Correction du CC du 05/11/2010

PARTIE 1 /14

1.1 Période avec R et m /1

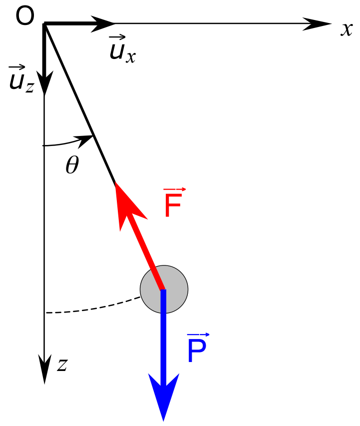
La dimension d'une période est un temps $[T] = \mathrm{T}$, la dimension du rayon est une longueur $[R] = \mathrm{L}$, la dimension de m est une masse $[m] = \mathrm{M}$.
Ces trois grandeurs sont des grandeurs fondamentales du système international. À ce titre, elles sont indépendantes et aucune d'entre elles ne peut résulter d'une combinaison des deux autres

1.2 $T = f(R, g)$ /1

$[T] = [R]^a \cdot [g]^b = \mathrm{T} = \mathrm{L}^a \cdot (\mathrm{L}^b \cdot \mathrm{T}^{-2b})$

d'où le système d'équation suivant : $\begin{cases} a + b = 0 \\ -2\,b = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = +1/2 \\ b = -1/2 \end{cases}$

Finalement $T = k \cdot \sqrt{R/g}$



1.3 Inventaire des forces /1

La bille est soumise à :

- son poids $\vec{P} = m\,g\,\vec{u}_z$
- la force exercée par le fil $\vec{F}$

1.4 Force qui travaille /0.5

Seul le poids travaille, la force exercée par le fil est perpendiculaire au déplacement et ne travaille donc pas.

1.5 Énergie mécanique du système /0.5

La force $\vec{F}$ ne travaillant pas, le poids étant une force à caractère conservatif, il en résulte que l'énergie mécanique du système est conservée.

1.6 Expression du poids /0.5

$\vec{P} = m\,g\,\vec{u}_z$

1.7 $E_p(z)$ /2

$\vec{P} = -\dfrac{dE_p}{dz}\vec{u}_z \quad \Rightarrow \quad \dfrac{dE_p}{dz} = -m\,g \quad \Rightarrow \quad E_p = -m\,g\,z + K$

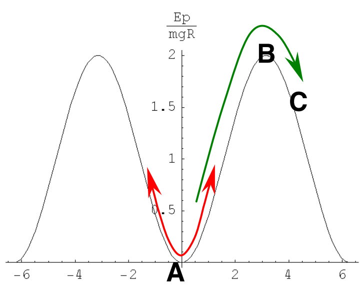
avec $E_p(R) = 0 \quad \Rightarrow \quad K = m\,g\,R \quad \Rightarrow \quad E_p = m\,g\,(R - z)$

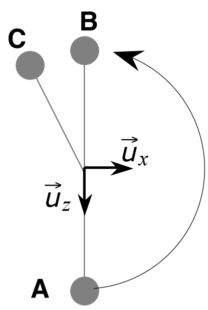
1.8 $z = f(r,\theta)$ et $Ep = g(\theta)$ /2

$z = z_M = R\cos\theta \quad \Rightarrow \quad E_p = m\,g\,R\,(1 - \cos\theta)$ on a bien $E_p\,(\theta = 0) = 0$

1.9 E_p/mgR /0.5

$\dfrac{E_p}{mgR} = 1 - \cos\theta$





1.10 Desciption du mouvement /3 (1,1,1)

- Si $E_p > 2\,mgR$, alors la bille est capable d'accéder à la position d'énergie potentielle maximale, c.a.d. pour $\theta = \pi$ (position **B**) tout en disposant encore d'énergie cinétique de telle sorte que θ devient > π (position **C**)
- Si $E_p < 2\,mgR$, la bille va osciller autour de la position d'équilire ($\theta = 0$ - position **A**)
- Positions d'équilibre : A ($\theta = 0$) stable, B ($\theta = \pi$) instable

