suivant :

<u>Théorème 5.3</u> : <u>Les opérateurs absolument sommants constituent un idéal de la catégorie</u> <u>$\mathbb{B}$an</u>.

Voici encore une caractérisation des opérateurs a-sommants :

<u>Théorème 5.4</u> : <u>Soient</u> E <u>et</u> F <u>deux espaces de Banach. Un opérateur</u> $T : E \longrightarrow F$ <u>est absolument sommant si et seulement s'il existe une mesure de Radon positive bornée</u> μ <u>sur la boule unité</u> X <u>du dual</u> E' <u>de</u> E, <u>telle que pour tout</u> $x \in E$: $\|T\, x\| \leq \int_X |\langle x, e'\rangle| \mu(de')$

Si T est a-sommant, on sait d'après le théorème 5.2 que, en désignant par Y la boule unité de F', l'opérateur
$\hat{T} : \ell^1((Y,E)) \longrightarrow \ell^n(Y,F) : (x_y)_{y\in Y} \longrightarrow (T\, x_y)_{y\in Y}$ est continu. D'autre part, l'application σ définie par
$\sigma : \ell^1(Y,F) \longrightarrow \mathbb{C} : (u_y)_{y\in Y} \longrightarrow \sum_{y\in Y} \langle u_y, y\rangle$ est continue.
En effet :

$$\Big|\sum_y \langle u_y, y\rangle\Big| \leq \sum_y \|u_y\| = \|u\|_{as}$$

Ainsi, $\sigma \circ \hat{T}$ est une forme linéaire continue sur $\ell^1((Y,E))$.

Si U désigne le cercle unité du plan complexe, l'espace topologique $X \times U^Y$ est compact. (X est muni de la topologie faible). A toute famille $\xi = (x_y) \in \ell^1((Y,E))$, on associe une fonction continue Φ sur $X \times U^Y$ au moyen de la formule

$$\Phi_\xi\,(e', (\alpha_y)) = \sum_{y\in Y} \alpha_y \langle x_y, e'\rangle$$

Désignons la norme de l'espace de Banach, $\mathcal{C}(X \times U^Y)$, formé des fonctions continues sur $X \times U^Y$, par $\|\cdot\|_\infty$. Il est alors clair que

$$\|\Phi_\xi\|_\infty \leq \|\xi\|_s$$

D'autre part, on a, en choisissant convenablement les scalaires α_y :

$$\sum_y |\langle x_y, e'\rangle| = \sum_y \alpha_y \langle x_y, e'\rangle$$

et par conséquent

$$\|\xi\|_s \leq \|\Phi_\xi\|_\infty$$

Ceci montre que l'application $\xi \longrightarrow \Phi_\xi$ est une isométrie de $\ell^1(Y, E))$ sur un sous-espace de $\mathcal{C}(X \times U^Y)$. La forme linéaire continue $\sigma \circ \hat{T}$ se prolonge alors en une mesure de Radon ν sur $X \times U^Y$:

$$\sum_{y\in Y} \langle T\, x_y, y\rangle = \int_{X\times U^Y} \sum_{y\in Y} \alpha_y \cdot \langle x_y, e'\rangle\, \nu(de', d\alpha_y)$$

Fixons $y \in Y$ et choisissons une famille $\xi \in \ell^1((Y, E))$ dont tous les éléments sont nuls, sauf celui d'indice y, qui vaut x. La formule ci-dessus s'écrit alors

$$\langle T\,x,\, y\rangle = \int_{X \times U^Y} \alpha_y \quad \langle x, e'\rangle\ \nu(de', d\alpha_y)$$

D'où
$$|\langle T\,x,\, y\rangle| \leqslant \int_{X \times U^Y} |\langle x, e'\rangle|\ |\nu|\ (de', d\alpha_y)$$

La fonction à intégrer ne dépend plus de α_y. On peut donc remplacer la mesure $|\nu|$ par sa projection μ sur X :

$$|\langle T\,x,\, y\rangle| \leqslant \int_X |\langle x, e'\rangle|\ \mu(de')$$

Et par conséquent $\quad \|T\,x\| \leqslant \int_X |\langle x, e'\rangle|\ \mu(de')$

Réciproquement, supposons que l'on dispose de la formule précédente. Soit $\xi = (x_n) \in \ell^1(\mathbb{N}, E))$. On a alors pour toute partie finie P de $\mathbb{N}$:

$$\sum_{n \in P} \|T\,x_n\| \leqslant \int_X \sum_{n \in P} |\langle x, e'\rangle|\ \mu(de') \leqslant \|\xi\|_s\ \mu(X)$$

Il en résulte que la série $\sum_n \|T\,x_n\|$ est convergente : $\hat{T}\,\xi \in \ell^1(\mathbb{N}, F)$.

<u>Corollaire 5.5</u> : <u>Si</u> K <u>est un espace compact, un opérateur</u> $\mathcal{C}(K) \longrightarrow F$ <u>est a-sommant dès qu'il existe sur</u> K <u>une mesure de Radon positive</u> μ <u>telle que</u> $\|T\,f\| \leqslant \int_K |f(x)|\mu(dx)$ <u>pour toute</u> $f \in \mathcal{C}(K)$.

Il suffit en effet de considérer l'image de la mesure μ par l'injection canonique de K dans la boule unité de l'espace $\mathcal{M}(K) = (\mathcal{C}(K))'$ des mesures de Radon sur K, et d'appliquer le théorème.

<u>Corollaire 5.6</u> : <u>Si</u> K <u>est un espace compact et</u> μ <u>une mesure de Radon positive sur</u> K, <u>l'application canonique</u> $\mathcal{C}(K) \longrightarrow L^1(K, \mu)$ <u>est un opérateur a-sommant.</u>

<u>Corollaire 5.7 (Lemme 4.3)</u> : <u>L'application identique de</u> ℓ^1 <u>dans</u> ℓ^2 <u>est a-sommante</u>.

Soit I l'intervalle unité : $I = [0, 1]$. On construit aisément dans l'espace de Hilbert $L^2(I)$ une suite orthonormée (φ_n) de fonctions satisfaisant aux conditions

(1) $|\varphi_n(t)| \leqslant 1$

(2) $\int_0^1 \varphi_p(t)\ \varphi_q(t)\ \varphi_r(t)\ \varphi_s(t)\ dt = 1$ ou 0 suivant que les nombres p, q, r, s, sont égaux deux à deux ou non.

On prend par exemple $\varphi_p(t) = (-1)^k$ pour $k.2^{-p} \leqslant t < (k+1)\ 2^{-p}$, fonctions de Rademacher.

A tout $t \in I$ on associe alors une forme linéaire continue e'_t sur ℓ^1 en posant

$$\langle \xi, e'_t\rangle = \sum_1^\infty \xi_i\ \varphi_i(t)$$

La forme e'_t appartient visiblement à la boule unité X de ℓ^∞. On pourra donc définir une mesure de Radon positive bornée μ sur cette boule unité en posant, pour toute fonction continue f sur X :

$$\int_X f(e')\ \mu(de') = \int_0^1 f(e'_t)\ dt$$

Il reste à montrer que pour tout $\xi \in \ell^1$, on a

$$\|\xi\|_2 \leqslant K \int_0^1 |\langle \xi, e'_t\rangle|\ dt$$

ou encore $\quad \|\xi\|_2 \leqslant K \int_0^1 |\sum_1^\infty \xi_i\ \varphi_i(t)|\ dt$

Or, la suite (φ_n) étant orthonormée, on a :

$$\|\xi\|_2^2 = \sum_1^\infty |\xi_i|^2 = \int_0^1 |\sum_1^\infty \xi_i\ \varphi_i(t)|^2\ dt$$

D'autre part, la condition (2) ci-dessus entraine

$$\int_0^1 |\sum_1^\infty \xi_i\ \varphi_i(t)|^4\ dt \leqslant 3\ \|\xi\|_2^4$$

Ecrivons alors

$$\|\xi\|_2^2 = \int_0^1 |\sum_1^\infty \xi_i\ \varphi_i(t)|^{2/3}\ (|\sum_1^\infty \xi_i\ \varphi_i(t)|^4)^{1/3}\ dt$$

et appliquons l'inégalité de Hölder (avec $p = 3/2$ et $q = 3$) : il vient
$$\|\xi\|_2^2 \leq \left(\int_0^1 |\sum_1^\infty \xi_i \varphi_i(t)| \, dt\right)^{2/3} \left(3 \|\xi\|_2^4\right)^{1/3}$$
et par conséquent $\|\xi\|_2 \leq \sqrt{3} \int^1 |\sum_1^\infty \xi_i \varphi_i(t)| \, dt$

Proposition 5.8 : Tout opérateur sous-nucléaire est a-sommant.

En effet, si $T : E \longrightarrow F$ est sous-nucléaire, on a pour tout $x \in E$
$$\|T x\| \leq B \sum_n |\lambda_n| \, |\langle x, e'_n\rangle|$$
avec $(\lambda_n) \in \ell^1$ et (e'_n) borné dans E'. En modifiant éventuellement la constante B, on peut même supposer $\|e'_n\| \leq 1$. On a alors, si $\xi = (x_m)$ est une suite sommable dans E :
$$\sum_m \|T x_m\| \leq B \sum_n |\lambda_n| \sum_m |\langle x_m, e'_n\rangle| \leq B \|\xi\|_s \left(\sum_n |\lambda_n|\right)$$
Ainsi T est a-sommant.
On a donc les inclusions $\mathcal{N} \subset s\mathcal{N} \subset as$

6. L'idéal α.

Désignons par α l'idéal de la catégorie $\mathbb{B}$an engendré par les applications canoniques $\mathcal{C}(K) \longrightarrow L^2(K,\mu)$, où K est un espace compact, et μ une mesure de Radon positive sur K.

Proposition 6.1 : L'idéal as est inclus à l'idéal α.

Soit $T : E \longrightarrow F$ un opérateur a-sommant. D'après le théorème 5.4, il existe sur la boule unité X de E' une mesure de Radon μ telle que
$$\|T x\| \leq \int_X |T_1 x(e')| \, \mu(de')$$
où $T_1 x$ désigne la fonction $e' \longmapsto \langle x, e'\rangle$ sur X. On sait que l'opérateur T_1 est une isométrie de E sur un sous-espace de $\mathcal{C}(X)$. Appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans l'espace L^2, il vient, en désignant par U l'application canonique de $\mathcal{C}(X)$ dans $L^2(X,\mu)$

$$\|T x\| \leq \mu(X) \, \|U T_1 x\|_2$$
Cette formule montre que T s'annule sur le noyau de l'application $U T_1$, et induit un opérateur continu de $U T_1(E)$ dans F. Cet opérateur s'étend facilement en un opérateur continu T_2 de $L^2(X,\mu)$ dans F. On a donc $T = T_2 U T_1$, ce qui montre que $T \in \alpha$.

La suite de ce paragraphe sera consacrée à la démonstration de ce que $\alpha^2 \subset \mathcal{N}$. On aura ainsi montré simultanément que les idéaux as et α sont adaptés à la théorie des espaces nucléaires.

Nous désignerons toujours par U, éventuellement $U_{K,\mu}$ l'application canonique $\mathcal{C}(K) \longrightarrow L^2(K,\mu)$

Proposition 6.2 : Soient H un espace de Hilbert, K un espace compact et μ une mesure de Radon positive sur K.
Si $T \in L(H, \mathcal{C}(K))$, alors l'opérateur $U T$ est de Hilbert-Schmidt.

Soit $(e_i)_{i \in I}$ une base orthonormée de H. Si $x \in K$, on a en notant δ_x la mesure de Dirac en x :
$$\sum_{i \in I} |T e_i(x)|^2 = \sum_i |\langle T e_i, \delta_x\rangle|^2 = \sum_i |\langle e_i, T'\delta_x\rangle|^2 = \|T'\delta_x\|^2 \leq \|T\|^2$$
Donc $\sum_{i \in I} \|U T e_i\|_2^2 = \sum_{i \in I} \int_K |T e_i(x)|^2 \mu(dx) \leq \|T\|^2 \mu(K)$
Ceci montre que $U T$ est de Hilbert-Schmidt.

Proposition 6.3 : Soient H un espace de Hilbert, K un espace compact et μ une mesure de Radon positive sur K.
Si $T : L^2(K,\mu) \longrightarrow H$ est un opérateur de Hilbert-Schmidt, alors $T U$ est un opérateur nucléaire.

Considérons d'abord un cas particulier. Soient $A_1, \dots, A_m$ des ensembles de Baire dans X, deux à deux disjoints. Soient $1_{A_1}, \dots, 1_{A_m}$ les fonctions caractéristiques correspondantes.

Soient d'autre part $x_1, \dots, x_n$ des vecteurs de H et α_{rs} une matrice m x n. Supposons qu'on ait

$$T = \sum_{r=1}^{m} \sum_{s=1}^{n} \alpha_{rs} \bar{1}_{A_r} \otimes x_s$$

T est de rang fini, de même que T U qui est donc trivialement nucléaire. Mais nous allons majorer la norme $\|T\,U\|_1$.

Les fonctions $1_{A_i} \mu(A_i)^{-1/2}$ sont des vecteurs orthonormés de $L^2(K,\mu)$.

De plus : $\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\mu(A_i)} \|T\,1_{A_i}\|^2 = \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\mu(A_i)} \left\| \sum_r \sum_s \alpha_{rs} (1_{A_i} | 1_{A_r})\, x_s \right\|^2$

$$= \sum_{i=1}^{m} \mu(A_i) \left\| \sum_{s=1}^{n} \alpha_{is}\, x_s \right\|^2$$

Comme $T\,U = \sum_{r=1}^{m} \sum_{s=1}^{n} \alpha_{rs} (U' \bar{1}_{A_r}) \otimes x_s$, on a :

$$\|T\,U\|_1 \le \sum_{r=1}^{m} \left\| \sum_{s=1}^{n} \alpha_{rs}\, x_s \right\| \mu(A_r) \le \left(\sum_{r=1}^{m} \mu(A_r) \right)^{1/2} \left(\sum_{r=1}^{m} \left\| \sum_{s=1}^{n} \alpha_{rs}\, x_s \right\|^2 \mu(A_r) \right)^{1/2}$$

$$\|T\,U\|_1 \le (\mu(x))^{1/2} \; \|T\|_2$$

Cette majoration étant obtenue, considérons un opérateur de Hilbert-Schmidt quelconque $T : L^2(K,\mu) \longrightarrow H$. Soit $(e_i)_{i\in I}$ une base orthonormée de H. On sait que la série $\sum_{i\in I} \|T^* e_i\|^2$ converge. Donc, à tout n on peut associer une partie finie J_n de I telle que

$$\sum_{i \notin J_n} \|T^* e_i\|^2 < \frac{1}{2\,n^2}$$

Les fonctions étagées constituent une partie dense de $L^2(K,\mu)$. On peut donc trouver, pour tout i et tout n, une fonction φ_i^n étagée, telle que

$$\|T^* e_i - \varphi_i^n\| \le \frac{1}{2\,|J_n|\,n^2}$$

où $|J_n|$ désigne le cardinal de l'ensemble J_n. Considérons l'opérateur T_n défini par $T_n \psi = \sum_{i\in J} (\psi | \varphi_i^n)\, e_i$.

T_n étant de rang fini, est de Hilbert-Schmidt, et on a

$$\|T - T_n\|_2^2 = \sum_{i\in I} \|(T^* - T_n^*)\, e_i\|^2$$
$$= \sum_{i\in J_n} \|T^* e_i - \varphi_i^n\|^2 + \sum_{i\notin J_n} \|T^* e_i\|^2$$
$$\le \frac{1}{2\,n^2} + \frac{1}{2\,n^2}$$

Ainsi $\qquad \|T - T_n\|_2 \le \frac{1}{n}$

L'opérateur $T_m - T_n$ est du type considéré au début de cette démonstration, puisque les fonctions φ_i^n sont étagées. Par conséquent : $\|T_m U - T_n U\|_1 \le \mu(K)\, \|T_m - T_n\|_2 \le \mu(K)(\frac{1}{m} + \frac{1}{n})$

Ceci montre que $(T_m U)$ est une suite de Cauchy dans l'espace de Banach $\mathfrak{N}(\mathcal{C}(K),H)$. Elle converge donc dans cet espace vers un opérateur nucléaire V. Pour montrer que $V = T\,U$, il suffit de montrer que $T_n U$ converge simplement vers $T\,U$, ce qui résulte des inégalités suivantes :

$$\|T\,U\,\psi - T_n U \psi\| \le \|T - T_m\|\, \|U\,\psi\|_2$$

et $\|T - T_n\| \le \|T - T_n\|_2 \le \frac{1}{n}$

La proposition 6.3 est ainsi entièrement démontrée.

<u>Théorème 6.4</u> : $\alpha^2 \subset \mathfrak{N}$

Si $T_1, T_2 \in \alpha$, T_1 et T_2 sont des composées du type suivant :

$$E_1 \longrightarrow \mathcal{C}(K_1) \xrightarrow{U_1} L^2(K_1,\mu_1) \longrightarrow E_2$$

$$E_2 \longrightarrow \mathcal{C}(K_2) \xrightarrow{U_2} L_2(K_2,\mu_2) \longrightarrow E_3$$

Et la composée $T_2\,T_1$ est du type

$$E_1 \longrightarrow \mathcal{C}(K_1) \xrightarrow{U_1} L^2(K_1,\mu_1) \xrightarrow{S} \mathcal{C}(K_2) \xrightarrow{U_2} L^2(K_2,\mu_2) \longrightarrow E_3$$

De la proposition 6.2, on déduit que $U_2 S$ est de Hilbert-Schmidt, et de la proposition 6.3, que $(U_2 S) U_1$ est nucléaire. Donc $T_2 T_1$ est nucléaire.

Corollaire 6.5 : Les idéaux α et as sont adaptés à la théorie des opérateurs nucléaires.

7. Opérateurs de type ℓ^p.

Considérons deux espaces de Hilbert H_1, H_2 et un opérateur compact $T : H_1 \longrightarrow H_2$. On sait (théorème 1.1) qu'on peut écrire T sous la forme

$$T = \sum_n \lambda_n \bar{e}_n \otimes u_n$$

Les opérateurs nucléaires (resp. de Hilbert-Schmidt) sont ceux pour lesquels la suite (λ_n) appartient à ℓ^1 (resp. ℓ^2). Il est donc naturel de poser la définition suivante :

Définition 7.1 : Soient H_1, H_2 deux espaces de Hilbert, $T : H_1 \longrightarrow H_2$ un opérateur linéaire continu et p un nombre réel strictement positif. L'opérateur T est dit de type ℓ^p s'il existe une suite orthonormée (e_n) d'éléments de H_1, une suite orthonormée (u_n) d'éléments de H_2 et une suite (λ_n) de scalaires telles que

$$\begin{cases} T = \sum_n \lambda_n \bar{e}_n \otimes u_n \\ \sum_n |\lambda_n|^p < +\infty \end{cases}$$

La dernière condition s'écrit $(\lambda_n) \in \ell^p$. Si $p \leq q$, on a $\ell^p \subset \ell^q$. Donc, dans ce cas tout opérateur de type ℓ^p est aussi de type ℓ^q. En particulier, tout opérateur de type ℓ^p, avec $p \leq 1$ est nucléaire.

La caractérisation suivante permet d'étendre cette notion aux opérateurs entre espaces de Banach : Si $T : H_1 \longrightarrow H_2$ est un opérateur de rang fini, nous noterons ρT le rang de cet opérateur (la dimension de $T H_1$)

Proposition 7.2 : Soit $T = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \bar{e}_n \otimes u_n$ un opérateur compact de H_1 dans H_2. Si on a $|\lambda_n| \geq |\lambda_{n+1}|$, pour tout n, alors

$$|\lambda_m| = \inf \left\{ \|T - U\| \;\middle|\; U \in L(H_1, H_2),\ \rho U \leq m \right\}$$

Ainsi, $|\lambda_m|$ est la distance de T au sous-espace de $L(H_1, H_2)$ formé des opérateurs de rang au plus m.

Démonstration :

D'une part, l'opérateur $\sum_{n=0}^{m-1} \lambda_n \bar{e}_n \otimes u_n$ est de rang m, et

$$\left\| T - \sum_{n=0}^{m-1} \lambda_n \bar{e}_n \otimes u_n \right\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \left\| \sum_m^{\infty} \lambda_n (x|e_n)\, u_n \right\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \left(\sum_m^{\infty} |\lambda_n|^2 |(x|e_n)|^2 \right)^{1/2} \leq |\lambda_m|$$

D'autre part, si U est un opérateur de rang au plus m, le sous-espace engendré par $e_0, \ldots, e_m$ contient un vecteur normé $x = \sum_{j=0}^{m} \xi_j e_j$ tel que $U x = 0$. Alors $T x = \sum_{j=0}^{m} \xi_j \lambda_j u_j$ et

$$\|T - U\|^2 \geq \|T x - U x\|^2 = \|T x\|^2 = \sum_0^m |\xi_j|^2 |\lambda_j|^2 \geq |\lambda_m|^2$$

Ainsi, $|\lambda_m|$ est bien la borne inférieure des nombres $\|T - U\|$

Définition 7.3 : Soient E, F des espaces de Banach et $T : E \longrightarrow F$ un opérateur linéaire continu. T est dit de type ℓ^p si on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_n (T))^p < +\infty$$

où $\alpha_n (T) = \inf \left\{ \|T - U\| \;\middle|\; U \in L(E,F) \text{ et } \rho U \leq n \right\}$

On notera ℓ_p la classe des opérateurs de type ℓ^p.

D'après ce qu'on a vu, si E et F sont des espaces de Hilbert, on a

$$\mathcal{L}_1(E,F) = \mathcal{N}(E,F) \text{ et } \mathcal{L}_2(E,F) = \mathit{as}(E,F)$$

Ces relations ne sont cependant pas nécessairement vraies si E et F sont des espaces de Banach quelconques.

Notons que $\alpha_0(T) = \|T\|$ et que $\alpha_n(T) \geq \alpha_{n+1}(T)$. L'opérateur T est de rang fini si la suite $(\alpha_n(T))$ est presque nulle.

<u>Proposition 7.4</u> : <u>Soient</u> E, F, G <u>trois espaces de Banach. Soient</u> $S : E \longrightarrow F$, $T : E \longrightarrow F$ et $U : F \longrightarrow G$ <u>des opérateurs linéaires continus. On a alors pour tout r et s :</u>

$$\alpha_{r+s}(S+T) \leq \alpha_r(S) + \alpha_s(T)$$

$$\alpha_{r+s}(U\,T) \leq \alpha_r(U)\ \alpha_s(T)$$

La démonstration de la première formule est triviale, et laissée au lecteur.

Quant à la seconde, on choisit des opérateurs U_1, T_1 tels que :

$$\|U - U_1\| \leq \alpha_r(U) + \varepsilon\ ,\ \rho U_1 \leq r$$

$$\|T - T_1\| \leq \alpha_s(T) + \varepsilon\ ,\ \rho T_1 \leq s$$

On a alors $\|U\,T - U_1\,T - (U-U_1)T_1\| \leq (\alpha_r(U) + \varepsilon)(\alpha_s(T) + \varepsilon)$

$$\rho(U_1 T + (U-U_1)T_1) \leq r + s$$

<u>Théorème 7.5</u> : <u>Pour tout</u> $p > 0$, $\mathcal{L}_p$ <u>est un idéal de la catégorie</u> $\mathbb{B}$<u>an</u>.

Soient $S, T \in \mathcal{L}_p(E,F)$. On a alors :

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_n(S+T))^p \leq 2 \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_{2n}(S+T))^p \text{ (puisque } \alpha_n(U) \geq \alpha_{n+1}(U))$$

$$\leq 2 \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_n(S) + \alpha_n(T))^p \text{ (en vertu de 7.4)}$$

$$\leq 2\, k_p \sum_{n=0}^{\infty} \left[(\alpha_n(S))^p + (\alpha_n(T))^p\right]$$

Car on a, si a et b sont deux réels positifs :

$$(a+b)^p \leq k_p\,(a^p + b^p) \text{ où } k_p = \max\left\{2^{p-1}, 1\right\}$$

Ainsi, $S + T \in \mathcal{L}_p(E,F)$. D'autre part si $a \in \mathbb{C}$, $\alpha_n(a\,T) = |a|\,\alpha_n(T)$

Donc $\mathcal{L}_p(E,F)$ est un espace vectoriel.

Si $S \in \mathcal{L}_p(E,F)$ et $T \in L(G,E)$, on a d'après la proposition 7.4 :

$$\alpha_n(S\,T) \leq \alpha_n(S)\ \alpha_0(T) = \alpha_n(S)\ \|T\|$$

Donc $\sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_n(S\,T))^p \leq \|T\|^p \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_n(S))^p$. Il en résulte que $S\,T \in \mathcal{L}_p$. De même $T\,S \in \mathcal{L}_p$.

<u>Théorème 7.6</u> : <u>Soient</u> T <u>et</u> U <u>des opérateurs tels que</u> T U <u>soit défini</u>. <u>Si</u> T <u>est de type</u> ℓ^p <u>et</u> U <u>de type</u> ℓ^q, <u>alors</u> T U <u>est de type</u> ℓ^r, <u>avec</u> $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$. <u>On a</u>

$$\sum_n (\alpha_n(T\,U))^r \leq 2 \sum_n (\alpha_{2n}(T\,U))^r \leq 2 \sum_n \left[(\alpha_n(T))\,(\alpha_n(U))\right]^r$$

Donc $\left(\sum_n (\alpha_n(T\,U))^r\right)^{1/r} \leq 2^{1/r}\left(\sum_n \left[\alpha_n(T)\,\alpha_n(U)\right]^r\right)^{1/r}$, et d'après l'inégalité de Hölder générale :

$$\left(\sum_n (\alpha_n(T\,U))^r\right)^{1/r} \leq 2^{1/r}\left(\sum_n (\alpha_n(T))^p\right)^{1/p}\left(\sum_n (\alpha_n(U))^q\right)^{1/q}$$

Ceci montre que $T\,U \in \mathcal{L}_r$.

<u>Corollaire 7.7</u> : <u>Si</u> $p > 1$, <u>on a</u> $\mathcal{L}_1 \subset \mathcal{L}_p$ <u>et</u> $(\mathcal{L}_p)^n \subset \mathcal{L}_1$ <u>où</u> n <u>est un entier supérieur à</u> p. <u>Si</u> $p < 1$, <u>on a</u> $\mathcal{L}_p \subset \ell_1$ <u>et</u> $(\mathcal{L}_1)^n \subset \mathcal{L}_p$ <u>où</u> n <u>est un entier supérieur à</u> 1/p.

<u>Théorème 7.8</u> : <u>Quel que soit le réel</u> $p > 0$, <u>l'idéal</u> $\mathcal{L}_p$ <u>est adapté à la théorie des espaces nucléaires</u>.

D'après le corollaire 7.7, il suffit de montrer que $\mathcal{L}_1$ est adapté à la théorie des espaces nucléaires. Nous montrerons d'abord que $\mathcal{N}^4 \subset \mathcal{L}_1$, ensuite que $\mathcal{L}_1 \subset \mathcal{N}$. Si α est l'idéal introduit au n° 6, on a $\mathcal{N} \subset \alpha$. Comme d'autre part $(\mathcal{L}_2)^2 \subset \mathcal{L}_1$, il suffit de montrer que $\alpha^2 \subset \mathcal{L}_2$.

Cette démonstration est analogue à celle du théorème 6.4 : si $S, T \in \alpha$. $S\,T$ est du type

$$E_1 \longrightarrow \mathcal{C}(K_1) \longrightarrow L^2(K_1, \mu_1) \longrightarrow \mathcal{C}(K_2) \longrightarrow L^2(K_2, u_2) \longrightarrow E_3$$

D'après la proposition 6.2, l'opérateur $L^2(K_1, \mu_1) \to \mathcal{C}(K_2) \to L^2(K_2, \mu_2)$ est de Hilbert-Schmidt, donc appartient à ℓ_2. Ainsi on a $S\,T \in \ell_2$.

Le fait que $\ell_1 \subset \mathcal{N}$ est une conséquence du lemme suivant :

<u>Lemme 7.9</u> : <u>Si</u> $T : E \longrightarrow F$ <u>est un opérateur de type</u> ℓ^p, <u>on peut trouver une suite équicontinue</u> (e'_n) <u>d'éléments de</u> E', <u>une suite bornée</u> (u_n) <u>d'éléments de</u> F <u>et une suite</u> (λ_n) <u>de scalaires telles que</u>

$$T = \sum_n \lambda_n e'_n \otimes u_n$$

$$\sum_n |\lambda_n|^p < +\infty$$

Si $T \in \ell_p$, on a $\sum_n (\alpha_n(T))^p < +\infty$. Nous écrivons α_n au lieu de $\alpha_n(T)$. Pour tout entier n, nous choisissons un opérateur T_n de rang au plus égal à 2^n, tel que $\|T - T_n\| \leq 2\,\alpha_{2^n}$.

Puisque $\alpha_n \longrightarrow 0$, on a $T = \lim\limits_n T_n = \sum\limits_n (T_{n+1} - T_n)$.

Chaque opérateur $U_n = T_{n+1} - T_n$ est de rang au plus égal à $2^{n+1} + 2^n \leq 2^{n+2}$.

U_n s'écrit $U_n = \sum\limits_{i=1}^{\rho U_n} \lambda_{ni}\, e'_{ni} \otimes u_{ni}$

où $\|e'_{ni}\| \leq 1$, $\|u_{ni}\| \leq 1$, $|\lambda_{ni}| \leq \|U_n\|$ (Cette dernière inégalité se démontre à l'aide d'un vecteur x_i tel que $\langle x_i, e'_{nj}\rangle = \delta_{ij}$ et $\|x_i\| \leq 1$).

Comme $T = \sum\limits_n U_n = \sum\limits_n \sum\limits_{i=1}^{\rho U_n} \lambda_{ni}\, e'_{ni} \otimes u_{ni}$. pour montrer que T est nucléaire, il reste à établir que $\sum\limits_n \sum\limits_{i=1}^{\rho U_n} |\lambda_{ni}|^p < +\infty$

Or $\sum\limits_n \sum\limits_{i=1}^{\rho U_n} |\lambda_{ni}|^p \leq \sum\limits_n \rho_{U_n} \cdot \|U_n\|^p \leq \sum\limits_n 2^{n+1} \left(\|T-T_n\| + \|T-T_{n+1}\|\right)^p$

$$\leq \sum_n 2^{n+1}\, 2^p\, (\alpha_{2^n} + \alpha_{2^{n+1}})^p \leq \sum_n 2^{n+1}\, 2^{2p}\, \alpha_{2^n}^p$$

Et la thèse résulte de ce que $\sum\limits_n 2^{2p}\, 2^{n+1} \alpha_{2^n}^p = 2^{2p+2} \sum\limits_n 2^{n-1} \alpha_{2^n}^p$

$$\leq 2^{p+2} \sum_{r=0}^{\infty} \alpha_r^p < +\infty$$

CHAPITRE 3

Espaces nucléaires - Propriétés de permanence.

1. Terminologie et notations.

Nous abrégerons les mots "espace localement convexe séparé" en e.l.c.s. Si E est un e.l.c.s., son dual topologique muni de la bornologie équicontinue sera noté E'. E' n'est donc pas un e.l.c.s., mais bien un e.b.c.s. (espace bornologique convexe séparé). Le dual topologique de E, muni de la topologie forte est noté E'_b.

Pour ce qui concerne les e.b.c.s., nous utilisons sans référence les résultats qui figurent dans le travail de H. Buchwalter [2]. Le dual bornologique d'un e.b.c.s. X, c.à.d. l'espace vectoriel des formes linéaires bornées sur X, sera noté $X^{\times}$ et muni de la topologie de la convergence uniforme sur les bornés de X.

Contrairement à ce qui se passe pour les e.l.c.s., un e.b.c.s. n'est pas nécessairement séparé par son dual, ce qui a pour conséquence que celui-ci a un rôle moins important. Si X est séparé par son dual, nous dirons que X est t-séparé, ou régulier.

Rappelons encore la définition des foncteurs $\mathbb{T}$ et $\mathbb{B}$:
Si E est un e.l.c.s., une partie de E est topologiquement bornée si elle est absorbée par tout voisinage de l'origine. L'ensemble des parties topologiquement bornées de E est une bornologie, dite bornologie topologique. Muni de cette bornologie, l'espace vectoriel sous-jacent à E est noté $\mathbb{B}E$. Si X est un e.b.c.s., un disque de X est dit bornivore s'il absorbe tout borné.

Les disques bornivores de X constituent un système fondamental de voisinages de l'origine pour une topologie, appelée topologie bornologique. Muni de cette topologie, l'espace vectoriel sous-jacent à X est noté $\mathbb{T}X$.

