2 DYNAMIQUE ET ÉNERGIES EN MÉCANIQUE

Le cours de LP104 est consacré, entre autres, à l'étude des transformations de l'énergie sous ses différentes formes :

- énergie cinétique,
- énergies potentielles :
  - gravitationnelle,
  - électrostatique,
  - élastique

Énergie mécanique

- énergie chimique
- énergie interne

Dans ce chapitre, nous aborderons principalement les variations des énergies cinétique et potentielle, la conservation ou non de l'énergie mécanique.

Nous préciserons dans un premier temps quelques notions de dynamique mécanique.

2.1 Dynamique

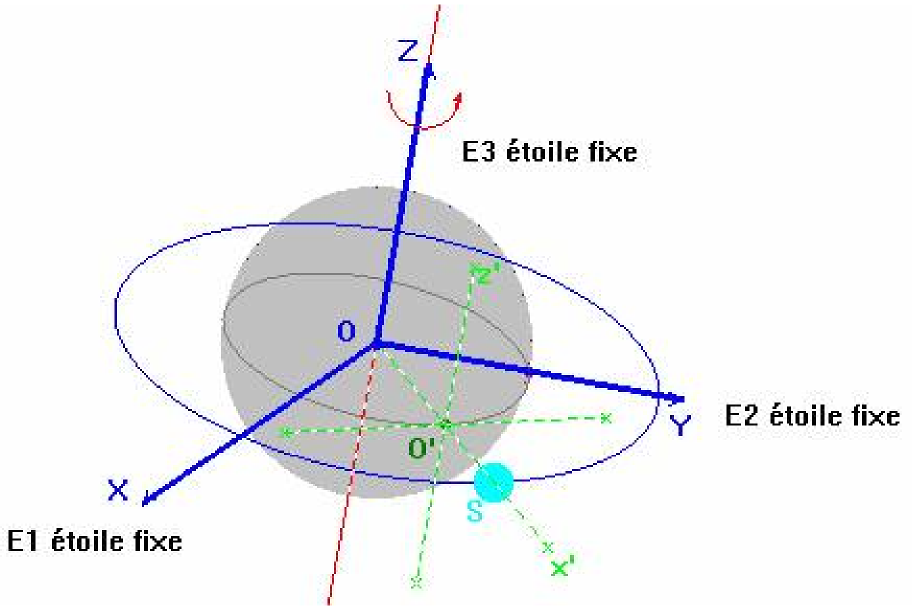
2.1.1 Principe d'inertie (1ère loi de Newton)

Il existe une famille de référentiels dits galiléens / inertiels, en mouvement de translation uniforme les uns par rapport aux autres, tels que par rapport à ces référentiels, tout point matériel isolé (soumis à aucune force extérieure) est soit immobile soit animé d'un mouvement de translation rectiligne uniforme

La notion de référentiel galiléen est essentielle. C'est sur celle-ci que s'appuie la deuxième loi de Newton (Relation Fondamentale de la Dynamique).

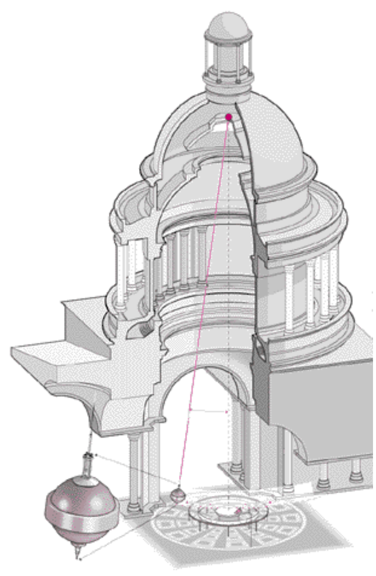
Le choix d'un référentiel galiléen dépend du système étudié et de la précision attendue :

- pour le mouvement d'un mobile auto-porteur ou d'un skieur, un référentiel géocentrique suffit (laboratoire par exemple)
- pour les phénomènes de marée, de chute des corps ou le mouvement du pendule de Foucault, il faut considérer un référentiel héliocentrique.



Ce type de référentiel permet de s'affranchir du fait que la Terre est en rotation sur elle-même. Il est alors possible de prendre en compte la composante centrifuge de l'accélération et de la force de Coriolis dans le cas d'une particule en mouvement.

La compréhension de la trajectoire du pendule de Foucault ne peut se faire que dans un tel référentiel.



Panthéon, mars 1851

2.1.2 Principe de relativité galiléenne

Les référentiels galiléens, en translation rectiligne uniforme les uns par rapport aux autres, sont tous équivalents.

Les lois de la physique sont les mêmes dans tous les référentiels galiléens.

Exemple :
Pour un observateur placé dans un train ou un avion se déplaçant dans un mouvement de translation rectiligne uniforme, les lois physiques sont les mêmes que pour un observateur immobile.

D'ailleurs, immobile ? immobile / à quoi ?

Il n'existe pas de référentiel absolu.

2.1.3 Principe Fondamental de la Dynamique de Translation (2ème loi de Newton)

Le principe fondamental de la dynamique de translation s'énonce ainsi :

Soit un corps de masse m constante, l'accélération subie par ce corps dans un référentiel galiléen est :

- proportionnelle à la résultante des forces qu'il subit et,
- inversement proportionnelle à sa masse.

Ce qui se traduit par :

$$\vec{a} = \frac{1}{m} \sum \vec{F}_{ext}^{\,i} \qquad \text{ou} \qquad \sum \vec{F}_{ext}^{\,i} = m\,\vec{a}$$

où $\vec{F}_{ext}^{\,i}$ désigne les forces extérieures exercées sur l'objet de masse m et $\vec{a}$ correspond à l'accélération de son centre d'inertie G.

Transcription pratique :
Si un objet isolé se déplaçant dans un repère galiléen subit une modification de sa trajectoire, une accélération ou une décélération, c'est qu'il est soumis l'influence de forces extérieures

Théorème de la quantité de mouvement
La seconde loi de Newton peut également être formulée en introduisant la notion de quantité de mouvement (ou impulsion) $\vec{p} = m\,\vec{v}$, produit de la masse par la vitesse.

La relation fondamentale de la dynamique (RFD) s'écrit alors :

$$\sum \vec{F}_{ext}^{\,i} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Cette relation reste valable si la masse de l'objet varie au cours du temps.

2.1.4 Principe de l'action et de la réaction (3ème loi de Newton)

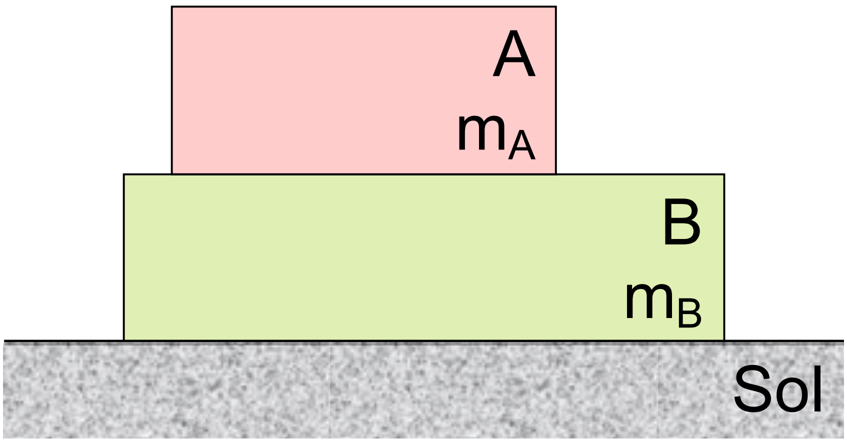
• Tout corps A exerçant une force sur un corps B subit une force d'intensité égale, de même direction mais de sens opposé, exercée par B.

$$\vec{F}_{A/B} = -\vec{F}_{B/A}$$

• Dans le cadre de la mécanique du point, le principe des actions réciproque stipule également que les forces d'interactions sont portées par la droite reliant les particules :

$$\vec{F}_{A/B} \wedge \vec{F}_{B/A} = \vec{0}$$

Exemple :



Système (A et B)

