

### 3 HYDRODYNAMIQUE

Dans ce chapitre, nous nous intéresserons aux écoulements de fluides réels pour lesquels la viscosité ne sera plus négligée.

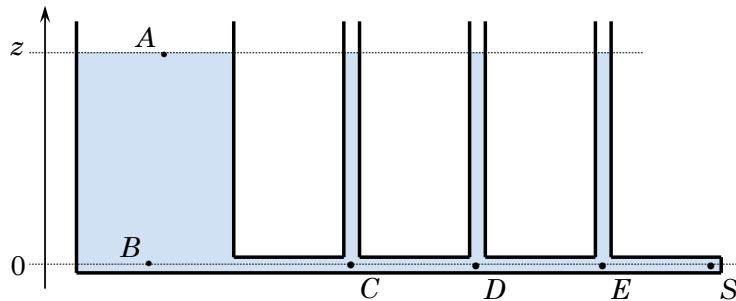
#### 3.1 Viscosité – Pertes de charge

##### 3.1.1 Mise en évidence expérimentale

On considère un réservoir à niveau constant pouvant se déverser dans une canalisation horizontale de section constante et sur laquelle sont disposées des tubes servant de prises de pression en  $C$ ,  $D$  et  $E$ .

Dans un premier temps, nous allons étudier l'écoulement du fluide parfait et comparer avec le cas expérimental où le fluide est supposé réel.

Initialement, la canalisation est fermée à sa sortie  $S$ .



Selon le principe de Pascal, les hauteurs de fluides dans les prises de pression sont au même niveau que celle du réservoir. En effet, entre les points  $A$  et  $B$ , en vertu de la relation fondamentale de l'hydrostatique :

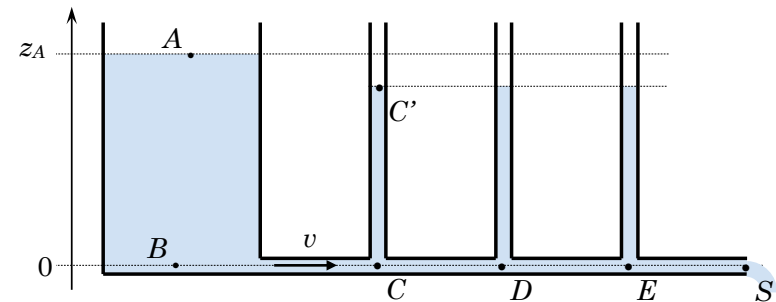
$$P_A + \rho g z_A = P_B + \rho g z_B$$

avec  $P_A = P_{atm}$ ,  $z_B = 0$ , il vient :

$$P_B = P_{atm} + \rho g z_A$$

Les points  $C$ ,  $D$  et  $E$  étant à la même cote que  $B$ , les pressions  $P_B$ ,  $P_C$ ,  $P_D$  et  $P_E$  sont égales.

La canalisation est maintenant ouverte en  $S$ , le niveau du réservoir reste lui constant ( $z_A = C^{te}$ )



La relation de Bernoulli exprimée de  $A$  à  $C$  s'écrit :

$$\begin{aligned} P_A + \rho g z_A + \frac{1}{2} \rho v_A^2 &= P_B + \rho g z_B + \frac{1}{2} \rho v_B^2 \\ &= P_C + \rho g z_C + \frac{1}{2} \rho v_C^2 \end{aligned}$$

avec  $P_A = P_{atm}$ ,  $v_A = v_B = 0$ ,  $z_B = z_C = 0$ , il vient :

$$P_{atm} + \rho g z_A = P_B = P_C + \frac{1}{2} \rho v_C^2$$

d'où :

$$P_C = P_{atm} + \rho g z_A - \frac{1}{2} \rho v_C^2$$

On en déduit la hauteur d'eau en  $C'$  à l'aplomb du point  $C$  en appliquant la relation fondamentale de l'hydrostatique valable dans le tuyau assurant la prise de pression :

$$P_C = P_{atm} + \rho g z_{C'}$$

d'où :

$$\rho g z_{C'} = \rho g z_A - \frac{1}{2} \rho v_C^2$$

ou encore :

$$z_{C'} = z_A - \frac{1}{2g} v_C^2 \quad \text{inférieure à } z_A.$$

Comme le tuyau est horizontal ( $z$  constant,  $z = 0$ ), que sa section est constante et donc  $v$  constante, on en déduit que les pressions en  $C$ ,  $D$  et  $E$  sont identiques :