Un e.l.c.s. E est bornologique si et seulement si $E = \mathbb{T}\mathbb{B}E$. Un e.b.c.s. X est topologique si et seulement si $X = \mathbb{B}\mathbb{T}X$.

Une partie B d'un espace vectoriel X est dite disquée si elle est convexe et équilibrée. On dit alors aussi que B est un disque.

Si X est un e.b.c.s., et B un disque borné de X, on note X_B l'espace vectoriel engendré par B, normé par la jauge de B, notée $\|\cdot\|_B$.

Si E est un e.l.c.s., et V un voisinage disqué de l'origine de E, on note E_V l'espace vectoriel quotient de E par le plus grand sous-espace vectoriel inclus à V, normé par la jauge de l'image de V dans cet espace, notée $\|\cdot\|_V$. Si V est associé à une semi-norme ν, on écrit aussi E_ν au lieu de E_V.

Enfin, la notation $L(.,.)$ désigne l'espace des applications linéaires continues lorsque les espaces sont localement convexes, et l'espace des applications linéaires bornées, lorsque les espaces sont bornologiques convexes.

2. Espaces bornologiques convexes séparés nucléaires.

Définition 2.1 : Un e.b.c.s. X est dit nucléaire si et seulement si à tout disque borné B de X, on peut en associer un autre C, qui l'absorbe et est tel que l'application canonique $\hat{X}_B \xrightarrow[\varpi_{CB}]{} \hat{X}_C$ est nucléaire.

Soit α un idéal de la catégorie des espaces de Banach, adapté à la théorie des espaces nucléaires. Il est clair qu'un e.b.c.s. X est nucléaire si et seulement si à tout disque borné B de X, on peut en associer un autre l'absorbant, C tel que l'application canonique ϖ_{CB} appartienne à α. Ceci justifie les mots "adapté à la théorie des espaces nucléaires".

Un disque borné B d'un e.b.c.s. X est dit quadratique si l'espace de Banach $\hat{X}_B$ est un espace de Hilbert.

<u>Proposition 2.2</u> : <u>Tout e.b.c.s. nucléaire</u> X <u>admet un système fondamental de bornés formé de disques bornés quadratiques.</u>

Soit B_1 un disque borné quelconque. Choisissons un disque borné $B_2 \supset B_1$, tel que $\hat{X}_{B_1} \xrightarrow[\varpi_{21}]{} \hat{X}_{B_2}$ soit nucléaire. Factorisons cette application à travers un espace de Hilbert H : $\varpi_{21} = m_2 . m_1$. Désignons par U la boule unité de H. L'ensemble $C = m_2(U) \cap X$ est un disque borné de X qui absorbe B_1. L'espace de Banach $\hat{X}_C$ est clairement isomorphe à un quotient de H et est donc un espace de Hilbert. Ainsi, C est quadratique.

<u>Proposition 2.3</u> : <u>Un sous-e.b.c.s.</u> Y <u>d'un e.b.c.s. nucléaire</u> X <u>est nucléaire</u>.

Soit B_1 un disque borné de Y. B_1 est la trace sur Y d'un disque borné C_1 de X. Soit C_2 un disque borné qui absorbe C_1, et est tel que l'application $\hat{X}_{C_1} \longrightarrow \hat{X}_{C_2}$ soit nucléaire. Si $B_2 = C_2 \cap Y$, l'application canonique $\hat{Y}_{B_1} \longrightarrow \hat{X}_{C_2}$ est nucléaire, et prend ses valeurs dans $\hat{Y}_{B_2}$. Elle est donc sous-nucléaire, en tout qu'application de $\hat{Y}_{B_1}$ dans $\hat{Y}_{B_2}$. On en déduit la thèse puisque $\mathfrak{s}\mathfrak{N}$ est adapté à la théorie des espaces nucléaires.

<u>Proposition 2.4</u> : <u>Un e.b.c.s.</u> Y, <u>quotient d'un e.b.c.s. nucléaire</u> X <u>est nucléaire</u>.

Soit B_1 un disque borné de Y. B_1 est l'image d'un disque borné C_1 de X. Soit C_2 un disque borné qui absorbe C_1 et est tel que l'application $\hat{X}_{C_1} \longrightarrow \hat{X}_{C_2}$ soit nucléaire. Si B_2 est l'image de C_2 dans Y, l'application canonique $\hat{X}_{C_1} \longrightarrow \hat{Y}_{B_2}$ est nucléaire et induit, par passage au quotient l'application canonique de $\hat{Y}_{B_1}$ dans $\hat{Y}_{B_2}$. Celle-ci est donc sous-nucléaire (Th. 2.3.5). On en déduit la thèse.

<u>Proposition 2.5</u> : <u>Un e.b.c.s.</u> X, <u>produit d'une famille dénombrable</u> $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ <u>d'e.b.c.s. nucléaires est nucléaire.</u>

Soit B un disque borné de $X = \prod_n X_m$. B est inclus à un produit $\prod_n B_n$, où pour tout n, B_n est un disque borné de X_n. Pour tout n, choisissons dans X_n un disque borné C_n qui absorbe B_n et est tel que l'application canonique $(X_n)\hat{}_{B_n} \longrightarrow (X_n)\hat{}_{C_n}$ soit sous-nucléaire, avec les relations suivants :

$$\forall\, x_n \in (X_n)\hat{}_{B_n} : \|x_n\|_{C_n} \leq \sum_m |\langle x_n, x^*_{nm}\rangle|$$

$$x^*_{nm} \in ((X_n)_{B_n})' \quad , \quad \sum_m \|x^*_{nm}\|_{B_n} < 2^{-n}$$

Posons $C = \prod_n C_n$. On a alors si $x = (x_n) \in \hat{X}_B$:

$$\|x\|_C = \sup_n \|x_n\|_{C_n} \leq \sum_n \sum_m |\langle x_n, x^*_{nm}\rangle|$$

On définit évidemment une forme linéaire continue ξ^*_{nm} sur X_B, en posant $\langle x, \xi^*_{nm}\rangle = \langle x_n, x^*_{nm}\rangle$

De plus : $\|\xi^*_{nm}\|_B \leq \|x^*_{nm}\|_{B_n}$

Donc : $\|x\|_C \leq \sum_{n,m} |\langle x, \xi^*_{nm}\rangle|$

et $\sum_{n,m} \|\xi^*_{n,m}\|_B \leq \sum_{n,m} \|x^*_{n,m}\|_{B_n} < \sum_n 2^{-n} < 2$

Ainsi l'application canonique $\hat{X}_B \to \hat{X}_C$ est sous-nucléaire. On en déduit la thèse.

Proposition 2.6 : Un e.b.c.s. X, somme directe d'une famille quelconque $(X_i)_{i\in I}$ d'e.b.c.s. nucléaires est nucléaire.

Tout borné d'une somme directe d'e.b.c.s. est déjà borné dans une somme directe finie. On se ramène donc immédiatement au cas où l'ensemble I est fini. Mais dans ce cas l'e.b.c.s. somme directe des X_i est aussi leur produit. Il est donc nucléaire ainsi qu'on l'a démontré ci-dessus.

Définition 2.7 : Soient X et Y deux e.b.c.s. Une application linéaire bornée de X dans Y est dite nucléaire si elle se factorise à travers une application nucléaire d'un espace de Banach dans un autre.

Si X est un e.b.c.s. nucléaire complet, toute application linéaire bornée d'un espace normé dans X est nucléaire.

3. Espaces localement convexes séparés nucléaires.

Définition 3.1 : Un e.l.c.s. E est dit nucléaire si et seulement si à tout voisinage disqué V de 0, on peut en associer un autre, U, absorbé par V et tel que l'application canonique $\hat{E}_U \xrightarrow[\pi_{VU}]{} \hat{E}_V$ soit nucléaire.

Comme dans le cas des e.b.c.s., il est équivalent, d'exiger que les applications π_{VU} appartiennent à un même idéal de Ban adapté à la théorie des espaces nucléaires.

Un voisinage disqué V de 0 est dit quadratique si l'espace de Banach $\hat{E}_V$ est un espace de Hilbert.

Proposition 3.2 : Tout e.l.c.s. nucléaire E admet un système fondamental de voisinages de 0 formé de voisinages disqués quadratiques.

Soit V un voisinage disqué de 0, et U un autre voisinage tel que l'application canonique $\hat{E}_U \xrightarrow[\pi_{VU}]{} \hat{E}_V$ soit nucléaire. Factorisons π_{VU} à travers un espace de Hilbert H : $\pi_{VU} = p_2\, p_1$. L'image réciproque dans E de la boule unité de H est un voisinage de 0, W, disqué et quadratique. De plus V absorbe W.

Proposition 3.3 : Un e.l.c.s. E est nucléaire si et seulement si son dual E' est un e.b.c.s. nucléaire.

En effet si V parcourt un système fondamental de voisinages disqués de $0 \in E$, son polaire V° parcourt un système fondamental de disques bornés de E'. De plus à une application canonique $\pi_{VU} : \hat{E}_U \longrightarrow \hat{E}_V$ correspond, par transposition, une application canonique $\varpi_{U^\circ V^\circ} : E'_{V^\circ} \longrightarrow E'_{U^\circ}$. La thèse se déduit alors d'une part de ce que si une application est nucléaire, sa transposée l'est aussi (Prop. 2.1.9) et d'autre part de ce qu'une application est sous-nucléaire dès que sa transposée est nucléaire (Th. 2.3.5).

Corollaire 3.4 : Un sous-e.l.c.s. F d'un e.l.c.s. nucléaire E est nucléaire.

Le dual F' de F est bornologiquement et vectoriellement isomorphe à un quotient de E'. Il suffit donc d'appliquer la proposition 2.4.

Corollaire 3.5 : Un e.l.c.s. F, quotient d'un e.l.c.s. nucléaire E est nucléaire.

Le dual F' de F est bornologiquement et vectoriellement isomorphe à un sous-espace de E'. On applique alors la proposition 2.3.

Corollaire 3.6 : Un e.l.c.s. E produit d'une famille quelconque $(E_i)_{i \in I}$ d'e.l.c.s. nucléaires est nucléaire.

Le dual de E est bornologiquement et vectoriellement isomorphe à la somme directe des duals des E_i. On applique donc la proposition 2.6.

Corollaire 3.7 : Un e.l.c.s. E, somme directe d'une famille dénombrable d'e.l.c.s. nucléaires E_n est nucléaire.

Le dual de E est bornologiquement et vectoriellement isomorphe au produit des duals des E_n. On applique donc la proposition 2.5.

Proposition 3.8 : Un e.b.c.s. t-séparé X est nucléaire si et seulement si son dual X^x est un e.l.c.s. nucléaire.

La démonstration est analogue à celle de la proposition 3.3 : si B parcourt un système fondamental de disques bornés de X, B° parcourt un système fondamental de voisinages disqués de 0 dans X^x. Il faut tenir compte de ce que $X^x_{B°}$ ne coïncide en général pas avec le dual de X_B, mais en est uniquement un sous-espace. (Alors que $E'_{V°}$ est le dual de E_V). Cependant, si X est t-séparé, $X^x_{B°}$ est dense dans $(X_B)'$. On procède alors par transposition, comme dans le cas de la proposition 3.3.

Proposition 3.9 : Soit E un e.l.c.s. L'espace $\mathbb{B}$ E est un e.b.c.s. nucléaire si et seulement si le dual fort E'_b de E est un e.l.c.s. nucléaire.

Si $\mathbb{B}$ E est nucléaire, son dual $(\mathbb{B}\ E)^x$ est un e.l.c.s. nucléaire. Or E'_b est un sous-espace de $(\mathbb{B}\ E)^x$, donc est aussi nucléaire. Si E'_b est nucléaire, son dual bornologique $(E'_b)'$ est nucléaire. Mais un borné de $(E'_b)'$ est inclus au polaire d'un voisinage fort de 0 dans E'_b, et est donc finalement inclus au bipolaire dans E" d'un borné de E. On déduit alors du théorème du bipolaire que $\mathbb{B}$ E est un sous-e.b.c.s. de $(E'_b)'$. Par conséquent, $\mathbb{B}$ E est nucléaire.

Définition 3.10 : Soient E et F deux e.l.c.s. Une application linéaire continue T de E dans F est dite nucléaire si elle se factorise à travers une application nucléaire d'un espace de Banach dans un autre.

On peut alors écrire $T = \sum_n \lambda_n e'_n \otimes y_n$, où $\sum_n |\lambda_n| < \infty$, où (e'_n) est une suite équicontinue d'éléments de E', et où (y_n) est une suite bornée d'éléments de F.

Proposition 3.11 : Si E est un e.l.c.s. nucléaire, toute application linéaire continue de E dans un espace de Banach est nucléaire.

CHAPITRE 4

Autres propriétés des espaces nucléaires.

1. Réflexivité des espaces nucléaires.

Proposition 1.1 : Un e.l.c.s. nucléaire E est un espace de Schwartz.

Rappelons d'abord qu'un e.l.c.s. E est dit de Schwartz si à tout voisinage disqué U de 0, on peut en associer un autre V, absorbé par U, et tel que l'application canonique $\hat{E}_V \longrightarrow \hat{E}_U$ soit compacte. Toute application nucléaire étant compacte, cette condition est remplie si l'espace E est nucléaire.

Corollaire 1.2 : Toute partie bornée d'un e.l.c.s. nucléaire E est précompacte.

Il faut montrer que l'image de E dans chacun des espaces $\hat{E}_V$ est relativement compacte, ce qui est évident puisque l'application canonique de E dans $\hat{E}_V$ se factorise à travers une application compacte.

Corollaire 1.3 : Tout espace normé nucléaire est de dimension finie.

Corollaire 1.4 : Soit E un e.l.c.s. nucléaire. Si E est quasi-complet, alors E est semi-réflexif et, sur E' la topologie forte coïncide avec la topologie de Mackey. Si E est quasi-complet et tonnelé, alors E est un espace de Montel. (en particulier, E est réflexif).

E étant quasi-complet, toute partie précompacte de E est relativement compacte, et, a fortiori, relativement faiblement compacte. Ainsi E est semi réflexif et $\tau(E',E) = \beta(E',E)$. La deuxième partie de l'énoncé est immédiate.

La définition des espaces compactologiques convexes est donnée dans [29], (où ces espaces sont appelés "cb-spaces"), ainsi que dans [3].

Proposition 1.5 : Tout e.b.c.s. nucléaire et complet X est canoniquement muni d'une structure d'espace compactologique convexe.

Soit B un disque borné complétant de X. Soit C un disque borné complétant tel que l'application canonique $\omega_{CB} : X_B \longrightarrow X_C$ soit nucléaire. Cette application est donc compacte, ce qui entraine que B est compact dans X_C. Si les deux applications $X_B \longrightarrow X_{C_1}$ et $X_B \longrightarrow X_{C_2}$ sont nucléaires, on considérera un disque borné complétant D contenant à la fois C_1 et C_2. Alors la topologie induite sur B par X_D coïncide aussi bien avec celle induite par C_1 qu'avec celle induite par C_2, ce qui montre l'égalité de ces deux dernières. Ainsi la topologie compacte de B est bien déterminée.

Notons aussi que toute forme linéaire bornée sur X est continue sur tout disque borné complétant B, pour la topologie compacte canonique de B. Rappelons qu'un e.b.c.s. X est dit réflexif si $X = (X^x)'$, vectoriellement et bornologiquement.

Proposition 1.6 : Un e.b.c.s. X, nucléaire complet et t-séparé est réflexif.

Cette proposition résulte immédiatement du théorème de dualité de Waelbroeck [29] et de ce qui précède.

Corollaire 1.7 : Tout e.b.c.s. nucléaire complet admettant un système fondamental dénombrable de disques bornés est réflexif.

En effet, tout espace compactologique convexe de type dénombrable est t-séparé et réflexif, [29].

Corollaire 1.8 : Tout e.l.c.s. nucléaire et complet E est b-réflexif (c.à.d. $E'^x = E$).

En effet, d'après la proposition 1.6, E' est réflexif, ce qui entraine que E est b-réflexif. [2].

2. Nucléarité et sommabilité.

Au chapitre 1, nous avons défini les espaces $\ell^1(I,E)$ et $\ell^1((I,E))$ lorsque E est un espace normé. Nous étendrons ici ces définitions aux cas où E est soit un e.l.c.s., soit un e.b.c.s.

Si E est un e.l.c.s., une famille $\xi = (x_i)_{i\in I}$ de vecteurs de E est absolument sommable si pour toute semi-norme ν, continue sur E, la série $\sum_{i\in I} \nu(x_i)$ converge.

Définition 2.1 : Si E est un espace localement convexe séparé, et I un ensemble d'indices, on désigne par $\ell^1(I,E)$ l'espace vectoriel des familles absolument sommables de vecteurs de E, muni de la topologie définie par les semi-normes

$$\nu_{as}(\xi) = \sum_{i\in I} \nu(x_i)$$

où ν parcourt l'ensemble des semi-normes continues sur E et où $\xi = (x_i)_{i\in I}$.

Il revient au même de dire que l'espace $\ell^1(I,E)$ est la limite projective des espaces normés $\ell^1(I,E_V)$, V parcourant un système fondamental de voisinages disqués fermés de E.

Pour les familles sommables, la situation est la même : une famille $\xi = (x_i)_{i\in I}$ est sommable si à tout voisinage disqué V de 0 on peut associer une partie finie J de I telle qu'on ait $\sum_{i\in K} x_i \in V$ pour toute partie finie K de I, disjointe de J. Donc ξ appartient à la limite projective des espaces $\ell^1((I,E_V))$.

Définition 2.2 : Soit E un e.l.c.s. et I un ensemble d'indices. On désigne par $\ell^1((I,E))$ l'espace vectoriel des familles sommables de vecteurs de E muni de la topologie définie par les semi-normes

$$\nu_s(\xi) = \sup_{x'\in V_\nu^\circ} \sum_{i\in I} |\langle x_i, x'\rangle|$$

où ν parcourt l'ensemble des semi-normes continues sur E, où V_ν est la "semi-boule unité" définie par ν, et où $\xi = (x_i)$.

La situation des e.b.c.s. est en tout point duale de la précédente. On utilise cette fois les propriétés inductives de ces espaces. Nous formulons les définitions directement sous la forme suivante:

Définition 2.3 : Soit X un e.b.c.s. et I un ensemble. Une famille absolument sommable de vecteurs de X est un élément de l'e.b.c.s. $\ell^1(I,X)$, limite inductive de la famille d'espaces normés $\ell^1(I,X_B)$, où B parcourt un système fondamental de disques bornés de X.

Définition 2.4 : Soit X un e.b.c.s. et I un ensemble d'indices. Une famille sommable de vecteurs de X est un élément de l'e.b.c.s. $\ell^1((I,X))$ limite inductive de la famille d'espaces normés $\ell^1((I,X_B))$ où B parcourt un système fondamental de disques bornés de X.

Ces définitions nous permettent d'énoncer des critères de nucléarité.

Théorème 2.5 (Pietsch) [20] : Pour qu'un e.l.c.s. E soit nucléaire, il faut que les e.l.c.s. $\ell^1(I,E)$ et $\ell^1((I,E))$ soient égaux pour tout ensemble I, et il suffit qu'ils le soient pour au moins un ensemble infini I.

Supposons E nucléaire. A tout voisinage disqué V de $0 \in E$, on peut en associer un autre, W, tel que l'application canonique $\hat{E}_W \longrightarrow \hat{E}_V$ soit absolument sommante. Mais alors, on dispose canoniquement d'une application continue $\ell^1((I,\hat{E}_W)) \longrightarrow \ell^1(I,\hat{E}_V)$, (théorème 2.5.2), et donc aussi d'une application continue $\ell^1((I,E_W)) \longrightarrow \ell^1(I,E_V)$ (car $\ell^1((I,E_W)) = \ell^1((I,\hat{E}_W)) \cap E_W^I$ et $\ell^1(I,E_V) = \ell^1(I,\hat{E}_V) \cap E_V^I$). En tenant compte des applications continue:

canoniques $\ell^1(I,E_V) \longrightarrow \ell^1((I,E_V))$, on obtient un diagramme

$$\ell^1(I,E_W) \longrightarrow \ell^1((I,E_W)) \longrightarrow \ell^1(I,E_V) \longrightarrow \ell^1((I,E_V))$$

qui montre que les espaces $\ell^1(I,E_V)$ et $\ell^1((I,E_V))$ ont même limite projective, c.à.d. que $\ell^1(I,E) = \ell^1((I,E))$.

Réciproquement, si $\ell^1(I,E) = \ell^1((I,E))$, on peut associer à toute semi-norme continue ν sur E une autre semi-norme continue ν' telle qu'on ait une application canonique continue $\ell^1((I,E_{\nu'})) \longrightarrow \ell^1(I,E_\nu)$. Cette propriété entraine visiblement que l'application $E_{\nu'} \longrightarrow E_\nu$ est a-sommante.

Corollaire 2.6 : Un espace de Fréchet E est nucléaire si et seulement si toute série commutativement convergente dans E est absolument convergente.

En effet, d'après l'hypothèse, l'application continue canonique $\ell^1(I,E) \longrightarrow \ell^1((I,E))$ est surjective. Ces deux espaces étant de Fréchet, il résulte du théorème du graphe fermé que ces deux espaces sont topologiquement isomorphes. E est donc nucléaire.

Corollaire 2.7 (Dvoretsky-Rogers) : Dans tout espace de Banach de dimension infinie, on peut trouver une série commutativement convergente et non absolument convergente.

La démonstration du théorème suivant est analogue à celle du théorème 2.5, et laissée au lecteur :

Théorème 2.8 : Pour qu'un e.b.c.s. X soit nucléaire, il faut que les e.b.c.s. $\ell^1(I,X)$ et $\ell^1((I,X))$ soient égaux pour tout ensemble I et il suffit qu'ils le soient pour au moins un ensemble infini I.

Corollaire 2.9 : Un e.b.c.s. complet de type dénombrable X est nucléaire si et seulement si toute série commutativement convergente dans X est absolument convergente.

On applique cette fois le théorème du graphe fermé de Buchwalter, [2].

3. Nucléarité et foncteurs $\mathbb{B}$ et $\mathbb{T}$.

Nous énonçons dans ce numéro des conditions assurant que la nuclearité est conservée par l'application des foncteurs $\mathbb{B}$ et $\mathbb{T}$. Rappelons d'abord que si E est un e.l.c.s., $\mathbb{B}$ E est l'espace vectoriel sous-jacent à E muni de la bornologie des parties topologiquement bornées de E. Si X est un e.b.c.s., $\mathbb{T}$ X est l'espace vectoriel sous-jacent à X muni de la topologie dont un système fondamental de voisinages de 0 est formé des disques bornivores.

Lemme 3.1 : Soit E un e.l.c.s. et I un ensemble d'indices. A tout borné S de $\ell^1((I,E))$, on peut associer un disque borné B de E tel que pour toute famille $\xi = (x_i)$ appartenant à S on ait

$$\sup_{\|u'\|_B \leq 1} \sum_{i \in I} |\langle x_i , u' \rangle| \leq 1$$

De cette formule, on ne peut déduire que S est contenu dans $\ell^1((I,E_B))$ (ce qui entrainerait $\mathbb{B}\,\ell^1((I,E)) = \ell^1((I,\mathbb{B}\,E))$) car elle ne signifie pas que les familles de S sont sommables dans E_B, mais uniquement qu'elles sont faiblement sommables. Toutefois si S est inclus à $\ell^1((I,E_B))$, alors S est borné dans cet espace. Démontrons cette formule.

Si ν est une semi-norme continue sur E, nous posons $\rho_\nu = \sup_{\xi \in S} \nu_s(\xi)$, et nous considérons l'ensemble

$$B = \bigcap_\nu \rho_\nu \, V_\nu$$

où V_ν est la "semi-boule unité" associée à ν, et où ν parcourt l'ensemble des semi-normes continues sur E. B est visiblement un disque borné de E. Soit $\xi = (x_i) \in S$.

Si J est une partie finie de I, et λ_i $(i \in J)$ des complexes tels que $|\lambda_x| \leq 1$, alors $\sum_{i \in J} \lambda_i \, x_i \in \mathbb{B}$.

En effet, pour tout semi-norme ν et tout $x' \in V_\nu^\circ$.

$|\langle\sum_i \lambda_i x_i, x'\rangle| \leq \sum_i |\langle x_i, x'\rangle| \leq \nu_S(\xi) \leq \rho_\nu$

Maintenant, si $u' \in (E_B)'$ avec $\|u'\|_B \leq 1$, posons $|\langle x_i, u'\rangle| = \lambda_i \langle x_i, u'\rangle$

On a alors .

$\sum_{i\in J} |\langle x_i, u'\rangle| = \sum_i \lambda_i \langle x_i, u'\rangle = |\langle \sum_i \lambda_i x_i, u'\rangle| \leq 1$

Ceci démontre la thèse.

Proposition 3.2 : Soit E un e.l.c.s. Pour que l'e.b.c.s. $\mathbb{B}$ E soit nucléaire, il faut que pour tout ensemble d'indices I, on ait $\mathbb{B}\,\ell^1(I,E) = \ell^1(I, \mathbb{B}\,E)$ et il suffit que E soit nucléaire et qu'on ait cette relation pour au moins un ensemble infini I.

Soit S un borné de $\mathbb{B}\,\ell^1(I,E)$. D'après le lemme précédent, on peut trouver un disque borné B_1 de E tel que pour tout $\xi = (x_i) \in S$:

$$\sup_{\|u'\|_{B_1}\leq 1} \sum_{i\in I} |\langle x_i, u'\rangle| \leq 1.$$

Mais si $\mathbb{B}$ E est nucléaire, on peut associer à B_1 un disque borné B_2 tel que $E_{B_1} \longrightarrow E_{B_2}$ soit une application absolument sommante. On a alors, pour tout $\xi = (x_i) \in S$:

$$\sum_i \|x_i\|_{B_2} \leq \sup_{\|u'\|_{B_1}\leq 1} \sum_{i\in I} |\langle x_i, u'\rangle| \leq 1$$

de sorte que S est borné dans $\ell^1(I, \mathbb{B}\,E)$.

Supposons maintenant que E est nucléaire. On a alors $\ell^1(I,E) = \ell^1((I,E))$, donc $\mathbb{B}\,\ell^1(I,E) = \mathbb{B}\,\ell^1((I,E))$. Si de plus $\mathbb{B}\,\ell^1(I,E) = \ell^1(I, \mathbb{B}\,E)$, on voit que tout borné de $\mathbb{B}\,\ell^1((I,E))$ est constitué de familles sommables dans l'un des E_B. Du lemme 3.1 il résulte alors que $\mathbb{B}\,\ell^1((I,E)) = \ell^1((I, \mathbb{B}\,E))$.

On déduit maintenant du théorème 2.8 que $\mathbb{B}$ E est nucléaire.

Proposition 3.3 : Si E est un e.l.c.s. métrisable, alors $\mathbb{B}\,\ell^1(I,E) = \ell^1(I, \mathbb{B}\,E)$.

Soient (ν^n) une suite de semi-normes définissant la topologie de E de S un borné de $\mathbb{B}\,\ell^1(I,E)$. Pour tout n, posons

$\rho_n = \sup_{\xi\in S} \nu^n_{as}(\xi)$.

Posons alors $B = \left\{x \in E \,\middle|\, \sum_n \frac{1}{2^n \rho_n} \nu^n(x) \leq 1\right\}$.

Il est clair que B est un disque. De plus B est borné puisque pour tout n, et tout $x \in B$, on a $\nu^n(x) \leq 2^n \rho_n$. Quant à la norme de l'espace E_B, elle est donnée par la formule

$$\|x\|_B = \sum_n \frac{1}{2^n \rho_n} \nu^n(x)$$

Si $\xi = (x_i) \in S$ on a alors

$$\sum_{i\in I} \|x_i\|_B = \sum_{i\in I} \sum_n \frac{1}{2^n \rho_n} \nu^n(x_i) \leq \sum_n \frac{1}{2^n \rho_n} < +\infty.$$

Ceci montre que S est contenu et borné dans $\ell^1(I, E_B)$.

Corollaire 3.4 : Si E est un e.l.c.s. nucléaire et métrisable, alors $\mathbb{B}$ E est un e.b.c.s. nucléaire et $(\mathbb{B}\,E)^\times = E'_b$ est un e.l.c.s. nucléaire.

Corollaire 3.5 : Soit X un e.b.c.s. nucléaire de type dénombrable (c.à.d. admettant un système fondamental dénombrable de bornés). Alors $\mathbb{T}$X est un e.l.c.s. nucléaire.

Si X est de type dénombrable, $X^\times$ est un espace de Fréchet nucléaire. Donc $\mathbb{B}\,X^\times$ est un e.b.c.s. nucléaire. Or $\mathbb{B}\,X^\times = (\mathbb{T}X)'$, [2] et on déduit alors de la proposition 3.3.3 que $\mathbb{T}$X est nucléaire.

A. Grothendieck, [12], a défini un espace D F comme étant un e.l.c.s. E admettant un système fondamental dénombrable de disques bornés, et tel que toute partie fortement bornée de E'_b, réunion d'une suite de parties équicontinues, est elle-même équicontinue.

Cette dernière hypothèse peut souvent être affaiblie. Aussi introduisons-nous la définition suivante :

Définition 3.6 . a) Un espace D F F est un e.l.c.s. E tel que $\mathbb{B}E$ est de type dénombrable et que toute suite fortement bornée de E'_b est équicontinue.

Par analogie :

b) Un espace D S S est un e.b.c.s. X tel que $\mathbb{T}X$ est un e.l.c.s. métrisable et que toute suite bornée dans $\mathbb{T}X$ est bornée dans X.

Proposition 3.7 : Si E est un espace D F F, alors $\mathbb{B}\,\ell^1(I,E) = \ell^1(I,\mathbb{B}E)$.

Soit (B_n) une suite fondamentale de bornés de E. Si S est un borné de $\ell^1(I,E)$, nous poserons $\rho_n = \sup_{\xi\in S} \nu^n_{as}(\xi)$, où ν^n désigne la norme de l'espace E_{B_n}, et où $\nu^n_{as}(\xi) = \infty$ si $\xi \notin \ell^1(I,E_{B_n})$.

Il faut prouver qu'il existe n tel que $\rho_n < +\infty$. Si $\rho_n = \infty$ on peut trouver une famille $\xi^n \in S$ et une partie finie P_n de I telle que

$$\sum_{i\in P_n} \nu^n(x^n_i) > 2^n$$

Et par conséquent, il existe des formes linéaires continues $e'^n_i \in B^\circ_n$ telles que

$$\sum_{i\in P_n} |\langle x^n_i, e'^n_i\rangle| > 2^n$$

L'ensemble $A = \left\{e'^n_i \mid i \in P_n,\ n \in \mathbb{N}\right\}$ est dénombrable. De plus, on vérifie sans peine qu'il est fortement borné dans E'_b. Par conséquent, A est équicontinue, de sorte qu'on peut trouver un voisinage disqué de 0, $\mathcal{V}$, tel que $A \subset \mathcal{V}^\circ$.

Mais alors, si ν est la jauge de V, on a :

$$\nu_{as}(\xi^n) = \sum_{i\in I} \nu(x^n_i) \geq \sum_{i\in P_n} |\langle x^n_i, e'^n_i\rangle| > 2^n$$

ce qui est impossible, puisque S étant borné dans $\mathbb{B}\ell^1(I,E)$, $\nu_{as}(\xi)$ est borné quand ξ parcourt S.

Corollaire 3.8 : Si E est un espace D F nucléaire, alors $\mathbb{B}E$ est un e.b.c.s. nucléaire (et E'_b est un espace de Fréchet nucléaire).

Corollaire 3.9 : Si X est un espace D S S nucléaire, alors $\mathbb{T}X$ est un e.l.c.s. nucléaire.

L'espace $X^\times$ est nucléaire. De plus $X^\times$ est D F F. En effet $\mathbb{T}X$ est métrisable, $\mathbb{B}X^\times = (\mathbb{T}X)'$ admet un système fondamental dénombrable de bornés. La deuxième condition pour qu'un e.l.c.s. soit D F F se déduit de ce qu'une partie bornée de $(X^\times)'_b$ est une partie bornée de $\mathbb{T}X$ (car $(X^\times)'_b = \mathbb{T}(X^{\times'}) = \mathbb{T}X$) et de ce qu'une partie équicontinue de $X^{\times'}$ est une partie bornée de X (car $X = X^{\times'}$). La démonstration se termine à présent comme celle du corollaire 3.5 : $X^\times$ est un espace D F F nucléaire, donc $\mathbb{B}X^\times = (\mathbb{T}X)'$ est nucléaire, et $\mathbb{T}X$ est nucléaire.