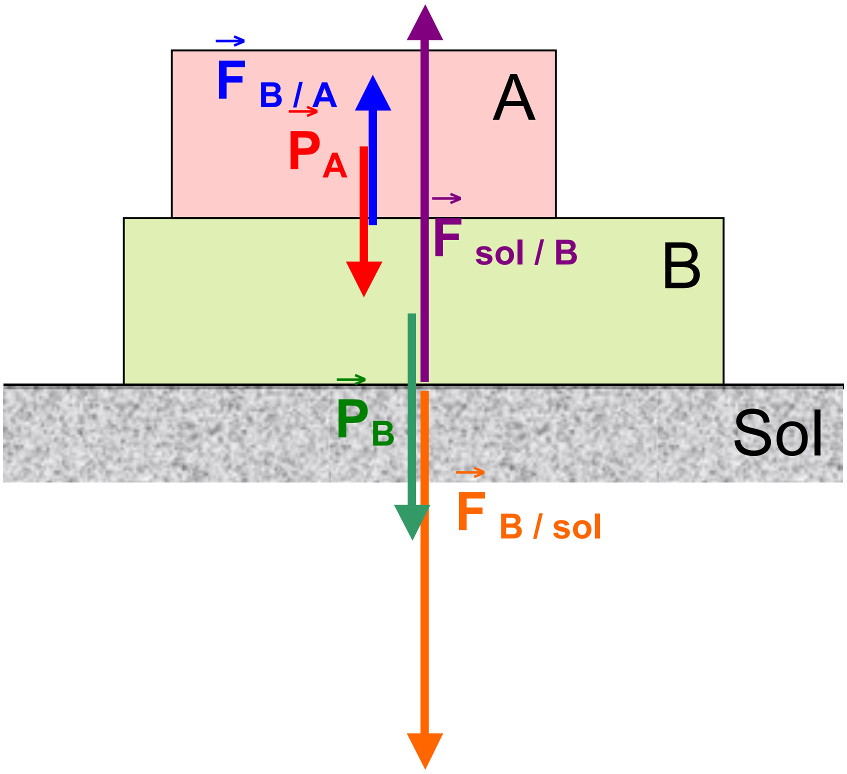
• Force exercée par A sur B : $\vec{P}_A$

• Force exercée par B sur A : $\vec{F}_{B/A} = -\vec{P}_A$

Système (B et sol)

• Force exercée par le sol sur B : $\vec{F}_{sol/B} = -(\vec{P}_A + \vec{P}_B)$

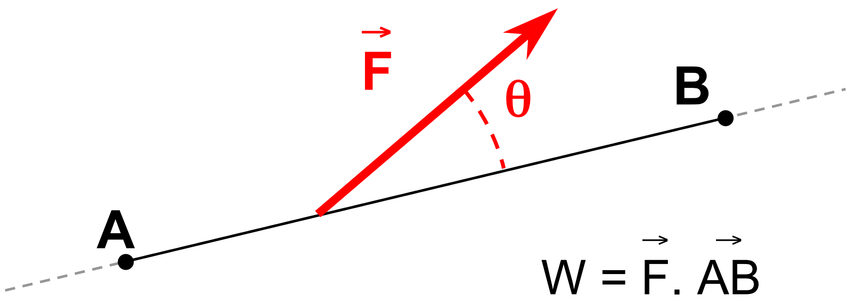
• Force exercée par B sur le sol : $\vec{F}_{B/sol} = \vec{P}_A + \vec{P}_B$



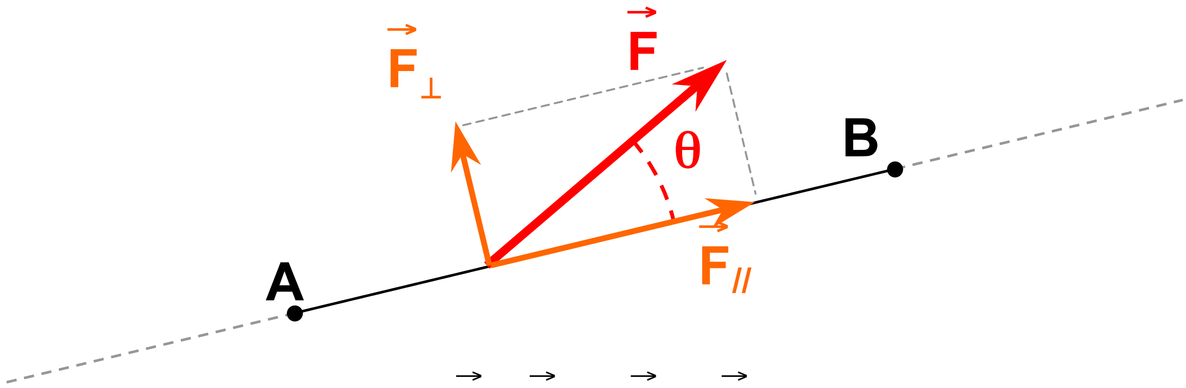
2.2 Travail d'une force

Le travail d'une force est par définition l'énergie fournie par cette force lorsque son point d'application se déplace.

Dans le cas simple d'une force constante $\vec{F}$ appliquée sur un objet parcourant une trajectoire rectiligne de A à B, le travail fourni W est :



On constate que seule la composante parallèle au déplacement fournit un travail.

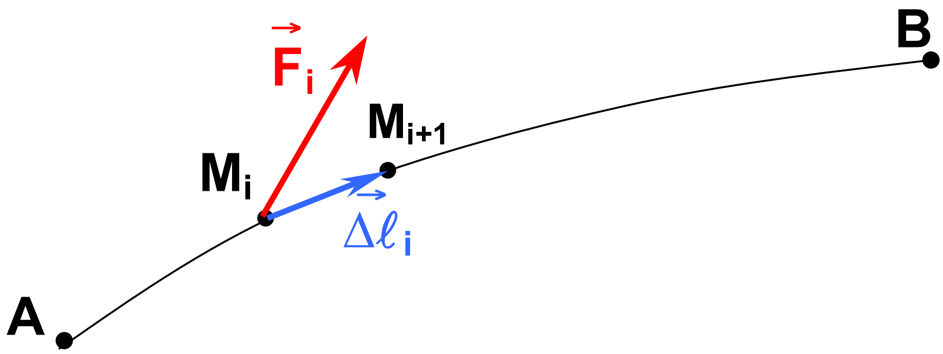


$$W = \vec{F}.\vec{AB} = \vec{F}_{//}.\vec{AB} = F.\,AB\cos\theta$$

Le travail d'une force perpendiculaire au déplacement est nul :

$$W = \vec{F}_\perp.\vec{AB} = \vec{0}$$

Dans le cas plus général où la force change et/ou le trajet n'est pas rectiligne; on divise le trajet total en trajets élémentaires de longueur $\Delta\ell$.



Ces trajets élémentaires sont parcourus pendant un laps de temps Δ**t** petit au cours duquel la force $\vec{F}$ peut être considérée comme constante.

Le travail élémentaire $\delta \mathbf{W}_i$ fourni par $\vec{F}$ est :

$$\delta W_i = \vec{F}_i . \vec{\Delta \ell}_i$$

Le travail de $\vec{F}$ de A à B le long de la trajectoire est obtenu en sommant les travaux élémentaires :

$$W = \sum_{i=1}^{n} \delta W_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i . \vec{\Delta \ell}_i$$

quand $n \rightarrow \infty$, $\vec{\Delta \ell}_i \rightarrow 0$

$$W = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i . \vec{\Delta \ell}_i = \int_A^B \vec{F} . \vec{d\ell}$$

Dimension, Unité :

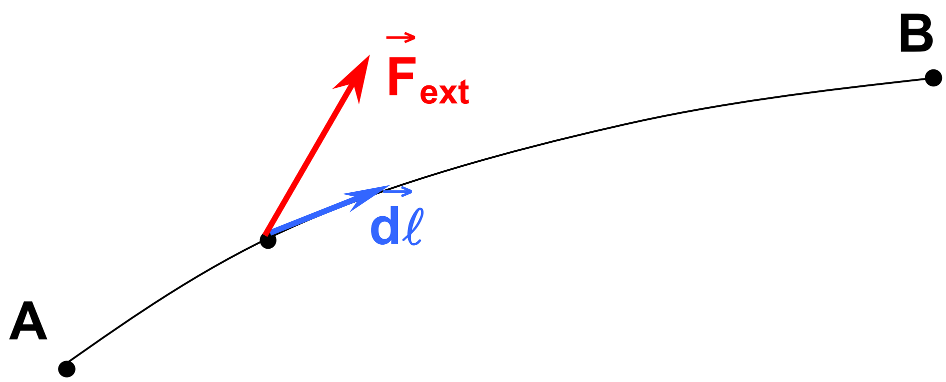
- Le travail a la même dimension qu'une énergie
  $[W] = M\, L^2\, T^{-2}$

- Le travail est exprimé en joule (1 J = 1 N m)

2.3 Théorème de l'énergie cinétique (TEC)

Nous allons montrer le lien existant entre le travail fourni par une force exercée sur une masse ponctuelle et l'énergie cinétique acquise par celle-ci.

