2 BILAN DE MATIÈRE ET ÉNERGIE

2.1 Introduction

2.1.1 Définition d'un système

L'étude d'un phénomène physique nécessite de définir le système étudié. Il peut s'agir d'un système matériel et/ou d'une portion d'Univers.

On convient donc généralement d'une limite (frontière) qui définit ce qui intérieur et extérieur à ce système.

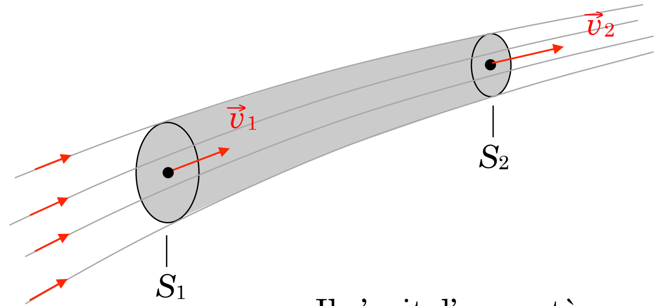
On distingue principalement deux types de systèmes :

- **systèmes fermés** : définis à partir de quantités de matière fixes et pour lesquels seuls les échanges d'énergie, d'information, etc avec le reste de l'Univers sont permis. Les échanges de matière ne sont pas possibles,
- **systèmes ouverts** : permettant tous les échanges y compris de matière.

Exemple : cas d'un fluide s'écoulant dans un tuyau.

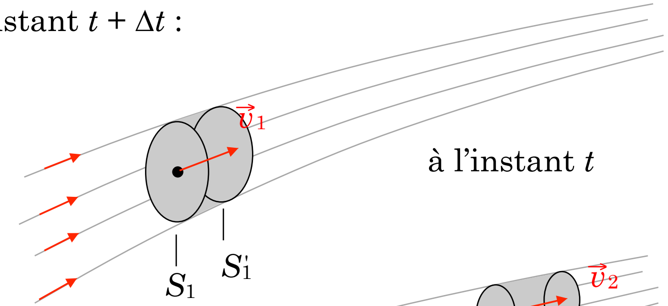
Ce système peut être considéré de deux manières en fonction de ce que l'on désire étudier :

- On s'intéresse à ce qui circule à travers une portion bien définie par les sections S_1 et S_2 du tuyau.

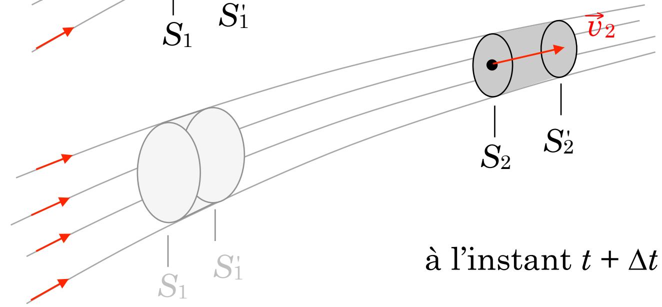


→ Il s'agit d'un système … ouvert

- On peut aussi s'intéresser à la matière comprise entre deux sections du tuyau à l'instant t et à son évolution à l'instant $t + \Delta t$:



à l'instant t



à l'instant $t + \Delta t$

→ Il s'agit d'un système … fermé

2.1.2 Notion de bilan

Il s'agit d'effectuer le bilan des échanges (matière, énergie, …) entre le système et l'extérieur. La méthode d'analyse est assez systématique et permet d'établir des lois de conservation :