Les corollaires 3.4, 3.5, 3.8 et 3.9 se rassemblent et se complètent en le théorème suivant :

Théorème 3.10 : (i) Soit E un e.l.c.s. Si E est métrisable en D F F, alors E est nucléaire si et seulement si $\mathbb{B}E$ est nucléaire.

(ii) Soit X un e.b.c.s. Si X est de type dénombrable, en D S S, alors X est nucléaire si et seulement si $\mathbb{T}X$ est nucléaire.

Démonstration :

Il reste à démontrer que, sous les hypothèses faites, E ou X sont nucléaires dès que $\mathbb{B}E$ ou $\mathbb{T}X$ le sont.

(i) Si $\mathbb{B}E$ est nucléaire, $(\mathbb{B}E)^\times = E'_b$ l'est aussi. Mais E'_b est métrisable en D F F, de sorte que $\mathbb{B}E'_b$ est nucléaire. Si E est métrisable, E est quasi-tonnelé, ce qui se traduit par la formule $\mathbb{B}E'_b = E'$. Dans ce cas, E est donc nucléaire. Montrons que E est aussi quasi-tonnelé si E est D F F. Soit B un disque borné de E'_1

Puisque $\mathbb{B}\,E'_b$ est nucléaire, on peut trouver un disque borné C de E'_b tel que l'application canonique $E'_B \longrightarrow E'_C$ soit nucléaire. Il en résulte que tout $e' \in B$ s'écrit $e' = \sum_n \lambda_n \langle e', \varphi_n \rangle \psi_n$ où $\|\psi_n\|_C < 1$ et $\sum |\lambda_n| < +\infty$. ψ_n est une suite fortement bornée de E' ; comme E est D F F, cette suite est équicontinue, ce qui entraine que B est équicontinu. On a donc encore $\mathbb{B}\,E'_b = E'$, et E est nucléaire.

(ii) Remarquons d'abord qu'on a implicitement supposé X t-séparé en supposant $\mathbb{T}X$ nucléaire. Si $\mathbb{T}X$ est nucléaire, $(\mathbb{T}X)' = \mathbb{B}\,X^{\times}$ est nucléaire. Mais $X^{\times}$ est un e.l.c.s. métrisable si X est de type dénombrable, et D F F si X est D S S (démonstration du corollaire 3.9). Dans les deux cas, $X^{\times}$ est nucléaire en même temps que $\mathbb{B}\,X^{\times}$, ce qui entraine que X est nucléaire.

4. La petite bornologie.

Nous établissons dans ce numéro que toute partie bornée d'un e.b.c.s. complet nucléaire est "petite", en un sens qui va être défini. Ce théorème est en fait équivalent au théorème de T. Kōmura et Y. Kōmura sur la représentation de tout e.l.c.s. nucléaire comme sous-espace d'un espace s^A (voir n° 5). Nous ne considérerons que des e.b.c.s. complets.

Définition 4.1 : Soit X un e.b.c.s. complet. Une suite (x_n) d'éléments de X est dite à décroissance rapide si, quelque soit l'entier positif k, la suite $(n^k x_n)$ est bornée dans X.

Rappelons aussi qu'une partie bornée B de X est dite complétant si B est un disque tel que X_B soit un espace de Banach.

Si X est complet, tout borné B est inclus à un disque borné complétant et l'intersection de tous les disques bornés complétants qui contiennent B est appelé l'enveloppe complétante de B. On peut construire cette enveloppe de la façon suivante : soit B_1 un disque borné complétant contenant B. Considérons l'espace de Banach $\ell^1(B)$ des familles de nombres complexes indexées par B. A toute famille $\xi = (\xi_x)_{x\in B} \in \ell^1(B)$, on associe le vecteur $\sum_{x\in B} \xi_n . x \in B_1$. On note B_o l'image de la boule unité de $\ell^1(B)$. Il est clair que B_o est un disque complétant contenant B car X_{B_o} est un quotient de $\ell^1(B)$.

Le disque B_o est indépendant du disque B_1 utilisé dans la construction. Car si $\sum \xi_x . x$ converge vers x_1 dans X_{B_1} et vers x_2 dans X_{B_2}, cette série converge aussi dans $X_{B_1 \cap B_2}$ vers un vecteur égal à la fois à x_1 et à x_2 (car les injections canoniques $X_{B_1 \cap B_2} \longrightarrow X_{B_1}$ et $X_{B_1 \cap B_2} \longrightarrow X_{B_2}$ sont continues). Puisque B_o est inclus à tout disque complétant qui contient B, B_o est l'enveloppe complétante de B.

Définition 4.2 [30] : Soit X un e.b.c.s. complet. Une partie bornée B de X est dite petite si elle est contenue dans l'enveloppe complétante d'une suite à décroissance rapide.

Il est immédiat que les petites parties bornées de X constituent une bornologie convexe complète sur l'espace vectoriel sous-jacent à X.

Théorème 4.3 : La petite bornologie d'un e.b.c.s. complet X est nucléaire.

Il suffit de montrer que si B est l'enveloppe complétante de la suite à décroissance rapide (x_n), on peut trouver une autre suite à décroissance rapide (y_n) telle que l'opérateur canonique $X_B \longrightarrow X_C$ soit sous-nucléaire, C étant l'enveloppe complétante de la suite (y_n).

Posons $y_n = n^2 x_n$. Cette suite est aussi à décroissance rapide. L'opérateur $\ell^1 \longrightarrow \ell^1 : (\lambda_n) \longrightarrow (\lambda_n n^{-2})$ est nucléaire. Mais X_B et X_C sont chacun un quotient de ℓ^1, les épimorphismes canoniques étant $(\lambda_n) \longrightarrow \sum_n \lambda_n x_n$ et $(\mu_n) \longrightarrow \sum_n \mu_n y_n$. Il est clair que l'opérateur ci-dessus induit par passage aux quotients l'injection canonique $X_B \longrightarrow X_C$. Celle-ci est donc sous-nucléaire (th. 2.3.5).

Remarque : Le théorème précédent nous permet de construire des exemples d'espaces bornologiques convexes complets nucléaires dont le dual est nul. En effet, si X est un e.b.c.s. complet, la petite bornologie de X est compatible avec la dualité entre X et son dual (pour la bornologie initiale). Autrement dit, toute forme linéaire n sur X bornée sur les petites parties bornées est bornée. En effet, si u n'était pas bornée sur le disque borné B de X, on pourait trouver dans l'espace X_B une suite (x_n) convergeant vers 0 mais telle que $\lim_n u(x_n) = \infty$. Il suffit alors de remarquer que de la suite (x_n) on peut extraire une suite partielle à décroissance rapide, sur laquelle u ne serait pas bornée, contrairement à l'hypothèse.

Nous établirons ci-dessous la réciproque du théorème 4.3 : la bornologie d'un e.b.c.s. nucléaire est petite.

Théorème 4.4 : Toute partie bornée B d'un e.b.c.s. complet nucléaire X est petite.

On peut évidemment supposer que B est un disque borné complétant quadratique. X_B est alors un espace de Hilbert, et puisque l'idéal ℓ_p est adapté à la théorie des espaces nucléaires quel que soit $p > 0$, (th. 2.7.8) on peut trouver, pour tout entier $k > 0$, un disque borné complétant quadratique B'_k contenant B et

tel que l'application canonique $i_k : X_B \longrightarrow X_{B'_k}$ soit de type $\ell^{1/k}$. On a donc

$$i_k = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{(k)} \; e_n^{(k)} \otimes u_n^{(k)}$$

avec $$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\lambda_n^{(k)}\right|^{1/k} < +\infty$$

Ici, $e_n^{(k)}$ est une base orthonormée de X_B (si ce n'était pas le cas, i_k ne serait pas injective). Nous allons fabriquer une nouvelle base orthonormée de X_B par une instruction équivalente à le diagonale de Cantor.

Soit e'_n la suite de vecteurs de X_B obtenue en rangeant les vecteurs $e_n^{(k)}$ par valeurs croissantes de $\sup\{k, n\}$. En appliquant le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt, à la suite (e'_n), nous obtenons une base orthonormée (f_m) de X_B. Le sous-espace engendré par les vecteurs $f_1, \ldots, f_m$ contient celui engendré par $e'_1, \ldots, e'_m$. Il en résulte que f_m est orthogonal à $e_n^{(k)}$ si $n < \sqrt{m}$ et $k < \sqrt{m}$. Montrons que la suite f_m est à décroissance rapide, ce qui établira le théorème.

Fixons k. Pour montrer que la suite $(m^k f_m)$ est bornée dans X, il suffit de montrer qu'il en est ainsi de l'ensemble des vecteurs $m^k f_m$, avec $m > k^2$. Développons le vecteur f_m dans la base $(e_n^{(k)})$:

$$f_m = \sum_n \; C_{mn}^{(k)} \; e_n^{(k)}$$

D'après ce qui précède, on a $C_{mn}^{(k)} = 0$ si $n < \sqrt{m}$. De plus $\sum_n |C_{mn}^{(k)}|^2 = 1$
On a alors :

$$m^{k/2} f_m = \sum_n m^{k/2} \; C_{mn}^{(k)} \; e_n^{(k)}$$

et $$i_k(m^{k/2} f_m) = \sum_n m^{k/2} \; C_{mn}^{(k)} \; \lambda_n^{(k)} \; u_n^{(k)}$$

D'où : $$\| m^{k/2} f_m \|^2_{B'_k} = \sum_n m^k |C^k_{mn}|^2 |\lambda_n^{(k)}|^2$$

On peut évidemment supposer que les nombres $\lambda_n^{(k)}$ étaient rangés par vecteurs absolues décroissantes : $|\lambda_1^{(k)}| \geq |\lambda_2^{(k)}| \geq \dots$

En posant $$A = \sum_k |\lambda_n^{(k)}|^{1/k},$$ on a alors

$$n\, |\lambda_n^{(k)}|^{1/k} \leq A, \text{ donc } |\lambda_n^{(k)}| \leq A^k n^{-k}.$$

Ainsi :

$$\| m^{k/2} f_m \|^2_{B'_k} \leq A^k \sum_n \frac{m^k}{n^{2k}} |C^{(k)}_{mn}|^2$$

Puisque $C^k_{mn} = 0$ si $n < \sqrt{m}$, pour tout terme non nul de cette somme, on a $n^{2k} > m^k$ et par conséquent $\sum_n \frac{m^k}{n^{2k}} |C^{(k)}_{mn}|^2 \leq 1$. La suite $m^{k/2} f_m$ est donc bornée dans X_B quel que soit k, ce qui montre que f_m est à décroissance rapide.

Remarquons que le résultat établi est un peu plus fort que le résultat annoncé : si B est un disque borné quadratique complétant, l'espace de Hilbert X_B admet une base orthonormée, à décroissance rapide dans X.

5. Le théorème de Kōmura et Kōmura.

Nous commencerons par un exemple simple d'espace nucléaire, exemple qui a l'avantage d'avoir un caractère universel, ainsi qu'on le verra bientôt.

On désigne par s l'espace vectoriel des suites de scalaires à décroissance rapide. Cet espace est muni de la topologie définie par la famille des normes suivantes : si $u = (u_n)$ $(n = 1, 2, \dots)$, on pose $$\|u\|_k = \sup_n n^k |u_n| \qquad \text{avec } k \in \mathbb{N}$$

Théorème 5.1 : s est un e.l.c.s. nucléaire.

Désignons par s_k l'espace s muni de la seule norme $\|\cdot\|_k$. Il est clair que $\varepsilon_n : u \longrightarrow u_n$ est une forme linéaire continue sur s_k. De plus $\|\varepsilon_n\|_k \leq n^{-k}$. D'autre part, si (e_n) désigne la base canonique de s $(e_n = (\delta_{nm}))$, on a $\|e_n\|_k = n^{-k}$. Tout $u = (u_n) \in s$ s'écrit
$$u = \sum_n u_n e_n = \sum_n \langle u, \varepsilon_n \rangle e_n$$
et la relation $\sum_{n=1}^{\infty} \|\varepsilon_n\|_{k+2} \|e_n\|_k \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty$ montre que l'application identique est nucléaire, de s_{k+2} dans s_k. Par conséquent s est nucléaire.

Théorème 5.2 (T. Kōmura et Y. Kōmura) [14] : A tout e.l.c.s. nucléaire E, on peut associer un ensemble A tel que E soit isomorphe à un sous-espace de s^A.

L'espace E' est un e.b.c.s. complet nucléaire. Soit $\varphi = (f_n)$ une suite à décroissance rapide de E'. On définit un opérateur $T\varphi$ de E dans s en posant $T_\varphi(x) = (\langle x, f_n \rangle)$. Cet opérateur est continu car pour tout k, la suite $n^k f_n$ est bornée dans E' (c.à.d. équicontinue) donc contenue dans le polaire d'un voisinage V de 0 dans E. On a aussi
$$\|T_\varphi(x)\|_k = \sup_n |\langle x, n^k f_n \rangle| \leq \nu_V(x) \quad (\text{si } \nu_V \text{ est la jauge de } V)$$

Désignons par A l'ensemble des suites à décroissance rapide de E'. La famille d'opérateurs $(T_\varphi)_{\varphi \in A}$ définit un opérateur $T : E \longrightarrow s^A : x \longrightarrow (T_\varphi(x))$ T est visiblement injectif, il reste à montrer que c'est un isomorphisme topologique (de E sur un sous-espace de s^A). La topologie de s^A est déterminée par les semi-normes $u \longrightarrow \|u_\varphi\|_k$, si $u = (u_\varphi)_{\varphi \in A}$ $(k \in \mathbb{N})$.

La topologie de E est déterminée par les semi-normes $x \longrightarrow \sup \left\{ |\langle x,f\rangle| \;\middle|\; f \in B \right\}$ où B est un disque équicontinu complétant de E'. D'après le théorème 4.4, B est l'enveloppe complétante d'une suite à décroissance rapide $\varphi = (f_n)$. On a alors

$$\sup \left\{ |\langle x,f\rangle| \;\middle|\; f \in B \right\} = \sup_n |\langle x,f_n\rangle| = \| T\varphi(x) \|_0$$

Etant déterminée par les semi-normes $x \longrightarrow \| T\varphi(x) \|_0$, la topologie de E est moins fine que la topologie induite par T^{-1} et s^A. Comme l'opérateur T est continu, le théorème est démontré.

Signalons que, réciproquement, le théorème 4.4 peut se déduire du théorème de Kōmura et Kōmura (voir [11]).

6. Un critère de nucléarité.

Nous énoncerons un critère de nucléarité commode car il permet d'établir la nucléarité de nombreux espaces fonctionnels. Ce critère est basé sur l'emploi de l'idéal α construit au paragraphe 2.6. Cet idéal α, engendré par les injections canoniques $\mathcal{C}(K) \longrightarrow L^2(K,\mu)$, où K est un espace compact, et μ une mesure de Radon positive sur K, est adapté à la théorie des espaces nucléaires.

Théorème 6.1 : Soit E un e.l.c.s. Supposons que la topologie de E est la moins fine parmi celles qui rendent continues des applications linéaires $f_i : E \longrightarrow L^2(K_i,\mu_i)$, où pour tout i, K_i est un espace compact et μ_i une mesure de Radon positive sur K_i. Si de plus, les f_i prennent leurs valeurs dans les espaces de Banach $\mathcal{C}(K_i)$ et sont continues en tant qu'applications dans ces espaces, alors l'espace E est nucléaire.

La démonstration est immédiate : soit V_i (resp. W_i) l'image réciproque par f_i de la boule unité de $L^2(K_i,\mu_i)$ (resp. $\mathcal{C}(K_i)$). L'application canonique $\hat{E}_{W_i} \longrightarrow \hat{E}_{V_i}$ se factorise à travers $\mathcal{C}(K_i) \longrightarrow L^2(K_i,\mu_i)$ et appartient à l'idéal α.

A titre d'application du théorème 6.1, montrons que l'espace $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ des fonctions indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}^n$ est nucléaire. La topologie de cet espace est classiquement définie par les semi-normes

$$\sup_{|p|\leq r} \; \sup_{x\in K} |D^p f(x)|$$

où K parcourt l'ensemble des boules fermées de $\mathbb{R}_n$, et r l'ensemble $\mathbb{N}$. Les inégalités de Sobolev montrent que la topologie de $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ est également définie par les semi-normes $\left(\sum_{|p|\leq r} \int_K |D^p f(x)|^2 \, dx \right)^{1/2}$

L'espace $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ est donc nucléaire.

Ainsi le théorème 6.1 fournit un critère extrêmement maniable permettant d'établir la nucléarité d'espaces de fonctions. On montre que la topologie est déterminée par certaines semi-normes quadratiques et que les normes sup correspondantes sont déjà continues.

CHAPITRE 5.

PRODUITS TENSORIELS.

Dans ce chapitre, nous supposons connues les propriétés du produit tensoriel algébrique de deux espaces vectoriels.

1. Produit tensoriel projectif d'espaces normés.

Considérons deux espaces normés E, F. On désire déterminer sur le produit tensoriel algébrique $E \otimes F$ une norme telle que le dual topologique de $E \otimes F$ soit canoniquement isomorphe à l'espace $B(E,F)$ des formes bilinéaires continues sur $E \times F$.

Désignons par U(resp.V) la boule unité fermée de E(resp.F).
Soit W l'enveloppe disquée de $U \otimes V$:

$$W = \Gamma(U \otimes V)$$

Il est immédiat que W est un disque absorbant de $E \otimes F$. La jauge de W est donc une semi-norme sur $E \otimes F$.

Définition 1.1 : On appelle produit tensoriel projectif des espaces normés E et F, et on note $E \otimes_\pi F$, l'espace vectoriel $E \otimes F$ muni de la semi-norme jauge de $\Gamma(U \otimes V)$

Il est clair que l'application bilinéaire canonique $E \times F \to E \otimes_\pi F$ est continue.

A priori, $E \otimes_\pi F$ n'est pas nécessairement un espace normé. Cependant nous verrons bientôt que la jauge de $\Gamma(U \otimes V)$ est bien une norme.

Proposition 1.2 : Soient E, F, G trois espaces normés. Si B est une application bilinéaire continue de $E \times F$ dans G, alors l'application linéaire $\tilde{B}$ de $E \otimes_\pi F$ dans G définie par $\tilde{B}(x \otimes y) = B(x,y)$ est continue

Si T désigne la boule unité de G, $B^{-1}T$ contient l'ensemble $\|B\|^{-1/2}(U \times V)$. Par conséquent, le disque $\tilde{B}^{-1}T$ contient $\|B\|^{-1/2}(U \otimes V)$ donc aussi le disque $\|B\|^{-1/2}\Gamma(U \otimes V)$, qui est un voisinage de 0 dans $E \otimes_\pi F$. Ceci montre que $\tilde{B}$ est continue.

Corollaire 1.3 : Si E et F sont deux espaces normés, $E \otimes_\pi F$ est un espace normé.

Si $f \in E'$ et $g \in F'$, l'application $(x,y) \to \langle x,f\rangle.\langle y,g\rangle$ est une forme bilinéaire continue sur $E \times F$. Par conséquent la forme linéaire sur $E \otimes_\pi F$, notée $f \otimes g$, qui lui correspond est continue. Il suffit alors de montrer que $E \otimes F$ est séparé par $E' \otimes F'$. Or tout $u \in E \otimes F$ s'écrit $u = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i$ où (x_i) (resp. (y_i)) est une famille libre de vecteurs de E(resp.F). On choisit alors des formes linéaires continues $f \in E'$, $g \in F'$ telles que $f(x_1)=1$, $f(x_i)=0$ si $i \neq 1$, $g(y_1) = 1$, $g(y_i) = 0$ si $i \neq 1$. Il est alors clair que $\langle u, f \otimes g\rangle \neq 0$.

Corollaire 1.4 : Si E, F, G sont trois espaces normés, les espaces normés $B(E,F\ ;\ G)$ (applications bilinéaires continues de $E \times F$ dans G) et $L(E \otimes_\pi F,\ G)$ (applications linéaires continues de $E \otimes_\pi F$ dans G) sont vectoriellement isomorphes.

Calculons explicitement la norme de $E \otimes_\pi F$:

<u>Proposition 1.5</u> : <u>Soient</u> E <u>et</u> F <u>deux espaces normés. La norme</u> $||.||_\pi$ <u>de</u> $E \otimes_\pi F$ <u>est donnée par la formule</u> :

$$||u||_\pi = \inf \left(\sum_{i=1}^n ||x_i||\cdot||y_i|| \;\middle|\; u = \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i \right)$$

<u>De plus, si</u> $u = x \otimes y$, <u>alors</u> $||u||_\pi = ||x||\;||y||$.

Il est immédiat que la formule ci-dessus définit une semi-norme sur $E \otimes F$. Pour montrer que $p(u) = \inf\{\sum_{i=1}^n ||x_i||.||y_i|| \mid u = \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i\}$ coïncide avec $||u||_\pi$, il suffit d'établir que

$$A = \{u \in E\otimes_\pi F \mid p(u) < 1\} \subset \Gamma(U\otimes V) \subset \{u \in E\otimes_\pi F \mid p(u) \leq 1\} = B$$

Si $u \in \Gamma(U\otimes V)$, alors $u = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \otimes y_i$, avec $\sum_i |\lambda_i| \leq 1$

$||x_i|| \leq 1, ||y_i|| \leq 1$. Donc $p(u) \leq \sum_{i=1}^n |\lambda_i| \leq 1$ et $u \in B$.

Si $u \in A$, soit $u = \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i$, avec $\sum_{i=1}^n ||x_i||.||y_i|| < 1$.

On a alors $u = \sum_{i=1}^n ||x_i||.||y_i|| \frac{x_i}{||x_i||} \otimes \frac{y_i}{||y_i||}$, ce qui montre que

$u \in \Gamma(U\otimes V)$.

Si $u = x \otimes y$, on a déjà d'après ce qui précède $||u||_\pi \leq ||x||.||y||$ On choisit alors des formes linéaires continues $f \in E'$ et $g \in F'$ telles que $\langle x,f\rangle = ||x||$, $\langle y,g\rangle = ||y||$ et $||f|| \leq 1$, $||g|| \leq 1$.

On a alors, si $u = x \otimes y = \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i$:

$$||x||.||y|| = \langle u, f\otimes g\rangle = \sum_{i=1}^n \langle x_i,f\rangle\langle y_i,g\rangle \leq \sum_{i=1}^n ||x_i||.||y_i||$$

$$\text{donc} \qquad ||x||.||y|| \leq ||u||_\pi$$

<u>Corollaire 1.6</u> : <u>Si</u> E,F,G <u>sont trois espaces normés, l'isomorphisme</u> $B \to \tilde{B}$ <u>de</u> B(E,F ; G) <u>sur</u> $L(E\otimes_\pi F\ ;\ G)$ <u>est une isométrie</u>.

Si $u = \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i$, on a $||\tilde{B}(u)|| = ||\sum_{i=1}^n B(x_i,y_i)|| \leq ||B|| \sum_{i=1}^n ||x_i||.||y_i||$

Donc $||\tilde{B}|| \leq ||B||$. Mais de la relation $B = \tilde{B} \circ \chi$ (*), on déduit $||B|| \leq ||\tilde{B}||.||\chi||$, et $||\chi|| = 1$, puisque $||x\otimes y||_\pi = ||x||.||y||$.

<u>Remarque 1.7</u> : $||.||_\pi$ est la plus grande semi-norme sur $E \otimes F$ telle qu'on ait $||x\otimes y||_\pi = ||x||.||y||$. En effet si une autre semi-norme p possède la même propriété, on a $p(\sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i) \leq \sum_{i=1}^n ||x_i||.||y_i||$.

<u>Corollaire 1.8</u> : <u>Soient</u> E_i, F_i, $(i=1,2)$ <u>des espaces normés. Si</u> u_i <u>est une application linéaire continue de</u> E_i <u>dans</u> F_i, <u>alors l'application linéaire</u> $u_1 \otimes u_2 : E_1 \otimes_\pi E_2 \to F_1 \otimes_\pi F_2$ <u>est continue et</u> $||u_1\otimes u_2||_\pi = ||u_1||.||u_2||$.

En effet $u_1 \otimes u_2$ est l'application linéaire qui correspond à l'application bilinéaire continue $E_1 \times E_2 \to F_1 \otimes_\pi F_2$: $(x,y) \mapsto u_1(x) \otimes u_2(y)$.
Et la norme de celle-ci vaut précisément $||u_1||.||u_2||$.

(*) χ est l'application bilinéaire canonique de $E \times F$ dans $E \otimes F$.

Proposition 1.9. Soient E, F deux espaces normés, S un sous-espace fermé de E et T un sous-espace fermé de F. Notons u(resp.v) l'application canonique $E \to E/S$, (resp. $F \to F/T$). Alors $u \otimes v$ induit par passage au quotient une isométrie de $E \otimes_\pi F/(S \otimes F + E \otimes T)$ sur $(E/S) \otimes_\pi (F/T)$

On sait que $u \otimes v$ induit un isomorphisme vectoriel de $E \otimes_\pi F/(S \otimes F + E \otimes T)$ sur $(E/S) \otimes_\pi (F/T)$. Il reste à montrer que $u \otimes v$ applique la boule unité de $E \otimes_\pi F$ sur la boule unité de $(E/S) \otimes_\pi (F/T)$, ce qui est évident car u applique la boule unité de E sur celle de E/S et v applique la boule unité de F sur celle de F/T.

Ainsi, le produit tensoriel projectif conserve les épimorphismes d'espaces normés.

Remarque 1.10 : Il est à noter que le produit tensoriel projectif ne conserve pas les monomorphismes. Ceci signifie que si S est un sous-espace de l'espace normé E, muni de la norme induite, la norme de $S \otimes_\pi F$ n'est pas nécessairement induite par celle de $E \otimes_\pi F$. Donnons un exemple : La boule unité B d'un espace de Hilbert H infinidimensionnel est faiblement compacte, et H s'identifie, avec sa norme à un sous-espace (fermé) de l'espace $\mathcal{C}(B)$ des fonctions continues sur l'espace compact B. L'espace H n'admet pas de supplémentaire topologique dans $\mathcal{C}(B)$. En effet, le projecteur $\mathcal{C}(B) \to H$ serait faiblement compact, et d'après un résultat de Dunford et Pettis, revu par Grothendieck, [10] , ce projecteur devrait envoyer toute partie faiblement compacte de $\mathcal{C}(B)$, en particulier la boule unité de H, sur une partie relativement compacte. Ceci n'est évidemment possible que si H est de dimension finie. Cette remarque permet de montrer que $H \otimes_\pi H$ n'est pas un sous-espace normé de $H \otimes_\pi \mathcal{C}(B)$. Car si c'était le cas, le produit scalaire de H se prolongerait, d'après le théorème de Hahn-Banach, en une forme bilinéaire continue sur $H \times \mathcal{C}(B)$, laquelle définirait un projecteur continu $\mathcal{C}(B) \to H$.

2. Le produit tensoriel projectif complété.

Si E et F sont deux espaces de Banach, on considère de préférence l'espace de Banach complété de $E \otimes_\pi F$. Cet espace est noté $E \hat{\otimes} F$.

Les éléments de $E \hat{\otimes} F$ admettent une description simple :

Proposition 2.1. : Soient E,F des espaces normés. Tout élément $u \in E \hat{\otimes} F$ s'écrit $u = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i x_i \otimes y_i$, avec $\lim_{i \to \infty} x_i = 0$, $\lim_{i \to \infty} y_i = 0$ et $\sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_i| < \infty$

Soit $u \in E \hat{\otimes} F$. Choisissons $u_n \in E \otimes_\pi F$ tel que

$$\| u - u_n \|_\pi \leqslant \frac{1}{n^2} \quad \frac{1}{2^{n+1}}$$

On a $||u_n - u_{n+1}||_\pi < \frac{1}{n^2}\frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{(n+1)^2}\frac{1}{2^{n+2}} < \frac{1}{n^2}\cdot\frac{1}{2^n}$

D'après la formule explicitant la norme de $E \otimes_\pi F$ (prop. 1.5) on peut écrire

$$u_{n+1} - u_n = \sum_{m=1}^{r_n} \lambda_{nm} \; x_{nm} \otimes y_{nm}$$

avec $||x_{nm}|| < \frac{1}{n}$, $||y_{nm}|| < \frac{1}{n}$ et $\sum_{m=1}^{r_n} |\lambda_{nm}| < \frac{1}{2^n}$

Si $u_1 = \sum_{m=1}^{r_o} \lambda_{om} \, x_{om} \otimes y_{om}$, on a alors

$$u = u_1 + \sum_{n=1}^{\infty} (u_{n+1} - u_n) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{r_n} \lambda_{nm} \; x_{nm} \otimes y_{nm}$$

Ecrivant cette série sous la forme $u = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \, x_i \otimes y_i$, on voit que les conditions énoncées dans la thèse sont vérifiées.

Si E,F,G sont des espaces de Banach, les espaces $L(E \otimes_\pi F, G)$ et $L(E\hat{\otimes}F,, G)$ sont isométriques. On a donc l'analogue du corollaire 1.6:

Proposition 2.2 : Si E,F,G sont des espaces de Banach, les espaces $B(E,F\,;\,G)$ et $L(E\hat{\otimes}F\,;\,G)$ sont canoniquement isomorphes.

On a aussi l'analogue de la proposition 1.9 :

Proposition 2.3 : Soient E, F deux espaces de Banach, S un sous-espace fermé de E et T un sous-espace fermé de F. Notons u(resp.v) l'application canonique $E \to E/S$, (resp. $F \to F/T$). Alors la prolongée $u\hat{\otimes}v$ de $u \otimes v$

applique la boule unité de $E\hat{\otimes}F$ sur la boule unité de $(E/S)\hat{\otimes}(F/T)$ (u est un épimorphisme).

De la proposition 1.9, on déduit que $(E/S)\hat{\otimes}(F/T)$ est isométrique au quotient de $E\hat{\otimes}F$ par l'adhérence de $E \otimes T + S \otimes F$. La proposition en résulte.

Nous donnerons maintenant un exemple explicite de produit tensoriel complété. Soient Ω un ensemble, Σ une tribu de parties de Ω, et μ une mesure non négative sur l'espace mesurable (Ω,Σ). Si E est un espace de Banach, on notera S(E) l'espace des fonctions simples de Ω dans E, c.-à.-d. l'espace des fonctions du type $t \to \sum_{i=1}^{n} \psi_i(t)\, x_i$ où ψ_i est la fonction caractéristique de $S_i \in \Sigma$, avec $\mu(S_i) < \infty$, et où $x_i \in E$. On munit S(E) de la semi norme p :

$$p\left(\sum_{i=1}^{n} \psi_i(t)\, x_i\right) = \int_\Omega || \sum_i \psi_i(t)\, x_i || \; \mu\,(dt)$$

Si $E = \mathbb{C}$, on écrit S au lieu de $S(\mathbb{C})$

On appelle $L^1(\mu,E)$ l'espace complété-séparé de S(E), et $L^1(\mu)$ l'espace complété-séparé de S.

Théorème 2.4 : $L^1(\mu,E)$ est isométriquement isomorphe à $L^1(\mu)\hat{\otimes} E$.

On dispose d'une application bilinéaire continue $S \times E \to L^1(\mu,E)$: $(f,x) \to f.x$. Cette application est continue car

$$\int_{\Omega} \|f(t)x\| \mu(dt) \leq \|x\| . \int |f(t)| \mu(dt)$$

On peut donc y associer une application linéaire, de norme au plus 1, de $S \otimes_\pi E$ dans $L^1(\mu,E)$, qui est de plus injective et dont l'image est $S(E)$. Si $u \in S \otimes_\pi E$, on peut écrire $u = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i \otimes x_i$ où les φ_i sont les fonctions caractéristiques d'ensembles S_i deux à deux disjoints. On a alors

$$\|u\|_\pi \leq \sum_{i=1}^{n} \|\varphi_i\|_1 \|x_i\|.$$

mais le membre de droite de cette inégalité est la norme de la fonction $\sum_i \varphi_i x_i$, image de u dans $S(E)$.

On a ainsi montré que l'application linéaire $S \otimes_\pi E \to S(E)$ construite précédemment est une isométrie. On en déduit que $S \hat{\otimes} E$ est isométrique à $L^1(\mu,E)$. Mais $S \otimes E$ est dense dans $L^1(\mu) \otimes_\pi E$, et on en déduit la thèse.

<u>Remarque 2.5</u> : $L^1(\mu ; E)$ est défini ci-dessus comme étant le complété de $S(E)$. Réaliser cet espace en tant qu'espace (de classes de) fonctions, est un autre problème indépendant du théorème 2.4.