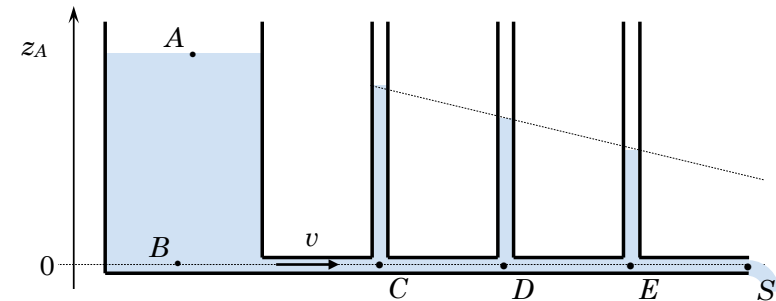
$$P_C + \frac{1}{2} \rho v_C^2 = P_D + \frac{1}{2} \rho v_D^2 = P_E + \frac{1}{2} \rho v_E^2$$

Il apparaît ainsi que pour l'écoulement d'un fluide parfait, la hauteur de fluide dans les prises de pression devrait être constante.

Or, on constate expérimentalement (cf. expérience de cours) qu'il n'en est rien. Les hauteurs de fluide dans les prises de pression diminuent au fur et à mesure,

proportionnellement à la longueur de l'écoulement traduisant le fait que la pression diminue dans la canalisation.

$$P_C = P_{atm} + \rho g h_C, \quad P_D = P_{atm} + \rho g h_D, \quad \dots$$



En extrapolant, on constaterait, que pour une certaine longueur de canalisation, l'écoulement n'est plus possible, la pression dans le tuyau chutant jusqu'à  $P_{atm}$  de telle sorte qu'il n'y ait plus de pression motrice ( $\Delta P = P_A - P_S = 0$ )

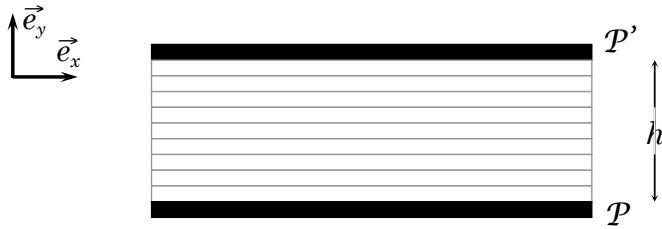
Cette observation est en contradiction avec la relation de Bernoulli :  $P + \rho g z + \frac{1}{2} \rho v^2 = C^{te}$

Avec  $z$  et  $v$  constants, on devrait avoir  $P$  constante

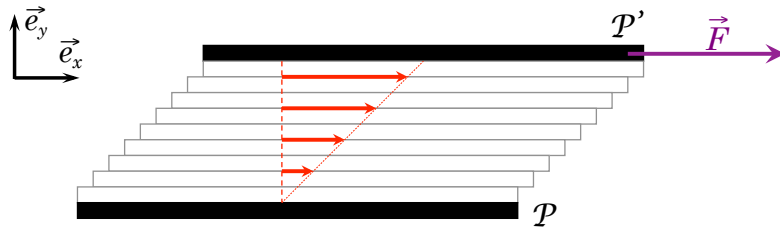
- À quoi est due cette perte de pression motrice ?
- Ce sont les forces dues à la viscosité qui "freinent" le fluide et dissipent l'énergie. On dit qu'il y a une perte de charge ou perte de pression motrice  $\Delta P$ .

### 3.1.2 Coefficient de viscosité dynamique

Soit une couche de fluide homogène, d'épaisseur  $h$ , répartie entre deux plaques  $\mathcal{P}$  (fixe) et  $\mathcal{P}'$  (mobile).



On fait glisser la plaque  $\mathcal{P}'$  en exerçant une force  $\vec{F}$ .