- on définit le système (réservoir, entreprise, population en France)
- on identifie la grandeur G faisant l'objet du bilan (la quantité d'eau, l'argent, le nombre d'habitants)
- on définit une durée d'étude ($t_i \rightarrow t_f$)
- on quantifie ce qui est entré (quantité E) et ce qui est sorti (quantité S) pendant $\Delta t = t_f - t_i$ (apport du robinet + prélèvement, recettes + dépenses, flux migratoires)
- on quantifie les éventuelles créations / disparitions de G (fuites du récipient, vols, naissances + décès)
- on en déduit la variation de G pendant Δt :

$$\Delta G = G(t_f) - G(t_i)$$

Remarque : s'il n'y a pas de créations / disparitions de matière à l'intérieur du système, alors :

$$\Delta G = E - S$$

2.2 Exemple de bilan macroscopique de matière

2.2.1 Bilan de masse / débit massique

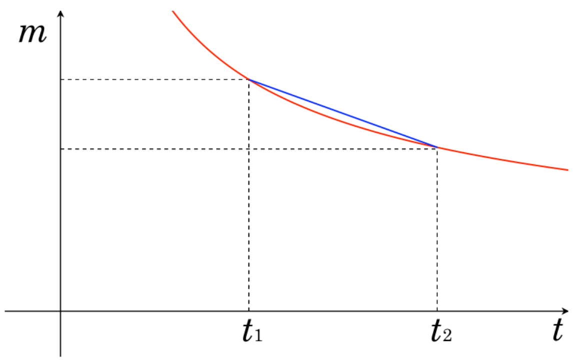
On s'intéresse à la variation de quantité de fluide (gaz ou liquide) dans un réservoir au cours du temps.
La grandeur pertinente est le débit massique D_m à travers la frontière définissant le système.

$$[D_m] = \mathrm{M\,T^{-1}} \qquad D_m \text{ en kg s}^{-1}$$

Le débit massique correspond à la variation <u>temporelle</u> de masse du système et représente la quantité de matière qui pénètre et/ou sort à travers la surface délimitant celui-ci par unité de temps.

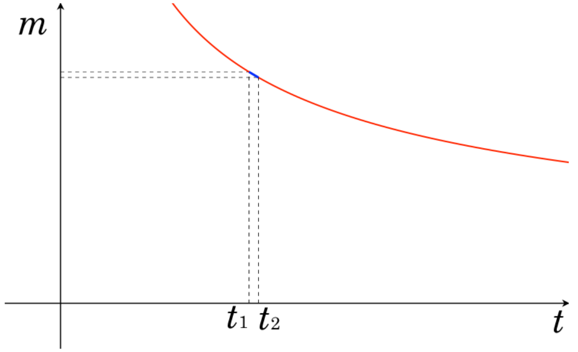
D_m peut correspondre à un débit massique moyen $\overline{D_m}$ calculé entre deux instants t_1 et t_2 :

$$\overline{D_m} = \frac{m(t_2) - m(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta m}{\Delta t}$$

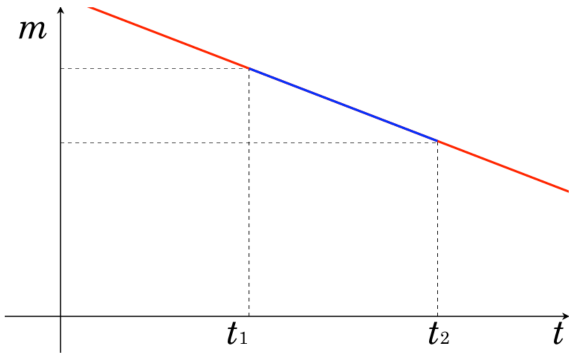


Quand l'intervalle de temps devient infinitésimal, on obtient le débit massique instantané :

$$D_m = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{dm}{dt}$$



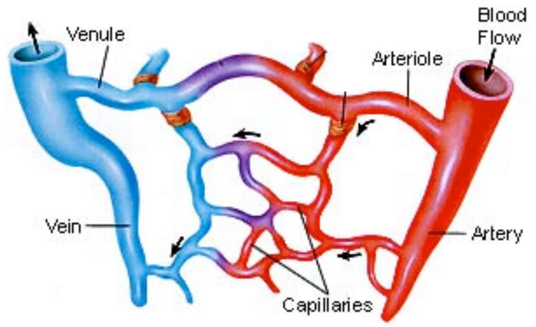
Ce débit massique instantané est égal au débit massique moyen quand le débit est constant



Il se décompose en flux rentrants et en flux sortants : un flux rentrant est compté positivement alors qu'un flux sortant est compté négativement.