Dans le cas où Ω est un ensemble d'indices I, et μ la mesure (discrète) qui "compte les points", l'espace $S(E)$ est l'espace $E^{(I)}$ des familles presque nulles de vecteurs de E, de sorte que $L^1(\mu,E)$ est l'espace $l^1(I,E)$ des familles absolument sommables de vecteurs de E, indexées par I. (voir la définition 1.2.2). On a donc le corollaire suivant du théorème précédent :

<u>Corollaire 2.6</u> : <u>Si</u> I <u>est un ensemble, et</u> E <u>un espace de Banach, les espaces de Banach</u> $l^1(I)\hat{\otimes}E$ <u>et</u> $l^1(I,E)$ <u>sont canoniquement isométriques.</u>

3. <u>Le produit tensoriel projectif d'espaces localement convexes.</u>

Un espace localement convexe E est la limite projective des espaces normés E_V, où V parcourt un système fondamental de voisinages disqués de l'origine. Si E et F sont deux e.l.c.s, on définit alors $E \otimes_\pi F$ de la façon suivante :

<u>Définition 3.1</u> : <u>Soient</u> E, F <u>deux e.l.c.s. On appelle produit tensoriel projectif de</u> E <u>et</u> F, <u>et on note</u> $E \otimes_\pi F$, <u>l'espace vectoriel</u> $E \otimes F$ <u>muni de la moins fine des topologies localement convexes qui rendent continues les applications canoniques</u> $E \otimes F \to E_U \otimes_\pi F_V$, <u>où</u> U (resp.V) <u>parcourt un système fondamental de voisinages disqués de</u> 0 <u>dans</u> E(resp.F).

Les voisinages de 0 dans $E \otimes_\pi F$ sont alors évidemment les ensembles du type $\Gamma(U \otimes V)$ où U désigne un voisinage disqué de 0 dans E et V un voisinage disqué de 0 dans F. La jauge j de $\Gamma(U \otimes V)$ est encore donnée par la formule

$$j(u) = \inf \{\sum_{i=1}^{n} j_U(x_i)\, j_V(y_i) \mid u = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i \}$$

où j_U est la jauge de U et j_V la jauge de V.

Il est assez clair que la topologie de $E \otimes_\pi F$ est la plus fine des topologies localement convexes qui rendent continue l'application bilinéaire canonique $E \times F \to E \otimes F$.

La structure naturelle d'un espace d'applications linéaires continues d'un e.l.c.s. dans un autre est une structure bornologique plutôt que topologique. Si E et F sont deux e.l.c.s., une partie H de L(E,F) est bornée pour cette structure si et seulement si elle est équicontinue. Nous munirons toujours L(E,F) de cette structure. De même si E,F,G sont trois e.l.c. nous munirons l'espace B(E,F ; G) des applications bilinéaires continues de E x F dans G de la bornologie des parties équicontinues.

Théorème 3.2. : Soient E, F, G trois e.l.c.s. L'isomorphisme canonique de l'espace des applications bilinéaires de E x F dans G sur l'espace des applications linéaires de $E \otimes F$ dans G induit un isomorphisme vectoriel-bornologique de l'espace B(E,F ; G) sur l'espace $L(E \otimes_\pi F, G)$.

Comme précédemment, on notera $\tilde{B}$ l'application linéaire $E \otimes F \to G$ associée à l'application bilinéaire B.

Dire que H est une partie équicontinue de B(E , F ; G) signifie qu'à tout voisinage disqué W de O dans G on peut associer des voisinages U de O dans E et V de O dans F, tels que $H(U \times V) \subset W$. On a alors aussi $\tilde{H}(\Gamma(U \otimes V)) \subset W$, ce qui montre que $\tilde{H}$ est équicontinue dans $L(E \otimes_\pi F ; G)$. L'affirmation réciproque est tout aussi immédiate.

Corollaire 3.3 : Le produit tensoriel projectif de deux e.l.c.s. E et F est un e.l.c.s.

Du théorème , on déduit que $E' \otimes F'$ s'identifie à une partie du dual de $E \otimes F$, ce qui montre que $E \otimes F$ est séparé par son dual, donc est un e.l.c.s.

Corollaire 3.4 : Si E et F sont deux e.l.c.s. métrisables, alors $E \otimes_\pi F$ est métrisable.

C'est évident.

Tout aussi évidente est la proposition suivante :

Proposition 3.5 : Si E_i, $F_i (i = 1,2)$ sont des e.l.c.s. et f_i des applications linéaires continues de E_i dans F_i, alors $f_1 \otimes f_2$ est une application linéaire continue de $E_1 \otimes_\pi E_2$ dans $F_1 \otimes_\pi F_2$. De plus si f_1 et f_2 sont des épimorphismes (i.e. si la topologie de F_i est image par f_i de celle de E_i), alors $f_1 \otimes f_2$ est un épimorphisme.

Puisque $E \otimes_\pi F$ est la limite projective des espaces normés $E_U \otimes_\pi F_V$, le complété $E \hat{\otimes} F$ de $E \otimes_\pi F$ est la limite projective des espaces de Banach $E_U \hat{\otimes} F_V$. Donnons un exemple de complété :

Proposition 3.6 : Si E est un e.l.c.s. et I un ensemble d'indices, l'espace $l^1(I,E)$ des familles absolument sommables, de vecteurs de E est canoniquement isomorphe à l'espace $l^1(I) \hat{\otimes} E$.

C'est assez clair : d'après la définition 4.2.1, $l^1(I,E)$ est la limite projective des espaces de Banach $l^1(I,E_V)$. Or d'après le corollaire 2.6, $l^1(I) \hat{\otimes} E_V$ et $l^1(I,E_V)$ sont canoniquement isométriques. La thèse en résulte immédiatement.

La proposition 2.1 se généralise au cas des e.l.c.s. métrisables :

Proposition 3.7 : Soient E et F des e.l.c.s. métrisables. Tout élément $u \in E\hat{\otimes}F$ s'écrit

$$u = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i x_i \otimes y_i, \text{ avec } \lim_{i\to\infty} x_i = 0, \ \lim_{i\to\infty} y_i = 0 \text{ et } \sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_i| < \infty$$

Le principe de la démonstration est identique à celui utilisé dans la proposition 2.1 : on choisit une suite (u_n) d'éléments de $E \otimes_\pi F$ qui converge suffisamment vite vers u. Ici, si p_n est une suite croissante de semi-normes(jauges de $\Gamma(U_n \otimes V_n)$) qui définissent la topologie de $E \otimes_\pi F$, on choisit u_n de façon à avoir

$$p_n(u-u_n) < \frac{1}{n^2} \quad \frac{1}{2^{n+1}}$$

La démonstration se déroule alors de façon identique à celle de la proposition 2.1.

4. Le Produit tensoriel inductif d'espaces bornologiques convexes.

La théorie des produits tensoriels d'e.b.c.s. est bien entendu analogue à celle des produits tensoriels d'e.l.c.s.

Définition 4.1 : Soient X et Y deux e.b.c.s.On appelle produit tensoriel inductif de X et Y, et on note $X \otimes_\pi Y$, l'espace vectoriel $X \otimes Y$ muni de la plus fine des bornologies convexes qui rendent bornées les applications canoniques $X_B \otimes_\pi Y_C \to X \otimes Y$, où B(resp.C) parcourt un système fondamental de disques bornés de X(resp.Y).

Ici il est immédiat que $X \otimes_\pi Y$ est un espace séparé, puisque les $X_B \otimes_\pi Y_C$ sont séparés. De même $X \otimes_\pi Y$ est de type dénombrable si X et Y le sont.

Si X et Y sont deux e.b.c.s., on peut munir l'espace L(X,Y) des applications linéaires bornées de X dans Y d'une structure bornologique en adoptant comme parties bornées les ensembles équibornés c.à.d. les ensembles H tels que HA soit borné dans Y dès que A est borné dans X). De même on peut munir l'espace B(X,Y ; Z) des applications bilinéaires bornées de X x Y dans Z d'une structure analogue. Les e.b.c.s. $L(X \otimes_\pi Y, Z)$ et B(X,Y ; Z) sont alors isomorphes.

Nous concentrerons cependant notre attention sur une autre classe d'espaces d'applications linéaires ou bilinéaires : nous considérerons des applications linéaires, bornées, d'un e.b.c.s. X dans un e.l.c.s. E :

Définition 4.2 : Soient X et Y deux e.b.c.s. et E un e.l.c.s. On désigne par $L_b(X,E)$ l'espace vectoriel des applications linéaires bornées de X dans E, muni de la topologie de la convergence uniforme sur les parties bornées de X. On désigne par $B_b(X,Y ; E)$ l'espace vectoriel des applications bilinéaires bornées de X x Y dans E, muni de la topologie de la convergence uniforme sur les produits B x C, où B est borné dans X, et C borné dans Y.

$L_b(X,E)$ et $B_b(X,Y ; E)$ sont donc des espaces topologiques et non bornologiques(Vectoriellement, $L_b(X,E)$ coïncide évidemment avec $L(X, \mathbb{E})$). On a alors le théorème suivant :

Théorème 4.3 : Soient X, Y deux e.b.c.s. et E un e.l.c.s. L'isomorphisme canonique de l'espace des applications bilinéaires de $X \times Y$ dans E sur l'espace des applications linéaires de $X \otimes Y$ dans E induit un isomorphisme vectoriel-topologique de $B_b(X, Y ; E)$ sur $L_b(X \otimes_\pi Y ; E)$

Il est clair que $B_b(X \times Y, E)$ et $L_b(X \otimes_\pi Y, E)$ sont vectoriellement isomorphes. Le fait que cet isomorphisme soit topologique se déduit immédiatement de l'expression explicite des voisinages de l'origine dans chacun de ces espaces.

Par rapport aux applications linéaires bornées, les produits tensoriels bornologiques ont les propriétés auxquelles on peut s'attendre :

Proposition 4.4. : Soient X_i, Y_i des e.b.c.s. $(i=1,2)$ et f_i des applications linéaires bornées de X_i dans Y_i. Alors l'application linéaire $f_1 \otimes f_2$, de $X_1 \otimes_\pi X_2$ dans $Y_1 \otimes_\pi Y_2$ est bornée. De plus si chaque f_i est un épimorphisme (i.e. si la bornologie de Y_i est l'image par f_i de celle de X_i) alors $f_1 \otimes f_2$ est un épimorphisme.

La démonstration est triviale.

Si X et Y sont deux e.b.c.s., le produit tensoriel complété $X \hat{\otimes} Y$ est aisé à définir : il suffit de compléter l'e.b.c.s. $X \otimes_\pi Y$. Rappelons simplement que si l'e.b.c.s. X est la limite inductive des espaces normés X_i (avec des applications $X_i \to X_j$ injectives),

alors le complété $\hat{X}$ de X est la limite inductive des espaces de Banach $\hat{X}_i$. Mais les applications $\hat{X}_i \to \hat{X}_j$ ne sont pas nécessairement injectives, de sorte que l'espace X n'est pas nécessairement un sous-espace de son complété $\hat{X}$ ($\hat{X}$ peut même être nul sans que X le soit).

Ainsi, d'une façon générale, nous ignorons si $X \otimes_\pi Y$ est un sous-espace de $X \hat{\otimes} Y$. Cependant, dans tous les cas connus, $X \otimes_\pi Y$ est bien un sous-espace vectoriel de $X \hat{\otimes} Y$. Nous nous contenterons du cas particulier où $X = l^1(I)$.

En effet, si X est un e.b.c.s. complet, $l^1(I,X)$ est la limite inductive des espaces $l^1(I,X_B)$ où B parcourt un système fondamental de disques bornés complétants de X. (Définition 4.2.3). Mais $l^1(I,X_B)$ est isométrique à $l^1(I) \hat{\otimes} X_B$, ce qui montre que les applications $l^1(I) \hat{\otimes} X_B \to l^1(I) \hat{\otimes} X_C$ sont injectives, donc que $l^1(I) \otimes_\pi X$ est un sous-espace vectoriel de $l^1(I) \hat{\otimes} X$. De plus :

Proposition 4.5 : Si X est un e.b.c.s. complet, et I un ensemble d'indices, alors l'espace $l^1(I,X)$ des familles absolument sommables de vecteurs de X est canoniquement isomorphe à $l^1(I) \hat{\otimes} X$.

5. Rappels sur les espaces d'applications bilinéaires.

Soient E, F, G trois e.l.c.s. On désigne par $\mathcal{B}(E,F ; G)$ l'espace des applications bilinéaires séparément continues de $E \times F$ dans G. L'espace $B(E,F ; G)$ des applications bilinéaires continues de $E \times F$ dans G est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{B}(E,F ; G)$. L'exemple du produit scalaire dans un espace de Hilbert muni de sa topologie faible montre qu'en général $B(E,F ; G)$ est distinct de $\mathcal{B}(E,F ; G)$.

Par contre, on sait que $B(E,F\ ;\ G)$ coïncide avec $\mathcal{B}(E,F\ ;\ G)$ si E et F sont deux espaces de Fréchet, ou deux espaces DF tonnelés

Toute application bilinéaire $E \times F \to G$ s'identifie à une application linéaire de E dans l'espace des applications linéaires de F dans G. En particulier, $\mathcal{B}(E,F\ ;\ G)$ s'identifie à l'espace $L(E,L_s(F,G))$ des applications linéaires continues de E dans l'espace $L_s(F,G)$ des applications linéaires continues de F dans G, muni de la topologie de la convergence simple. Ainsi, si G est le corps des scalaires on a

$$\mathcal{B}(E,F) = L(E,F'_s)$$

où F'_s est le dual de F muni de la topologie faible $\sigma(F',F)$. De plus, aux formes bilinéaires continues, c.à.d. aux éléments de $B(E,F)$ correspondent les applications linéaires de E dans F'_S qui transforment un voisinage convenable de $0 \in E$ en une partie équicontinue de F', (ces applications sont automatiquement continues, de E dans F'_s) . Notons aussi qu'à un ensemble équicontinu de formes bilinéaires continues sur $E \times F$, correspond un ensemble d'applications linéaires de E dans F' qui appliquent un même voisinage de 0 dans E dans une même partie équicontinue. On a donc :

<u>Proposition 5.1</u> : <u>Si</u> E <u>et</u> F <u>sont deux e.l.c.s., alors les e.b.c.s.</u> $B(E,F)$ <u>et</u> $L(E,F')$ <u>sont canoniquement isomorphes</u>.

Cette proposition utilise la définition suivante :

<u>Définition 5.2</u> : <u>Soient</u> E <u>un e.l.c.s. et</u> X <u>un e.b.c.s. On désigne par</u> $L(E,X)$ <u>l'espace vectoriel des applications linéaires de</u> E <u>dans</u> X <u>qui appliquent chacune un voisinage de</u> $0 \in E$ <u>dans une partie bornée de</u> X. <u>Une partie de</u> $L(E,X)$ <u>est dite bornée si tous ses éléments appliquent un même voisinage de</u> $0 \in E$ <u>dans une même partie bornée de</u> X. $L(E,X)$ <u>est muni de la bornologie ainsi définie.</u>

6. <u>Le produit tensoriel injectif d'espaces localement convexes.</u>

<u>Proposition 6.1</u> : <u>Soient</u> E,F <u>deux e.l.c.s. Les espaces vectoriels</u> $E \otimes F$ <u>et</u> $B(E'_s,F'_s)$ <u>sont canoniquement isomorphes</u>.

Le dual de F'_s est F, et une partie de F est équicontinue si et seulement si elle est contenue et bornée dans un sous-espace de dimension finie de F. D'après la proposition 5.1, $B(E'_s,F'_s)$ est donc isomorphe à l'espace $L(E'_s,F_o)$ où F_o est l'espace vectoriel F muni de la bornologie convexe la plus fine. Toute application $f \in L(E'_s,F_o)$ est faiblement continue et de rang fini. Elle est donc définie par un noyau $u = \sum_i e_i \otimes f_i \in (E'_s)' \otimes F = E \otimes F$:

$$f(e') = \langle e', \sum_{n=1}^{n} e_i \otimes f_i \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle e', e_i \rangle f_i .$$

On a ainsi construit une application linéaire surjective de $E \otimes F$ sur $B(E'_s,F'_s)$: elle applique $\sum_i e_i \otimes f_i$ sur la forme bilinéaire $(e',f') \to \sum_i \langle e',e_i \rangle \langle f', f_i \rangle$

Il est immédiat que cette application est injective

c.q.f.d.

Il n'est pas très intéressant de considérer sur $E \otimes F$ la bornologie image de celle de $B(E'_s, F'_s)$ car celle-ci est la bornologie convexe la plus fine(pour laquelle tous les bornés sont de rang fini). Par contre, toute partie équicontinue de E', ou F' étant faiblement bornée, on peut considérer $B(E'_s, F'_s)$ comme un sous-espace de l'espace $B(E', F')$ des applications bilinéaires bornées sur $E' \times F'$. Cet espace a été muni(définition 4.2) de la topologie de la convergence uniforme sur les produits de parties équicontinues de E' et F'. (Cette topologie "est" la topologie naturelle du dual de l'e.b.c.s. $E' \otimes_\pi F'$).

Définition 6.2 : Soient E et F deux e.l.c.s. On appelle produit tensoriel topologique injectif de E et F, et on note $E \otimes_\varepsilon F$ l'espace vectoriel $E \otimes F$ muni de la topologie induite par $B_b(E', F')$, c.à.d. la topologie de la convergence uniforme sur les produits de parties équicontinues de E' et F'. Le complété de $E \otimes_\varepsilon F$ est noté $E \hat{\otimes} F$.

Proposition 6.3 : Soient E et F deux e.l.c.s. L'application bilinéaire canonique de $E \times F$ dans $E \otimes F$, est continue si on munit $E \otimes F$ de la topologie ε.

Il faut vérifier que, si (x,y) converge vers (x_o, y_o), alors $x \otimes y$ converge vers $x_o \otimes y_o$, uniformément sur les produits de parties équicontinues de E' et F'. C'est évident si on tient compte du fait que la topologie d'un e.l.c.s. est la topologie de la convergence uniforme sur les parties équicontinues du dual.

Corollaire 6.4 : Sur $E \otimes F$, la topologie π est plus fine que la topologie ε

Si E et F sont deux espaces normés, E' et F' en sont aussi, de même que $E' \otimes_n F'$. Par conséquent :

Proposition 6.5 : Si E et F sont deux espaces normés, $E \otimes_\varepsilon F$ est un espace normé; dont la norme est donnée par la formule :

$$||u||_\varepsilon = ||\sum_{i=1}^{n} e_i \otimes f_i ||_\varepsilon = \sup\{|\sum_{i=1}^{n} \langle e_i, e'\rangle \langle f_i, f'\rangle| \;\Big|\; ||e'|| \leq 1; ||f'|| \leq 1\}$$

De plus $||e \otimes f||_\varepsilon = ||e|| \,.\, ||f||$.

Dans le cas général, E et F sont des limites projectives d'espaces normés E_V, F_V. E' et F' sont alors des limites inductives d'espaces tout aussi normés $(E_U)' = E'_{U^o}$, $(F_V)' = F_{V^o}$ et la topologie de $E \otimes_\varepsilon F$ est donnée par les semi-normes

$$\sup \{|\sum_{i=1}^{n} \langle e_i, e'\rangle \langle f_i, f'\rangle| \;\Big|\; e' \varepsilon U^o, f' \varepsilon V^o\}$$

Autrement dit :

Proposition 6.6 : Soient E, F deux e.l.c.s. L'espace $E \otimes_\varepsilon F$ est la limite projective des espaces normés $E_U \otimes_\varepsilon F_V$, où U(resp. V) parcourt un système fondamental de voisinages disqués de l'origine de E (resp. de F).

Proposition 6.7 : Soient E_i, F_i des e.l.c.s.,$(i=1,2)$ et f_i des applications linéaires continues de E_i dans F_i. $f_1 \otimes f_2$ est une application linéaire continue de $E_1 \otimes_\varepsilon E_2$ dans $F_1 \otimes_\varepsilon F_2$. De plus, si les E_i et F_i sont des espaces normés, on a $\|f_1 \otimes f_2\|_\varepsilon = \|f_1\| \, \|f_2\|$.

La première partie est immédiate : d'après la proposition 4.4, $f'_1 \otimes f'_2$ est une application linéaire bornée de $F'_1 \otimes_\pi F'_2$ dans $E'_1 \otimes_\pi E'_2$.
La transposée de cette application est donc continue, ainsi que sa restriction $f_1 \otimes f_2$ à $E_1 \otimes_\varepsilon E_2 \subset (E'_1 \otimes_\pi E'_2)^x$. De même, dans le cas des espaces normés, on a $\|f'_1\| = \|f_1\|$, $\|f'_2\| = \|f_2\|$, $\|f'_1 \otimes f'_2\|_\pi = \|f_1\| \, \|f_2\|$ (corollaire 1.8). Donc $\|f_1 \otimes f_2\|_\varepsilon \leq \|f_1\| \, \|f_2\|$
L'autre inégalité se vérifie simplement :

$$\|f_1 \otimes f_2\|_\varepsilon \geq \sup_{\substack{\|x\| \leq 1 \\ \|y\| \leq 1}} \|f_1(x) \otimes f_2(y)\|_\varepsilon = \sup_{\substack{\|x\| \leq 1 \\ \|y\| \leq 1}} \|f_1(x)\| \, \|f_2(y)\| = \|f_1\| \, \|f_2\|$$

Le produit tensoriel π conserve les épimorphismes(les espaces quotients). Par contre le produit tensoriel ε conserve les sous-espaces :

Proposition 6.8 : Soient $F_i (i=1,2)$ des e.l.c.s. et E_i des sous-espaces des F_i. La topologie de $E_1 \otimes_\varepsilon E_2$ coïncide avec la topologie induite par celle de $F_1 \otimes_\varepsilon F_2$.

E'_i est un quotient de F'_i. Par conséquent,(proposition 4.4) $E'_1 \otimes_\pi E'_2$ est un e.b.c.s. quotient de $F'_1 \otimes_\pi F'_2$. La thèse en résulte immédiatement.

7. Un exemple.

Considérons un espace localement compact S et l'espace $\mathcal{C}(S,E)$ des fonctions continues sur S, à valeurs dans un e.l.c.s, complet E. On écrira $\mathcal{C}(S)$ au lieu de $\mathcal{C}(S,K)$, si K est le corps des scalaires.

On munit $\mathcal{C}(S,E)$ de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact.

Proposition 7.1 : $\mathcal{C}(S) \hat{\hat{\otimes}} E$ et $\mathcal{C}(S,E)$ sont isomorphes.

Il est d'abord clair que $\mathcal{C}(S) \otimes E$ s'identifie à un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(S,E)$, l'élément $\sum_i f_i \otimes x_i$ s'identifiant à la fonction $s \to \sum_i f_i(s)\, x_i$. Montrons que $\mathcal{C}(S) \otimes E$ est dense dans $\mathcal{C}(S,E)$.
Soient $f \in \mathcal{C}(S,E)$, E un compact de S, et p une semi-norme continue sur E. Il existe un recouvrement fini de K par des ouverts U_i tels que

$$s,t \in U_i \cap K \Rightarrow p(f(s)-f(t)) \leq 1$$

Soit(φ_i) une partition de l'unité subordonnée au recouvrement(U_i).
Choisissons $s_i \in U_i \cap K$, et posons $g(s) = \sum_i \varphi_i(s)\, f(s_i)$
On vérifie aisément que quel que soit $s \in K$, on a $p(f(s)-g(s)) \leq 1$.

Ceci montre que f adhère à $\mathcal{C}(S) \otimes E$, donc que cet espace est dense dans $\mathcal{C}(S,E)$. On sait d'autre part que $\mathcal{C}(S,E)$ est complet, de sorte qu'il reste à montrer que la topologie ε de $\mathcal{C}(S,E)$ coïncide avec la topologie induite par $\mathcal{C}(S,E)$.

La topologie ε de $\mathcal{C}(S) \otimes E$ est la topologie de la convergence uniforme sur les produits de parties équicontinues de $(\mathcal{C}(S))'$ et de E'. On a vu que $\mathcal{C}(S) \otimes E$ est isomorphe (prop. 6.1) à l'espace des applications linéaires faiblement continues et de rang fini de E'_s dans $\mathcal{C}(S)$. Si une application linéaire est de rang fini, il est équivalent de dire qu'elle est continue sur E'_s ou sur E'_τ (où τ est la topologie de Mackey $\tau(E',E)$). On peut donc encore dire que $\mathcal{C}(S) \otimes E$ est un sous-espace vectoriel de $L(E'_\tau\,;\mathcal{C}(S))$; la topologie ε est alors induite par la topologie de la convergence uniforme sur les parties équicontinues de E'.

Il reste alors à montrer que $\mathcal{C}(S,E)$ s'identifie également, avec sa topologie à un sous-espace de $L(E'_\tau\,;\mathcal{C}(S))$. Soit $f \in \mathcal{C}(S,E)$

Considérons l'application linéaire

$E' \to \mathcal{C}(S) : e' \to (s \to \langle f(s), e'\rangle)$

cette application est continue si on munit E' de la topologie de Mackey ; en effet , si K est un compact de S, le compact fK de E est inclus, parce que E est complet, à un disque compact D, et si $e' \in \delta D^\circ$, la fonction $\langle f(s), e'\rangle$ est majorée par δ sur le compact K.

Cette constatation permet d'identifier $\mathcal{C}(S,E)$ à un sous-espace de $L(E'_\tau\,,\mathcal{C}(S))$. On voit alors aisément que la topologie de $\mathcal{C}(S,E)$ est induite par la topologie de la convergence uniforme sur les parties équicontinues de E'.

<u>Corollaire 7.2</u> : <u>Si</u> S <u>et</u> T <u>sont deux espaces localement compacts, les e.l.c.s.</u> $\mathcal{C}(S) \hat{\otimes} \mathcal{C}(T)$ <u>et</u> $\mathcal{C}(S \times T)$ <u>sont isomorphes</u>.

En effet $\mathcal{C}(S, \mathcal{C}(T))$ s'identifie à $\mathcal{C}(S \times T)$. On en déduit que toute fonction continue de 2 variables $(s,t) \in S \times T$ est limite uniforme, sur tout compact, de sommes de fonctions "à variables séparées" : $\sum_i f_i(s)\, g_i(t)$.

Considérons maintenant un espace de Banach E, et un ensemble d'indices I. On sait que l'espace vectoriel $E^{(I)}$ des familles presque nulles de vecteurs de E, est dense dans l'espace $l^1((I,E))$, celui-ci étant muni de la norme (voir 1.3.3).

$$\|\xi\|_s = \sup_{\|x'\| \leq 1} \sum_{i\in I} |\langle x_i, x'\rangle| \qquad \text{si } \xi = (x_i)_{i\in I}$$

Le produit tensoriel $\mathbb{C}^{(I)} \otimes E$ a d'autre part été identifié à $E^{(I)}$, (démonstration du th. 2.4) à l'élément $u = \sum_n \alpha_n \otimes x_n$ correspondant la famille presque nulle $\xi = (\sum_n \alpha_{ni} x_n)_{i\in I}$. Montrons que la norme induite par $l^1((I,E))$ sur $\mathbb{C}^{(I)} \otimes E$ est précisément la norme ε, c.à.d. que $\|u\|_\varepsilon = \|\xi\|_s$. On a en effet $\|u\|_\varepsilon \leq \|\xi\|_s$, puisque pour toute famille (β_i) appartenant à la boule unité de $l^\infty(I)$, et pour tout $x' \in E'$, $\|x'\| \leq 1$.

$$\sum_n \Big(\sum_{i\in I} \alpha_{ni}\beta_i\Big) \langle x_n, x'\rangle| \leq \sum_{i\in I} |\beta_i| \; \Big|\sum_n \alpha_{ni} \langle x_n, x'\rangle\Big| \leq \|\xi\|_s$$

D'autre part $||\xi||_{\beta} \leq ||u||_{\varepsilon}$, car pour tout $x' \in E'$, $||x'|| \leq 1$:

$$\sum_{i\in I} |<\sum_n \alpha_{ni}\, x_n, x'>| = |\sum_{i\in I} \beta_i < \sum_n \alpha_{ni}\, x_n, x'>| \qquad (\text{avec } |\beta_i| = 1)$$

$$= |\sum_n (\sum_{i\in I} \beta_i \alpha_{ni}) <x_n, x'>|$$

$$\leq ||u||_{\varepsilon}$$

On a ainsi établi le résultat suivant :

Proposition 7.3 : Soient E un espace de Banach et I un ensemble d'indices. Les espaces de Banach $l^1((I,E))$ et $l^1(I)\hat{\hat{\otimes}}E$ sont canoniquement isométriques.

Corollaire 7.4 : Soient E un e.l.c.s. complet et I un ensemble d'indices. Les e.l.c.s. complets $l^1((I,E))$ et $l^1(I)\hat{\hat{\otimes}}E$ sont canoniquement isomorphes.

En effet $l^1((I,E))$ est la limite projective des espaces de Banach $l^1((I,E_V))$ et $l^1(I)\hat{\hat{\otimes}}E$ est la limite projective des espaces de Banach $l^1(I)\hat{\hat{\otimes}}E_V$.

8. Le produit tensoriel injectif d'espaces bornologiques convexes.

Si E et F sont deux e.l.c.s., la topologie ε sur $E \otimes F$ a été définie comme la topologie induite par le dual $(E' \otimes_{\pi} F')^{\times}$. Il semble donc logique, lorsque X et Y sont deux e.b.c.s. de définir une bornologie ε sur $X \otimes Y$ comme étant la bornologie induite par le dual $(X^{\times} \otimes_{\pi} Y^{\times})'$. Encore faut-il que cela ait un sens, et notamment que $X \otimes Y$ puisse s'identifier à une partie de ce dual, ce qui est pas toujours le cas puisque $X^{\times}$ et $Y^{\times}$ peuvent être nuls. Supposons provisoirement X et Y t-séparés. Alors, il est clair qu'on dispose de l'identification souhaitée.

Proposition 8.1 : Soient X et Y deux e.b.c.s. t-séparés. La bornologie induite sur $X \otimes Y$ par le dual $(X^{\times} \otimes_{\pi} Y^{\times})'$ est la limite inductive des bornologies des espaces normés $X_B \otimes_{\varepsilon} Y_C$ où B(resp.C) parcourt un système fondamental de disques bornés de X(resp. Y).

$X^{\times}$ (resp. $Y^{\times}$) est la limite projective des espaces normés $X^{\times}_{B^\circ}$ (resp. $Y^{\times}_{C^\circ}$).

Par conséquent $X^{\times} \otimes_{\pi} Y^{\times}$ est la limite projective des $X^{\times}_{B^\circ} \otimes_{\pi} Y^{\times}_{C^\circ}$.
Or, X et Y étant t-séparés, $X^{\times}_{B^\circ}$ est dense dans $(X_B)'$, et $Y^{\times}_{C^\circ}$ est dense dans $(Y_C)'$. La thèse en résulte immédiatement.

Cette propriété est l'analogue de la proposition 6.6. Elle justifie la définition suivante, valable même si X et Y ne sont pas t-séparés :

Définition 8.2 : Soient X et Y deux e.b.c.s. On appelle tensoriel bornologique injectif de X et Y, et on note $X \otimes_{\varepsilon} Y$, l'espace vectoriel $X \otimes Y$ muni de la plus fine des bornologies convexes pour lesquelles sont bornées toutes les applications $X_B \otimes_{\varepsilon} Y_C \to X \otimes Y$, B(resp. C) parcourant un système fondamental de disques bornés de X(resp. Y).

Il est immédiat que la bornologie ε est moins fine que la bornologie π. Les propriétés suivantes se déduisent immédiatement du cas particulier où les espaces considérés sont normés :

Proposition 8.3 : Soient X_i, Y_i des e.b.c.s.$(i=1,2)$ et f_i des applications linéaires bornées de X_i dans Y_i. $f_1 \otimes f_2$ est une application linéaire bornée de $X_1 \otimes_\varepsilon X_2$ dans $Y_1 \otimes_\varepsilon Y_2$.