Soit une masse ponctuelle soumise à une force extérieure $\vec{F}_{ext}$ le long d'un trajet de A à B :



Pour chaque élément de parcours $\vec{d\ell}$:

$$dW^{Fext} = \vec{F}_{ext} . \vec{d\ell}$$

avec : $\vec{F}_{ext} = \dfrac{d\vec{p}}{dt} = m\,\dfrac{d\vec{v}}{dt}$ (2ème loi de Newton)

et $\vec{d\ell} = \vec{v}\,dt$

$$dW^{Fext} = m\,\frac{d\vec{v}}{dt} . \vec{v}\,dt = m\,d\vec{v} . \vec{v}$$

Le travail de A à B s'obtient par intégration le long de la trajectoire :

$$W_{A \to B}^{Fext} = \int_A^B m\, d\vec{v}.\vec{v}$$

$d\vec{v}.\vec{v}$ étant une forme différentielle totale, l'intégrale ne dépend pas du chemin suivi :

$$W_{A \to B}^{Fext} = m \int_A^B d\vec{v}.\vec{v} \qquad = \frac{1}{2} m \left(v_B^2 - v_A^2 \right)$$

$$W_{A \to B}^{Fext} = E_c(B) - E_c(A) = E_{c\ final} - E_{c\ initial}$$

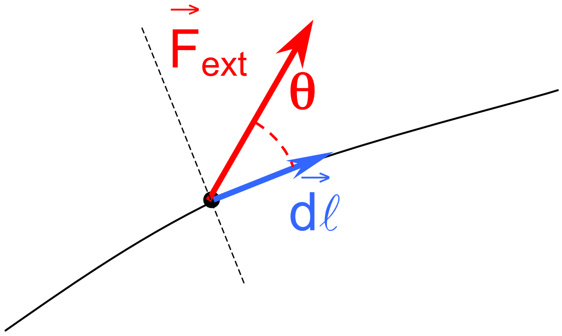
où $E_c = \frac{1}{2} m\, v^2$ représente l'énergie cinétique

> Dans un référentiel galiléen, pour un corps ponctuel de masse *m* constante parcourant un chemin reliant A → B, la variation d'énergie cinétique est égale à la somme des travaux de toutes les forces extérieures qui s'exercent sur le solide qu'elles soient conservatives ou non (frottements).

2.4 Application du théorème de l'énergie cinétique

2.4.1 Force motrice

• Si la force $\vec{F}_{ext}$ appliquée à un objet est globalement dans le sens du déplacement de l'objet :



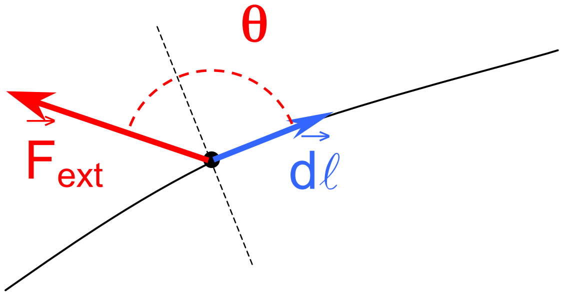
$-\pi/2 < \theta < \pi/2$

alors $dW_{Fext} = \vec{F}_{ext}.\,\vec{d\ell} > 0$, le travail de $\vec{F}_{ext}$ est positif.

La force a fourni de l'énergie au système, elle a augmenté son énergie cinétique. L'objet se déplace plus rapidement, la force est **motrice**.

2.4.2 Force résistante

Si la force $\vec{F}$ appliquée à un objet est globalement dans un sens opposé au déplacement de l'objet :



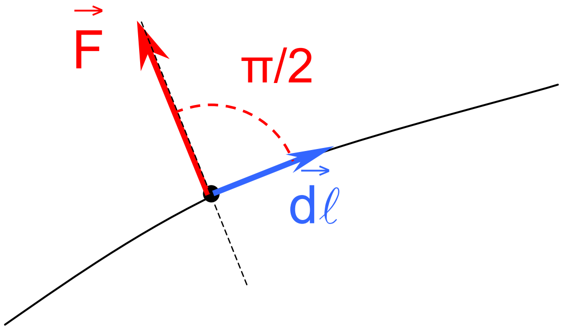
$\pi/2 < \theta < 3\pi/2$

alors $dW_{Fext} = \vec{F}_{ext}\,.\,\vec{d\ell} < 0$, le travail est négatif.

La force a pris de l'énergie au système, elle a diminué son énergie cinétique en le ralentissant. L'objet se déplace moins rapidement, la force est **résistante**.

2.4.3 Force à travail nul

• Si la force est perpendiculaire au déplacement :

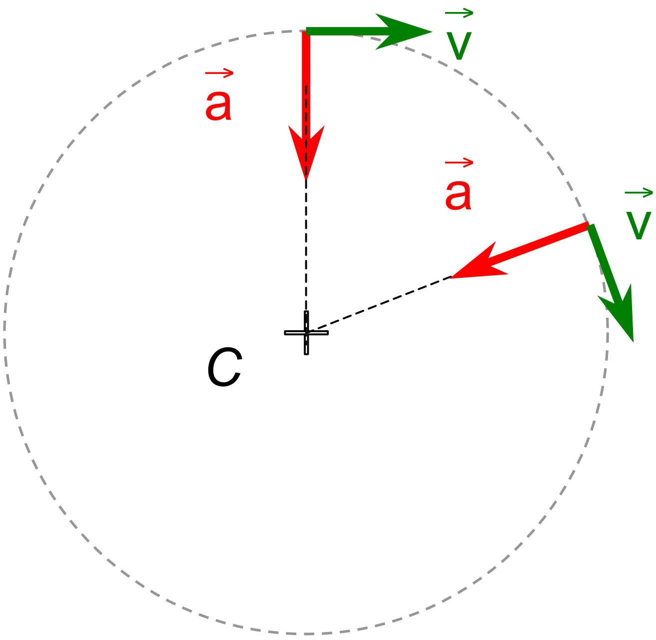


$$dW_{Fext} = \vec{F}_{ext} \cdot \vec{d\ell} = 0, \qquad \text{le travail de } \vec{F} \text{ est nul}$$

L'énergie cinétique de l'objet n'est pas modifiée, sa vitesse est constante **en norme**.

Attention, le fait que le travail d'une force est nul ne signifie pas que cette force n'a aucun effet sur le système !!!

→ Cas du mouvement circulaire uniforme :



La force centripète a un travail nul ($\vec{a}.\vec{v}$ = 0 en tout point) mais c'est cependant elle qui impose la trajectoire circulaire.

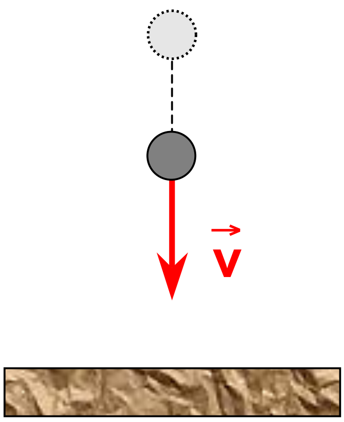
Si on supprime cette force centripète, le solide se déplacera selon une trajectoire rectiligne uniforme (1ère loi de Newton).