On constate qu'il existe un gradient de vitesse entre les différentes couches de fluides : la vitesse augmente linéairement entre la plaque fixe ( $\vec{v}(0) = \vec{v}_P = \vec{0}$ ) et celle de la plaque mobile ( $\vec{v}(h) = \vec{v}_{P'}$ )

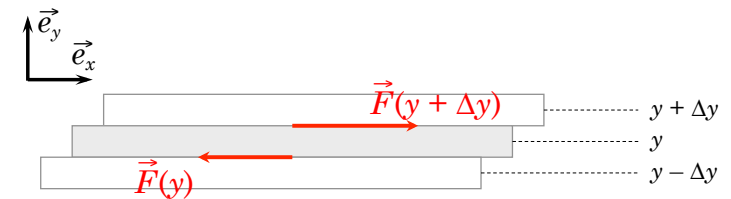
Par ailleurs, on constate expérimentalement que pour déplacer la plaque  $\mathcal{P}'$  à vitesse constante, il faut exercer une force  $\vec{F}$  constante proportionnelle à :

- la surface  $S$  de la plaque  $\mathcal{P}'$ ,
- la vitesse  $v$  de la plaque  $\mathcal{P}'$ ,
- l'inverse de l'épaisseur  $h$  de la couche de fluide

$$F = \eta \frac{Sv}{h} \quad (\text{en toute rigueur } F = \eta S \frac{dv}{dy})$$

Le coefficient  $\eta$  est appelé coefficient de viscosité dynamique du fluide.  $[\eta] = M T^{-1} L^{-1}$  ;  $\eta$  en  $\text{Pa} \cdot \text{s}$

Schématiquement, on peut modéliser les interactions entre couches de la façon suivante :



La couche à la cote  $y$  est soumise :

- à la force de surface tangentielle exercée par la couche inférieure (cote  $y - \Delta y$ ) qui la ralentit
- à la force exercée par la couche inférieure (cote  $y + \Delta y$ ) qui l'entraîne.

Ordres de grandeur :

gaz

- vapeur d'eau (100°C) .....  $13 \cdot 10^{-6} \text{ Pa} \cdot \text{s}$
- air (20°C) .....  $18 \cdot 10^{-6} \text{ Pa} \cdot \text{s}$
- hydrogène .....  $9 \cdot 10^{-6} \text{ Pa} \cdot \text{s}$

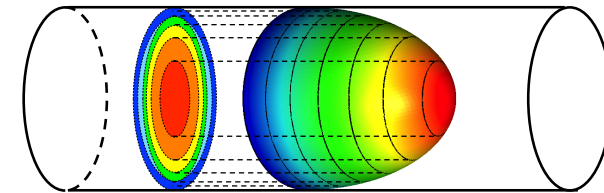
Liquide

- $^4\text{He}$  superfluide (2.17 K) .....  $0 \text{ Pa} \cdot \text{s} !!!$
- eau (100°C) .....  $0.28 \cdot 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}$
- eau (20°C) .....  $10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}$
- essence (20°C) .....  $0.6 \cdot 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}$
- sang (27°C) .....  $2.08 \cdot 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}$
- glycérine .....  $1.69 \text{ Pa} \cdot \text{s}$
- miel .....  $10 \text{ Pa} \cdot \text{s}$
  
- Manteau terrestre .....  $10^{20} \text{ Pa} \cdot \text{s}$

### 3.1.3 Loi de Poiseuille

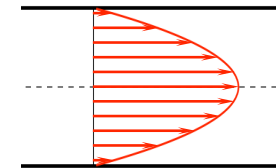
Cette loi établie indépendamment au 19<sup>ème</sup> siècle par Poiseuille et Hagen concerne l'écoulement laminaire en régime permanent d'un fluide visqueux incompressible dans un tuyau étroit de section circulaire.