Proposition 8.4 : Soient Y_i des e.b.c.s.$(i=1,2)$, et X_i des sous-espaces des Y_i. La bornologie de $X_1 \otimes_\varepsilon X_2$ coïncide avec celle induite par $Y_1 \otimes_\varepsilon Y_2$

Le complété de $X \otimes_\varepsilon Y$ sera noté $X \hat{\otimes} Y$. Contrairement au cas du produit tensoriel Π, nous pouvons affirmer d'emblée que $X \otimes Y$ est un sous-espace vectoriel de $X \hat{\otimes} Y$. En effet cet espace est la limite inductive des espaces $X_B \hat{\otimes} Y_C$ où B(resp. C) parcourt un système fondamental de disques bornés de X(resp.Y). Si B_1 est inclus à B_2(resp. C_1 inclus à C_2), l'application de transition $X_{B_1} \hat{\otimes} Y_{C_1} \to X_{B_2} \hat{\otimes} Y_{C_2}$ est injective car le premier espace est un sous-espace de $B_b(X'_{B_1}, Y'_{C_1})$, le second est un sous-espace de $B_b(X'_{B_2}, Y'_{C_2})$ et l'application de transition se prolonge en une application injective de $B_b(X'_{B_1}, Y'_{C_1})$ dans $B_b(X'_{B_2}, Y'_{C_2})$. La thèse en résulte.

Le résultat suivant est évident par passage à la limite inductive :

Proposition 8.5 : Soient X un e.b.c.s. complet et I un ensemble d'indices. Alors les e.b.c.s. complets $l^1((I,X))$ et $l^1(I) \hat{\otimes} X$ sont canoniquement isomorphes.

9. Le produit φ

Nous ne considérerons dans ce numéro que des espaces de Banach. Nous associerons à tout couple (E,F) d'espaces de Banach un troisième espace de Banach $E \varphi F$, qui, on le verra plus loin, coïncide dans tous les cas connus avec $E \hat{\otimes} F$. L'espace $E \varphi F$ est relativement facile à déterminer lorsque E ou F se décrit de manière simple comme un sous-espace fermé d'un espace de type $\mathcal{C}(K)$.

Proposition 9.1 [28] : Soient E et F des espaces de Banach. Les trois espaces de Banach suivants sont naturellement isométriques :

(i) l'espace des applications linéaires de E' dans F dont la restriction à la boule unité de E' est continue pour la topologie faible de E' et la topologie initiale de F, muni de la norme de la convergence uniforme sur cette boule unité.

(ii) l'espace des applications de F' dans E dont la restriction à la boule unité de F' est continue pour la topologie faible de F' et la topologie initiale de E, muni de la norme de la convergence uniforme sur cette boule unité.

(iii) l'espace des formes bilinéaires sur E' x F', dont la restriction au produit des boules unités est faiblement continue, muni de la norme de la convergence uniforme sur ce produit de boules.

Il suffit évidemment de démontrer que les espaces (i) et (iii) sont isométriques. A l'application linéaire f de E' dans F correspond bien entendu la forme bilinéaire $\bar{f}$ sur $E' \times F'$, définie par $\bar{f}(x',y') = \langle f(x');y' \rangle$.

Que l'application $f \to \bar{f}$ soit linéaire et isométrique est évident, et il reste à montrer qu'elle est surjective. Soit $\bar{f}$ un élément de l'espace (iii). Si x' reste fixé, $y' \to \bar{f}(x',y')$ est une forme linéaire sur F' dont la restriction à la boule unité est faiblement continue. Du théorème de Grothendieck sur le complété d'un espace localement convexe, on déduit l'existence d'un vecteur $f(x') \in F$ tel que $\langle f(x'),y' \rangle = \bar{f}(x',y')$. D'autre part, f est continue en tant qu'application de la boule unité de E', dans l'espace des fonctions continues sur la boule unité de F'. Et F est un sous-espace topologique de ce dernier espace.

<u>Définition 9.2</u> : <u>Soient</u> E,F <u>**deux** espaces de Banach. On note</u> $E \psi F$ <u>l'un quelconque des espaces de Banach isométriques décrits dans la proposition 9.1</u>

L'espace $E \psi F$ possède une propriété interessante, liée à la dualité [28]. Rappelons d'abord que la catégorie des espaces de Banach est équivalente à la catégorie duale de la catégorie des disques compacts, un disque compact("dual Banach ball" dans la terminologie de [28]) étant un espace compactologique convexe dans lequel existe une partie compacte disquée qui absorbe toutes les autres. De façon explicite un disque compact est la structure définie par la donnée d'un espace vectoriel F, d'un disque absorbant B et d'une topologie compacte τ sur B vérifiant les axiomes suivants :

(a) l'application $B \times B \to B : (x,y) \to \frac{1}{2}(x+y)$ est continue.

(b) l'origine admet dans B un système fondamental de voisinage formé de disques.

Un morphisme du disque compact (F_1,B_1,τ_1) dans le disque compact (F_2,B_2,τ_2) est une application linéaire de F_1 dans F_2 qui applique B_1 dans une homothétique $\lambda B_2, (\lambda>0)$, de B_2, continûment pour τ_1 et la topologie «homothétique» de τ_2. Si u est un tel morphisme, on pose $||u|| = \inf \{\lambda>0 | u B_1 \subset \lambda B_2\}$. Muni de cette norme l'espace des morphismes de F_1 dans F_2 est un espace de Banach. On définit de façon analogue un espace de bimorphismes.

A tout espace de Banach H, on associera le disque compact dual : $H^* = (H',B,\tau)$ où H' est le dual topologique de H, B la boule unité de H' et τ la topologie faible de B. A un disque compact $D=(F,B,\tau)$, on associera l'espace de Banach dual, D^* qui est l'espace de Banach des morphismes de D dans les scalaires. On montre ([28] ou [29]) que D est isomorphe à D^{**}, que H est isométrique à H^{**} et que ces deux applications réalisent l'équivalence signalée ci-dessus entre la catégorie des espaces de Banach et la duale de la catégorie des disques compacts.

<u>Théorème 9.3</u> [28] : <u>Soient</u> $D_1=(F_1,B_1,\tau_1)$ <u>et</u> $D_2=(F_2,B_2,\tau_2)$ <u>deux disques compacts. Posons</u> $D_1 \bar{\otimes} D_2 = (D_1^* \psi D_2^*)^*$. <u>Il existe un bimorphisme</u> (canonique) τ <u>de</u> $D_1 \times D_2$ <u>dans</u> $D_1 \bar{\otimes} D_2$ <u>tel qu'à tout bimorphisme</u> u de $D_1 \times D_2$ <u>dans un disque compact</u> D_3 <u>on puisse associer un morphisme unique</u> u_1 <u>de</u> $D_1 \bar{\otimes} D_2$ <u>dans</u> D_3 <u>possédant la propriété</u> $u = u_1 \circ \tau$

Il faut démontrer que, $D_1 \tilde{\otimes} D_2$ est solution d'un problème universel. Or, un problème universel comme celui-ci admet toujours une solution (voir [1]), et la seule difficulté est d'identifier celle-ci. Désignons-la provisoirement par Δ. L'espace de Banach Δ^* est alors isométrique à l'espace de Banach des bimorphismes de $D_1 \times D_2$ dans les scalaires , c.à.d. à l'espace des formes bilinéaires sur $F_1 \times F_2 = (D_1^*)' \times (D_2^*)'$ dont la restriction au produit des disques B_1(= boule unité de $D_1^{*'}$) et B_2(=boule unité de $D_2^{*'}$) est continue. Autrement dit, Δ^* est isométrique à $D_1^* \psi D_2^*$. Par conséquent $\Delta = D_1 \tilde{\otimes} D_2$.

Nous calculerons maintenant explicitement quelques espaces E F.

Supposons d'abord que l'on connaît $E \psi F$. Soit(x'_α) une famille d'éléments de E', et soit E_o l'intersection des noyaux des formes x'_α . A chaque forme x'_α est associée fonctoriellement une application linéaire continue $\tilde{x}_\alpha : E \psi F \to F$: si $E \psi F$ est considéré comme l'espace des applications linéaires de E' dans F dont la restriction à la boule unité est faiblement continue, alors $\tilde{x}_\alpha(u) = u(x'_\alpha)$.
Si $E \psi F$ est considéré comme espace d'applications de F' dans E, alors $\tilde{x}_\alpha(u) = x'_\alpha \circ u$.

<u>Proposition 9.4</u> : <u>Si</u> E <u>et</u> F <u>sont deux espaces de Banach, et</u> E_o <u>l'intersection des noyaux des formes linéaires</u> $x'_\alpha \varepsilon E'$., <u>alors</u> $E_o \psi F$ <u>est l'intersection des noyaux des applications linéaires</u> $\tilde{x}_\alpha$

Pour la démonstration on considérera $E \psi F$ comme espace d'applications de F' dans E. L'espace $E_o \psi F$ est alors visiblement le sous-espace de $E \psi F$ formé des applications dont l'image est contenue dans E_o. Or, une application $u \varepsilon E \psi F$ applique F' dans E si et seulement si $x'_\alpha \circ u = 0$ pour tout α.La thèse se déduit de ce que $x'_\alpha u = \tilde{x}_\alpha(u)$.

<u>Corollaire 9.5</u> . <u>Si</u> E_o <u>est le sous-espace de E intersection des noyaux des</u> $x'_\alpha \varepsilon E'$ <u>et si</u> F_o <u>est le sous-espace de F intersection des noyaux des</u> $y'_\beta \varepsilon F'$, <u>alors</u> $E_o \psi F_o$ <u>est le sous-espace de</u> $E \psi F$ <u>intersection des noyaux des</u> $\tilde{x}_\alpha : E \psi F \to F$ <u>et des</u> $\tilde{y}_\beta : E \psi F \to E$.

Cette proposition permet de calculer certains espaces $E \psi F$, notamment lorsque E et F se décrivent comme certains sous-espaces d'espaces de fonctions continues. Nous verrons au numéro 10 que si S est un espace compact, et E un espace de Banach, alors $\mathcal{C}(S) \psi E = \mathcal{C}(S) \hat{\otimes} E = \mathcal{C}(S,E)$. En particulier, si T est un deuxième espace compact, $\mathcal{C}(S) \psi \mathcal{C}(T) = \mathcal{C}(S \times T)$
Anticipant sur ces résultats, on a les corollaires suivants :

<u>Corollaire 9.6</u> : <u>Soit</u> S(resp.T) <u>un espace compact</u>. <u>Soit</u>(μ_α) (resp. (ν_β)) <u>une famille de mesures de Radon sur</u> S(resp. T). <u>Si</u> E (resp. F) <u>est le sous-espace de</u> $\mathcal{C}(S)$(resp $\mathcal{C}(T)$) <u>formé des fonctions</u> f(resp. g) <u>telles que</u> $\int_S f \, d\mu_\alpha = 0$ <u>pour tout</u> α,(resp $\int_T g \, d\nu_\beta = 0$ <u>pour</u> tout β) , <u>alors</u> $E \psi F$ <u>est l'espace des fonctions</u> $u \varepsilon \mathcal{C}(S \times T)$ <u>telles que</u>

$$\forall\, y \in T \,,\ \forall \alpha : \int_S w(x,y)\, d\mu_\alpha(x) = 0$$

et $$\forall x \in S\ \forall \beta : \int_T w(x,y)\, d\upsilon_\beta(y) = 0$$

Corollaire 9.7 : Soit S un espace compact et E l'intersection des noyaux des mesures de Radon μ_α. Si F est un espace de Banach $E \varphi F$ est le sous-espace de $\mathcal{C}(S,F)$ formé des fonctions u telles que

$$\forall \alpha : \int_S u(x)\, d\mu_\alpha(x) = 0$$

Corollaire 9.8 : Soient S,T deux espaces compacts. Si E est un sous-espace fermé de $\mathcal{C}(S)$, et F un sous-espace fermé de $\mathcal{C}(T)$, alors $E \varphi F$ est le sous-espace de $\mathcal{C}(S \times T)$ formé des fonctions u telles que pour tout x, la fonction $y \to u(x,y)$ appartient à F, et pour tout y, la fonction $x \to u(x,y)$ appartient à E.

Les corollaires 9.6 et 9.7 sont immédiats. Le corollaire 9.8 se déduit du corollaire 9.6 en choisissant par exemple comme familles (μ_α) et (υ_β) les orthogonaux respectifs de E et F dans les espaces de mesures de Radon sur S et T.

En principe, ce qui précède permet de calculer $E \varphi F$ quels que soient E et F puisque tout espace de Banach est isométrique à un sous-espace d'un espace de fonctions continues. En pratique, il sera bien malaisé de calculer ne fût-ce que $L^p \varphi E$.

10. La propriété d'approximation

Nous limiterons ce numéro à l'essentiel . Le phénomène le plus important concernant la propriété d'approximation est sans doute le fait qu'on ne connait aucun exemple concret d'espace de Banach qui ne possède pas cette propriété. Pour une étude détaillée, on se reportera à [11] .

Définition 10.1 : Soit E un e.l.c.s. On dit que E possède la propriété d'approximation, ou est approximant, si l'application identique est adhérente à l'ensemble des transformations linéaires continues de rang fini, pour la topologie de la convergence uniforme sur tout convexe compact.

La propriété d'approximation peut s'exprimer comme suit : l'identité de E adhère à $E' \otimes E$ dans $L_c(E,E)$ (espace $L(E,E)$ muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout convexe compact).

Démontrons le caractère approximant de certains espaces. On utilisera le fait que sur un ensemble équicontinu de fonctions (d'un espace topologique dans un espace uniforme) la topologie de la convergence simple coïncide avec la topologie de la convergence uniforme sur tout compact.

Propostion 10.2 Soit K un espace compact. L'espace de Banach $\mathcal{C}(K)$ des fonctions continues sur K est approximant.

Soit $\varphi = (\varphi_i)$ $(i=1,\dots,n)$ une partition de l'unité sur K, et pour tout i, soit p_i un point du support de θ_i. L'application suivante est de rang fini :

$$U_\varphi : \mathcal{C}(K) \to \mathcal{C}(K) : f \to \sum_{i=1}^{n} f(p_i)\varphi_i$$

L'opérateur U_φ est de norme au plus égale à 1 : $\sup_{x\in K} |\sum_{i=1}^{n} f(p_i)\varphi_i(x)| \leq \|f\|$

Faisant varier la partition de l'unité φ, on obtient ainsi une partie équicontinue B de $L(\mathcal{C}(K), \mathcal{C}(K))$ dont tous les éléments sont de rang fini, donc contenue dans $\mathcal{C}(K)' \otimes \mathcal{C}(K)$. Il reste à montrer que l'identité de $\mathcal{C}(K)$ adhère à cet ensemble B pour la topologie de la convergence simple, c'est-à-dire que pour toute fonction $f \in \mathcal{C}(K)$ on peut construire une partition de l'unité φ telle qu'on ait $\|f - \sum_{i=1}^{n} f(p_i)\,\theta_i\| < \varepsilon$

Le procédé est bien connu et consiste à recouvrir l'espace compact K par un nombre fini d'ouverts U_i tels que $x,y \in U_i \Rightarrow |f(x)-f(y)| < \varepsilon$
On choisit alors une partition de l'unité subordonnée à ce recouvremen[t]
et on obtient la formule cherchée :

$$|f(x) - \sum_{i=1}^{n} f(p_i)\,\varphi_i(x)| = |\sum_{i=1}^{n} (f(x)-f(p_i))\,\varphi_i(x)| \leq \varepsilon$$

<u>Proposition 10.3</u> ; <u>Tout espace de Hilbert H est approximant</u>.

L'ensemble de tous les projecteurs orthogonaux de rang fini est équicontinu. Et il est clair que l'identité adhère à cet ensemble pour la topologie de la convergence simple.

<u>Proposition 10. 5</u> : <u>Soit</u> E <u>un e.l.c.s. admettant un système fondamental de voisinages disqués</u>, U, <u>de</u> 0 <u>tels que</u> E_U <u>soit approximant. Alors</u> E <u>est approximant</u>.

Soit K un compact de E. Si E_U est approximant, il existe une application linéaire de rang fini u de E_U dans E_U telle que, pour tout $x \in K$:

$$\|up(x) - p(x)\|_U \leq 1$$

si p est l'application canonique $E \to E_U$. $v = up$ est une application de rang fini de E dans E_U. Nous n'avons donc aucune peine à la remonter en une application de rang fini w de E dans E. On a alors pour tout $x \in K$:

$$\|p(w(x)-x)\|_U = \|up(x)-p(x)\|_U \leq 1$$

et par conséquent $w(x)-x \in U$.

<u>Corollaire 10.5</u> :<u>Tout e.l.c.s. nucléaire est approximant</u> .
En effet, un e.l.c.s. nucléaire admet un système fondamental de voisinages disqués quadratiques.

Proposition 10.6 : Soient E et F deux e.l.c.s. Si E est approximant, $E \otimes F$ est dense dans l'espace des applications linéaires de F' dans E, dont la restriction à toute partie équicontinue de F' est continue pour $\sigma(F',F)$ et la topologie initiale de E, muni de la topologie de la convergence uniforme sur les parties équicontinues de F'.

Il est clair que $E \otimes F$ s'identifie à un sous-espace de l'espace indiqué. Soit u une application de F' dans E satisfaisant à la condition énoncée. Si B est une partie équicontinue de F', $u(B)$ est relativement compacte dans F. Il existe donc une application de rang fini w telle que $x-w(x)$ soit dans un voisinage déterminé de l'origine de F, pour tout $x \in u(B)$.
Ceci montre que, wu, qui appartient à $E \otimes F$ est proche de u.

Si E et F sont deux espaces de Banach, l'espace décrit dans la proposition précédente est $E \varepsilon F$. D'autre part la topologie induite par $E \varepsilon F$ sur $E \otimes F$ est la topologie ε car toutes deux sont la topologie de la convergence uniforme sur les produits de parties équicontinues.

Corollaire 10.7 : Soient E et F deux espaces de Banach. Si E ou F est approximant, alors $E \hat{\hat{\otimes}} F = E \varepsilon F$.

C'est ce corollaire qui justifie l'égalité $\mathcal{C}(K) \varepsilon E = \mathcal{C}(K, E)$

Nous l'avons déjà signalé : on ne connait aucun exemple d'espace non approximant. La conjecture d'approximation est donc que tout e.l.c.s. est approximant. Il suffit pour cela que tout espace de Banach soit approximant. Nous allons donner une autre condition équivalente.

Proposition 10.11 [28] : Soit E un espace de Banach. E est approximant si et seulement si $E \hat{\hat{\otimes}} F = E \varepsilon F$ pour tout sous-espace fermé F de c_o.

La condition nécessaire vient d'être démontrée. Passons à la condition suffisante. La démonstration est basée sur le fait que toute partie compacte d'un espace de Banach est contenue dans l'enveloppe disquée fermée d'une suite qui converge vers 0.

Soit (x_n) une suite qui converge vers 0 et K son enveloppe disquée fermée. (E_K, K) est un disque compact dont nous notons le dual V. L'espace de Banach E_K est donc isométrique au dual V' de V.
A toute forme linéaire $v \in V$, associons la suite $(v(x_n))$: v étant continue sur K, cette suite appartient à c_o. De plus

$$\|v\| = \sup_{x \in K} |v(x)| = \sup_n |v(x_n)|$$

V est donc isométrique à un sous-espace de c_o, ce qui entraine que $E \hat{\hat{\otimes}} V = E \varepsilon V$. Sur K la topologie faible $\sigma(V',V)$ coïncide avec la topologie de E.

Il en résulte que l'injection canonique $E_K = V' \to E$ appartient à $E \varepsilon V$ et est limite uniforme sur K d'opérateurs de rang fini : on peut trouver des $v_i \in V$ et des $e_i \in E$ tels que pour tout $x \in K$.

$$\| x - \sum_{i=1}^{n} \langle x, v_i \rangle e_i \| \leq \varepsilon .$$

La transposée de l'injection canonique $V' \to E$ applique E' dans V et a une image dense. Par conséquent les vecteurs v_i peuvent être approchés par des e_i' appartenant à E', de sorte que sur K, l'identité de E est approchée uniformément par $\sum_i e'_i \otimes e_i \in E' \otimes E$.

On obtient ainsi l'affirmation suivante :

<u>La conjecture d'approximation est vérifiée si et seulement si</u> $E \otimes F$ <u>est dense dans</u> $E \varphi F$ <u>quels que soient les sous-espaces fermés</u> E et F <u>de</u> c_o.

Appliquons le corollaire 9.8 en adoptant pour S et T le compactifié d'Alexandroff de $\mathbb{N}$. Nous voyons que $E \varphi F$ est l'espace des matrices (a_{ij}) appartenant à $c_o(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$ dont les lignes appartiennent à E et les colonnes à F. E F est l'espace des matrices de rang fini qui appartiennent à $E \varphi F$. Dire que la conjecture d'approximation est vraie signifie qu'on peut approcher toute matrice $(a_{ij}) \in c_o(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$ par des matrices $\sum_{r=1}^{k} (u_i^{(r)}) \otimes (v_i^{(r)})$, où les $u^{(r)}$ et $v^{(r)}$ appartiennent aux espaces vectoriels fermés engendrés par les lignes et les colonnes de (a_{ij}). On peut donc approcher (a_{ij})

uniformément par des combinaisons linéaires finies. $\sum_r \lambda_r (a_{ij_r}) \otimes (a_{i_r j})$ de produits tensoriels d'une ligne et d'une colonne de (a_{ij}).
On est ainsi ramené à une des conditions données par Grothendieck 11, comme équivalentes à la conjecture d'approximation :
<u>La conjecture d'approximation est vérifiée si et seulement si toute matrice</u> $(a_{ij}) \in c_o(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$ <u>adhère à l'espace des matrices de rang fini</u> $\sum_k \lambda_k (a_{ij_k}) \otimes (a_{i_k j})$ <u>construites à l'aide de produits tensoriels de lignes et de colonnes de la matrice donnée</u> .

11. <u>Notes</u> :

La théorie des produits tensoriels topologiques est due à R. Schatte et à A. Grothendieck [1 1]. Le produit tensoriel bornologique inductif est la généralisation naturelle du produit tensoriel d'espaces de Banach. Le produit φ est dû à L. Waelbroeck, [28] .

Chapitre 6

NUCLEARITES ET PRODUITS TENSORIELS.

Théorèmes de noyau.

1. Un lemme fondamental.

La nucléarité interviendra dans ce qui suit par l'intermédiaire du lemme suivant, lemme qui généralise le caractère absolument sommant d'un opérateur nucléaire :

Lemme 1.1 : Soient E, F, G trois espaces normés et f une application linéaire continue de E dans F dont le prolongement $\hat{f}$ à $\hat{E}$ est nucléaire. L'application $\tilde{f} = f \otimes \mathrm{id}\, G$ est continue, de $E \otimes_\varepsilon G$ dans $F \otimes_\pi G$.

Exprimons d'abord que $\hat{f}$ est nucléaire :

$$\hat{f} = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \otimes y_n$$

avec $\varphi_n \in E'$, $y_n \in \hat{F}$ et $\sum_n \|\varphi_n\| \, \|y_n\| < +\infty$

Si $u = \sum_{i=1}^{r} x_i \otimes z_i \in E \otimes G$, on a $\tilde{f}(u) = \sum_n y_n \otimes \left(\sum_{i=1}^{r} \langle x_i, \varphi_n \rangle z_i \right)$

et

$$\|\tilde{f}(u)\|_\pi \leqslant \sum_n \|y_n\| \cdot \left\| \sum_{i=1}^{r} \langle x_i, \varphi_n \rangle z_i \right\|$$

$$\leqslant \sum_n \|y_n\| \sup_{\|z'\| \leqslant 1} \left| \sum_{i=1}^{r} \langle x_i, \varphi_n \rangle \langle z_i, z' \rangle \right| \quad (z' \in G')$$

$$\leqslant \sum_n \|y_n\| \cdot \|\varphi_n\| \sup_{\|z'\| \leqslant 1} \sup_{\|x'\| \leqslant 1} \left| \sum_{i=1}^{r} \langle x_i, x' \rangle \langle z_i, z' \rangle \right|$$

$$\leqslant \left(\sum_n \|y_n\| \cdot \|\varphi_n\| \right) \|u\|_\varepsilon$$

2. Un critère de nucléarité pour les espaces localement convexes.

Proposition 2.1 Soient E et F deux e.l.c.s. Si E est nucléaire, on a

$$E \otimes_\varepsilon F = E \otimes_\pi F$$

Si E est nucléaire, à tout voisinage disqué V de o dans E, on peut en associer un autre V' tel que l'application canonique $\hat{E}_{V'} \to \hat{E}_V$ soit nucléaire. Du théorème précédent, on déduit que si W est un voisinage disqué de o dans F, on a les applications continues suivantes :

$$E_{V'} \otimes_\pi F_W \longrightarrow E_{V'} \otimes_\varepsilon F_W \longrightarrow E_V \otimes_\pi F_W \longrightarrow E_V \otimes_\varepsilon F_W$$

On en déduit immédiatement la thèse.

Proposition 2.2. Soit E un e.l.c.s., et I un ensemble d'indices. On a $l^1(I) \otimes_\pi E = l^1(I) \otimes E$ si et seulement les e.l.c.s. $l^1(I,E)$ et $l^1((I,E))$ sont égaux.

C'est assez évident : d'une part, si $l^1(I,E) = l^1((I,E))$ on a

$l^1(I) \otimes_\pi E = l^1(I) \otimes_\varepsilon E$ puisque ces espaces sont les sous-espaces des précédents formés des familles de rang fini (Prop. 5.3.6).
D'autre part, si $l^1(I) \otimes_\pi E = l^1(I) \otimes_\varepsilon E$, alors leurs complètés $l^1(I,\hat{E})$ et $l^1((I,\hat{E}))$ sont égaux. La thèse se déduit alors de ce que $l^1(I,E) = l^1(I,\hat{E}) \cap E^I$ et $l^1((I,E)) = l^1((I,\hat{E})) \cap E^I$

Compte tenu du théorème 4.2.5., le théorème suivant est un corollaire immédiat des propositions précédentes:

Théorème 2.3. Un e.l.c.s. E est nucléaire si et seulement si quel que soit l'e.l.c.s F, on a $E \hat{\otimes}_\pi F = E \otimes_\varepsilon F$

Corollaire 2.4. : Si E et F sont deux e.l.c.s. nucléaires, alors $E \otimes_\pi F$ est nucléaire.

Corollaire 2.5 : Soient E et F deux e.l.c.s. Si E est nucléaire, et si G est un sous-espace de F, alors $E \otimes_\pi G$ est un sous-espace de $E \otimes_\pi F$
En effet, $E \otimes_\pi G = E \otimes_\varepsilon G$ est un sous-espace de $E \otimes_\varepsilon F = E \otimes_\pi F$ (prop. 5.6.8.)

3. Un critère de nucléarité pour les espaces bornologiques convexes.

Comme on peut s'y attendre, pour les e.b.c.s., les résultats sont analogues aux précédents :

Proposition 3.1 : Soient X et Y deux e.b.c.s. Si X est nucléaire, on a $X \otimes_\varepsilon Y = X \otimes_\pi Y$

La démonstration est duale de celle de la proposition 2.1 : à tout disque borné B de X, on en associe un autre C tel que $X_B \longrightarrow X_C$ soit nucléaire. Alors on a les applications bornées :

$$X_B \otimes_\pi Y_A \to X_B \otimes_\varepsilon Y_A \longrightarrow X_C \otimes_\pi Y_A \longrightarrow X_C \otimes_\varepsilon Y_A$$

Et la thèse s'en déduit.

Proposition 3.2 : Soient X un e.b.c.s , et I un ensemble d'indices. On a $l^1(I) \otimes_\pi X = l^1(I) \otimes_\varepsilon X$ si et seulement si les e.b.c.s $l^1(I,X)$ et $l^1((I,X))$ sont égaux.

Si l'espace X est un sous-espace bornologique de son complété $\hat{X}$, la démonstration se calque sur celle de la proposition 2.2. Si ce n'est pas le cas, nous ne pouvons plus affirmer que $l^1(I,X) = l^1(I,\hat{X}) \cap X^I$ ni que $l^1((I,X)) = l^1((I,\hat{X})) \cap X^I$.

Il convient alors de considérer l'injection canonique de $l^1(I,X)$ dans $l^1((I,X))$ et montrer que tout borné B de $l^1((I,X))$ est inclus et borné dans $l^1(I,X)$. Soit A un disque borné de X tel que B soit borné dans $l^1((I,X_A))$. B est donc inclus à l'adhérence d'une boule U de $l^1(I) \otimes_\varepsilon X_A$. Par hypothèse, U est borné dans $l^1(I) \otimes_\pi X$. Il existe donc un borné A' de X tel que U soit borné dans $l^1(I) \otimes_\pi X_{A'}$. On dispose alors d'une injection canonique bornée $\mu : l^1(I) \otimes_\varepsilon X_A \longrightarrow l^1(I) \otimes_\pi X_{A'}$. Prolongeons-la aux complétés : $\hat{\mu}$ applique B sur un borné de $l^1(I) \hat{\otimes} \hat{X}_{A'} = l^1(I,\hat{X}_{A'})$. Mais tous les éléments de B sont des familles de vecteurs de X_A donc aussi de $X_{A'}$, (car en considérant l'image par μ des familles dont un seul élément est non nul, on voit que A est absorbé par A'). Par conséquent B est borné dans $l^1(I,X_{A'})$, donc aussi dans $l^1(I,X)$.

Le théorème suivant est tout aussi immédiat que le théorème 2.3 :

Théorème 3.3 : Un e.b.c.s. X est nucléaire si et seulement si quel que soit l'e.b.c.s. Y, on a $X \otimes_\pi Y = X \otimes_\varepsilon Y$

Corollaire 3.4 : Si X et Y sont deux e.b.c.s. nucléaires, alors $X \otimes_\pi Y$ est nucléaire.

Corollaire 3.5 : Soient X et Y deux e.b.c.s. Si X est nucléaire, et si Z est un sous-espace de Y, alors $X \otimes_\pi Z$ est un sous-espace de $X \otimes_\pi Y$.

4. Espaces d'applications linéaires.

La fin de ce chapitre sera consacrée aux théorèmes classiquement appelés "théorèmes de noyau". Dans la proposition suivante, on désigne par E'_b le dual fort de E et par $L_\varepsilon(E'_b, F)$ l'espace des applications linéaires continues de E'_b dans F muni de la topologie de la convergence uniforme sur les parties équicontinues de E'. C'est un sous-espace topologique de $L_b(E', F)$. (Déf.5.4.2)

Proposition 4.1 : Soient E et F deux e.l.c.s. complets. Si E est approximant et si tout borné de E est relativement compact, alors $E \hat{\hat{\otimes}} F \cong L_\varepsilon(E'_b, F)$

L'immersion de $E \otimes F$ dans $L(E'_b, F)$ applique évidemment le tenseur $e \otimes f$ sur l'application $e' \longrightarrow \langle e, e' \rangle f$. Pour montrer que $E \otimes F$ est dense dans $L_\varepsilon(E'_b, F)$, choisissons un voisinage U de o dans F, une partie équicontinue B de E' et une application $u \in L(E'_b, F)$. $u^{-1}(U) \supseteq V$ est un voisinage de o dans E'_b. Puisque tout borné de E est relativement compact, on peut supposer que V est le polaire d'un compact K de E. D'autre part, l'équicontinu B est le polaire d'un voisinage W de $o \in E$. Puisque E est approximant, on peut trouver un opérateur de rang fini v de E dans E tel que $1 - v$ applique K dans W. Alors l'opérateur transposé $1 - v'$ applique $W^\circ = B$ dans $K^\circ = U$. Il en résulte que $u - uv'$ applique B dans V, ce qui montre que u adhère à $E \otimes F$ dans $L_\varepsilon(E'_b, F)$. Il est de plus clair que cet espace induit sur

$E \otimes F$ la topologie ε.

<u>Théorème 4.2</u> : <u>Soient</u> E , F <u>deux e.l.c.s. complets. Si</u> E <u>est nucléaire, on a</u>

$$E \hat{\otimes} F \cong L_{\varepsilon}(E'_b , F) = L_b(E' , F)$$

La première partie résulte immédiatement de la proposition précédente. Il reste à montrer que $L(E'_b , F) = L(E', F)$. Une application linéaire bornée de E' dans F est continue de $\mathcal{T}E'$ dans F.

(Rappelons que $\mathcal{T}E'$ est l'e.l.c.s. bornologique associé à l'e.b.c.s. E').

La topologie de $\mathcal{T}E'$ est toujours plus fine que celle de E'_b.
D'autre part, si E est b-réflexif, ce qui est vrai lorsque E est nucléaire (4.1.8.), on a $E = E'^{x} = (\mathcal{T}E')'$; la topologie de $\mathcal{T}E'$ est donc compatible avec la dualité entre E et E' , ce qui entraîne qu'elle est moins fine que la topologie forte. On a donc $\mathcal{T}E' = E'_b$.
et $L_{\varepsilon}(E'_b , F) = L_{\varepsilon}(\mathcal{T}E', F) = L_b(E', F)$.