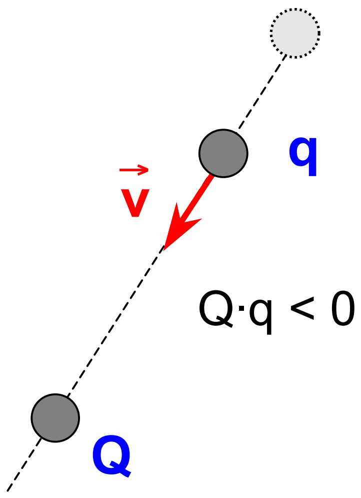
2.5 Énergie potentielle

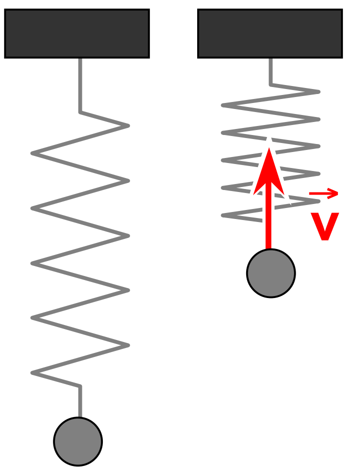
2.5.1 Énergie potentielle

- L'énergie potentielle correspond à l'énergie d'un système du fait de sa position dans l'espace.
- L'énergie potentielle est en "réserve", elle se manifeste quand elle se transforme en énergie cinétique.
- On distingue différents types d'énergie potentielle :
  - énergie potentielle gravitationnelle
  - énergie potentielle électrostatique
  - énergie potentielle élastique

Exemples

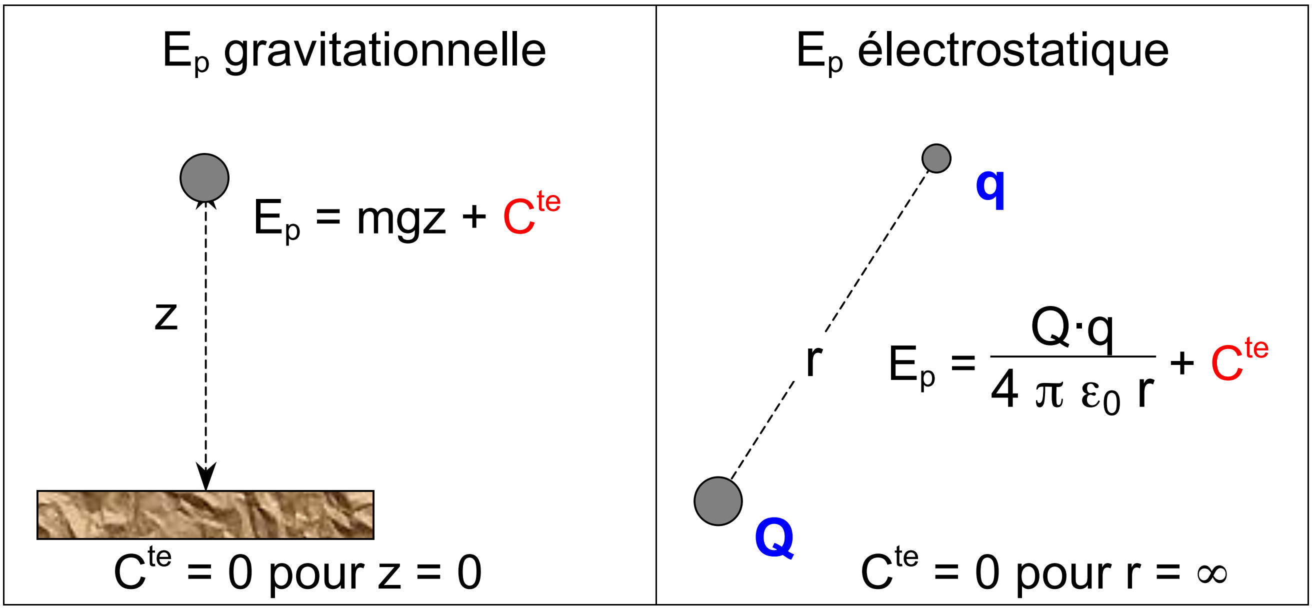






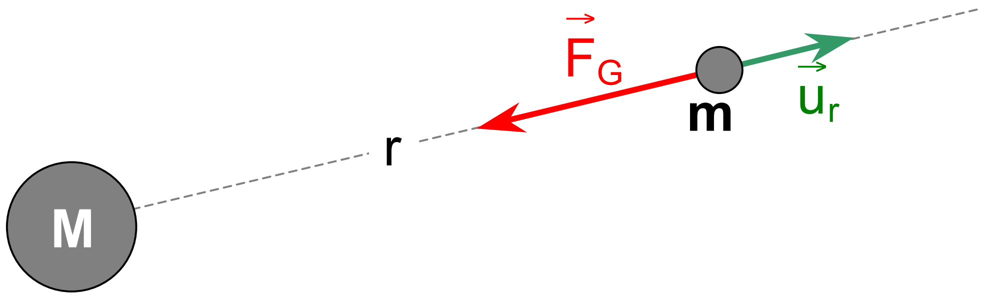
Remarques

- L'énergie potentielle est définie à une constante additive près.
  Cette constante n'a aucune signification physique et dépend d'un choix de convenance.



2.5.2 Energie potentielle gravitationnelle

On considère un objet de masse *m* soumis au champ gravitationnel d'un autre objet de masse *M*.



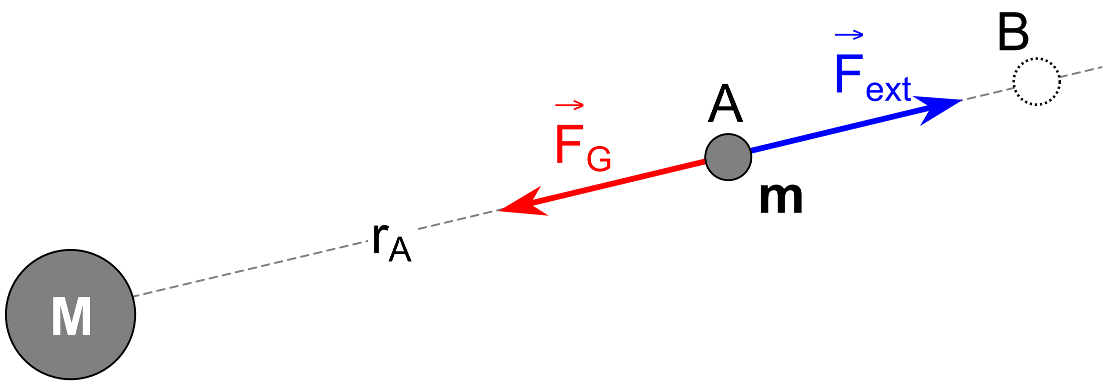
La force exercée par la masse M sur la masse m est donnée par la relation :

$$\vec{F}_{Mm} = -G\,\frac{M\,m}{r^2}\,\vec{u}_r$$

Par définition :

La variation d'énergie potentielle gravitationnelle d'une masse se déplaçant entre deux points est égale au travail nécessaire pour déplacer cette masse entre ces deux points quand ceux-ci sont plongés dans une région où règne un champ gravitationnel.

On cherche donc à calculer le travail d'une force extérieure nécessaire pour déplacer la masse m de A → B :



• On considère le cas simple où B est dans le prolongement de (OA)

• La force extérieure est opposée à la force gravitationnelle :

$$\vec{F}_{ext} = + G \frac{M\,m}{r^2} \vec{u}_r$$

Le calcul du travail de $\vec{F}_{ext}$ de A → B ne peut être effectué en considérant la relation simple :

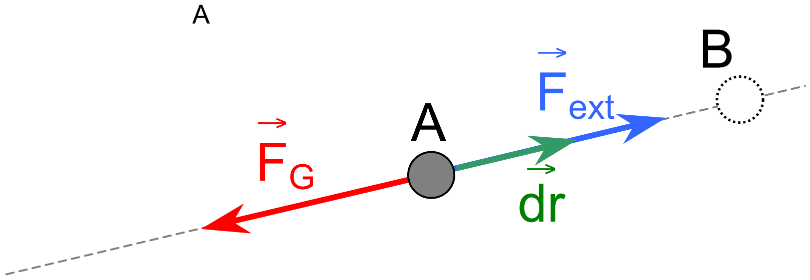
$$W = \vec{F}_{ext} \cdot \vec{AB}$$

En effet, la force n'étant pas constante le long du trajet (varie en $1/r^2$), cette relation n'est pas valable

La détermination du travail de la force d'interaction gravitationnelle nécessite de calculer :

$$W_{A \to B}^{Fext} = \int_A^B \vec{F}_{ext} . \vec{d\ell} \qquad \text{cas général}$$

$$W_{A \to B}^{Fext} = \int_A^B \vec{F}_{ext} . \vec{dr} \qquad \text{cas présent, variable : r}$$