Pour ce type d'écoulement laminaire, on fait l'hypothèse que les couches de fluides glissent les unes sur les autres à des vitesses différentes :



Sur cette figure, les couleurs indiquent la vitesse : bleu foncé : vitesse nulle, rouge : vitesse maximale

Dans le tuyau, le profil des vitesses est parabolique :



$$v(r) = K \cdot (a^2 - r^2)$$

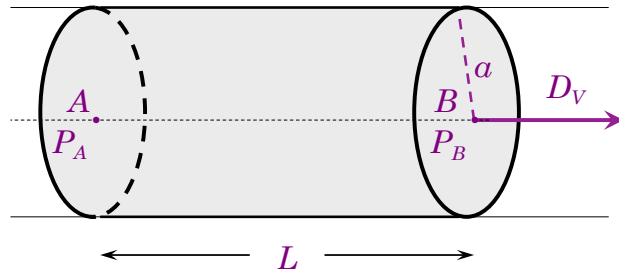
avec  $a$  : rayon du tube

$r$  : distance par rapport à l'axe du tube

La vitesse est nulle sur la paroi du tube (en  $r = a$ ) et maximale au centre du tube (en  $r = 0$ ).

La démonstration fait l'objet de l'exercice 4.1 de la séance de TD #4.

Considérons une portion de canalisation cylindrique de rayon  $\alpha$ , de longueur  $L$  et dans laquelle circule un fluide de viscosité dynamique  $\eta$  avec le débit  $D_V$ .



À cause des frottements, le fluide subit une perte de pression motrice (perte de charge) dépendant des caractéristiques de l'écoulement. La loi de Poiseuille relie la perte de charge au débit volumique :

$$\Delta P = P_A - P_B = \frac{8\eta}{\pi\alpha^4} L \cdot D_V$$

La perte de charge entre A et B est proportionnelle à la longueur de l'écoulement (cf. § 3.1.1), la viscosité du fluide, au débit volumique et au rayon<sup>-4</sup>.

On peut écrire cette équation sous la forme :

$$D_V = \frac{\pi\alpha^4}{8\eta} \frac{\Delta P}{L}$$

**Remarques :**

- cette relation permet de déterminer la pression minimale pour faire circuler un fluide de viscosité donnée avec un débit donné dans une canalisation circulaire de géométrie connue.

**Application :**

Quelle pression minimale est nécessaire pour obtenir l'écoulement d'une huile visqueuse ( $\eta = 1 \text{ Pa} \cdot \text{s}$ ) dans un tuyau de longueur  $L = 1 \text{ m}$ , de diamètre  $d = 1 \text{ cm}$  avec un débit  $D_V = 0.1 \text{ L} \cdot \text{s}^{-1}$  ?

$$\Delta P = \frac{8 \cdot 1}{\pi(10^{-2}/2)^4} 10^{-4} = 4.07 \text{ bar}$$

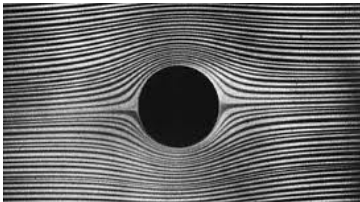
avec de l'eau : 1000 × moins ...

## 3.2 Écoulements complexes

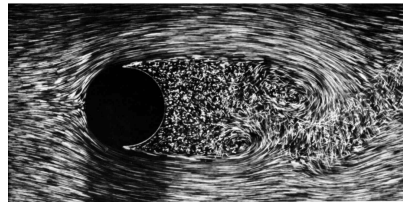
### 3.2.1 Écoulements laminaires et turbulents

Pour des écoulements en apparence similaire, la nature des écoulements varie avec différents paramètres :

- **Vitesse** : écoulement autour d'un obstacle

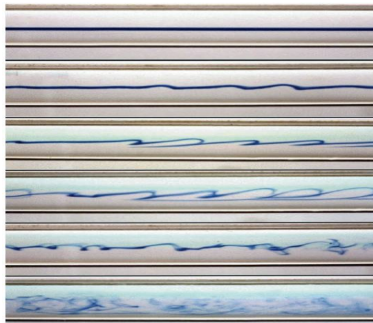


faible vitesse :  
laminaire



vitesse élevée :  
turbulent  
→ tourbillons

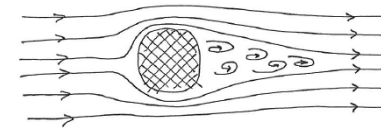
- **Vitesse** : écoulement dans un tuyau :



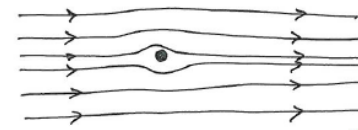
Avec l'augmentation de la vitesse, l'écoulement passe de laminaire à turbulent