1.11 E_c à t = 0, v à t = 0 /1.5

$E_m = 2\,mgR = E_c + E_p$

$E_c(0) = E_m(0) - E_p(0) = 2\,mgR = \frac{1}{2}\,\mathrm{m}\,v_0^2 \quad \Rightarrow \quad v_0 = 2\sqrt{g\,R}$ avec $\left[\sqrt{g\,R}\right] = \mathrm{L}^1\mathrm{T}^{-1}$

1.12 v à t = 0 /0.5

$v_0 = 2\ \mathrm{m\,s^{-1}}$

PARTIE 2 /16

2.1 Pente /1

$\sin\theta = \Delta h / \Delta \ell = (1804 - 717) / 13800 = 0.07877 \approx \theta\,(0.07885)$ soit environ 4.5°

2.2 Dimensions de Cx et f_D /2

$[F_{AIR}] = M\,L\,T^{-2} = [\rho_{air}]\cdot[Cx]\cdot[S]\cdot[v^2] = M\,L^{-3}\cdot L^2\cdot L^2\,T^{-2}\cdot[Cx] \;\Rightarrow [Cx] = 1$

$[F_{FR}] = M\,L\,T^{-2} = [f_D]\cdot[m]\cdot[g] = [f_D]\cdot M\cdot L\,T^{-2} \qquad \Rightarrow [f_D] = 1$

2.3 Hauteur maximale sans frottements /2

On peut utiliser la conservation de l'énergie mécanique entre les points A ($z = 0$) et B ($z = h$)

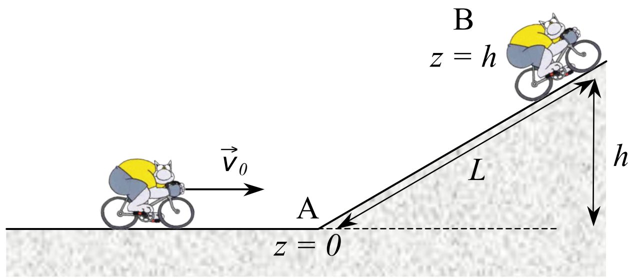
On choisit arbitrairement $E_p(z = 0) = 0$

Dans ce cas, au point A:

$$E_m(A) = E_p(A) + E_c(A) = 0 + ½\, m\, v_0^2$$

Le cycliste atteint sa hauteur maximale avec une vitesse nulle :

$$E_m(B) = E_p(B) + E_c(B) = mgh + 0$$



On en déduit la hauteur maximale $h = v_0^2/2g$

A.N. : $v_0 = 43.2\ \text{km}\cdot\text{h}^{-1}$ soit $v_0 = 12\ \text{m s}^{-1}$; $\quad h = 7.34$ m

2.4 Intensité des forces F_{AIR} et F_{FR} /1

$F_{AIR} = ½\cdot\rho_{air}\cdot Cx\cdot S\cdot v_0^2 = 0.5\cdot 1.2\cdot 0.4\cdot 144 = 34.56$ N

$F_{FR} = f_D\, m\, g = 0.01\cdot 70\cdot 9.81 = 6.87$ N

2.5 Hauteur maximale avec frottements /2

Le théorème de l'énergie mécanique stipule que la variation d'énergie mécanique est égale au travail des forces non-conservatives sur la distance L (*voir dessin ci-dessus*) :

$$\Delta E_m = E_m^{finale} - E_m^{initiale} = E_m(B) - E_m(A) = W_{FNC}$$

$$\Leftrightarrow \quad [E_p(B) + E_c(B)] - [E_p(A) + E_c(A)] = \vec{F}_{FR}\cdot\vec{AB}$$

$$\Leftrightarrow \quad (mgz_B + 0) - (mgz_A + ½\, m\, v_0^2) = -f_D\, m\, g\, L$$