Avec $\vec{dr} = dr\ \vec{u}_r$, l'intégrale devient :

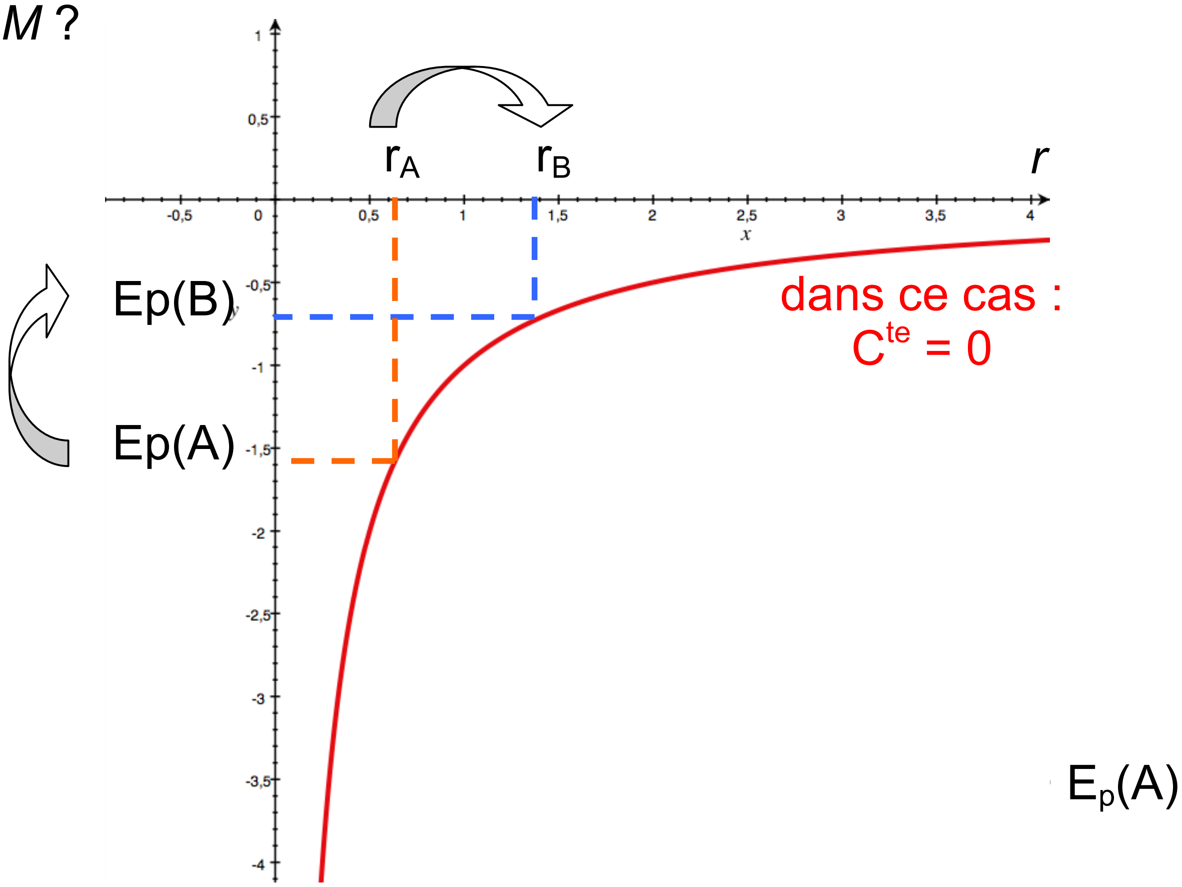
$$W_{A \to B}^{Fext} = \int_{r_A}^{r_B} G \frac{M\,m}{r^2}\,dr = G\,M\,m \int_{r_A}^{r_B} \frac{1}{r^2}\,dr$$

$$W_{A \to B}^{Fext} = G\,M\,m \left[-\frac{1}{r} \right]_{r_A}^{r_B} = G\,M\,m \left[\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right]$$

$$W_{A \to B}^{Fext} = \underbrace{\frac{G\,M\,m}{r_A}}_{} - \underbrace{\frac{G\,M\,m}{r_B}}_{}$$

$$W_{A \to B}^{Fext} = -\ E_p(A) \ + \ E_p(B) = E_p(B) - E_p(A) = \Delta E_p$$

À quoi correspond cette variation d'E_p quand on éloigne *m* de *M* ?



$\Rightarrow$ Gain d'énergie potentielle gravitationnelle

L'énergie potentielle gravitationnelle d'un corps de masse *m*, situé à la distance *r* d'un corps de masse *M* est :

$$E_p(r) = -\frac{G\,M\,m}{r} + C^{te}$$

Remarques :

<u>Remarque 1</u> :

Lien entre la force d'interaction gravitationnelle et l'énergie potentielle gravitationnelle :

- la norme de la force d'interaction gravitationnelle s'écrit :

$$F_{Mm} = -G\frac{M\,m}{r^2}$$

- l'énergie potentielle gravitationnelle d'une masse m situé à la distance *r* d'un corps de masse *M* est :

$$E_p(r) = -\frac{G\,M\,m}{r} + C^{te}$$

On remarque que :

$$F_{Mm} = -\frac{d}{dr}(E_p)$$

On que la force d'interaction gravitationnelle dérive de l'énergie potentielle gravitationnelle.

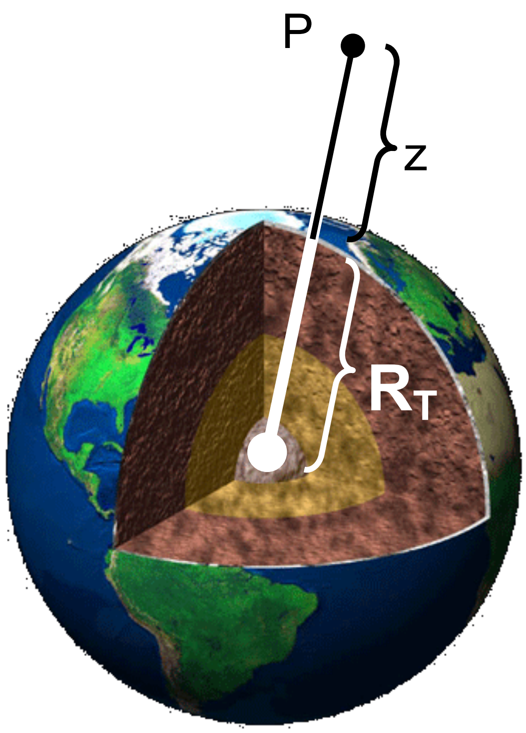
Remarque 2 :

Lien entre la force d'interaction gravitationnelle et le champ de pesanteur terrestre :

• $E_p(r) = -\dfrac{G\,M\,m}{r} + K$ Champ gravitationnel

• $E_p(z) = mgz + K$ Champ de pesanteur terrestre

S'agissant de la même interaction, on devrait avoir des expressions semblables de l'énergie potentielle. Or il n'en est apparament rien. Nous allons faire le lien entre les deux.



Calculons l'énergie potentielle d'une masse *m* à l'altitude *z* :

$$E_p(z) = -\frac{G\,M_T\,m}{R_T + z} + K$$

où M_T : masse de la Terre

R_T : rayon terrestre 6400 km

z : altitude du point P

$$E_p(z) = -\frac{G\,M_T\,m}{R_T\left(1 + \dfrac{z}{R_T}\right)} + K$$

avec $\dfrac{z}{R_T} << 1$

La fonction $E_p(z)$ est donc de la forme $f(z) = k\left(1 + \frac{z}{R_T}\right)^{-1}$ avec z/R_T tendant vers 0.

Il est fréquent en physique de remplacer des expressions mathématiques par des approximations plus simples à calculer, on utilise pour cela les développements limités en série de Taylor.