- **Taille de l'obstacle**

écoulement autour d'un obstacle :



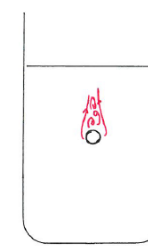
- vitesse élevée
- "gros" objet  
→ turbulence



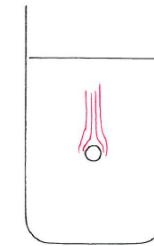
- vitesse élevée
- "petit objet"  
→ peu/pas de turbulence

- **Viscosité du fluide**

bille tombant dans un liquide



eau



miel

Les expériences ont en outre montré que la densité du fluide concerné intervenait également.

Autres exemples : [essais en soufflerie de l'ONERA](#)

### 3.2.2 Nombre de Reynolds (1883)

Reynolds a montré que la nature de l'écoulement dépendait du rapport :

$$R_E = \frac{\rho v L}{\eta} \quad \text{nombre de Reynolds}$$

où :  $\rho$  : masse volumique du fluide ( $M \cdot L^{-3}$ )

$v$  : vitesse moyenne de l'écoulement ( $L \cdot T^{-1}$ )

$L$  : taille de l'objet ou diamètre de la conduite ( $L$ )

$\eta$  : viscosité dynamique du fluide ( $M \cdot L^{-1} \cdot T^{-1}$ )

$R_E$  : sans dimension

Le nombre de Reynolds caractérise le type d'écoulement auquel on a affaire :

- $R_E < 2000$ , l'écoulement est visqueux, la viscosité est prépondérante, l'écoulement est laminaire,
- $R_E > 2000$ , la viscosité est négligeable, on a généralement un écoulement turbulent.

### Application :

Déterminer la nature laminaire ou turbulente d'un écoulement d'eau circulant dans un tuyau de diamètre  $d = 12 \text{ mm}$  pour deux débits de  $0.2$  et  $10 \text{ L min}^{-1}$

Données :  $\rho_{\text{eau}} = 1000 \text{ kg m}^{-3}$ ,  $\eta_{\text{eau}} = 10^{-3} \text{ Pa s}$

- On utilise la définition du nombre de Reynolds :

$$R_E = \frac{\rho v L}{\eta}$$

- $L = d = 12 \cdot 10^{-3} \text{ m}$

- On calcule  $v$  à partir du débit volumique :

$$D_V = S v = \pi \frac{d^2}{4} v \quad \text{avec } S : \text{section du tuyau}$$

$$\rightarrow v = \frac{4 D_V}{\pi d^2}$$

$$\rightarrow R_E = \frac{4 \rho D_V d}{\pi d^2 \eta} = \frac{4 \rho D_V}{\pi d \eta}$$

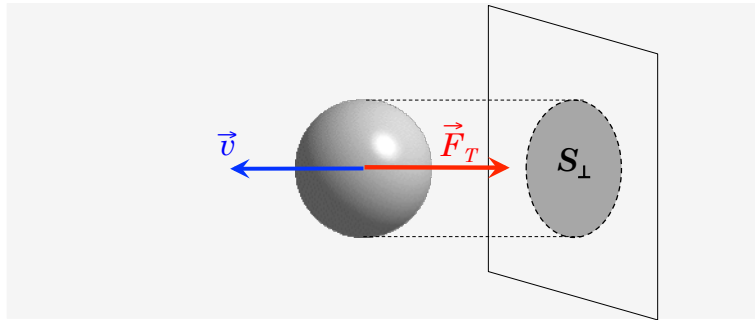
avec  $D_V = 3.33 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$  ou  $= 166.6 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$

d'où :  $R_E = 353$  pour  $D_v = 0.2 \text{ L min}^{-1} \rightarrow \approx$  laminaire  
 $R_E = 17683$  pour  $D_v = 10 \text{ L min}^{-1} \rightarrow$  turbulent

### 3.3 Résistance au mouvement dans les fluides

#### 3.3.1 Force de trainée, coefficient de trainée

On considère un solide constitué d'une sphère de rayon  $R$  se déplaçant dans un fluide visqueux à la vitesse  $\vec{v}$  (cela revient à considérer le fluide s'écoulant autour de cet obstacle solide).