Tout e.b.c.s. nucléaire complet et t-séparé étant le dual d'un e.l.c.s. nucléaire b-réflexif, le théorème 4.2 peut s'énoncer sous la forme suivante :

<u>Théorème 4.3</u> :<u>Soient</u> X <u>un e.b.c.s. complet, nucléaire et t-séparé</u>, <u>et</u> F <u>un e.l.c.s. complet. Alors</u> :

$$X^{x} \hat{\otimes} F \cong L_b(X, F)$$

Un cas particulier du théorème 4.3 est celui où X est l'e.b.c.s. topologique associé à un e.l.c.s. E : $X = \mathcal{B}E$. On obtient alors une représentation de $L_b(E, F)$ (espace des applications linéaires continues de E dans F muni de la topologie de la convergence uniforme sur les parties bornées de E) comme sous-espace d'un produit tensoriel : $(\mathcal{B}E)^{x} \hat{\otimes} F \supset L_b(E, F)$ (si $\mathcal{B}E$ est nucléaire).
Le lemme suivant nous fournira un autre énoncé :

<u>Lemme 4.4</u> : <u>Soit</u> E <u>un e.l.c.s. complet. Les affirmations suivantes sont équivalentes</u> :

(a) E <u>est tonnelé et</u> E'_b <u>est nucléaire et complet.</u>

(b) E <u>est bornologique et</u> $\mathcal{B}E$ <u>est un e.b.c.s. nucléaire</u>.

On sait déjà que $\mathcal{B}E$ est un e.b.c.s. nucléaire si et seulement si E'_b est un e.l.c.s. nucléaire (3.3.9)
Supposons maintenant de plus E tonnelé et E'_b complet. Puisque $\mathcal{B}E$ est nucléaire, tout disque borné de E est inclus à l'enveloppe disquée fermée d'une suite convergeant bornologiquement vers o.
La topologie de E'_b coïncide donc avec la topologie de la convergence uniforme sur les suites qui convergent bornologiquement vers o.
Celle-ci est donc complète. On déduit alors d'un résultat de KÖTHE, [15] , en tenant compte de ce qu'un espace tonnelé a la topologie de MACKEY, que E est bornologique.
Supposons que E est bornologique. Alors c'est un fait connu que E'_b est complet. De plus, E est complet et quasi-tonnelé, donc tonnelé.

<u>Proposition 4.5</u> : <u>Soient</u> E <u>et</u> F <u>deux e.l.c.s.complets. Si</u> E <u>est tonnelé et</u> E'_b <u>nucléaire et complet, alors</u>

$$E'_b \hat{\otimes} F \cong L_b(E, F)$$

D'après le théorème 4.3, on a $(\mathbb{B} E)^{\times} \hat{\hat{\otimes}} F = L_b(\mathbb{B} E, F)$ puisque $\mathbb{B} E$ est nucléaire. Mais E étant bornologique, on a aussi $(\mathbb{B} E)^{\times} = E'_b$ et $L_b(\mathbb{B} E, F) = L_b(E, F)$

5. <u>Espaces d'applications bilinéaires.</u>

<u>Proposition 5.1</u> : <u>Soient</u> E <u>et</u> F <u>deux e.l.c.s. complets. Si</u> E <u>est nucléaire, on a les isomorphismes vectoriels-bornologiques.</u>

$$E' \hat{\otimes} F' \cong B(E, F) \cong (E \hat{\otimes} F)'$$

(B(E, F) <u>est l'espace des formes bilinéaires continues sur E x F, muni de la bornologie équicontinue.</u>)

Le deuxième isomorphisme indiqué dans la thèse est évident. Prouvons le premier. Si H est une partie équicontinue de B(E, F), on peut trouver un voisinage disqué U de o dans E et un voisinage disqué V de o dans F tels que H induise un ensemble équicontinu de formes bilinéaires continues sur $\hat{E}_U \times \hat{F}_V$, ou encore un ensemble

équicontinu d'applications linéaires continues de $\hat{E}_U$ dans $\hat{F}'_V$.
Soit W un voisinage disqué de o dans E tel que l'application canonique $\hat{E}_W \to \hat{E}_U$ soit nucléaire. Alors H définit un ensemble équicontinu d'applications nucléaires de $\hat{E}_W$ dans $\hat{F}'_V$, c-à-d une partie bornée de $(E_W)' \otimes_{\pi} (F_V)' = E'_{W°} \otimes_{\pi} F'_{V°}$. L'affirmation réciproque étant tout aussi immédiate, la thèse est démontrée.

<u>Corollaire 5.2</u> : <u>Si</u> X <u>est un e.b.c.s. complet nucléaire et t-séparé, et si</u> F <u>est un e.l.c.s. complet, alors</u> $X \hat{\otimes} F' \cong B(X^{\times}, F)$

En effet, $X = X^{\times\prime}$, et $X^{\times}$ est nucléaire.

6. <u>Propriétés particulières aux espaces de FRECHET.</u>

<u>Proposition 6.1</u>: <u>Soient</u> E <u>et</u> F <u>deux espaces de FRECHET. Si</u> E <u>est nucléaire, on a</u> $\mathbb{B}(E \hat{\otimes} F) = \mathbb{B} E \hat{\otimes} \mathbb{B} F$.

Si A_1 est un borné de E, et A_2 un borné de F, on sait que $A_1 \otimes A_2$ est borné dans $E \hat{\otimes} F$. Il suffit donc de montrer que tout borné M de $E \hat{\otimes} F$ est inclus et borné dans un espace du type $E_{A_1} \hat{\otimes} F_{A_2}$, où A_1 est un disque complétant de E et A_2 un disque complétant de F.

Utilisons l'isomorphisme $E \hat{\otimes} F = L_b(E', F) \simeq L(E'_b, F)$ (th. 4. 2).
L'espace E'_b étant du type DF et F étant un espace de FRECHET,

Nous pouvons appliquer un résultat pour lequel nous renvoyons à GROTHENDIECK, [12] : A tout ensemble équicontinu M d'applications linéaires de E'_b dans F, on peut associer un voisinage U de o dans E'_b tel que $M(U)$ soit borné dans F.

Ici, nous partons d'une partie M qui est bornée dans $L_\varepsilon(E'_b, F)$. On montre d'abord qu'elle est équicontinue. Il est clair que si V est un voisinage disqué fermé de o dans F, $M^{-1}(V)$ est un disque fermé de E'_b. De plus $M^{-1}(V)$ est absorbant. En effet, si $x \in E'_b$, M étant borné dans $L_\varepsilon(E'_b, F)$, il existe un $\lambda > o$ tel que $M(x) \subset \lambda V$, c-à-d $x \in \lambda M^{-1}(V)$. L'espace E étant réflexif, E'_b est tonnelé. Donc $M^{-1}(V)$ est un voisinage de l'origine de E'_b, et M est équicontinu.

Appliquant le résultat rappelé ci-dessus, nous avons un voisinage disqué U de o dans E'_b tel que $M(U)$ soit borné dans F. Désignons par A_2 l'enveloppe disquée fermée de $M(U)$. L'ensemble M peut à présent être considéré comme étant un ensemble équicontinu d'applications linéaires de E'_b dans l'espace de BANACH F_{A_2}. Si V est un voisinage disqué de o dans E'_b, tel que l'application canonique $\hat{E}'_V \longrightarrow \hat{E}'_U$ soit nucléaire, M est un ensemble équicontinu d'applications nucléaires de $\hat{E}'_V$ dans F_{A_2}, c-à-d une partie bornée de $(E'_V)' \hat{\otimes} F_{A_2}$. Or $(E'_V)' = E_{V^\circ}$. Il reste à poser $A_1 = V^\circ$, et le théorème est démontré.

<u>Proposition 6.2</u> : <u>Soient</u> E, F <u>deux espaces de FRECHET. Si</u> E <u>est</u>

<u>nucléaire, on a</u>

$$E'_b \hat{\otimes} F'_b \cong B_b(E, F) \cong (E \hat{\otimes} F)'_b$$

<u>où</u> $B_b(E, F)$ <u>désigne l'espace</u> $B(E, F)$ <u>muni de la topologie de la convergence uniforme sur les produits de bornés.</u>

Appliquons la proposition 4.5 :

$$E'_b \hat{\otimes} F'_b \cong L_b(E, F'_b)$$

Mais à toute application linéaire continue de E dans F'_b correspond une forme bilinéaire sur $E \times F$ qui est continue d'après le théorème de BANACH-STEINHAUS. On obtient ainsi un isomorphisme $E'_b \hat{\otimes} F'_b = B_b(E, F)$ qui est clairement vectoriel et topologique. Quant à l'isomorphisme de $B_b(E, F)$ sur $(E \hat{\otimes} F)'_b$, il résulte immédiatement de la proposition précédente.

7. <u>Le théorème des noyaux de SCHWARTZ</u>.

Le théorème des noyaux a été initialement démontré par L. SCHWARTZ dans le cas concret des espaces de fonctions indéfiniment dérivables. Il affirme que certaines applications linéaires sont définies par des noyaux. (le mot "noyau" est à l'origine du mot "nucléaire".)

Nous en donnerons l'énoncé suivant :

<u>Théorème 7.1</u> : <u>Si</u> $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ <u>désigne l'espace des fonctions indéfiniment dérivables sur</u> $\mathbb{R}^n$ <u>à support compact, muni de sa topologie limite inductive naturelle, et si</u> $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ <u>est l'espace des distributions sur</u> $\mathbb{R}^n$, <u>muni de sa topologie forte alors</u>

$$\mathcal{D}'(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n) = \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) \hat{\otimes} \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) = L_b(\mathcal{D}(\mathbb{R}^n), \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n))$$

Montrons d'abord que les espaces $\mathcal{D}'$ sont nucléaires. On a vu au paragraphe 4.6 que $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ est nucléaire. L'espace $\mathcal{D}_k(\mathbb{R}^n)$ des fonctions indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}^n$ à support inclus au compact K en est un sous-espace et est donc également nucléaire. De plus $\mathcal{D}_k(\mathbb{R}^n)$ est un espace de FRECHET, de sorte que son dual est nucléaire. Enfin, $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ est une limite projective de tels duals.

De la proposition 4.5 on déduit alors le second isomorphisme. Quant au premier isomorphisme nous en laisserons la vérification au lecteur. (voir par exemple [27] p. 531).

Ce théorème montre notamment que toute forme bilinéaire continue sur $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$ est définie par une distribution sur $\mathbb{R}^{n+m}$

8. <u>Notes</u> :

La plupart des résultats de ce chapitre sont dûs à GROTHENDIECK, [11] ou à L. SCHWARTZ [26] . Certaines démonstrations sont nouvelles.

CHAPITRE 7

INTRODUCTION A LA THEORIE SPECTRALE DANS LES ESPACES NUCLEAIRES

1. T R O Ï K I

Dans tout ce chapitre, la lettre H désignera un espace de Hilbert complexe, dont le produit scalaire sera noté $(x|y)$.

<u>Définition 1.1</u> : <u>On appelle troïka toute suite</u> $E \xrightarrow{i} H \xrightarrow{i'} E'$, <u>où</u> E <u>est un e.l.c.s</u> , H <u>un espace de Hilbert</u>, i <u>une application linéaire continue, injective et nucléaire de</u> E <u>sur un sous-espace dense de</u> H , <u>et où</u> i' <u>est l'application transposée de</u> i.

Cette notion a été introduite par I. Gelfand , [9].

Il est à noter que i' est une application antilinéaire, bornée de H dans E' , caractérisée par la formule $(ie|x) = \langle e, i'x \rangle$, si $e \in E$ et $x \in H$. De plus i' est une injection de H sur un sous-espace faiblement dense de E'.

Remarquons aussi que, i étant une injection, il existe au moins une norme continue sur E, ce qui entraîne qu'il est possible de définir la topologie de E au moyen d'une famille de normes.

<u>Proposition 1.2</u> : <u>Si</u> $E \xrightarrow{i} H \xrightarrow{i'} E'$ <u>est une troïka, l'espace de Hilbert</u> H <u>est séparable.</u>

Ecrivons $i = \sum_n \lambda_n e'_n \otimes x_n$. Puisque $i(E)$ est dense dans H, il est clair que la suite (x_n) est totale dans H.

Les troïki apparaissent naturellement en analyse fonctionnelle. Il suffit de penser aux nombreux exemples d'espaces nucléaires, tels que $\mathcal{D}$, $\mathcal{E}$, ..., qui sont denses dans des espaces de Hilbert. En fait, on dispose d'une troïka chaque fois qu'on en a besoin:

<u>Théorème 1.3 (Foïas, [7])</u> : <u>Soit</u> H <u>un espace de Hilbert séparable, et</u> B <u>un opérateur fermé, de domaine dense dans</u> H. <u>Si</u> B <u>laisse invariant un sous-espace dense</u> D <u>de</u> H, <u>on peut insérer</u> H <u>dans une troïka</u> $E \xrightarrow{i} H \xrightarrow{i'} E'$ <u>telle que</u> E <u>soit inclus au domaine de</u> B <u>et invariant par</u> B, <u>la restriction de</u> B <u>à</u> E <u>étant un opérateur continu pour la topologie de</u> E.

En fait, l'espace E que nous allons construire sera même un espace de Fréchet nucléaire.

On construit d'abord un sous-espace vectoriel F de H, qui est dense dans H, invariant par B et de dimension algébrique dénombrable. Dans ce but, on choisit une suite h_n totale dans

D, donc aussi dans H, et on désigne par F le sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs du type $B^n h_m$ $(n,m \in \mathbb{N})$. F est dense dans H puisqu'il contient la suite (h_m) et il est visiblement invariant par B et de dimension algébrique dénombrable. On choisit alors une base algébrique (dénombrable), (e_n) de F, qui est orthonormée dans H, en appliquant le procédé de Gram - Schmidt à une base quelconque de F.

Tenant compte de ce que tout $x \in F$ s'écrit $x = \sum_k \xi_k e_k$, où presque tous les ξ_k sont nuls, on définit sur F une suite de normes $\|\cdot\|_n$ par les formules suivantes :

$$\|x\|_0^2 = \|x\|_H^2$$

$$\|x\|_n^2 = \|Bx\|_{n-1}^2 + \sum_k |\xi_k|^2 \alpha_{nk}$$

où les α_{nk} sont des nombres positifs à préciser dans la suite de la démonstration. On munit F de la topologie définie par ces normes. Il est d'abord clair que la restriction de B à F est continue : $\|Bx\|_{n-1} \leqslant \|x\|_n$.

Si nous supposons $\alpha_{1k} \geqslant 1$ et $\alpha_{nk} \geqslant \alpha_{n-1,k}$, on a de plus $\|x\|_n \geqslant \|x\|_{n-1}$.

En effet :

$$\|x\|_1^2 = \|Bx\|_0^2 + \sum_k |\xi_k|^2 \alpha_{1k} \geq \sum_k |\xi_k|^2 = \|x\|_0^2$$

et

$$\|x\|_n^2 = \|Bx\|_{n-1}^2 + \sum_k |\xi_k|^2 \alpha_{nk} \geq \|Bx\|_{n-2}^2 + \sum_k |\xi_k|^2 \alpha_{n-1,k} = \|x\|_{n-1}^2$$

Cherchons maintenant des conditions sur les α_{nk}, telles que les applications $F_{n+1} \to F_n$ soient nucléaires (où F_n est l'espace F muni de la norme d'indice n).

On a $\|e_k\|_n^2 = \|Be_k\|_{n-1}^2 + \alpha_{nk}$. Donc, en supposant $\alpha_{nk} \geq \|Be_k\|_{n-1}^2$ on aura $\|e_k\|_n \leq \sqrt{2\alpha_{nk}}$

On a aussi $|\xi_k|^2 \leq \frac{1}{\alpha_{nk}} \|x\|_n^2$. Donc la forme linéaire $e'_k : x \to \xi_k$ est continue sur F_n, et $\|e'_k\|_n \leq (\alpha_{nk})^{-1/2}$

L'application identique de F_{n+1} dans F_n s'écrit sous la forme $\sum_k e'_k \otimes e_k$, et on a

$$\sum_k \|e'_k\|_{n+1} \cdot \|e_k\| \leq 2 \sum_k \sqrt{\frac{\alpha_{nk}}{\alpha_{n+1,k}}}$$

On choisira donc les α_{nk} de façon que cette série soit convergente, par exemple : $\alpha_{n+1,k} \geq k^4 \alpha_{n,k}$.

Ainsi F est un espace nucléaire dès qu'on a $\alpha_{1k} \geq 1$, $\alpha_{nk} \geq \|Be_k\|_{n-1}^2$ et $\alpha_{nk} \geq k^4 \alpha_{n-1,k}$. Ces conditions sont visiblement compatibles.

Désignons par E le complété de l'espace F. E est encore un espace nucléaire, et B se prolonge en un opérateur continu B_1 de E. Il reste à montrer que E s'identifie à un sous-espace vectoriel de H, et B_1 à la restriction de B à ce sous-espace.

Notons E_n l'espace de Banach complété de F_n. L'injection canonique de F_n dans H se prolonge en une application μ_n de E_n dans H, puisque $\|x\|_0 \leq \|x\|_n$. D'après la définition de la norme de F_n, tout élément x de E_n s'écrit $x = \sum_1^\infty \xi_k e_k$, avec $\sum_1^\infty |\xi_k|^2 \alpha_{nk} < \infty$ et $\|x\|_n^2 = \|Bx\|_{n-1}^2 + \sum_1^\infty |\xi_k|^2 \alpha_{nk}$. Mais on a aussi $\mu_n(x) = \sum_1^\infty \xi_k e_k$ dans H. Par conséquent $\mu_n(x) = 0 \Rightarrow \xi_k = 0 \Rightarrow x = 0$. L'application μ_n est injective, l'espace E_n s'identifie à un sous-espace vectoriel de H. Quant à l'espace E, il s'identifie à l'intersection des E_n, donc aussi à un sous-espace vectoriel dense de H.

Montrons enfin que si $x \in E$, alors x appartient au domaine de B et $Ex = B_1 x$:

$$x \in E \Rightarrow x = \lim_n x_n \text{ (dans F) et } B_1 x = \lim_n B x_n \text{ (dans F)}$$

$$\Rightarrow x = \lim_n x_n \text{ (dans H) et } B_1 x = \lim_n B x_n \text{ (dans H)}$$

La thèse se déduit alors de ce que l'opérateur B est fermé.

c.q.f.d.

2. OPERATEURS PROPRES

Considérons une troïka $E \xrightarrow{i} H \rightarrow E'$ et une sous-C^* algèbre commutative unifère, A, de l'algèbre $L(H)$ des transformations linéaires continues de H. Nous supposerons que tout opérateur $T \in A$ laisse E stable et que la restriction de T à E est continue pour la topologie de E. Notre but est de représenter les éléments de A au moyen des vecteurs propres dans E' des opérateurs transposés. Nous noterons $\hat{A}$ le spectre de A et $\hat{T}$ la transformée de Gelfand de $T \in A$. Nous introduirons la définition suivante :

Définition 2.1 : Un opérateur $U \in L(E,E')$ est appelé un opérateur propre de la C^*- Algèbre A, de valeur propre $\chi \in \hat{A}$ si et seulement si quel que soit l'opérateur $T \in A$, on a :

$$U\,T = \hat{T}(\chi)\,U.$$

Rappelons que, d'après la définition 5.5.2, on a $U \in L(E,E')$ si U applique un voisinage de $0 \in E$ dans une partie équicontinue de E'.

Par transposition, on voit que la relation $U\,T = \hat{T}(\chi)\,U$ signifie que $U'(\varphi)$ est un vecteur propre de T', de valeur propre $\hat{T}(\chi)$ quel que soit $\varphi \in E'^{\times}$.

Notons aussi que si la forme sesquilinéaire $\langle e, U f \rangle$ est à symétrie hermitienne, sur E, alors les relations $U\,T = \hat{T}(\chi)\,U$ et $T'U = \overline{\hat{T}}(\chi)\,U$ sont équivalentes.
En effet

$$\langle e, T'\,U f \rangle = \overline{\hat{T}(\chi)} \langle e, U f \rangle \Leftrightarrow \langle Te, U f \rangle = \overline{\hat{T}(\chi)} \langle e, U f \rangle$$
$$\Leftrightarrow \overline{\langle f, UTe \rangle} = \overline{\hat{T}(\chi)}\; \overline{\langle f, U e \rangle}$$
$$\Leftrightarrow \langle f, U\,Te \rangle = \hat{T}(\chi) \langle f, U e \rangle$$

Ainsi, dans ce cas les $U(x)$, $x \in E$, sont également des vecteurs propres de T', mais cette fois de valeur propre $\overline{\hat{T}(\chi)}$.

3. LE THEOREME DE FOIAS

Théorème 3.1. (Foïas, [6]) : Soient $E \xrightarrow{i} H \xrightarrow{i'} E'$ une troïka et A une sous-C^*-algèbre commutative unifère de $L(H)$ dont tous les éléments induisent, par restriction, une transformation linéaire continue de E. Il existe une mesure de Radon positive bornée μ sur $\hat{A}$ et une famille $(U_\chi)_{\chi \in \hat{A}}$ d'opérateurs propres de A, U_χ étant de valeur propre χ, telles que, quels que soient $e, f \in E$:

$$(e|f) = \int_{\hat{A}} < e, U_\chi f > \mu(d\chi)$$

On sait qu'il est possible d'associer à A une mesure spectrale (Appendice 1, Définition 4.1) E telle que :

$$\forall T \in A : T = \int_{\hat{A}} \hat{T}(\chi)\, E(d\chi) \qquad (1)$$

Soit V un voisinage quadratique de $0 \in E$ tel que i se factorise à travers une application nucléaire (encore notée i) de $\hat{E}_V$ dans H. i' applique alors H dans E'_{V°.

Une mesure spectrale telle que E est dénombrablement additive pour la topologie forte, mais pas nécessairement pour la topologie de la norme.

Par contre, la fonction (définie sur tribu borélienne de $\hat{A}$) $\sigma \to i'E(\sigma)i$ est une mesure sur $\hat{A}$, à valeurs dans $L(\hat{E}_V, E'_{V^\circ})$ (*); dénombrablement additive pour la topologie de la norme. Pour le démontrer, considérons la variation totale de $i\,E(\sigma)\,i$

$$\mu(\sigma) = \sup \sum_k \| i'E(\sigma_k)i \| \qquad (2)$$

où (σ_k) parcourt l'ensemble des partitions finies de σ. Il suffit de montrer que μ est une fonction bornée sur la tribu borélienne de $\hat{A}$.

En effet, si $\mu(\sigma) \leqslant A$, et si (σ_n) est une suite de boréliens deux à deux disjoints, on a $\sum_n \| i'E(\sigma_n)i \| \leqslant A$, ce qui entraine que la série $\sum_n i'E(\sigma_n)i$ est convergente dans $L(\hat{E}_V, E'_{V^\circ})$. Elle ne peut converger que vers $i'E(\bigcup_n \sigma_n)i$ puisqu'on sait qu'elle converge déjà faiblement vers cet opérateur.

Démontrons donc que μ est bornée. L'opérateur i étant nucléaire, nous pouvons écrire

$$i = \sum_n \bar{e}_n \otimes h_n \text{ , avec } \bar{e}_n \in \hat{E}_V \text{ , } h_n \in H$$

(*) Cette notation désigne ici l'espace de Banach des applications antilinéaires continues de l'espace de Hilbert $\hat{E}_V$ dans son dual E'_{V°.

et $\sum_n \|e_n\|_V \cdot \|h_n\| = k < +\infty$. On a alors, quels que soient $e, f \in \hat{E}_V$:

$$< e, i'E(\sigma) i f > = (ie|E(\sigma)\ i f) = \sum_n \sum_m (e|e_n)_V \overline{(f|e_m)_V} (h_n|E(\sigma)h_m) \tag{3}$$

Donc $\|i'E(\sigma)i\| \leqslant \sum_n \sum_m \|e_n\|_V \cdot \|e_m\|_V \cdot |(h_n|E(\sigma)h_m)|$ (4)

Et si (σ_α) est une partition finie de σ :

$$\sum_\alpha \|i'E(\sigma_\alpha)i\| \leqslant \sum_n \sum_m \|e_n\|_V \cdot \|e_m\|_V \cdot \sum_\alpha |(h_n|E(\sigma_\alpha)h_m)|$$

Nous appliquons maintenant l'inégalité de Cauchy-Schwartz une première fois à la forme sesquilinéaire hermitienne positive $(h|E(\sigma_\alpha)\ k)$:

$$|(h_n|E(\sigma_\alpha)h_m)| \leqslant \sqrt{(h_n|E(\sigma_\alpha)h_n)}\ \sqrt{(h_m|E(\sigma_\alpha)h_m)} \tag{6}$$

une deuxième fois au produit scalaire usuel d'un espace de dimension finie :

$$\sum_\alpha \sqrt{(h_n|E(\sigma_\alpha)h_n)} \cdot \sqrt{(h_m|E(\sigma_\alpha)h_m)} \leqslant \sqrt{\sum_\alpha (h_n|E(\sigma_\alpha)h_n)}\ \sqrt{\sum_\alpha (h_m|E(\sigma_\alpha)h_m)} \tag{7}$$

On a aussi $\Sigma(h_n|E(\sigma)h_n) = (h_n\ E(\sigma)\ h_n) \leqslant \|h_n\|^2$

Tenant compte de (6) , (7) et (8) , (5) devient :

$$\sum_\alpha \|i'E(\sigma_\alpha)i\| \leqslant \sum_n \sum_m \|e_n\|_V \|e_m\|_V \|h_n\| \cdot \|h_m\| = k^2 \tag{9}$$

Ceci montre précisément que μ est bornée.

Le fait que $i'E\ i$ soit dénombrablement additive pour la topologie de la norme permet de montrer que la fonction μ est elle-même dénombrablement additive. Ainsi μ est une mesure de Radon positive (bornée) sur $\hat{A}$.

De plus chacune des mesures $< e, i'E(\sigma)\ i\ f > = (ie|E(\sigma)\ if)$ est absolument continue par rapport à μ. En effet :

$$|< e, i'\ E\ (\sigma)\ i\ f >| \leqslant \|i'\ E(\sigma)\ i\|\ \|e\|_V\ \|f\|_V \tag{10}$$

d'où $$|< e, i'\ E\ (\sigma)\ i\ f >| \leqslant \mu\ (\sigma) \|e\|_V\ \|f\|_V \tag{11}$$

On peut donc associer à e et f une fonction $U_{e,f} \in L^1\ (\hat{A}, \mu)$ telle que

$$< e, i'\ E(\sigma)\ i\ f > = (ie\ |\ E\ (\sigma)\ i\ f\ ) = \int_\sigma U_{e\ f}(\chi)\mu(d\chi) \tag{12}$$

Comme $E\ (\hat{A}) = I$, on a

$$(i\ e\ |\ i\ f) = \int_{\hat{A}} U_{e.f}(\chi)\ \mu\ (d\chi) \tag{13}$$

Ce qui nous rapproche de la thèse. De la relation (10) on déduit que la variation totale de la mesure complexe $< e, i'\ E\ i\ f >$, c-à-d la mesure $|\ U_{e,f}| \cdot \mu$ est inférieure

(dans l'espace des mesures) à la mesure $\|e\|_V \, \|f\|_V . \mu$.
On a donc :

$$|U_{e,f}(\chi)| \leqslant \|e\|_V \, \|f\|_V \qquad \mu.pp \qquad (14)$$

On modifiera à présent les fonctions $U_{e,f}$ sur un ensemble de mesure nulle de façon que la relation (14) soit valable partout et que de plus, si χ est fixé, $U_{e,f}(\chi)$ soit une forme sesquilinéaire en le couple (e,f). Le procédé est maintenant classique et utilise le fait que l'espace de Hilbert $\hat{E}_V$ est séparable (si $i = \sum_n \overline{e}_n \otimes h_n$, aucun vecteur de E_V n'est orthogonal à tous les e_n, puisque i est une injection. Ainsi les e_n engendrent $\hat{E}_V$)

On commence par remplacer $U_{e,f}(\chi)$ par o lorsque χ ne vérifie pas (14) . La relation (13) subsiste. Ensuite on choisit un ensemble E_o dénombrable dense dans $\hat{E}_V$. A toute paire de relations $e = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2$, $f = \beta_1 f_1 + \beta_2 f_2$ à coefficients rationnels complexes entre éléments de E_o, correspond un ensemble μ-négligeable à l'extérieur duquel on a

$$U_{e,f}(\chi) = \alpha_1 \overline{\beta}_1 \; U_{e_1,f_1}(\chi) + \alpha_1 \overline{\beta}_2 \; U_{e_1,f_2}(\chi) + \alpha_2 \overline{\beta}_1 \; U_{e_2,f_1}(\chi)$$

$$+ \alpha_2 \, \beta_2 \; U_{e_2,f_2}(\chi) \qquad (15)$$

En effet $U_{e,f}(\chi)$ est la densité par rapport à μ de la mesure $< i\, e \mid E(\sigma)\, i\, f >$ et celle-ci est sesquilinéaire en (e,f). Comme il n'existe qu'une infinité dénombrable de telles relations entre éléments de E_o, il existe un ensemble μ-négligeable N tel que (15) soit valable pour $\chi \notin N$ quels que soient $e, e_1, f_1, e_2, f_2 \in E_o$ et $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{Q} + i\,\mathbb{Q}$. On remplace alors $U_{e,f}(\chi)$ par o pour tout e et tout f lorsque $\chi \in N$. La restriction de $U_{e,f}(\chi)$ à $E_o \times E_o$ est sesquilinéaire (pour des coefficients rationnels) et continue. On la prolonge par continuité à $E \times E$, obtenant ainsi sur $E \times E$ une forme sesquilinéaire continue $U^1_{e,f}(\chi)$, qui pour tout e et tout f est d'après (14) presque partout égale à $U_{e,f}(\chi)$.

A U^1 est évidemment associée une application antilinéaire continue $U_\chi : \hat{E}_V \to E'_{V^\circ}$, définie par

$$U^1_{e,f}(\chi) = < e \; U_\chi \; f > \qquad (16)$$

Les relations (12), (13) et (14) deviennent alors :

$$< e, \, i' E(\sigma)\, i\, f > \; = (ie \mid E(\sigma)\, i\, f) = \int < e, \, U_\chi \, f > \mu\,(d\chi) \qquad (17)$$

$$(ie \mid i\, f) = \int_{\hat{A}} < e, U_\chi \, f > \mu\,(d\chi) \qquad (18)$$

$$\|U_\chi\| \leqslant 1 \qquad (19)$$

De (17), on déduit aussi $< e, U_\chi e > \geqslant 0$ quel que soit $e \in \hat{E}_V$. En tant qu'opérateur de E dans E', on a évidemment $U_\chi \in L(E, E')$ pour tout χ. Il reste donc à montrer que les opérateurs U_χ sont propres, de valeur propre χ, c-à-d que $U_\chi T = \hat{T}(\chi) U_\chi$ pour tout $T \in A$. Par construction, la fonction $< e, U_\chi T f >$ est la densité de la mesure $(i\, e|E(\sigma)\, T\, if)$.

Mais $\widehat{E(\sigma)\, T} = 1_\sigma \cdot \hat{T}$, de sorte que :

$$(ie|E(\sigma)\, T\, if) = \int_\sigma \hat{T}(\chi)\, (ie|E(d\chi)\, if) = \int_\sigma \hat{T}(\chi) < e, U_\chi f > \mu(d\chi)$$

$\hat{T}(\chi) < e, U_\chi f >$ est donc aussi une densité de $< e, i' E(\sigma) i\, T f >$, ce qui montre que

$$< e, U_\chi T f > = \hat{T}(\chi) < e, U_\chi f > \qquad \mu\text{-pp} \qquad (20)$$

En modifiant de nouveau l'opérateur $U(\chi)$ à l'extérieur d'un ensemble négligeable, et tenant compte de la continuité des deux membres en (e,f), on fait en sorte que la relation (20) soit vérifiée partout. Alors $U_\chi T = \hat{T}(\chi) U_\chi$. Le théorème est ainsi entièrement démontré.

4. COROLLAIRES DU THEOREME DE FOÏAS, ET CAS PARTICULIERS

Les deux propositions suivantes sont des corollaires immédiats du théorème de Foïas :

Corollaire 4.1 : Les hypothèses étant celles du théorème 3.1, on a :

$$\forall\, e, f \in E : \ \forall\, T \in A : \quad (e|T f) = \int_{\hat{A}} \hat{T}(\chi) < e, U_\chi f > \mu(d\chi)$$

Corollaire 4.2 : Les hypothèses étant celles du théorème 3.1, les vecteurs de E' propres pour tous les opérateurs T' $(T \in A)$ séparent les points de E.