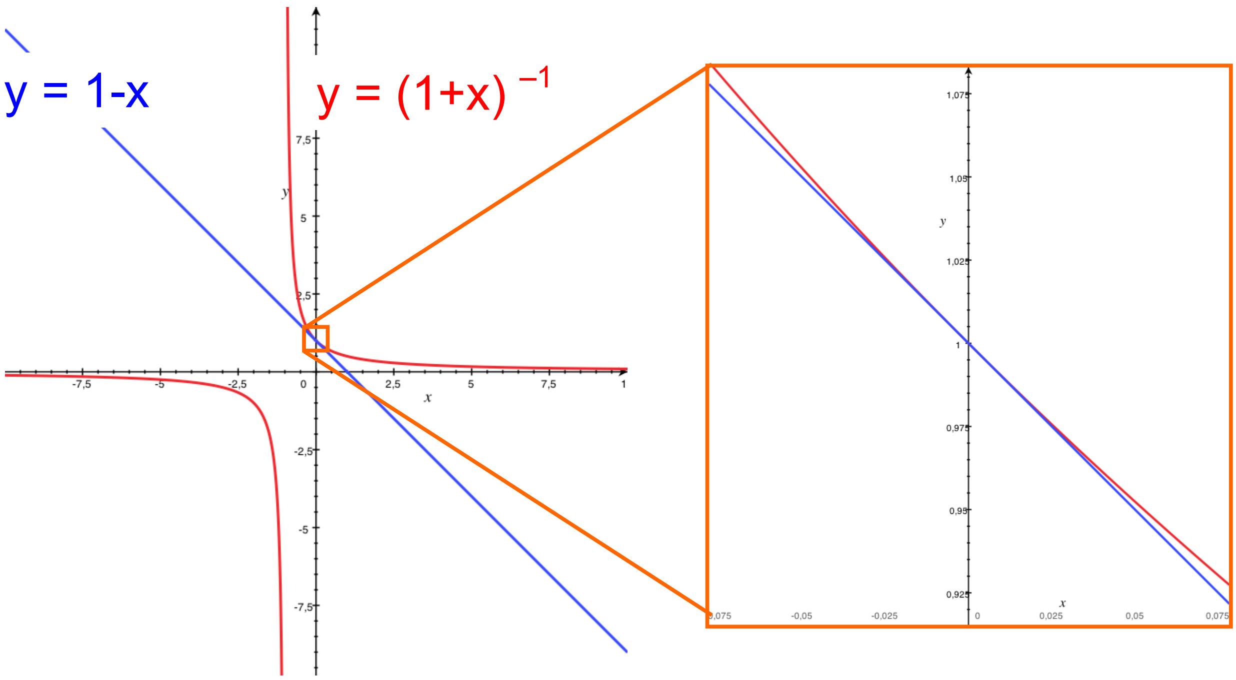
Rappel : développements limités en série de Taylor

Une fonction f, n fois dérivable sur un intervalle I contenant x_0 admet un développement limité :

$$f(x) = f(x_0)+f'(x_0)\cdot(x - x_0)+f''(x_0)\cdot\frac{(x - x_0)^2}{2!} +\ldots+ f^n(x_0)\cdot \frac{(x - x_0)^n}{n!}$$

Application :

Pour $x \ll 1$: $(1 + x)^n \approx 1 + nx$ D.L. au 1er ordre



Pour $x \ll 1$, $(1 - x)$ est une bonne approximation de $(1+x)^{-1}$

L'énergie potentielle au voisinage de la surface terrestre peut donc être approximée par :

$$E_p(z) \approx -\frac{G\,M_T\,m}{R_T}\left(1-\frac{z}{R_T}\right) + K$$

$$E_p(z) \approx -\frac{G\,M_T\,m}{R_T} + \frac{G\,M_T\,m}{R_T^2}\cdot z + K$$

En choisissant $K = +\dfrac{G\,M_T\,m}{R_T}$, l'expression de $E_p(z)$ devient :

$$E_p(z) \approx \frac{G\,M_T\,m}{R_T^2}\cdot z = m\,\frac{G\,M_T}{R_T^2}\,z$$

$$\text{Avec : }\left.\begin{array}{l} G = 6.67\ 10^{-11}\ \text{SI} \\ M_T = 5.794\ 10^{24}\ \text{kg} \\ R_T = 6.371\ 10^{6}\ \text{m} \end{array}\right\}\quad \frac{G\,M_T}{R_T^2} = 9.81\ \text{m·s}^{-2} = g\ !!$$

On retrouve ainsi l'expression "classique" de l'énergie potentielle :

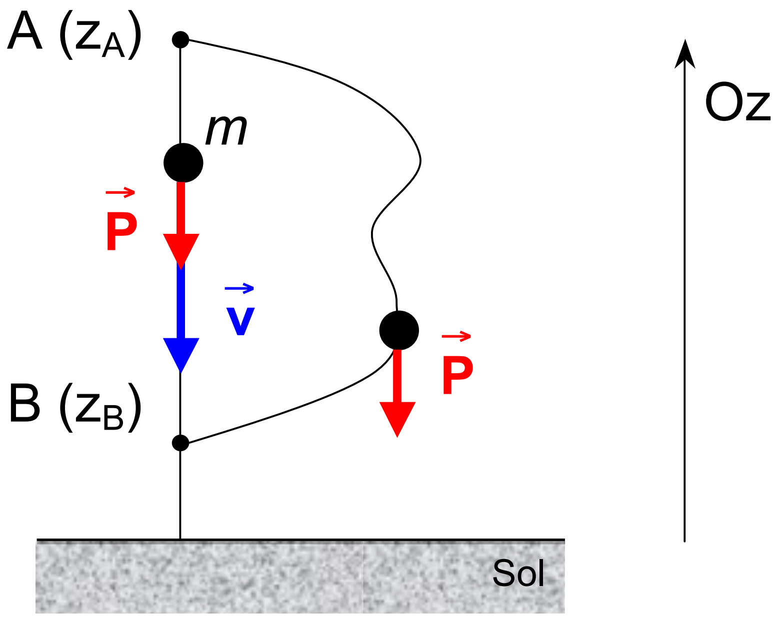
$$E_p(z) = mgz + K$$

<u>Remarque 3</u> :

Caractère conservatif de l'interaction gravitationnelle

Nous allons montrer que le travail du poids est conservatif, c'est à dire qu'il ne dépend pas du chemin suivi pour aller d'un point A à un point B.

On considère une masse m susceptible de se déplacer d'un point A à un point B le long d'une ligne verticale :



Trajet direct (vertical) :

$W_{A \to B} = \vec{P}.\vec{AB} = -\, mg\, \vec{e}_z.(z_B - z_A)\, \vec{e}_z = mg\,(z_A - z_B)$ (< 0)

$W_{A \to B} = E_p(A) - E_p(B) = -\,\Delta E_p$

Trajet curviligne :

$$W_{A \to B} = \int_A^B \vec{P}\cdot d\vec{\ell} = \int_A^B -\, mg\, \vec{e}_z\cdot(dx\cdot\vec{e}_x + dy\cdot\vec{e}_y + dz\cdot\vec{e}_z)$$

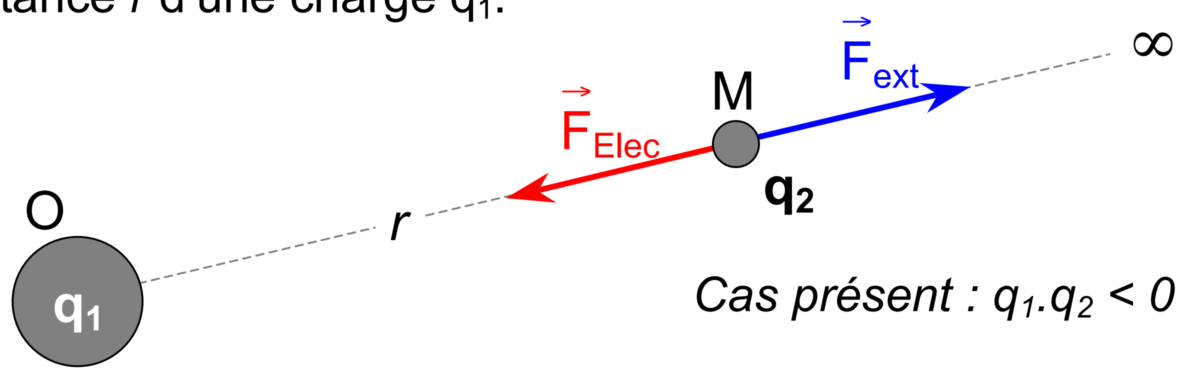
$$W_{A \to B} = \int_{z_A}^{z_B} -\, mg\, dz = -\, mg\,(z_B - z_A) = mg\,(z_A - z_B)$$

$$W_{A \to B} = mg\,(z_A - z_B) = E_p(A) - E_p(B) = -\,\Delta E_p$$

- Nous avons donc montré que le travail du poids est indépendant du chemin suivi
- Si trajet fermé : $W_{A \rightarrow A} = 0$, le champ de pesanteur est conservatif.