Le débit massique total est la somme des différents débits massiques intervenant dans le système :

$$D_m = \sum_i D_m^i$$



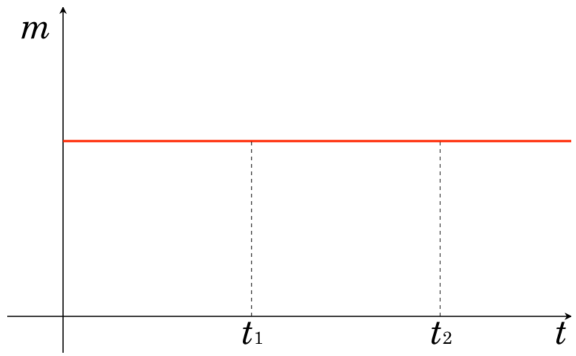
L'intensité électrique qui correspond à la charge électrique totale traversant la section d'un conducteur par unité de temps est un bon analogue du débit massique.

Cas particulier de l'état stationnaire

Celui-ci correspond au cas où la quantité de fluide dans le réservoir est constante.

→ tout ce qui arrive dans le réservoir ressort. Les débits massiques rentrant et sortant sont égaux en valeur absolue :

$$D_m = D_m^+ + D_m^- = 0$$



Cet état ne correspond pas à un état d'équilibre (au sens thermodynamique) car il y a transport de matière.

→ *exemple de la baignoire dans laquelle le débit d'eau rentrant est supérieur au débit de sortie de l'évacuation.*

2.2.2 Débit volumique

Les considérations précédentes peuvent être étendues à la notion de débit volumique. Le débit volumique d'un fluide de masse volumique ρ est relié au débit massique par la relation suivante :

$$D_m = \rho \cdot D_v$$

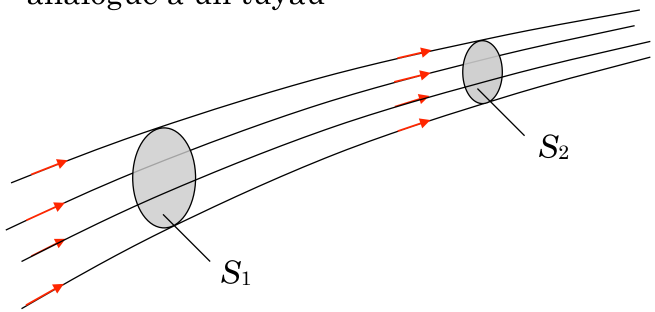
$[D_v] = \mathrm{L}^3\,\mathrm{T}^{-1}$ D_v en m^3 s^{-1}

2.2.3 Conservation du débit

Lignes et tubes de courant

On considère un fluide parfait en écoulement stationnaire (invariant dans le temps). Dans l'ensemble de ce fluide en mouvement, on isole un **tube de courant** : partie élémentaire du fluide en mouvement, construit sur les lignes de courant (courbe tangente aux vecteurs vitesse de chaque particule de fluide).

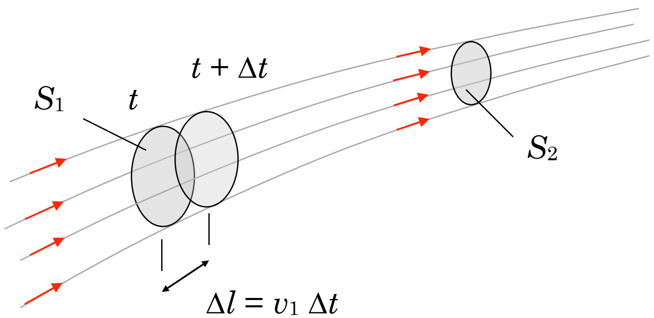
→ analogue à un tuyau



Par construction, comme les lignes de courant sont tangentes aux vecteurs vitesse, aucune particule de fluide de peut sortir du tube de courant.

Tout ce qui passe par S_1 passe par S_2.