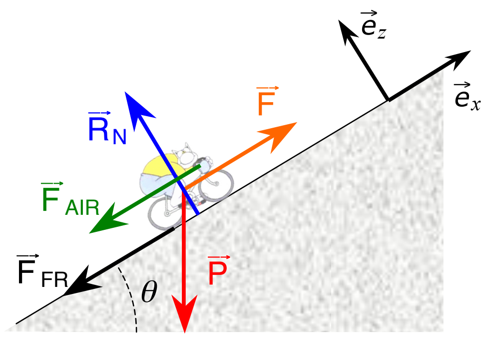
$$\Leftrightarrow \quad mgh - ½\, m\, v_0^2 = -f_D\, m\, g\, L \qquad \text{avec} \quad h = z_B - z_A = L\sin\theta$$

$$\Rightarrow \quad L = \frac{v_0^2}{2g\,(\sin\theta + f_D)} = \frac{144}{2\cdot 9.81\cdot(0.079 + 0.01)} = 82.68\ \text{m} \qquad \text{d'où } h = 6.51\ \text{m}$$

2.6 Forces auxquelles est soumis le cycliste /1

La bille est soumise à :

- son poids $\vec{P} = m\,\vec{g}$
- la force exercée par le cycliste $\vec{F}$
- la force de réaction du sol $\vec{R}_N$
- la résistance de l'air $\vec{F}_{AIR}$
- les forces de frottement liés au contact des roues sur le sol $\vec{F}_{FR}$



2.7 Relation fondamentale de la dynamique /3

$$\vec{P} + \vec{F} + \vec{R}_N + \vec{F}_{AIR} + \vec{F}_{FR} = \vec{0}$$

Selon $\vec{e}_x$: $\quad -P\cdot\sin\theta + F + 0 - F_{AIR} - F_{FR} = 0$

Selon $\vec{e}_z$: $\quad -P\cdot\cos\theta + R_N = 0$

2.8 Vitesse de parcours /1

$v = \dfrac{\Delta\ell}{\Delta t}$ A.N. : $v = \dfrac{13\ 800}{40\cdot 60} = 5.75\ \text{m s}^{-1}$

2.9 Travail effectué par le cycliste /2

Du bas de la pente (A) au sommet (B), le cycliste fournit l'effort :

$$\mathrm{W} = \int_A^B \vec{\mathrm{F}}\cdot\vec{d\ell} = \vec{\mathrm{F}}\cdot\vec{\Delta\ell} = \mathrm{F}\cdot\Delta\ell \qquad \text{avec } \mathrm{F} = \mathrm{P}\cdot\sin\theta + \mathrm{F_{AIR}} + \mathrm{F_{FR}}$$

$\Rightarrow$ $\mathrm{W} = (\mathrm{P}\cdot\sin\theta + \mathrm{F_{AIR}} + \mathrm{F_{FR}})\cdot\ \Delta\ell$

$\Leftrightarrow$ $\mathrm{W} = (mg\cdot\sin\theta + \frac{1}{2}\cdot\rho_{air}\cdot Cx\cdot S\cdot v^2 + f_D\, m\, g)\cdot\Delta\ell$

$\mathrm{W} = (70\cdot 9.81\cdot(1804 - 717)/13800 + 0.5\cdot 1.2\cdot 0.4\cdot 5.75^2 + 0.01\cdot 70\cdot 9.81)\cdot 13800$

$\mathrm{W} = 950\ 710\ \mathrm{J}$

2.10 Puissance du cycliste /1

$$\mathrm{P} = \frac{\mathrm{W}}{\Delta t} = (mg\cdot\sin\theta + \tfrac{1}{2}\cdot\rho_{air}\cdot Cx\cdot S\cdot v^2 + f_D\, m\, g)\cdot\frac{\Delta\ell}{\Delta t} = mg\cdot(\sin\theta + f_D)\cdot v + \tfrac{1}{2}\cdot\rho_{air}\cdot Cx\cdot S\cdot v^3$$

$\mathrm{P} = 396\ \mathrm{W}$