2.5.3 Énergie potentielle électrostatique

On peut établir l'expression de l'énergie potentielle électrostatique en calculant le travail fourni par une force extérieure pour amener une charge q_2 depuis l'infini à la distance *r* d'une charge q_1.



Cas présent : $q_1.q_2 < 0$

La force d'interaction électrostatique entre q_1 et q_2 est

$$\vec{F}_{élec} = \frac{q_1\, q_2}{4\pi\varepsilon_0\, r^2}\,\vec{u}_r$$

Le travail de la force extérieure est donc :

$$W_{\infty \to A}^{Fext} = \int_{\infty}^{A} -\vec{F}_{élec}\cdot\vec{dr} = \int_{\infty}^{A} -\frac{q_1\, q_2}{4\pi\varepsilon_0\, r^2}\,\vec{u}_r\cdot dr\,\vec{u}_r$$

$$W_{\infty \to A}^{Fext} = \frac{q_1\, q_2}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\infty}^{r_A} -\frac{1}{r^2}\,dr = \frac{q_1\, q_2}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r}\right]_{\infty}^{r_A} = \frac{q_1\, q_2}{4\pi\varepsilon_0\, r_A}$$

L'énergie potentielle d'une charge q_2 soumise à la force d'interaction électrostatique créée par la charge q_1 située à la distance *r* de q_2 est :

$$E_p(r) = \frac{q_1\, q_2}{4\pi\varepsilon_0\, r} + C^{te}$$

En résumé :

Le potentiel électrostatique présente de grandes similitudes avec le potentiel gravitationnel. Cela vient du fait que dans les deux cas, la force d'interaction est en $1/r^2$.

	Interaction gravitationnelle	Interaction coulombienne
Force	$\vec{F} = - G\, M\, m \frac{1}{r^2} \vec{u}_r$	$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\, q_1\, q_2 \frac{1}{r^2} \vec{u}_r$
Énergie potentielle	$E_p(r) = - \frac{G\, M\, m}{r} + C^{te}$	$E_p(r) = \frac{q_1\, q_2}{4\pi\varepsilon_0\, r} + C^{te}$

Dans les deux cas, les forces d'interaction ont un caractère conservatif :

- le travail de ces forces est indépendant du chemin suivi
- si le trajet fermé, le travail de ces forces est nul.

Pour ces deux potentiels, la variation d'énergie potentielle d'un état A vers un état B est égale :

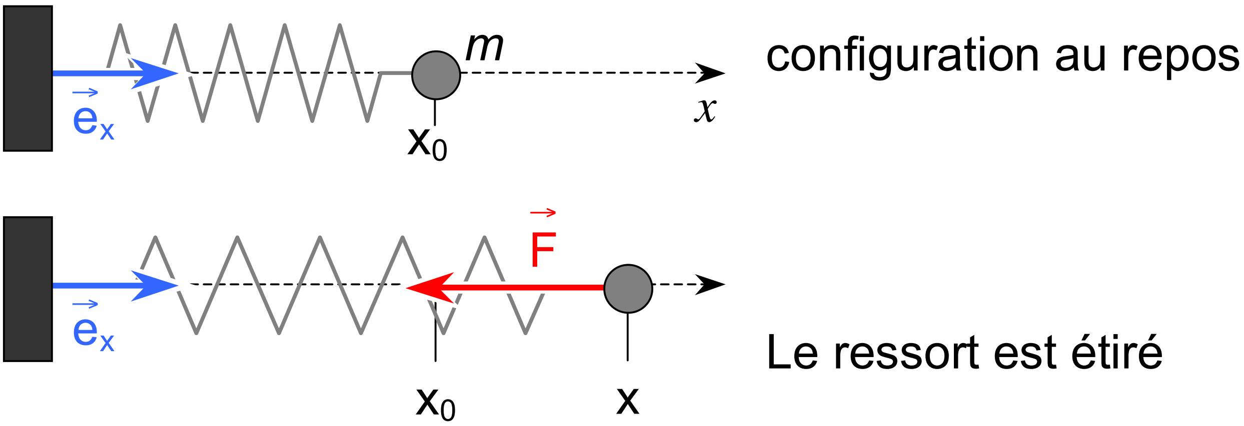
• au travail de la force extérieure permettant d'aller de A à B,

• à l'opposé du travail de la force d'interaction lors du déplacement de A vers B.

2.5.4 Énergie potentielle élastique

Force élastique

On considère un solide de masse *m* accroché à un ressort et susceptible de glisser sans frottement selon un axe horizontal :



La force de rappel exercée par le ressort sur la masse est :

$$\vec{F} = -k\,(x - x_0)\,\vec{e}_x$$

où • k : constante de raideur du ressort

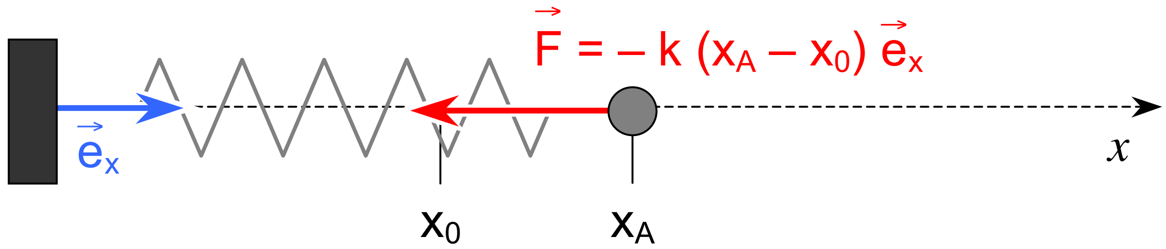
$[k] = M\,T^{-2}$, k en $N{\cdot}m^{-1}$,

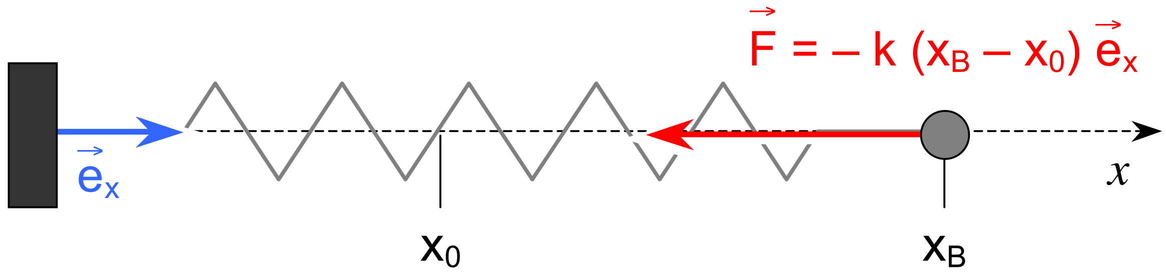
• x_0 : position de *m* au repos

• $(x - x_0)$: allongement du ressort

Energie potentielle élastique

Pour établir l'expression de l'énergie potentielle élastique, on va calculer l'opposé du travail de la force élastique quand on déplace la masse m de A vers B.





• On ne peut utiliser la relation $W = \vec{F}.\vec{AB}$ car la norme de $\vec{F}$ varie quand la masse se déplace de A → B.