Entre l'instant t et l'instant $t + \Delta t$,



Pendant l'intervalle de temps Δt, la masse de fluide Δm qui s'écoule à travers S_1 est :

$$\Delta m = \rho \, S_1 \, \Delta l = \rho \, S_1 \, v_1 \, \Delta t$$

La quantité $\rho S v$ correspond au **débit massique** D_m

Pour un écoulement stationnaire, la conservation du débit massique entre les surfaces S_1 et S_2 impose :

$$D_m(S_1) = D_m(S_2)$$

Pour un fluide incompressible : $\rho = C^{te}$, il s'ensuit que :

$$D_v(S_1) = D_v(S_2)$$

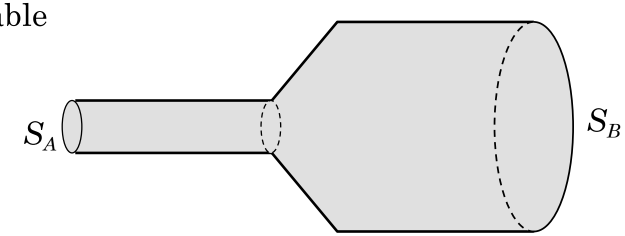
ou encore : $S_1 \, v_1 = S_2 \, v_2$

Remarque :

Pour un gaz, la conservation du débit massique est vérifiée mais pas forcément celle du débit volumique.

Application :

Liquide circulant dans un tuyau de section circulaire variable



$$D_m^A = \rho \, D_v^A = D_m^B = \rho \, D_v^B \quad \Rightarrow \quad S_A \, v_A = S_B \, v_B$$

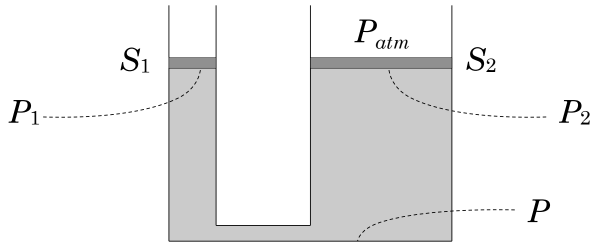
$$\pi \, R_A^2 \cdot v_A = \pi \, R_B^2 \cdot v_B \quad \Rightarrow \quad v_A = v_B \, \frac{R_B^2}{R_A^2}$$

$$R_A < R_B \quad \Rightarrow \quad v_A > v_B$$

2.3 Exemple de bilan macroscopique d'énergie

2.3.1 Levier hydraulique

Ce type de dispositif très répandu (frein, vérin, …) met à profit le principe de Pascal. Il est constitué d'une enceinte fermée contenant un liquide incompressible réparti dans deux pistons de sections différentes S_1 et S_2.



Effet sur la transmission de la force

Sans intervention extérieure, l'état d'équilibre est tel que les hauteurs de fluides sont identiques dans chaque piston. Au sommet de chaque colonne de fluide :

$$P_1 = P_2 = P_{atm}$$

On néglige le poids des pièces assurant l'étanchéité de l'ensemble.

Un opérateur exerce une force $\vec{F}_1$ verticale dirigée vers le bas sur le piston 1. La pression résultante dans le fluide en S_1 est augmentée :

$$P_1' = P_{atm} + \frac{F_1}{S_1}$$

Cette augmentation de pression se transmet (presque) instantanément à l'ensemble du fluide. La pression dans le fluide en S_2 est égale à :

$$P_2' = P_1'$$

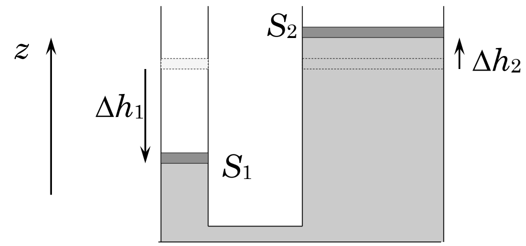
Il en résulte l'existence d'une force exercée au niveau du piston 2 telle que :

$$\frac{F_1}{S_1} = \frac{F_2}{S_2} \qquad \Rightarrow \qquad F_2 = F_1 \frac{S_2}{S_1}$$

Pour un rapport de rayons de piston $R_2/R_1 = 10$, on obtient une force F_2 100 fois supérieure à F_1.