Le solide subit une force, s'opposant au déplacement, appelée force de trainée due à la viscosité du fluide :

$$F_T = \frac{1}{2} \rho_f C_x v^2 S_{\perp}$$

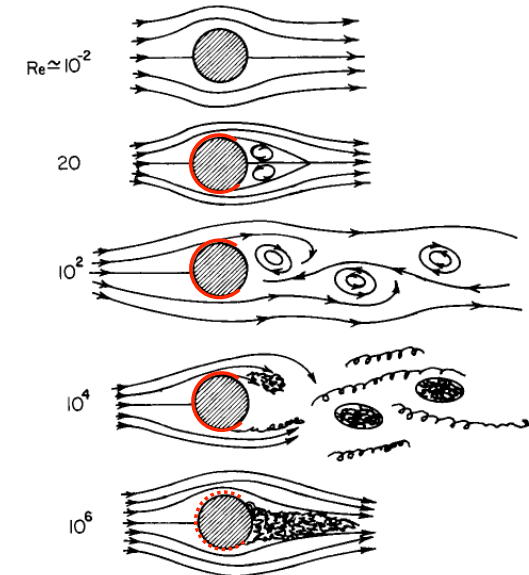
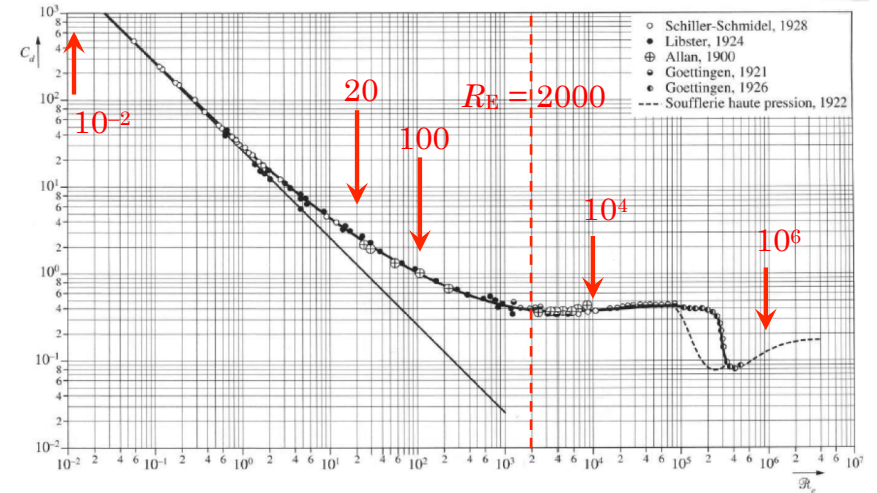
où  $\rho_f$  : masse volumique du fluide

$C_x$  : coefficient de trainée, de friction

$v$  ou  $v_{\infty}$  : vitesse du solide dans le fluide ou  
vitesse du fluide loin du solide

$S_{\perp}$  : surface projetée du solide sur le plan  
perpendiculaire à  $\vec{v}$  ou  $\vec{v}_{\infty}$ .

Le coefficient  $C_x$  (sans dimension) varie avec le nombre de Reynolds caractérisant l'écoulement :





$R_E \approx 10^{-2}$  :

régime laminaire, la viscosité est prépondérante

$Cx$  est très important :  $Cx = 24/R_E$

$R_E \approx 10 - 20$  :

régime laminaire, il existe une couche limite concernée par la viscosité. Ailleurs, écoulement sans frottement. Des tourbillons symétriques apparaissent derrière le solide

$R_E \approx 100$  :

régime laminaire, couche limite, des tourbillons dits de Von Karman apparaissent dans le sillage du solide

$R_E \approx 10^4$  :

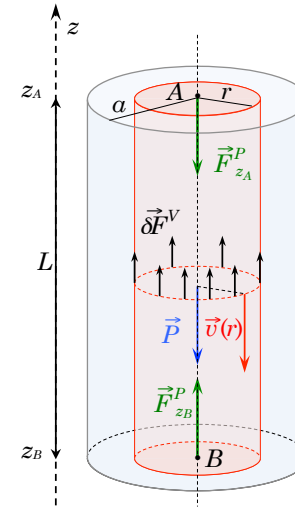
régime turbulent, couche limite, des tourbillons chaotiques dans le sillage du solide ,  $Cx \approx 0.4$