Supposons maintenant que l'algèbre A soit engendrée par un seul opérateur T. Alors $\hat{A}$ coïncide avec le spectre de T. En particulier, si T est unitaire, le théorème de Foïas affirme qu'on peut écrire

$$(e|f) = \int_{T} < e, U_\chi f > \mu(d\chi)$$

où μ est cette fois une mesure de Radon sur le cercle unité T.

Nous pouvons aussi considérer un opérateur auto-adjoint fermé B induisant sur E un opérateur linéaire continu. Alors la transformée de Cayley T de B (voir Appendice 1) est un opérateur unitaire auquel s'applique le théorème. Si $E(\sigma)$ est la mesure spectrale associée à T, on a pour tous $e, f \in E$:

$$(e|Bf) = i \int_T \frac{1+\zeta}{1-\zeta} (e)E(d\zeta)f) = i \int_T \frac{1+\zeta}{1-\zeta} < e, U_\zeta f > \mu(d_\zeta).$$

Comme le point $\zeta = 1$ ne porte pas de masse de la mesure μ, (Appendice 1, Prop. 1.3.) il est logique de remplacer μ par son image par l'application $\zeta \to i\,\frac{1+\zeta}{1-\zeta} : T \to \mathbb{R}$. On obtient ainsi $(e|f) = \int_{\mathbb{R}} < e, U'_t f > \mu\,(dt)$ (où on a posé $U'_t = U_\zeta$ si $t = i\,\frac{1+\zeta}{1-\zeta}$) et

$$(e|Bf) = \int_{\mathbb{R}} t < e, U'_t f > \mu\,(dt)$$

Considérons enfin dans H un opérateur symétrique fermé B qui induit sur E un opérateur linéaire continu. Nous pouvons alors construire la troïka $E \times E \to H \times H \to E' \times E'$ et prolonger l'opérateur symétrique $B_1 = (B, -B)$ en un opérateur auto-adjoint fermé B_2 (voir App. 1, § 3). Appliquant les résultats à B_2, on obtient une décomposition

$$((e_1,e_2)|(f_1,f_2)) = \int_{\mathbb{R}} t < (e_1,e_2), U_t(f_1,f_2)> \mu\,(dt)$$

où U_t est un opérateur propre de B_2 quel que soit $t \in R$. On écrit alors cette formule pour les couples du type (e,o). On obtient ainsi

$$(e|f) = \int_{\mathbb{R}} t \quad < e, P\,U_t(f,o) > \mu\,(dt)$$

où P est la première projection coordonnée $E' \times E' \to E'$. L'opérateur $V_t : e \to P\,U_t(e,o)$ applique E dans E'. De plus il est propre pour B, de valeur propre t. En effet

$$V_t B\,e = P\,U_t\,(Be,o) = P\,U_t\,B_2\,(e,o) = t\,P\,U_t(e,o) = t\,V_t e.$$

Ainsi un opérateur symétrique fermé, même non maximal induit sur E une désintégration du produit scalaire, à l'aide de ses vecteurs propres dans E'.

5. N O T E S

Ainsi qu'on a pu s'en rendre compte, ce chapitre est basé sur les travaux de Foïas ([5], [6], [7]). On consultera aussi avec profit un ouvrage récent de Maurin, [17] .

CHAPITRE 8.

LE THEOREME DE MINLOS.

1. Cylindres.

Soit (X, X^+) un couple d'espaces vectoriels réels en dualités.

A tout sous-espace Y de dimension finie k de X^+ et à tout ensemble borélien B de $X/Y^\perp$ on associe l'ensemble $Z(Y, B) = P_Y^{-1}(B)$ où P_Y est la projection $X \to X/Y^\perp$. Cet ensemble est appelé le cylindre de base B de génératrice $Y^\perp$.

L'espace X est lui-même un cylindre, de base $\{0\}$, de génératrice $\{0\}^\perp = X$.

L'ensemble $\mathcal{Z}$ des cylindres est un clan (i.e. une famille de parties de X stable pour le passage au complémentaire, et pour les intersections finies et comprenant $\emptyset$) mais non une tribu (i.e. un clan stable pour les intersections dénombrables). Cependant la réunion d'une famille dénombrable de cylindres ayant même génératrice est un cylindre.

2. Mesures cylindriques.

Définition 2. 1 : On appelle mesure cylindrique sur X toute fonction de $\mathcal{Z}$ dans $\mathbb{R}_+$ satisfaisant aux conditions suivantes :

(1) $\forall Z \in \mathcal{Z} : 0 \leqslant \mu(Z) \leqslant 1$

(2) $\mu(X) = 1$

(3) Si $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de cylindres, deux à deux disjoints et de même génératrice, alors $\mu(\bigsqcup_n Z_n) = \sum_n \mu(Z_n)$

Il résulte immédiatement de cette définition qu'une mesure cylindrique est une fonction additive. Une mesure cylindrique ne s'étend pas nécessairement en une mesure (dénombrablement additive) définie sur la tribu engendrée par le clan cylindrique.

Si μ est une mesure cylindrique sur X et Y un sous-espace finidimensionnel de X^+, on définit une mesure borélienne de probabilité μ_Y sur l'espace quotient $X/Y^\perp$ en posant $\mu_Y(B) = \mu(P_Y^{-1} B)$ pour tout ensemble borélien B de $X/Y^\perp$. De plus, si Y_1 et Y_2 sont deux sous-espaces de dimension finie de X^+ tels que $Y_1 \subset Y_2$ alors on a, pour tout borélien B de $X/Y_1^\perp$:

$$\mu_{Y_1}(B) = \mu_{Y_2}(p_{21}^{-1}(B))$$

où p_{21} est l'application canonique $X/Y_2^\perp \to X/Y_1^\perp$. Cette relation est immédiate, et exprime une certaine compatibilité entre les mesures μ_Y induites par μ. Inversément, la proposition suivante est immédiate.

Proposition 2.2 : Si à tout sous-espace finidimensionnel Y de X^+ est associée une mesure borélienne de probabilité μ_Y sur $X/Y^\perp$ et si la famille (μ_Y) est compatible au sens indiqué ci-dessus, alors il existe sur X une mesure cylindrique μ qui induit précisément sur tout espace quotient du type $X/Y^\perp$ la mesure μ_Y

Exemple : Soit $X = X^+ = H$ un espace de Hilbert séparable. Si Y est un sous-espace de dimension finie n, nous identifions $H/Y^\perp$ à Y. On définit une mesure borélienne de probabilité μ_Y sur Y en posant

$$\mu_Y(B) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_B e^{-\|x\|^2/2}\, dx$$

(où dx est la mesure de Lebesgue). On voit aisément que ces mesures sont compatibles :

Si $Y_1 \subset Y_2$, $\dim Y_1 = n$, $\dim Y_2 = m$, p_{21} est la projection $Y_2 \to Y_1$, et on a si $B \subset Y_1$:

$$\mu_{Y_2}(p_{21}^{-1} B) = \frac{1}{(2\pi)^{m/2}} \int_{p^{-1}B} e^{-\|x\|^2/2}\, dx$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{m/2}} \int_B e^{-\|x_1\|^2/2}\, dx_1 \int_{Y_2 \ominus Y_1} e^{-\|x_2\|^2/2}\, dx_2$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_B e^{-\|x_1\|^2/2}\, dx_1$$

($Y_2 \ominus Y_1$ est l'orthogonal de Y_1 dans Y_2)

La mesure cylindrique qui vient d'être définie sur H est appelée la mesure gaussienne de H. Montrons que cette mesure ne s'étend pas en une mesure sur la tribu $\mathcal{C}$ engendrée par le clan cylindrique. S'il en était ainsi, on aurait $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = 0$ pour toute suite décroissante (A_n) d'éléments de $\mathcal{C}$ tels que $\bigcap_n A_n = \emptyset$. En particulier, on aurait $\lim_{n\to\infty} \mu(H \setminus B_n) = 0$, B_n étant la boule de rayon n. (Remarquons que $B_n \in \mathcal{C}$ car si (x_i) est une suite dense dans B_1, on a $B_n = \bigcap_{i=1}^{\infty} \left\{ x \in H \;\middle|\; |(x\,|\,x_i)| \leqslant n \right\}$)

Soit (e_k) une base orthonormée de H. Soit $n > 0$.

Choisissons $m \in \mathbb{N}$ tel que $m - 2\sqrt{m} \geqslant n^2$

Désignons par p_m le projecteur orthogonal de H sur le sous-espace engendré par $\{ e_1, \dots, e_m \}$, et posons

$$Z_n = \left\{ x \in H \;\middle|\; \left| \|p_m x\|^2 - m \right| \leqslant 2\sqrt{m} \right\}$$

Z_n est un cylindre disjoint de B_n. Calculons $\mu(Z_n)$.

Si χ est la fonction caractéristique de Z_n on a :

$$\chi(x) \geqslant 1 - \frac{(\|p_m x\|^2 - m)^2}{4m}$$

Donc : $$\mu(Z_n) \geqslant 1 - \int_H \frac{(\|p_m x\|^2 - m)^2}{4m}\, d\mu(x)$$

$$\geqslant 1 - \frac{1}{(2\pi)^{m/2}} \int_{\mathbb{R}^m} \frac{\|y\|^4 - 2m\|y\|^2 + m^2}{4m} e^{-1/2\|y\|^2}\, dy$$

Mais :

$$\frac{1}{(2\pi)^{m/2}} \int_{\mathbb{R}^m} \|y\|^2 e^{-1/2\|y\|^2} dy = m \text{ et } \frac{1}{(2\pi)^{m/2}} \int_{\mathbb{R}^m} \|y\|^4 e^{-1/2\|y\|^2} dy = m(m+2)$$

Donc $\mu(Z_n) \geqslant 1 - \frac{m+2}{4} + \frac{m}{2} - \frac{m}{4} = \frac{1}{2}$

Puisque $Z_n \cap B_n = \emptyset$, on a $\mu(H \setminus B_n) \geqslant \mu(Z_n) \geqslant \frac{1}{2}$

Donc $\lim_{n\to\infty} \mu(H \setminus B_n) \neq 0$

3. Le Théorème de PROKHOROV.

On considérera à présent des mesures cylindriques définies sur le dual d'un espace localement convexe. On a alors $X^{+} = E$ et $X = E'$.

Théorème 31 (Prokhorov) [23] Soient E un espace localement convexe séparé et μ une mesure cylindrique sur le dual E' de E. μ s'étend en une mesure sur la tribu $\mathcal{T}$ engendrée par le clan cylindrique $\mathcal{Z}$ dès que à tout $\varepsilon > 0$ on peut associer une partie équicontinue faiblement fermée K_ε de E' vérifiant la condition suivante :

$$\forall Z \in \mathcal{Z} \quad : \quad Z \cap K_\varepsilon = \emptyset \Longrightarrow \mu(Z) < \varepsilon$$

Il suffit de démontrer que μ est dénombrablement additive sur $\mathcal{Z}$ car toute mesure sur un clan s'étend en une mesure sur la tribu engendrée par le clan. (Autrement dit, il suffit de montrer que la condition indiquée a pour conséquence qu'une mesure cylindrique est une mesure).

Supposons d'abord qu'on a $E' = \bigcup_{k=1}^{\infty} Z_k$ où les Z_k sont des cylindres ouverts (pour la topologie faible $\sigma(E', E)$)

Puisque K_ε est faiblement compact, K_ε est recouvert par un nombre fini de Z_k :

$$K_\varepsilon \subset \bigcup_{\nu=1}^{n} Z_{k_\nu}$$

Posons $Z = E' \setminus \left(\bigcup_{\nu=1}^{n} Z_{k_\nu}\right)$. Z est un cylindre disjoint de K_ε,

On a donc $\mu(Z) < \varepsilon$, ce qui entraîne

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(Z_k) \geqslant \sum_{\nu=1}^{n} \mu(Z_{k_\nu}) > 1 - \varepsilon$$

Cette relation étant vraie quel que soit ε, on voit que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(Z_k) \geqslant 1$$

Considérons maintenant le cas $E' = \bigcup_{k=1}^{\infty} Z_k$ où les Z_k sont des cylindres non nécessairement ouverts. Soit $\varepsilon > 0$. Si Z est de base A_k et de génératrice $Y^{\perp}$, $A_k \subset E'/Y^{\perp}$, on peut trouver un ouvert B_k de $E'/Y^{\perp}$ tel que

$\mu_Y(A_k) \leqslant \mu_Y(B_k) \leqslant \mu_Y(A_k) + \frac{\varepsilon}{2^k}$. En effet, toute mesure borélienne sur un espace de dimension finie est régulière, c-à-d que

$\mu_Y(P) = \inf\limits_{U \supset P} \mu_Y(U)$. ($U$ ouvert)

Le cylindre T_k de base B_k et de génératrice $Y^{\perp}$ est ouvert pour $\sigma(E', E)$ et on a $E' = \bigcup_{k=1}^{\infty} T_k$ puisque $Z_k \subset T_k$. On a donc

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(T_k) \geqslant 1$$

Mais $\sum_{k=1}^{\infty} \mu(Z_k) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \left(\mu(Z_k) + \frac{\varepsilon}{2^k}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(Z_k) + 2\varepsilon$

On a donc $\sum_{k=1}^{\infty} \mu(Z_k) \geqslant 1 - 2\varepsilon$, et cette relation étant vraie quel que soit ε, on a encore $\sum_{k=1}^{\infty} \mu(Z_k) \geqslant 1$.

Cela étant, supposons à présent qu'on a $E' = \bigcup_{k=1}^{\infty} Z_k$ où les Z_k sont des cylindres disjoints deux à deux. On a alors d'une part

$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(Z_k) \geqslant 1$ et d'autre part

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(Z_k) = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \mu(Z_k) = \lim_{n \to \infty} \mu\Big(\bigcup_{k=1}^{n} Z_k\Big) \leqslant \mu(E') = 1$$

Donc $\mu(E') = 1 = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(Z_k)$.

Enfin, soit Z un cylindre et $Z = \bigcup_{k=1}^{\infty} Z_k$ où les Z_k sont des cylindres deux à deux disjoints. On a alors

$$E' = (E' \setminus Z) \cup \Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} Z_k\Big)$$

Donc $1 = \mu(E' \setminus Z) + \sum_{k=1}^{\infty} \mu(Z_k)$. On a aussi $E' = (E' \setminus Z) \cup Z$

Donc $1 = \mu(E' \setminus Z) + \mu(Z)$.

Par conséquent $\mu(Z) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(Z_k)$.

Ceci démontre que μ est dénombrablement additive dans $\mathcal{Z}$.

4. Mesures cylindriques continues.

Considérons une mesure cylindrique μ sur E'. A tout k-uple $(y_1, \ldots, y_k)$ de vecteurs de E, on peut associer l'application $E' \to \mathbb{R}^k$: $f \to (\langle y_1, f\rangle, \ldots, \langle y_k, f\rangle)$. Cette application est nulle sur $Y^{\perp}$, si Y est le sous-espace de E engendré par les y_i, et définit donc une application $E' / Y^{\perp} \xrightarrow{\eta} \mathbb{R}^k$. Au moyen de cette application (qui n'est pas nécessairement surjective) on transporte la mesure μ_Y dans $\mathbb{R}^k$. On notera $\mu_{(y_i)}$ l'image de μ_Y.

<u>Définition 4.1 : On dit que la mesure cylindrique μ est continue si quel que soit k l'application $E^k \longrightarrow \mathcal{M}^1(\mathbb{R}^k) : (y_i) \to \mu_{(y_i)}$ est continue, si on munit l'espace $\mathcal{M}^1(\mathbb{R}^k)$ des mesures boréliennes bornées sur $\mathbb{R}^k$ de la topologie de dual faible de l'espace de Banach des fonctions continues et bornées sur $\mathbb{R}^k$.</u>

Sur un espace de Hilbert, la mesure gaussienne est continue. En effet si f est une fonction continue, bornée sur $\mathbb{R}^k$, l'intégrale

$$\frac{1}{(2\pi)^{k/2}} \int_Y f((y_1 \mid x), \ldots, (y_k \mid x))\, e^{-1/2\|x\|^2}\, dx$$

dépend continument de $y_1, \ldots, y_k$.

<u>Théorème 4.2 : Si μ est une mesure cylindrique continue sur E', à tout $\varepsilon > 0$, on peut associer une partie équicontinue K de E' telle que la mesure de tout demi-espace disjoint de K soit inférieure à ε.</u>

Désignons par μ_0 la mesure sur $\mathbb{R}$ associée au vecteur $0 \in E$. Il est immédiat que μ_0 est la mesure de Dirac à l'origine. Soit φ une fonction continue bornée positive égale à 0 pour $x = 0$ et à 1 pour $x > 1$. Puisque la mesure μ est continue, il existe un voisinage disqué fermé U de $0 \in E$ tel que

$$\forall_y \in U : \left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) d\mu_y(x) - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) d\mu_o(x) \right| = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) d\mu_y(x)$$

Soit K le polaire de U. K est une partie équicontinue de E'.
Un demi-espace P disjoint de K est défini par l'équation

$$\langle y, \varphi \rangle \geqslant 1 \quad \text{avec} \quad y \in U$$

Sa mesure est $\displaystyle\int_1^{+\infty} d\mu_y(x) \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) d\mu_y(x) < \varepsilon$

Quelques lemmes.

Rappelons que dans l'espace $\mathbb{R}^n$, les coordonnées sphériques sont données par les formules suivantes :

$$\begin{aligned} x_1 &= \rho \cos \varphi_1 & & 0 \leqslant \rho < +\infty \\ x_2 &= \rho \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 & \text{avec} \quad & 0 \leqslant \varphi_k \leqslant \pi \quad \text{si } 1 \leqslant k \leqslant n-2 \\ x_3 &= \rho \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \cos \varphi_3 & & 0 \leqslant \varphi_{n-1} \leqslant 2\pi \\ x_n &= \rho \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \cdots \sin \varphi_{n-1} & & \end{aligned}$$

L'élément de volume de la sphère unité Ω de $\mathbb{R}^n$ est donné par la formule

$$d\tau(\omega) = \frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{2\pi^{n/2}} \sin^{n-2}\varphi_1 \sin^{n-3}\varphi_2 \cdots \sin\varphi_{n-2}\, d\varphi_1 \cdots d\varphi_{n-1}$$

Si f est une fonction définie sur Ω, on notera $\langle f \rangle$ sa valeur moyenne

$$\langle f \rangle = \int_\Omega f(\omega)\, d\tau(\omega)$$

Lemme 5.1 : Soit μ une mesure borélienne de probabilité sur $\mathbb{R}^n$.
Posons $\mu(R) = \mu(B_R)$, où B_R est la boule de rayon R de $\mathbb{R}^n$, et $\mu(r,\omega) = \mu(\{x \in \mathbb{R}^n \mid (x \mid \omega) \geqslant r\})$ si $\omega \in \Omega$.
Il existe une constante C, indépendante de n, telle que

$$1 - \mu(R) \leqslant C \cdot \left\langle \mu\left(\frac{R}{\sqrt{n}}, .\right) \right\rangle$$

On a :

$$\langle \mu(r,.) \rangle = \int_\Omega d\tau(\omega) \int_{\mathbb{R}^n} \chi(r,\omega,x)\, d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}^n} d\mu(x) \int_\Omega \chi(r,\omega,x)\, d\tau(\omega)$$

où χ est la fonction caractéristique du démi-espace d'équation $(x \mid \omega) \geqslant r$. x étant fixé, le nombre $\varphi(x, r) = \int_\Omega \chi(x,r,\omega)\, d\tau(\omega)$ est la mesure de l'ensemble $\{\omega \in \Omega \mid (x \mid \omega) \geqslant r\}$. Cet ensemble est vide si $r > \|x\|$, c'est une calotte sphérique si $r \leqslant \|x\|$.

Dans ce dernier cas, la mesure de cette calotte vaut

$$\frac{1}{B(\frac{n-1}{2}, \frac{1}{2})} \int_{r/\|x\|}^{1} (1 - y^2)^{\frac{n-3}{2}}\, dy$$

Par conséquent

$$\langle \mu(r,.) \rangle = \frac{1}{B(\frac{n-1}{2}, \frac{1}{2})} \int_{\|x\| \geqslant r} d\mu(x) \int_{\frac{r}{\|x\|}}^{1} (1 - y^2)^{\frac{n-3}{2}}\, dy$$

Si $R \geqslant r$, on a

$$\int_{\|x\| \geqslant r} d\,\mu(x) \int_{\frac{r}{\|x\|}}^{1} (1 - y^2)^{\frac{n-3}{2}}\, dy = \underbrace{\int_{\|x\| \geqslant R} d\,\mu(x) \int_{\frac{r}{\|x\|}}^{1} \ldots dy}_{\geqslant \int_{r/R}^{1}} + \underbrace{\int_{r \leqslant \|x\| \leqslant R} d\,\mu(x) \int_{\frac{r}{\|x\|}}^{1} \ldots}_{\geqslant 0}$$

$$\geqslant (1 - \mu(R)) \int_{r/R}^{1} (1 - y^2)^{\frac{n-3}{2}}\, dy$$

On trouve donc

$$1 - \mu(R) \leqslant \frac{B(\frac{n-1}{2}, \frac{1}{2})}{\int_{r/R}^{1} (1-y^2)^{\frac{n-3}{2}}\, dy} \langle \mu(r,.) \rangle$$

On a $B(\frac{n-1}{2}, \frac{1}{2}) = 2 \int_0^1 (1 - y^2)^{\frac{n-3}{2}}\, dy$

En choisissant $R = r\sqrt{n}$, on voit que $1 - \mu(R) \leqslant C_n \langle \mu(\frac{R}{\sqrt{n}}, .) \rangle$

avec $$C_n = \frac{2 \int_0^1 (1 - y^2)^{\frac{n-3}{2}}\, dy}{\int_{1/\sqrt{n}}^{1} (1-y^2)^{\frac{n-3}{2}}\, dy}$$

En faisant dans les intégrales le changement de variable $y = \frac{t}{\sqrt{n}}$

puis en faisant tendre n vers $+\infty$, on voit que

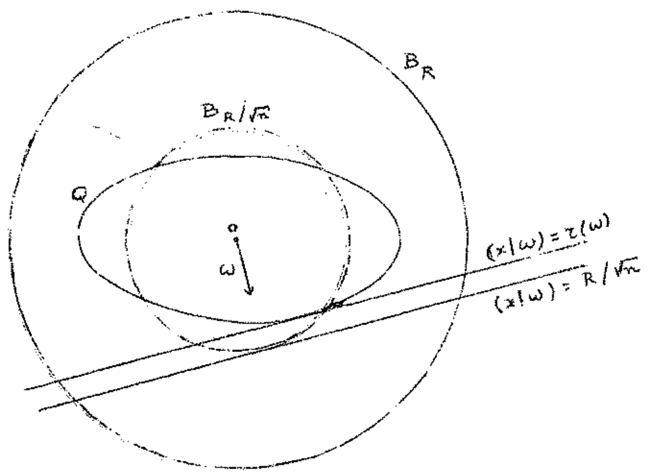
$$\lim_{n \to \infty} C_n = \frac{2\int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2}y^2}\, dy}{\int_1^{\infty} e^{-\frac{1}{2}y^2}\, dy} = \frac{\sqrt{2\pi}}{\int_1^{\infty} e^{-\frac{1}{2}y^2}\, dy}$$

La suite C_n étant convergente, elle est bornée. On en déduit la thèse.

Lemme 5.2 : Soit μ une mesure borélienne de probabilité sur $\mathbb{R}_n$ soit Q un ellipsoïde d'équation $a_1^2 x_1^2 + \ldots + a_n^2 x_n^2 = 1$ tel que tout demi-espace disjoint de Q soit de mesure inférieure à ε . Alors pour toute boule B_R contenant Q , on a :

$$1 - \mu(R) \leqslant C(\varepsilon + \frac{H^2}{R^2})$$

où $H^2 = \sum_1^n \lambda_i^2$ et $\lambda_i^2 = \frac{1}{a_i^2}$



On notera $r(\omega)$ la distance de l'origine à l'hyperplan tangent à l'ellipsoïde Q et orthogonal au vecteur normé ω.

Soit $\Omega_1 = \left\{ \omega \mid \frac{R}{\sqrt{n}} \leqslant r(\omega) \right\}$ et $\Omega_2 = \left\{ \omega \mid \frac{R}{\sqrt{n}} > r(\omega) \right\}$

Il est facile de voir que $r^2(\omega) = \lambda_1^2 \omega_1^2 + \dots + \lambda_n^2 \omega_n^2$.

Toutes les fonctions ω_i^2 ayant même moyenne sur Ω, et leur somme étant la constante 1, chacune d'entre elles a la moyenne $\frac{1}{n}$. Donc $\langle r^2 \rangle = \frac{H^2}{n}$

D'autre part $\langle r^2 \rangle = \int_{\Omega} r^2(\omega)\, d\tau(\omega) \geqslant \int_{\Omega_1} r^2(\omega)\, d\tau(\omega)$

$$\geqslant \frac{R^2}{n}\,\tau(\Omega_1)$$

Donc $\tau(\Omega_1) \leqslant \frac{H^2}{R^2}$

Ainsi

$$1 - \mu(R) \leqslant C \left\langle \mu\left(\frac{R}{\sqrt{n}}, \cdot\right) \right\rangle$$

$$\leqslant C \int_{\Omega_1} \mu\left(\frac{R}{\sqrt{n}}, \omega\right) d\tau(\omega) + C \int_{\Omega_2} \left(\frac{R}{\sqrt{n}}, \omega\right) d\tau(\omega)$$

$$\leqslant C\,\tau(\Omega_1) + C\,\varepsilon\,\tau(\Omega_2)$$

$$\leqslant C\left(\varepsilon + \frac{H^2}{R^2}\right)$$

6. Le théorème de Minlos.

Théorème 6.1 (Minlos) : Toute mesure cylindrique continue μ sur le dual d'un e.l.c.s. nucléaire E est dénombrablement additive.

Puisque μ est continue et E nucléaire, il existe dans E' un disque équicontinu, quadratique, K, tel que la mesure de tout demi-espace disjoint de K est inférieur à $\frac{\varepsilon}{2C}$ où C est la constante intervenant dans les lemmes 5.1 et 5.2.

Soit L un autre disque équicontinu quadratique contenant K et tel que l'injection canonique $u : E'_K \to E'_L$ soit nucléaire.

Ecrivons u sous la forme $u(x) = \sum \lambda_n (x\ x_n)\, y_n$ où (x_n), (y_n) sont des familles orthonormées de E'_K et E'_L et où $\sum \lambda_n < +\infty$, ce qui entraîne que $\sum_n \lambda_n^2 = H^2 < +\infty$.

Dans E'_L, K est un ellipsoïde dont les demi-axes sont de longueur λ_n.

Soit R un réel assez grand pour que la boule RL de rayon R de E'_L contienne K et pour que $\frac{H^2+\varepsilon}{R^2} < \frac{\varepsilon}{2\,C}$

Considérons un cylindre Z, de base A et de génératrice $Y^{\perp}$, disjoint de RL.

Soit p le projecteur de E' sur $Y^{\perp}$; $p(RL)$ est une boule de rayon R dans un sous-espace Y^{*} de $E'/Y^{\perp}$.

$p(K)$ est un ellipsoïde inclus à $p(RL)$ et dont la somme des carrés des longueurs des demi-axes vaut au plus H^2. La mesure de tout demi-espace de $E'/Y^{\perp}$ disjoint de $p(K)$ est inférieur à $\frac{\varepsilon}{2\,C}$.

L'ellipsoïde $p(K)$, de dimension inférieure à celle de E'/Y peut être inséré dans un ellipsoïde de même dimension que $E'/Y^{\perp}$ dont la somme des carrés des demi-axes est inférieure à $H^2+\varepsilon$. La boule de rayon R de $E'/Y^{\perp}$ contient encore cet ellipsoïde et la mesure de tout demi-espace disjoint de celui-ci est encore inférieure à $\frac{\varepsilon}{2\,C}$. On déduit alors du lemme 2 que

$$1-\mu_Y(R) \leqslant C\left(\frac{\varepsilon}{2C}+\frac{H^2+\varepsilon}{R^2}\right)$$
$$\leqslant \varepsilon$$

Par conséquent $\mu_Y(pZ) \leqslant \varepsilon$, ce qui entraîne que $\mu(Z) \leqslant \varepsilon$

La thèse résulte alors du théorème de Prokhorov.

7. Notes.

Pour l'essentiel, nous avons suivi dans ce chapitre l'exposé de GELFAND et VILIENKIN [9]. Nous avons également consulté un cours de M. ZERNER, [32].

APPENDICE 1.

THEORIE DES OPERATEURS SYMETRIQUES.

1. Transformées de Cayley.

Nous ne rappellerons pas les définitions élémentaires de la théorie des opérateurs linéaires fermés, dans les espaces de Hilbert.

Proposition 1.1 : Soient H un espace de Hilbert, et T un opérateur symétrique fermé de domaine dense dans H. Alors :

(i) L'opérateur $T + i I$ admet un inverse continu, défini sur un sous-espace fermé de H.

(ii) L'opérateur $U_T = (T - i I)(T + i I)^{-1}$ est une isométrie de même domaine que $(T + i I)^{-1}$

(iii) $I - U_T$ admet un inverse (non nécessairement continu) et $T = i(I + U_T)(I - U_T)^{-1}$.

Démonstration :

On a, quel que soit $x \in \mathrm{Dom}\ T$:

$$\| Tx + i x \|^2 = \| Tx \|^2 + \| x \|^2 - i(Tx \mid x) + i(x \mid Tx) \geqslant \| x \|^2$$

Ceci montre que $T + i I$ admet un inverse continu. De plus, l'image de $T + i I$ est un sous-espace fermé de H. En effet, si $Tx_n + i x_n$ converge vers y, les suites x_n et Tx_n sont de Cauchy

$$(\| (Tx_n + i x_n) - (Tx_m + i x_m) \|^2 = \| Tx_n - Tx_m \|^2 + \| x_n - x_m \|^2)$$

donc convergent, puisque l'opérateur T est fermé, vers des vecteurs x et Tx. Mais alors $Tx_n + i x_n$ converge vers $Tx + i x$. On a ainsi démontré (i).

Il est clair que $\mathrm{Dom}\ U_T = \mathrm{Dom}\ (T + i I)^{-1}$. Si $y = U_T x$, on a $y = Tz - iz$ et $x = Tz + iz$, de sorte que $\| y \|^2 = \| Tz \|^2 + \| z \|^2 = \| x \|^2$.

Il nous reste à établir (iii). Si $U_T x = x$, alors $x = Tz - iz$ et $x = Tz + iz$.

Cela n'est possible que si $z = 0$, donc $x = 0$. Ainsi $I - U_T$ est inversible. Si $x \in \mathrm{Dom}\ T$, $y = Tx + ix$. On a alors $U_T y = Tx - ix$. On en déduit $x = \frac{1}{2i}(y - U_T y)$, et $Tx = \frac{1}{2}(y + U_T y)$. Ceci montre que $i(I + U_T)(I - U_T)^{-1}$ est un prolongement de T. Mais $x \in \mathrm{Dom}(I + U_T)(I - U_T)^{-1}$ signifie que $x = y - U_T y$. On a alors $y \in \mathrm{Dom}\ U_T$, de sorte que $y = Tz + iz$ et $U_T y = Tz - iz$. Alors $x = 2iz \in \mathrm{Dom}\ U_T$.

Corollaire 1.2 : L'image de $I - U_T$ est un sous-espace dense de H.

En effet, d'après la propriété (iii) ci-dessus, on a $\mathrm{Dom}\ T = \mathrm{Im}(I - U_T)$

Proposition 1.3 : Soit U un opérateur isométrique défini sur un sous-espace fermé de H, et tel que l'image de $I - U$ soit dense dans H. Alors 1 n'est pas valeur propre de U et il existe un et un seul opérateur symétrique fermé de domaine dense, T tel que $U = U_T$.