Effet sur le déplacement de fluide

Sous l'action de l'opérateur, la surface S_1 se déplace vers le bas de la hauteur Δh_1.



Le volume de fluide déplacé dans le piston 1 est donc :

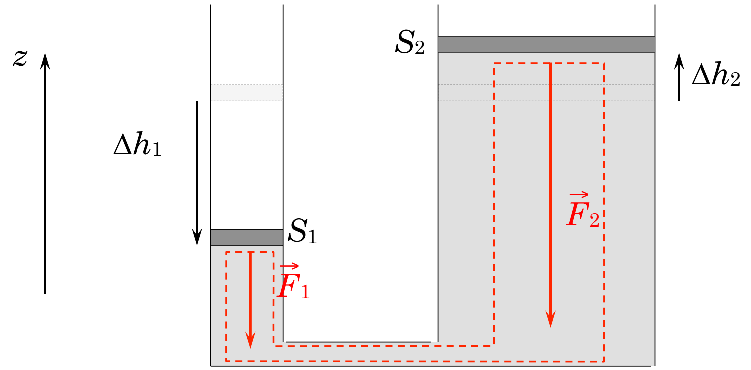
$$V = S_1\,\Delta h_1$$

Comme le fluide est incompressible, le volume total du système est inchangé. Il en résulte un déplacement vers le haut de la surface S_2 correspondant à un volume de fluide déplacé identique dans le piston 2. Le déplacement Δh_2 est tel que :

$$V = S_1\,\Delta h_1 = S_2\,\Delta h_2 \qquad \Rightarrow \qquad \Delta h_2 = \Delta h_1\,\frac{S_1}{S_2}$$

Pour un rapport $R_2/R_1 = 10$, $\Delta h_1 = 100\,\Delta h_2$!

Aspects énergétiques



Pour prendre correctement en compte les forces auxquelles est soumis le fluide, on considère la partie (volume) du fluide délimitée par les pointillés.

On néglige le poids des colonnes de fluides et la différence de dénivellation due au déplacement de S_1 et S_2.

Au cours du déplacement vers le bas de S_1, le travail de la force de pression $\vec{F}_1$ est :

$$W_1 = \vec{F}_1 \cdot \vec{\Delta h}_1 = (-F_1\,\vec{e}_z)\cdot(-\Delta h_1\,\vec{e}_z) = F_1\,\Delta h_1 \qquad (> 0)$$

Lors de la montée de S_2, le travail de la force $\vec{F}_2$ est :

$$W_2 = \vec{F}_2 \cdot \vec{\Delta h}_2 = (-F_2\,\vec{e}_z)\cdot \Delta h_2\,\vec{e}_z = -F_2\,\Delta h_2 \qquad (< 0)$$

On en déduit que :

$$W_1 = -\,W_2 \qquad \Rightarrow \qquad \mathrm{W} = W_1 + W_2 = 0$$

Le travail total des forces est donc nul : le fluide transmet intégralement le travail sans perte (on a négligé les frottements liés à la viscosité du fluide)