$R_E \approx 10^6$  :

régime turbulent, la couche limite devient le siège de turbulence  $\rightarrow$  discontinuité de  $Cx$ . des tourbillons importants dans le sillage du solide ,  $Cx \approx 0.4$

## Annexes (hors programme)

### • Profil des vitesses dans un tube étroit de section circulaire



On considère une portion de canalisation rectiligne, de section circulaire (rayon  $a$ ), de longueur  $L$  dans lequel circule un fluide réel (masse volumique  $\rho$ ) en écoulement stationnaire dans le sens opposé à  $\vec{e}_z$  (du haut vers le bas).

On fait les hypothèses suivantes :

- on suppose que l'écoulement a lieu par couches cylindriques coaxiales, toutes les vitesses étant selon l'axe  $z$ .
- la vitesse des particules de fluide ne dépend que de la distance  $r$  à l'axe,
- si les dimensions transversales (rayon  $a$ ) sont petites devant la longueur  $L$  (d'où la notion de tuyau "étroit" évoquée dans la définition du domaine de validité de la loi de Poiseuille cf. § 3.1.3), on peut admettre que la pression est constante en tout point d'une section droite de l'écoulement
- la vitesse d'écoulement est nulle sur la paroi du tuyau en  $r = a$  et maximale en  $r = 0$  ; il en résulte que la quantité  $\frac{dv}{dr}$  est négative.

On s'intéresse à un élément de volume cylindrique de rayon  $r$ , de longueur  $L$  et de même axe de révolution que la canalisation (zone représentée en rouge).

Cet élément de volume est soumis à :

- son poids :

$$\vec{P} = -\rho g \pi r^2 L \vec{e}_z$$

- aux forces de pression exercées

- o sur les faces perpendiculaires à  $\vec{e}_z$  :

$$\text{en } z = z_A : \vec{F}_{z_A}^P = -\pi r^2 P_A \vec{e}_z \quad (\text{dirigée vers le bas})$$

$$\text{en } z = z_B : \vec{F}_{z_B}^P = +\pi r^2 P_B \vec{e}_z \quad (\text{dirigée vers le haut})$$

- o sur la paroi latérale du cylindre : le travail de ces forces perpendiculaires à la vitesse du fluide est nul.

- aux forces de frottement  $\delta\vec{F}^V$  – dues à la viscosité du fluide – exercées en tout point de la surface latérale du cylindre de rayon  $r$  considéré ( $S = 2 \pi r L$ ) et dont la résultante est :

$$\vec{F}^V = -\eta \frac{dv}{dr} 2 \pi r L \vec{e}_z \quad (\text{dirigée vers le haut})$$

En régime permanent, la vitesse est constante. La somme des forces extérieures exercées sur l'élément de volume considéré est nulle :

$$\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0}$$

En projetant sur l'axe  $Oz$ , cette équation vectorielle devient :

$$-\rho g \pi r^2 L - \pi r^2 [P_A - P_B] - 2 \pi \eta r L \frac{dv}{dr} = 0$$

En posant  $\Delta z = z_B - z_A = -L$  et  $\Delta P = [P_A - P_B]$ , il vient :

$$\frac{dv}{dr} = r \frac{[\Delta P + \rho g \Delta z]}{2 \eta L}$$

Dans le cas d'une canalisation horizontale, pour laquelle  $\Delta z = 0$ , l'équation différentielle se résume à :

$$\frac{dv}{dr} = r \frac{\Delta P}{2 \eta L}$$

( $dv/dr$ ) étant négatif, il en résulte que  $\Delta P$  aussi. Cela correspond à une chute de pression motrice (ou perte de charge) due aux forces de viscosité et observée en cours (voir figure p. 4).