L'unicité de T est évidente, et découle de la formule $T = i(I + U_T)(I - U_T)^{-1}$. Il suffit donc de montrer que l'opérateur $I - U$ est inversible, que $T = i(I + U)(I - U)^{-1}$ est un opérateur symétrique fermé et que $U = (T - iI)(T + iI)^{-1}$. Si $Ux = x$, on a pour tout $y \in \text{Dom } U$:

$$(x, y) = (Ux, Uy) = (x, Uy)$$

Dom x est orthogonal à l'image de $I - U$, ce qui entraîne $x = 0$. Il est clair que l'image de $(I - U)^{-1}$ est contenue dans le domaine de $I + U$. Ainsi $T = i(I + U)(I - U)^{-1}$ est un opérateur de domaine dense dans H. Montrons que T est symétrique. Si $x, y \in \text{Dom } T$, alors $x = z - Uz$ et $y = t - Ut$, $Tx = i(z + Uz)$ et $Ty = i(t + Ut)$. D'où :

$$(x \mid Ty) = i \left[(Uz \mid t) - (z \mid Ut) \right] = (Tx \mid y)$$

T est fermé. Supposons en effet qu'on ait $x_n \in \text{Dom } T$, $x_n \to x$ et $Tx_n \to y$. Alors $x_n = z_n - Uz_n$ et $Tx_n = i(z_n + Uz_n)$. $z_n = \frac{1}{2}(x_n - iTx_n)$ converge vers $\frac{1}{2}(x - iy)$, $Uz_n = -\frac{1}{2}(x_n + iTx_n)$ converge vers $-\frac{1}{2}(x + iy)$. Le domaine de U étant fermé, nous voyons que $\frac{1}{2}(x - iy) \in \text{Dom } U$ et que $U(+\frac{1}{2}(x - iy)) = -\frac{1}{2}(x + iy)$. Posant $z = \frac{1}{2}(x - iy)$, on a : $x = z - Uz$ et $y = i(z + Uz)$. Donc $x \in \text{Dom } T$ et $y = Tx$.

Enfin $U_T = U$. Car $y = U_T x$ signifie que $x = Tz + iz$ et $y = Tz - iz$. Donc $z \in \text{Dom } T$, $z = t - Ut$, $Tz = i(t + Ut)$. Alors $x = 2it$ et $y = 2i\,Ut = Ux$.

<u>Définition 1.4</u> : <u>L'opérateur isométrique</u> U_T <u>est appelé la transformée de Cayley de l'opérateur symétrique fermé</u> T. <u>On note alors</u> $H_T^+ = (\text{Dom } U_T)^{\perp}$ <u>et</u> $H_T^- = (\text{Im } U_T)^{\perp}$.

On vient de voir que la transformation de Cayley est une correspondance bijective.

2. <u>Indices de défaut.</u>

<u>Proposition 2.1</u> : <u>Soient</u> H <u>un espace de Hilbert</u>, T <u>un opérateur symétrique fermé dans</u> H <u>et</u> U_T <u>la transformée de Cayley de</u> T. On a alors :

(i) $H_T^+ = \{ x \in H \mid T^* x = ix \}$

(ii) $H_T^- = \{ x \in H \mid T^* x = -ix \}$

(iii) $\text{Dom } T^* = \text{Dom } T \oplus H_T^+ \oplus H_T^-$ (somme directe algébrique)

<u>Démonstration</u> :

(i) $\text{Dom } U_T = \text{Dom } (T + iI)^{-1}$. Donc :

$x \in H_T^+ \iff \forall y \in \text{Dom } T : (x \mid Ty + iy) = 0$

$\iff \forall y \in \text{Dom } T : (x \mid Ty) = -(x \mid iy) = (ix \mid y)$

$\iff x \in \text{Dom } T^*$ et $T^* x = ix$

(ii) La démonstration est analogue à celle de (i)

(iii) Soit $x \in \text{Dom } T^*$. Considérons le vecteur $T^* x + ix$, et décomposons-le en somme d'un élément de $\text{Dom } U_T$ et d'un élément de H_T^+ : $T^* x + ix = y_1 + y_2$.

Puisque $y_1 \in \mathrm{Dom}\, U_T$, on a $y_1 = Tx_o + ix_o$, avec $x_o \in \mathrm{Dom}\, T$

T^* est un prolongement de T, on écrira donc $y_1 = T^* x_o + ix_o$.

$y_2 \in H_T^+$, entraîne $T^* y_2 = iy_2$. Donc $y_2 = T^* x_1 + ix_2$,

si $x_1 = \frac{1}{2i} y_2$.

On est ainsi arrivé à

$$T^* x + ix = T^* x_o + ix_o + T^* x_1 + ix_1$$

avec $x_o \in \mathrm{Dom}\, T$ et $x_1 \in H_T^+$. Cette relation s'écrit encore

$$T^* (x - x_o - x_1) = - i(x - x_o - x_1)$$

ce qui implique, d'après (ii) que $x_2 = x - x_o - x_1 \in H_T^-$.

Ainsi est démontrée l'existence d'une décomposition

$x = x_o + x_1 + x_2$, avec $x_o \in \mathrm{Dom}\, T$, $x_1 \in H_T^+$, $x_2 \in H_T^-$

Prouvons l'unicité de cette décomposition. Supposons qu'on ait

$x_o + x_1 + x_2 = 0$, avec $x_o \in \mathrm{Dom}\, T$, $x_1 \in H_T^+$, $x_2 \in H_T^-$

Alors $T^* x_o = Tx_o$, $T^* x_1 = ix_1$, $T^* x_2 = - ix_2$. Donc

$$(T^* + iI)(x_o + x_1 + x_2) = (T + iI)x_o + 2i\, x_1 = 0$$

Puisque $\mathrm{Im}(T + iI) = \mathrm{Dom}\, U_T$ est orthogonal à H_T^+, ceci entraîne $x_1 = 0$ et $Tx_o + ix_o = 0$. Mais $T + iI$ est inversible, donc $x_o = 0$ et $x_2 = 0$.

<u>Corollaire 2.2</u> : <u>L'opérateur</u> T <u>est auto-adjoint si et seulement si sa transformée de Cayley est un opérateur unitaire.</u>

En effet,

$$T \text{ auto-adjoint} \iff \mathrm{Dom}\, T = \mathrm{Dom}\, T^*$$
$$\iff H_T^+ = 0 \text{ et } H_T^- = 0$$
$$\iff \mathrm{Dom}\, U_T = H \text{ et } \mathrm{Im}\, U_T = H$$

<u>Définition 2. 3</u>: <u>Si</u> T <u>est un opérateur symétrique fermé dans un espace de Hilbert, les dimensions</u> m, n <u>des espaces</u> H_T^+, H_T^- <u>sont appelés les indices de défaut de</u> T.

Ainsi un opérateur est auto-adjoint si ses indices de défaut sont nuls.

<u>Exemple</u> : Soit $H = L^2(0, 1)$. Considérons l'opérateur $T = \frac{1}{i} \frac{d}{dt}$, (dérivation au sens des distributions) défini sur le sous-espace

$D = \{ x \in L^2(0, 1) \mid x$ est absolument continue sur $[0, 1]$,
$x(0) = x(1) = 0,\ x' \in L^2(0, 1) \}$

D est dense dans H, et T est fermé. De plus T est symétrique car T^* est l'opérateur $T = \frac{1}{i} \frac{d}{dt}$, défini sur le sous-espace $D^* = \{ x \in L^2(0, 1) \mid x$ est absolument continue et $x' \in L^2(0, 1) \}$

H_T^+ est l'espace des solutions-distributions de l'équation différentielle $x'(t) = -x(t)$ avec $x, x' \in L^2(0, 1)$

Posons $y(t) = e^t x(t)$. Alors y est solution-distribution de l'équation différentielle $y'(t) = 0$. On en déduit $y(t) = $ cste. Donc $x = c.\, e^{-t}$. Ainsi $\dim H_T^+ = 1$. De même si $x \in H_T^-$, alors $x = c.e^t$

Les indices de défaut de T sont $1, 1$.

3. Prolongement des opérateurs symétriques.

Théorème 3. 1 : Soient H un espace de Hilbert, et T un opérateur symétrique fermé dans H. Soient (m,n) les indices de défaut de T. A tout nombre fini $p > 0$ tel que $p < m$ et $p \leq n$, on peut associer un prolognement symétrique fermé de T dont les indices de défaut sont $(m - p , n - p)$.

Démonstration :

H_T^+ et H_T^- sont des espaces de Hilbert de dimension au moins égale à p. Soient $x = (x_1,\dots,x_p)$ et $y = (y_1,\dots,y_p)$ deux familles orthonormées incluses respectivement à H_T^+ et H_T^-. Si U_T est la transformée de Cayley de T, nous construisons un prolongement isométrique V de U_T de la façon suivante :

$$\begin{cases} \mathrm{Dom}\ V = \mathrm{Dom}\ U_T \oplus \sum_{i=1}^{p} \mathbb{C}\, x_i \\ Vx = U_T\, x \quad \text{si} \quad x \in \mathrm{Dom}\ U_T \\ V\left(\sum_{i=1}^{p} \alpha_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i y_i \end{cases}$$

Il est clair que $\mathrm{Dom}\ V$ est fermé et que $\mathrm{Im}(I - V)$ est dense dans H. On déduit alors de la proposition 1.3 que V est la transformée de Cayley de l'opérateur symétrique fermé $T' = i(I + V)(I - V)^{-1}$.

Il est clair que T' est un prolongement de T et que les indices

de défaut de T', c-à-d les dimensions de $(\mathrm{Dom}\ V)^{\perp}$ et $(\mathrm{Im}\ V)^{\perp}$ valent $m-p$ et $n-p$.

c.q.f.d.

Il est à remarquer que le prolongement construit est loin d'être unique.

Corollaire 3.2 : Un opérateur symétrique fermé dans H est maximal si et seulement si l'un au moins de ses indices de défaut est nul. Un opérateur symétrique fermé dans H admet un prolongement auto-adjoint dans H, si et seulement si ses indices de défaut sont égaux.

Il est nécessaire dans la deuxième affirmation de ce corollaire de spécifier "prolongement auto-adjoint dans H", car on va voir qu'en plongeant H dans un sur-espace H_1, tout opérateur symétrique admet un prolongement auto-adjoint.:

Théorème 3.3 (Naïmark) : Soient H un espace de Hilbert, et T un opérateur symétrique fermé dans H, d'indices de défaut (m, n). On peut construire un espace de Hilbert H_1, contenant H comme sous-espace, et un opérateur symétrique fermé T_1 dans H_1 tels que T_1 soit un prolongement de T et que les indices de défaut de T_1 soient $(m + n , m + n)$.

Remarquons d'abord que les indices de défaut de l'opérateur $-T$ sont (n, m). En effet l'adjoint de $-T$ est $-T^*$ et

$$T^* x = ix \Longleftrightarrow (-T)^* x = -ix \quad , \quad T^* x = -ix \Longleftrightarrow (-T)^* x = ix$$

Considérons l'espace de Hilbert $H_1 = H \times H$. Le produit scalaire y est défini par la formule

$$((x_1, x_2) \mid (y_1, y_2)) = (x_1 \mid y_1) + (x_2 \mid y_2)$$

Soit T_1 l'opérateur dans H_1 défini par $T_1(x, y) = (Tx, -Ty)$

T_1 est symétrique :

$$\begin{aligned}(T_1(x_1, x_2) \mid (y_1, y_2)) &= (Tx_1 \mid y_1) + (-Tx_2 \mid y_2)\\ &= (x_1 \mid Ty_1) + (x_2 \mid -Ty_2)\\ &= ((x_1, x_2) \mid T_1(y_1, y_2))\end{aligned}$$

On voit de même que l'adjoint de T_1 est $T_1^* = (T^*, -T^*)$.

Alors $T_1^*(x, y) = i(x, y) \iff T^* x = ix$ et $T^* y = -iy$

$$\iff (x, y) \in H_T^+ \times H_T^-$$

De même $T_1^*(x, y) = -i(x, y) \iff (x, y) \in H_T^- \times H_T^+$

Les indices de défaut sont donc $(m + n, m + n)$. Enfin T_1 est un prolongement de T : $T_1(x, 0) = (Tx, 0)$.

Corollaire 3.4 : Tout opérateur symétrique fermé T dans H admet un prolongement auto-adjoint dans un sur-espace H_1 de H.

4. Mesures spectrales.

Nous supposons connue la théorie de la décomposition spectrale d'un opérateur auto-adjoint.

Définition 4.1 : Soient H un espace de Hilbert et $(X, \mathcal{B})$ un espace mesurable.

On appelle mesure semi-spectrale sur X, toute application F de $\mathcal{B}$ dans l'espace des opérateurs bornés de H vérifiant les conditions suivantes :

(i) $F(\emptyset) : 0$

(ii) $F(X) = I$

(iii) $\forall \sigma \in \mathcal{B} : 0 \leq F(\sigma) \leq I$

(iv) F est faiblement dénombrablement additive.

Une mesure spectrale est une mesure semi-spectrale qui vérifie une condition supplémentaire :

(v) $\forall \sigma_1, \sigma_2 \in \mathcal{B} : F(\sigma_1 \cap \sigma_2) = F(\sigma_1)\ F(\sigma_2)$

En effet, on déduit de (iii) et (v) que $F(\sigma)$ est un projecteur, quel que soit $\sigma \in \mathcal{B}$

Soit F une mesure semi-spectrale. Il résulte de (i), (ii) et (iv) que, quels que soient $x, y \in H$, la fonction $\sigma \longrightarrow (F(\sigma)x \mid y)$ est une mesure bornée complexe sur X. De plus les mesures $(F(\sigma)x \mid x)$ sont positives, grâce à (iii).

<u>Théorème 4.2</u> : <u>Soit</u> H <u>un espace de Hilbert, et</u> T <u>un opérateur symétrique fermé dans</u> H. <u>On peut trouver une mesure semi-spectrale</u> F <u>sur</u> $\mathbb{R}$ <u>telle que si</u> $x \in \mathrm{Dom}\, T$ <u>et</u> $y \in H$:

$$(Tx \mid y) = \int_{\mathbb{R}} \lambda \ (F(d\lambda)\, x \mid y)$$

Considérons un prolongement auto-adjoint T_1 de T, dans un espace de Hilbert H_1, contenant H comme sous-espace. Soit E la mesure spectrale associé à T_1 : quels que soient $x \in \mathrm{Dom}\, T_1$ et $y \in H_1$:

$$(T_1 x \mid y)_{H_1} = \int_{\mathbb{R}} \lambda \ (E(d\lambda)\, x \mid y)_{H_1}$$

Soit P le projecteur orthogonal de H_1 sur H. Pour tout ensemble borélien σ, désignons par $F(\sigma)$ la restriction à H de l'opérateur $P\,E(\sigma)$. F est une mesure semi-spectrale. En effet, les relations (i) et (ii) de la définition 4.1 sont évidentes. Les relations (iii) et (iv) se déduisent de ce que si $x, y \in H$:
$(F(\sigma)x \mid y)_H = (E(\sigma)\, x \mid y)_{H_1}$

si $x \in \mathrm{Dom}\, T$, on a $Tx = T_1 x$. Donc, quel que soit $y \in H$:

$$(Tx \mid y)_H = (T_1 x \mid y)_{H_1} = \int_{\mathbb{R}} \lambda \ (E(d\lambda)x \mid y)_{H_1} = \int_{\mathbb{R}} \lambda \ (F(d\lambda)x \mid y)_H$$

On a ainsi démontré la thèse.

<u>Remarques</u> : 1) Si E est une mesure spectrale, l'intégrale $\int \lambda \ E(d\lambda)$ converge au sens de la topologie forte. Par contre, si E est une mesure semi-spectrale, l'intégrale $\int \lambda \ E(d\lambda)$ ne converge que pour la topologie faible. La formule $T = \int \lambda \ E(d\lambda)$ ne signifie donc rien de plus que $(Tx \mid y) = \int \lambda \ (E(d\lambda)\, x \mid y)$

2) A un opérateur auto-adjoint correspond une et une seule mesure spectrale. Par contre à un opérateur symétrique peuvent être associées plusieurs mesures semi-spectrales. Cela tient à ce qu'il faut d'abord prolonger l'opérateur symétrique en un opérateur auto-adjoint, et que ce prolongement n'est pas unique. De même, la même mesure semi-spectrale peut être associée à plusieurs opérateurs symétriques : tous ceux qui ont le même prolongement auto-adjoint.

Si T est un opérateur auto-adjoint et E la mesure spectrale associée, on sait que E commute avec T et que pour tout vecteur $x \in H$, et tout ensemble borélien σ, le vecteur $E(\sigma)\, x$ appartient à $\mathrm{Dom}\, T$. De plus

$$(E(\sigma)\, Tx \mid y) = (T\, E(\sigma)\, x \mid y) = \int_{\sigma} \lambda \ (E(d\lambda)\, x \mid y)$$

quel que soit y H. Cette formule n'est plus valable si T est un opérateur symétrique, et E une mesure semi-spectrale. Le résultat est alors le suivant :

<u>Proposition 4.3</u> : <u>Soient</u> H <u>un espace de Hilbert</u>, T <u>un opérateur symétrique fermé dans</u> H, <u>et</u> F <u>une mesure semi-spectrale sur</u> $\mathbb{R}$ <u>telle que</u> :

$$(Tx \mid y) = \int_{\mathbb{R}} \lambda \, (F(d\lambda)\, x \mid y)$$

<u>pour</u> $x \in \mathrm{Dom}\, T$ <u>et</u> $y \in H$. <u>Soit</u> σ <u>une partie</u> $\mathbb{R}$ <u>borélienne bornée de</u> $\mathbb{R}$. <u>Alors, quel que soit</u> $x \in H$, <u>on a</u> $F(\sigma)\, x \in \mathrm{Dom}\, T^*$ <u>et</u>

$$(T^* F(\sigma)\, x \mid y) = \int_\sigma \lambda (F(d\lambda)\, x \mid y)$$

<u>pour tout</u> $y \in H$.

Soit H_1 un espace de Hilbert contenant H comme sous-espace, et E une mesure spectrale sur H_1 telle que $F(\sigma)$ soit la restriction de $P\, E(\sigma)$ à H quel que soit σ, P étant le projecteur de H_1 sur H. (En fait, nous n'avons pas démontré ici, bien que ce soit vrai, que toute mesure semi-spectrale est engendrée de celle façon par une mesure spectrale. Aussi, devons-nous supposer, à priori, que F est de ce type.) E est la mesure spectrale d'un opérateur T_1, auto-adjoint dans H_1, qui prolonge T. On a alors, pour tout $z \in \mathrm{Dom}\, T$, et tout $x \in H$:

$$(Tz \mid F(\sigma)\, x)_H = (T_1 z \mid E(\sigma)\, x)_{H_1} = (E(\sigma) T_1 z \mid x)_{H_1}$$

$$= \int_\sigma \lambda (E(d\lambda)\, z \mid x)_{H_1}$$

Mais puisque $z, x \in H$, les mesures $(E(\sigma)\, z \mid x)_{H_1}$ et $(F(\sigma)\, z \mid x)_H$ coïncident, de sorte que

$$(Tz \mid F(\sigma)\, x)_H = \int_\sigma \lambda \, (F(d\lambda)\, z \mid x)_H$$

σ étant borné, on a

$$\left| \int_\sigma \lambda \, (F(d\lambda)\, z \mid x) \right| \leqslant \sup_{\lambda \in \sigma} |\lambda| \cdot |(F(\sigma)\, z \mid x)| \leqslant \left[(\sup|\lambda|) \; \|x\|\right] \|z\|$$

Ceci montre que le second membre est une forme linéaire continue en z. Elle est donc du type $(z \mid h)$, avec $h \in H$. Il vient donc

$$(Tz \mid F(\sigma)\, x) = (z \mid h)$$

Par conséquent $F(\sigma)\, x \in \mathrm{Dom}\, T^*$, et $h = T^* F(\sigma) x$. Ainsi

$$\forall z \in H : (z \mid T^* F(\sigma) x) = \int_\sigma \lambda (F(d\lambda) z \mid x) = \int_\sigma \lambda (z \mid F(d\lambda)\, x)$$

(Car $F(\tau)$ est auto-adjoint quel que soit τ). Ceci démontre la thèse.

5. <u>Notes</u>.

La théorie des extensions d'opérateurs symétriques présentée ci-dessus, est déjà assez ancienne. Elle figure dans presque tous les ouvrages consacrés aux espaces de Hilbert.

APPENDICE 2

ESPACES LOCALEMENT PSEUDO - CONVEXES

1. p - seminormes

Nous définirons ici une catégorie d'espaces vectoriels topologiques contenant celle des espaces localement convexes et dont la théorie est semblable.

Définition 1.1 : Soit E un espace vectoriel et p un réel tel que $0 < p \leqslant 1$.

Une p - semi-norme sur E est une application υ de E dans $\mathbb{R}_+$ telle que

1) $\upsilon\,(x + y) \leqslant \upsilon(x) + \upsilon(y)$
2) $\upsilon\,(\lambda x) = |\lambda|^p\, \upsilon(x)$

L'ensemble $V = \{x \in E \mid \upsilon\,(x) \leqslant 1\}$ est alors p-convexe, ce qui signifie que

$$\left.\begin{array}{l} x,\ y \in V \\ \lambda,\ \mu \geqslant 0 \\ \lambda^p + \mu^p = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda x + \mu\, y \in V$$

Si υ est une p-semi-norme sur E, et si q est un réel tel que $0 < q \leqslant p$, $\upsilon^{q/p}$ est une q-semi-norme sur E.

(Cela résulte de ce que la fonction $y = (1 - x^r)^{1/r}$ est convexe pour $0 \leqslant x \leqslant 1$ et $r < 1$) $\upsilon^{q/p}$ est équivalente à υ en ce sens que $\upsilon^{q/p}(x) \leqslant 1 \Leftrightarrow \upsilon\,(x) \leqslant 1$.

Sur un espace vectoriel, une famille de p-semi-normes définit une topologie au même titre qu'une famille de semi-normes.

Définition 1.2. : Un espace localement p-convexe est un espace vectoriel muni de la topologie définie par une famille de p-semi-normes υ, où p est indépendant de υ. Un espace localement pseudo-convexe est un espace vectoriel muni de la topologie définie par une famille de p-semi-normes υ, où p dépend de υ.

Considérons un espace localement pseudo-convexe E et l'ensemble $\mathcal{P}$ des réels p associés aux p-semi-normes qui définissent la topologie de E. Si la borne inférieure p_o de $\mathcal{P}$ est non nulle, l'espace E est localement p_o - convexe.

2. Produits tensoriels localement pseudo - convexes

Si E et F sont deux espaces localement pseudo-convexes, nous considérons sur le produit tensoriel $E \otimes F$ les topologies localement pseudo-convexes telles que l'application bilinéaire canonique $E \times F \to E \otimes F$ soit continue. Ces topologies seront dites admissibles. La plus fine topologie admissible est la topologie projective $p\pi$ définie comme suit :

Soit V_1 un voisinage p_1- disqué (p_1-convexe et équilibré) de l'origine de E. Soit V_2 un voisinage p_2- disqué de l'origine de F. A tout $q \leqslant \min\{p_1, p_2\}$, on associe l'enveloppe q-disquée $\Gamma_q (V_1 \otimes V_2)$ de $V_1 \otimes V_2$. Un système fondamental de voisinages de 0 dans $E \otimes_\pi F$ est constitué des enveloppes $\Gamma_q (V_1 \otimes V_2)$, lorsque q parcourt l'intervalle $]0,\min\{p_1,p_2\}]$ et lorsque V_1 (resp. V_2) parcourt un système fondamental de voisinages p_1 - disqués (resp. p_2-disqués) de 0 dans E (resp. dans F). (Bien entendu p_1 et p_2 dépendent des voisinages V_1 et V_2).

Si E et F sont localement p-convexes (p fixé), $E \otimes_{p\pi} F$ l'est aussi.

Les produits tensoriels ε d'e.l.c.s. utilisent les duals des espaces considérés. Or le dual d'un espace localement pseudo-convexe ne possède pas de bonnes propriétés. Il peut même être nul sans que l'espace initial le soit. Nous ne considérons donc pas de produit tensoriel ε d'espaces localement pseudo-convexes.

3. Espaces d'application linéaires

Nous démontrerons dans ce numéro une généralisation du

théorème 6.4.2 :

<u>Théorème 3.1</u> : <u>Soient</u> E <u>un e.l.c.s nucléaire complet et</u> F <u>un espace localement pseudo-convexe complet</u>. <u>Les espaces localement pseudo-convexes</u> $E \hat{\otimes}_{p\pi} F$ <u>et</u> $L_b (E', F)$ <u>sont canoniquement isomorphes.</u>

$L_b (E',F)$ désigne ici comme au chapitre 6, l'espace des applications linéaires bornées de E' dans F (c-à-d appliquant tout équicontinu de E' sur un borné de F) muni de la topologie de la convergence uniforme sur les parties équicontinues de E'. C'est ici un espace localement pseudo-convexe, complet lorsque F est complet.

L'inversion canonique de $E \otimes F$ dans $L_b (E',F)$ est évidemment encore celle qui applique le tenseur $e \otimes f$ sur l'application linéaire $e' \to \langle e, e' \rangle f$.
Il est clair qu'elle est continue, donc que la topologie de $E \otimes_\pi F$ est plus fine que celle qui est induite par $L_b (E',F)$.

La proposition 6.4.1 montre que $E \otimes F$ est dense dans $L_\varepsilon (E'_b, F)$. D'autre part, d'après le théorème 6.4.2, $L_\varepsilon (E'_b , F) \cong L_b (E',F)$. Les démonstrations de ces deux faits n'utilisent nulle part le fait que F est localement convexe. Elles restent donc valables ici, et il reste à prouver que

$L_b(E',F)$ coïncide algébriquement et topologiquement avec $E \hat{\otimes} F$. Soit V un voisinage p-disqué de $o \in F$ et U un voisinage disqué de $o \in E$. A tout $q \leq p$, associons un voisinage disqué W de $o \in E$ tel que l'application canonique $\hat{E}_W \to \hat{E}_U$ soit de type l^q Alors la transposée $E'_U \to E'_W$ est aussi de type l^q, ce qui montre que tout application u de E' dans F qui applique l'équicontinu W^o dans V se factorise à travers une application de type l^q de $\hat{E}'_U$ dans F_V. De plus si l'application canonique $\hat{E}_W \to E_U$ s'écrivait (lemme 2-7-9) $\sum_n \lambda_n e'_n \otimes x_n$, avec $\sum_n |\lambda_n|^q < +\infty$, e'_n borné dans E'_W, x_n borné dans $\hat{E}_U$, alors u s'écrit $u = \sum_n \lambda_n x_n \otimes u(e'_n)$.
Ceci montre que $u \in E \hat{\otimes}_{p\pi} F$ et que l'ensemble des u qui appliquent W^o dans V est absorbé par l'enveloppe disquée fermée $\Gamma_q(U \otimes V)$

c.q.f.d.

Corollaire 3.2 : La topologie localement pseudo-convexe admissible la plus fine sur le produit tensoriel d'un espace nucléaire et d'un espace localement p-convexe est une topologie localement p-convexe.

Le cas particulier $p = 1$ mérite d'être énoncé indépendamment :

Corollaire 3.3 : La topologie localement pseudo-convexe admissible la plus fine sur le produit tensoriel d'un espace nucléaire et d'un espace localement convexe est une topologie localement convexe.

Remarques :

1) Si E et F sont deux e.l.c.s, dont aucun n'est nucléaire, il n'y a, a priori, aucune raison pour que le produit tensoriel localement pseudo-convexe de E et F coïncide avec leur produit tensoriel localement convexe.

J.P. KAHANE a étudié des produits tensoriels p-convexes d'espaces de Banach et a montré que $l^1 \hat{\otimes}_p l^1$ n'est pas normable, et que $l^p \hat{\otimes}_q l^p$ n'est pas p-normable si $q < p$.

Il semble vraisemblable que la topologie localement pseudo-convexe admissible la plus fine sur $l^1 \otimes l^1$ ne soit localement p-convexe pour aucun p. Ce problème reste cependant ouvert.

2) La topologie vectorielle admissible la plus fine sur $E \otimes F$ n'est généralement pas localement pseudo-convexe. Soient par exemple E et F des duaux d'espaces de Fréchet nucléaires. Alors $E = \bigcup_n B_n$, et $F = \bigcup_n C_n$, où (B_n) et (C_n) sont des systèmes fondamentaux croissants de disques équicontinus faiblement compacts. Soit alors D_n l'ensemble des $x_1 \otimes y_1 + \ldots + x_n \otimes y_n$, avec pour tout i : $x_i \in B_n$, $y_i \in C_n$.

Les ensembles D_n forment une suite croissante de parties faiblement compactes de $E \otimes F$, $E \otimes F = \bigcup_n D_n$. On montre sans trop de difficultés, en utilisant des résultats non publiés de L. WAELBROECK que la topologie la plus fine sur $E \otimes F$ qui induise sur chaque D_n sa topologie faible est une topologie vectorielle, mais n'est pas une topologie localement pseudo-convexe.

B I B L I O G R A P H I E.

[1] N. Bourbaki : Théorie des ensembles, Chapitre IV ; Structures. Hermann, Paris (1957).

[2] H. Buchwalter : Espaces vectoriels bornologiques. Publ. Dep.Math. Univ. Lyon 2, 2-53(1965).

[3] H. Buchwalter : Topologies, bornologies et compactologies. Thèse, Lyon (1968).

[4] N. Dunford and J. Schwartz : Linear operators .Interscience, New-York(1964).

[5] C. Foïas : Décompositions intégrales des familles spectrales et semi-spectrales en opérateurs qui sortent de l'espace hilbertien. Acta-Scient. Math. 20, 117-155,(1959)

[6] C. Foïas : Décompositions en opérateurs et vecteurs propres I. Rev. Roum. Math. Pures et Appl. 7, 241-282,(1962).

[7] C.FOÏAS : Décompositions en opérateurs et vecteurs propres II.Rev. Roum. Math. Pures et Appl.7,571-602,(1962).

[8] I. Gelfand et A. Kostiouchenko : Sur les décompositions en fonctions propres d'opérateurs différentiels.Doklady.Akad.Nauk.SSSR, 103, 349-352,(1959)(en russe)

[9] I. Gelfand et N. Vilenkin : Generalised functions. Applications of harmonic analysis Academic Press (1964).

[10] A. Grothendieck : Sur les applications linéaires faiblement compacts d'espaces du type $\mathscr{C}(K)$.Canadian J. of Math. 5, 129-173,(1953).

[11] A. Grothendieck : Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires. Mem.-Amer.Math. Soc. n°16(1955).

[12] A. Grothendieck : Espaces vectoriels topologiques,Sao Paulo(1964)

[13] H.Hogbe-Nlend : Complétion,nucléarité et tenseurs en bornologie, Thèse, Bordeaux, (1969).

[14] T. Kōmura und Y. Kōmura : Über die Einbettung der nukleare Räume in s^A. Math. Ann., 162, 284-288(1965).

[15] G. Köthe : Une caractérisation des espaces bornologiques. Colloque d'analyse fonctionelle, Centre belge de recherches mathématiques, 39-45, Louvain (1961).

[16] P. Loeb and B. Walsh : Exposé au séminaire d'analyse fonctionnelle de l'U.C.L.A. (Los Angeles) 1967.

[17] K. Maurin : General eigenfunction expansions and unitary representation of topological groups .Polish Scientific publishers, Varsovie, (1969).

[18] R. Minlos : Processus aléatoires généralisés et mesures. Troudi. Moskowskogo Matem. Ob.- Va, 8, 497-518,(1959)(en russe).

[19] A. Pietsch : Eine neue Characterisierung der nukleare lokalkonvexen Raüme I. Math. Nachrichten, 25,31-36(1963).

[20] A. Pietsch : Eine neue Charakterisierung der nukleare lokalkonvexen Raüme II. Math. Nachrichten, 25, 49-58(1963).

[21] A. Pietsch : Nukleare lokalkonvexe Raüme.Akademie Verlag, Berlin (1965).

[22] A. Pietsch ; Colloquium on Nuclear spaces and Ideals in operator algebras. Varsovie(1969)(à paraître dans les Studia Math. série spéciale).

[23] I. Prokhorov : Convergence des processus aléatoires et théorèmes de limites. Théorie des probabilités et applications. 1, 177-237,(1956)(en russe).

[24] R. Schatten : Norm ideals of completely continuous operators. Springer Verlag, Berlin (1960).

[25] Séminaire du Centre Belge d'Algèbre et de Topologie : Espaces vectoriels topologiques, espaces nucléaires. Bruxelles (1966).

[26] Séminaire Schwartz : Produits tensoriels topologiques. Espaces vectoriels topologiques nucléaires.Paris(1953-54).

[27] F. Trèves : Topological Vector Spaces. Distributions and Kernels, Academic Press, New-York,(1967).

[28] L. Waelbroeck : Duality and the injective tensor product. Math. Ann. 163, 122-126,(1966).

[29] L. Waelbroeck : Some theorems about bounded structures. Journal of functional Analysis, 1, 392-408,(1967).

[30] L. Waelbroeck : Fonctions différentiables et petite bornologie. Comptes-Rendus Acad. Sc.Paris 267,220-222(1968).

[31] L. Waelbroeck : The tensor product of a locally pseudo-convex and a nuclear space.Colloquium on nuclear spaces and ideals in operator algebras. Varsovie 1969 (à paraître dans les Studia Math.,série spéciale).

[32] M.Zerner : Intégration dans les espaces vectoriels de dimension infinie (Notes de cours).