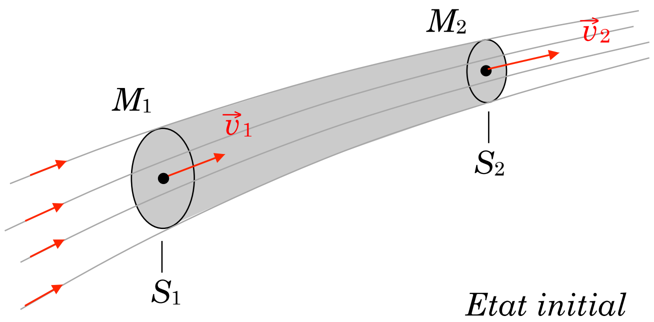
2.4 Théorème de Bernoulli

2.4.1 Théorème de Bernoulli (Daniel 1700 – 1782)

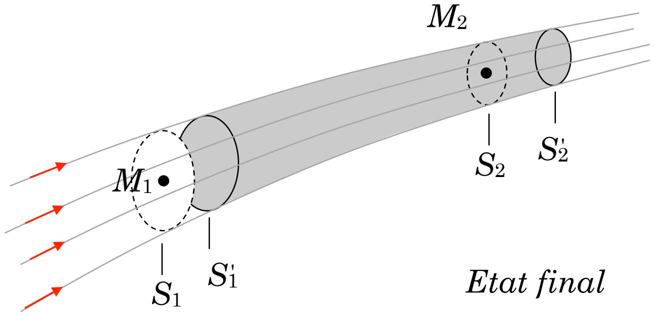
On considère un fluide parfait, incompressible et en écoulement stationnaire dans un champ de pesanteur uniforme.

On s'intéresse au déplacement du volume de fluide (masse dm et volume dV) compris entre les surfaces S_1 et S_2 à l'instant t :

- S_1 centrée autour du point M_1 de cote z_1 soumis à la pression P_1, vitesse du fluide = v_1
- S_2 centrée autour du point M_2 de cote z_2 soumis à la pression P_2, vitesse du fluide = v_2



À l'instant t + Δt, le volume de fluide a avancé : il occupe maintenant le volume compris entre S'_1 et S'_2 :



On veut déterminer la variation d'énergie mécanique du système.

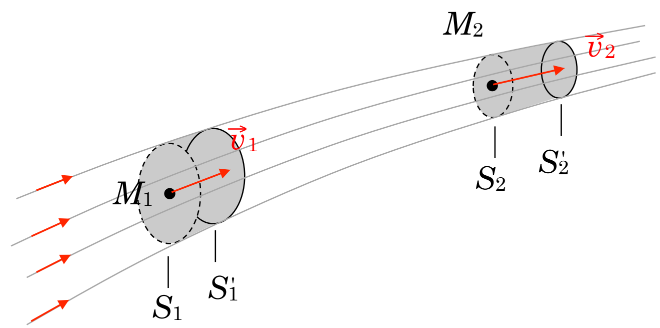
Celui-ci est soumis à :

- son poids
- les forces de pression exercées sur la surface du tube de courant :
  - $P_1 \cdot S_1$ en M_1, dirigée dans le sens de $\vec{v}_1$
  - $P_2 \cdot S_2$ en M_2, dirigée dans le sens opposé à $\vec{v}_2$
  - les forces exercées sur les parois latérales du tube, ces dernières étant perpendiculaires en chaque point au vecteur vitesse, leur travail sera nul

Remarques :

- Comme le fluide est incompressible, il y a conservation des débits massique et volumique.
- La masse dm et le volume dV considérés à l'instant initial sont les identiques à ceux de l'état final

En termes d'énergie mécanique, tout se passe comme si on avait déplacé la masse située dans le volume compris entre S_1 et S'_1 vers le volume compris entre S_2 et S'_2



Bilan énergétique :

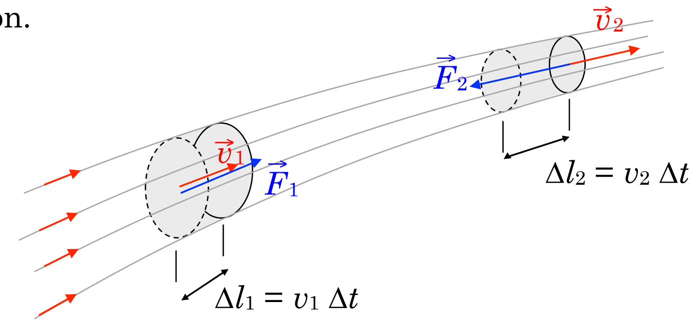
- Variation d'énergie potentielle :

$$\Delta Ep_{(i \to f)} = dm\, g\, (z_2 - z_1)$$

- Variation d'énergie cinétique :

$$\Delta Ec_{(i \to f)} = \frac{1}{2}\, dm\, (v_2^2 - v_1^2)$$

Cette variation d'énergie mécanique est compensée par le travail des forces extérieures en l'occurrence les forces de pression.