On détermine le profil des vitesses en intégrant l'équation différentielle, on obtient alors :

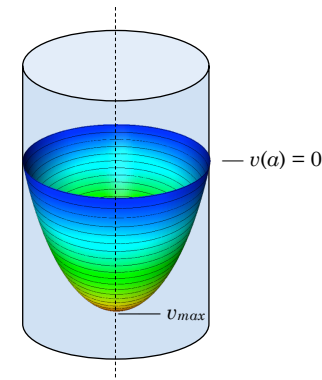
$$v(r) = \frac{[\Delta P + \rho g \Delta z]}{4 \eta L} r^2 + K$$

La constante  $K$  est déterminée à partir des conditions initiales décrivant l'écoulement :

- la vitesse est nulle sur la paroi du tube en  $r = a$

On en déduit l'expression de  $v(r)$  : 
$$v(r) = \frac{[\Delta P + \rho g \Delta z]}{4 \eta L} (r^2 - a^2)$$

D'où le profil des vitesses dans la canalisation (figure ci-dessous) :



$$\text{avec } v_{max} = v(0) = \frac{[\Delta P + \rho g \Delta z]}{4 \eta L} a^2$$

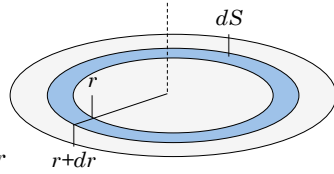
• **Formule de Poiseuille**

Le débit volumique circulant dans la canalisation est obtenu en intégrant :

$$D_V = \iint_S \vec{v} \cdot d\vec{S} = \int_0^a v(r) 2 \pi r dr$$

$$= 2 \pi \frac{[\Delta p + \rho g \Delta z]}{4 \eta L} \int_0^a (a^2 - r^2) r dr$$

$$= \pi \frac{[\Delta p + \rho g \Delta z]}{2 \eta L} \left[ \frac{a^2 r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right]_0^a$$



$$D_V = \frac{\pi a^4}{8 \eta L} [\Delta p + \rho g \Delta z]$$

On définit le débit moyen  $v_{moy}$  tel que  $D_V = v_{moy} \cdot S = v_{moy} \cdot \pi a^2$  d'où :

$$v_{moy} = \frac{a^2}{8 \eta L} [\Delta p + \rho g \Delta z] = \frac{v_{max}}{2}$$

• **Formule de Darcy - Weisbach**

La perte de charge ou perte de pression motrice peut s'écrire :

$$[\Delta p + \rho g \Delta z] = \frac{8 \eta}{\pi (d/2)^4} \cdot D_V \cdot L \quad \text{avec } d : \text{diamètre du tuyau}$$

ou encore, en introduisant la vitesse moyenne du fluide (à prendre en compte dans le calcul du nombre de Reynolds caractéristique de l'écoulement) :

$$[\Delta p + \rho g \Delta z] = \frac{32 \eta}{d^4} \cdot v_{moy} \cdot L$$

On définit  $\lambda$  le coefficient de pertes de charges régulières en régime laminaire :

$$\lambda = \frac{64 \eta}{\rho v_{moy} d} = \frac{64}{Re} \quad \text{avec } Re = \frac{\rho v_{moy} d}{\eta} : \text{nombre de Reynolds}$$

d'où, finalement, l'expression de la perte de charge :

$$[\Delta p + \rho g \Delta z] = \lambda \frac{\rho v_{moy}^2 L}{2 d} \quad \text{Formule de Darcy - Weisbach}$$

Cette relation est valable en régime laminaire ( $Re < 2000$ ) pour lequel les effets de la viscosité sont prépondérants. Dans ce cas, il apparaît que la perte de charge est :

- proportionnelle à  $L$ , longueur de la canalisation
- inversement proportionnelle à  $d$ , diamètre de la canalisation

En pratique, le régime laminaire est peu observé. La plupart des écoulements industriels sont tels que  $Re > 2000$ . Les canalisations sont généralement peu lisses et provoquent ainsi l'apparition de turbulences.

L'expression de la perte de charges précédente est encore valable mais  $\lambda$ , le coefficient de pertes de charges régulières devient une fonction :

- du nombre de Reynolds  $Re$ ,
- de la rugosité relative, c.a.d. le rapport  $\frac{\text{rugosité} : \epsilon}{\text{diamètre} : d}$

La détermination de la valeur de  $\lambda$  (*Friction Factor en anglais*) nécessite l'utilisation du diagramme de Moody :