$\vec{F}_1$ dans le sens du déplacement :

$$W_1 = + F_1\, \Delta l_1 = + P_1\, S_1\, v_1\, \Delta t = + P_1\, D_V\, \Delta t = P_1 \frac{dm}{\rho} \quad (>0)$$

$\vec{F}_2$ opposée au déplacement :

$$W_2 = - F_2\, \Delta l_2 = - P_2\, S_2\, v_2\, \Delta t = - P_2\, D_V\, \Delta t = - P_2 \frac{dm}{\rho} \quad (<0)$$

Le travail total des forces de pression est :

$$W_P = W_1 + W_2 = (P_1 - P_2) \frac{dm}{\rho}$$

D'où, finalement :

$$\Delta Ep_{(i \to f)} + \Delta Ec_{(i \to f)} = W_P$$

$$dm\, g\, (z_2 - z_1) + \frac{1}{2}\, dm\, (v_2^2 - v_1^2) = (P_1 - P_2) \frac{dm}{\rho}$$

soit :

$$(P_2 - P_1) + \rho\, g\, (z_2 - z_1) + \frac{1}{2} \rho\, (v_2^2 - v_1^2) = 0$$

ou encore :

$$P_1 + \rho\, g\, z_1 + \frac{1}{2} \rho\, v_1^2 = P_2 + \rho\, g\, z_2 + \frac{1}{2} \rho\, v_2^2 = \mathrm{C^{te}}$$

Relation de Bernoulli, valable pour un fluide parfait, incompressible en écoulement stationnaire dans un champ de pesanteur uniforme.

La quantité $P + \rho\, g\, z + \frac{1}{2} \rho\, v^2$ est conservée le long d'une ligne de courant.

Effectuons une analyse dimensionnelle de cette équation. Tous les termes de cette équation sont homogènes à une pression, c'est-à-dire à une **force / unité de surface** ce qui est équivalent à une **énergie /unité de volume**.
Il apparaît ainsi que l'équation de Bernoulli traduit la conservation de l'énergie : pour un fluide parfait, le travail des forces extérieures (forces de pression) correspond à la variation d'énergie mécanique du fluide.

Autrement dit, une variation de pression est capable de :

- modifier l'énergie potentielle d'un fluide (aspiration dans une paille)
- modifier la vitesse d'écoulement d'un fluide

  → on parle de **pression motrice**

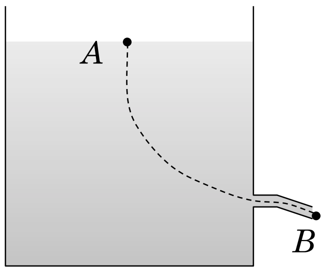
Remarque :

La relation de Bernoulli exprime la conservation de la charge hydraulique totale ou charge :

$$\frac{P_1}{\rho\, g} + z_1 + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{P_2}{\rho\, g} + z_2 + \frac{v_2^2}{2g} = \mathrm{C^{te}}$$

2.4.2 Applications

- Vidange d'un réservoir



On suppose le réservoir très grand de telle sorte que $v_A \approx 0$:

en A : $P_A = P_{atm}$, $z = z_A$, $v = v_A = 0$

en B : $P_B = P_{atm}$, $z = z_B$, $v = v_B$

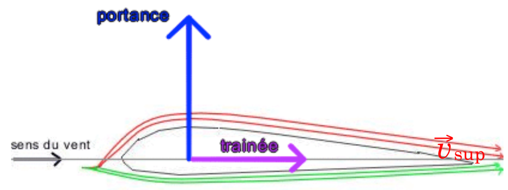
La relation de Bernoulli appliquée de A à B :

$$P_A + \rho\, g\, z_A + \frac{1}{2}\rho\, v_A^2 = P_B + \rho\, g\, z_B + \frac{1}{2}\rho\, v_B^2$$

d'où :

$$v_B = \sqrt{2\, g\, (z_A - z_B)} = \sqrt{2\, g\, h} \quad \text{(Formule de Torricelli)}$$

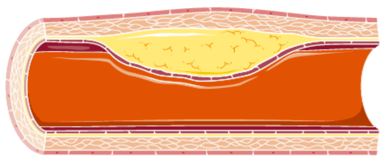
- Portance d'une aile



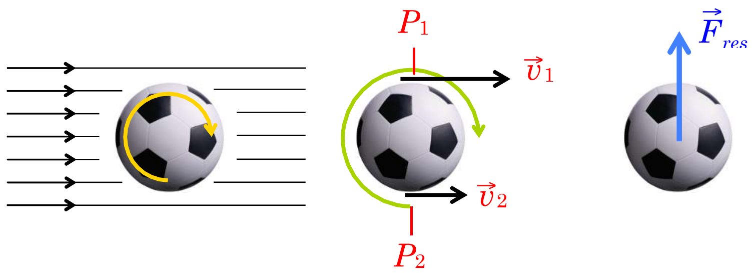
$v_{sup} > v_{inf} \quad \Rightarrow \quad P_{sup} < P_{inf}$

$\vec{v}_{inf}$

- Athérosclérose

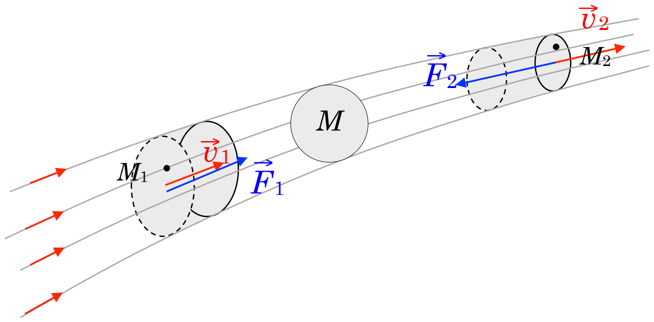


- Effet Magnus ou effet "Roberto Carlos"



2.4.3 Équation de Bernoulli généralisée

On considère un fluide parfait, incompressible et en écoulement stationnaire dans un champ de pesanteur uniforme. Une machine hydraulique (pompe ou turbine) de puissance P_M est insérée entre les deux extrémités du tube courant considéré :



La variation d'énergie mécanique totale entre les points M_1 et M_2 est :

$$\Delta Ep_{(1\to 2)} + \Delta Ec_{(1\to 2)} = W_P + W_M$$

où : - W_P représente le travail des forces de pression

- W_M représente le travail de la machine hydraulique

$$W_M = P_M \cdot \Delta t$$

Dans ce cas, en reprenant les expressions trouvées p. 17, il vient :

$$dm\ g\ (z_2 - z_1) + \frac{1}{2}\ dm\ (v_2^2 - v_1^2) = (P_1 - P_2)\ D_V\ \Delta t + P_M \cdot \Delta t$$

En considérant que $dm = \rho \cdot D_V \cdot \Delta t$, on obtient la relation de Bernoulli généralisée entre les points M_1 et M_2 :

$$(P_2 - P_1) + \rho\, g\, (z_2 - z_1) + \frac{1}{2}\rho\, (\, v_2^2 - v_1^2\,) = \frac{P_M}{D_V}$$

ou encore

$$P_1 + \rho\, g\, z_1 + \frac{1}{2}\rho\, v_1^2 + \frac{P_M}{D_V} = P_2 + \rho\, g\, z_2 + \frac{1}{2}\rho\, v_2^2$$

où :

- P_M représente la puissance (algébrique) de la machine
- D_V représente le débit volumique de l'écoulement

Remarque :

La puissance P_M sera comptée :

- positivement dans le cas d'une pompe apportant de l'énergie mécanique au fluide sous forme d'énergie cinétique et/ou d'énergie potentielle,
- négativement dans le cas d'une turbine permettant de transformer l'énergie mécanique du fluide en énergie mécanique utile via un alternateur (barrage hydro-électrique) ou un dispositif (moulin à farine).