• Il nous faut donc calculer :

$$\Delta E_p = -W^{F}_{A\to B} = -\int_A^B \vec{F}\cdot\vec{dx} = \int_A^B k\,(x - x_0)\,\vec{e}_x \cdot dx\,\vec{e}_x$$

$$\Delta E_p = \int_{x_A}^{x_B} k\,(x - x_0)\,dx = k\left[\frac{x^2}{2} - x_0 x\right]_{x_A}^{x_B}$$

$$\Delta E_p = k\left[\frac{x_B^2}{2} - x_0 x_B - \frac{x_A^2}{2} + x_0 x_A\right]$$

$$\Delta E_p = k\left[\frac{x_B^2}{2} - x_0 x_B + \frac{x_0^2}{2} - \frac{x_A^2}{2} + x_0 x_A - \frac{x_0^2}{2}\right]$$

$$\Delta E_p = \frac{k}{2}\left[\,(x_B - x_0)^2 - (x_A - x_0)^2\,\right]$$

d'où finalement :

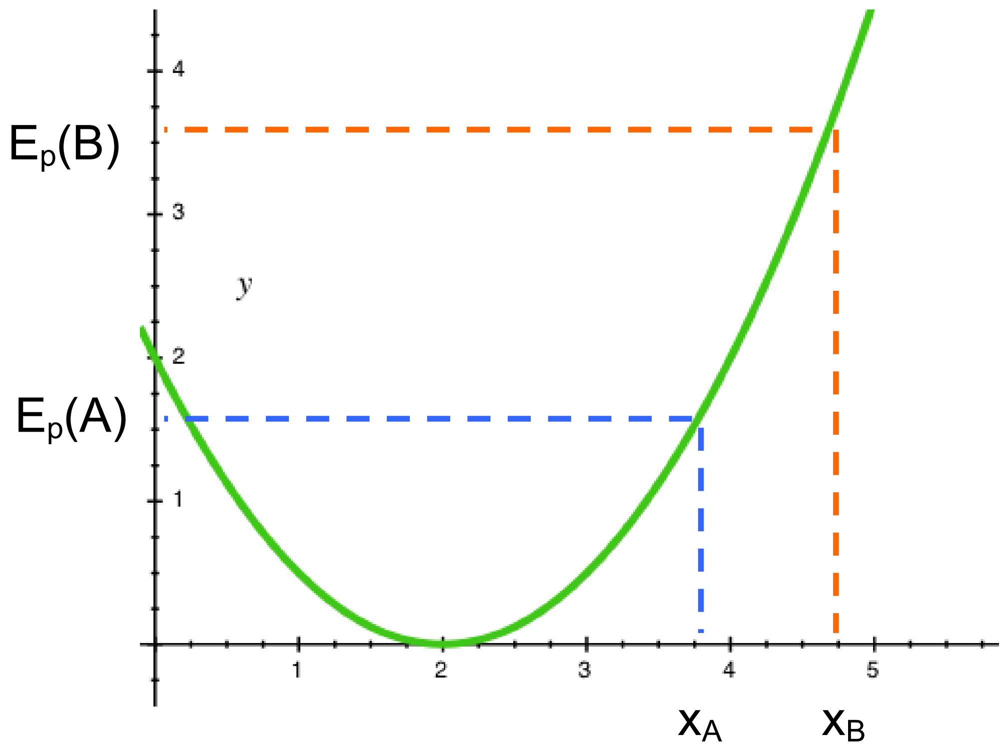
$$\Delta E_p = \underbrace{\frac{1}{2} k\,(x_B - x_0)^2}_{E_p(B)} - \underbrace{\frac{1}{2} k\,(x_A - x_0)^2}_{E_p(A)} \qquad > 0 \text{ !!!}$$

$$\Delta E_p = E_p(B) - E_p(A)$$

On définit l'énergie potentielle élastique par :

$$E_p = \frac{1}{2} k\,(x - x_0)^2 + C^{te}$$

La constante peut être choisie de telle sorte que $E_p = 0$ quand $x = x_0$



Le travail de $\vec{F}$ et la variation d'énergie potentielle élastique :

- ne dépendent que des positions initiales et finales
- sont indépendants du chemin suivi

2.6 Énergie mécanique

2.6.1 Définition

L'énergie mécanique désigne l'énergie emmagasinée par un système sous forme d'énergie potentielle et d'énergie cinétique :

$$E_m = E_c + E_p$$

2.6.2 Théorème de l'énergie mécanique

Si un système en mouvement est soumis à des forces conservatives (interaction gravitationnelle, champ de pesanteur, force électrostatique, force élastique), alors son énergie mécanique reste constante au cours du temps.

$$\Delta E_m = \Delta E_c + \Delta E_p = 0$$

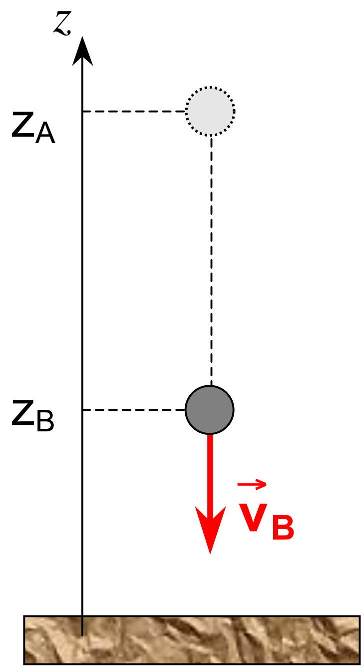
Si le système est soumis à des forces non-conservatives ou dissipatives (frottements), son énergie mécanique diminue.
La perte d'énergie mécanique est égale au travail des forces non conservatives.

$$\Delta E_m = \Delta E_c + \Delta E_p = W_{FnC}$$

Nous détaillons maintenant quelques exemples.

2.6.3 Cas des forces conservatives

2.6.3.1 Chute libre



Soit un objet de masse *m* maintenu immobile à une altitude z_A.
Son énergie mécanique se réduit à son énergie potentielle car son énergie cinétique est nulle :

$$E_m(A) = E_p = m\, g\, z_A + K$$

On lâche l'objet sans vitesse initiale.
Il entame alors un mouvement de chute libre rectiligne et uniformément accéléré et atteint le point B avec la vitesse v_B.
L'énergie mécanique de l'objet est maintenant la somme de :

- son énergie potentielle en B : $E_p(B) = m\, g\, z_B + K$
- son énergie cinétique ; $E_c(B) = \frac{1}{2} m\, v_B^2$

donc $E_m(B) = m\, g\, z_B + K + \frac{1}{2} m\, v_B^2$

La conservation de l'énergie mécanique (en négligeant les frottements avec l'air) implique :

$$E_m(A) = E_m(A)$$

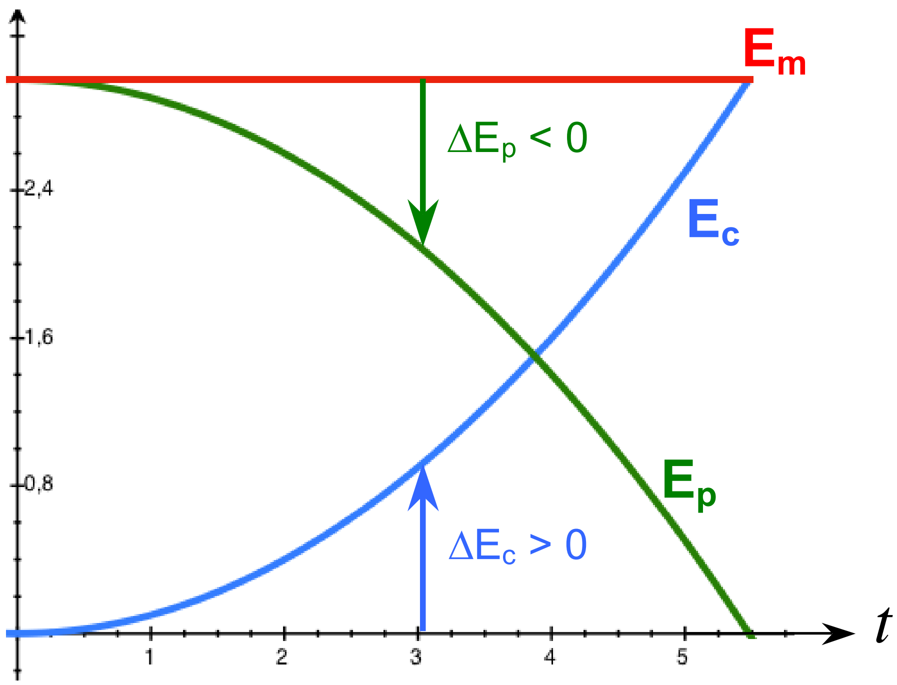
$$\Leftrightarrow \quad m\, g\, z_A + K = m\, g\, z_B + K + \frac{1}{2} m\, v_B^2$$

ou encore : $$\underbrace{m\,g\,z_A - m\,g\,z_B}_{-\Delta E_p} = \underbrace{\frac{1}{2}m\,v_B^2 - \frac{1}{2}m\,v_A^2}_{\Delta E_c}$$

soit : $$-\Delta E_p = \Delta E_c$$

Dans ce cas précis de la chute libre :

- ΔE_c est une quantité positive
- ΔE_p est une quantité négative
- $\Delta E_c + \Delta E_p = 0$
- La perte d'énergie potentielle est convertie en énergie cinétique

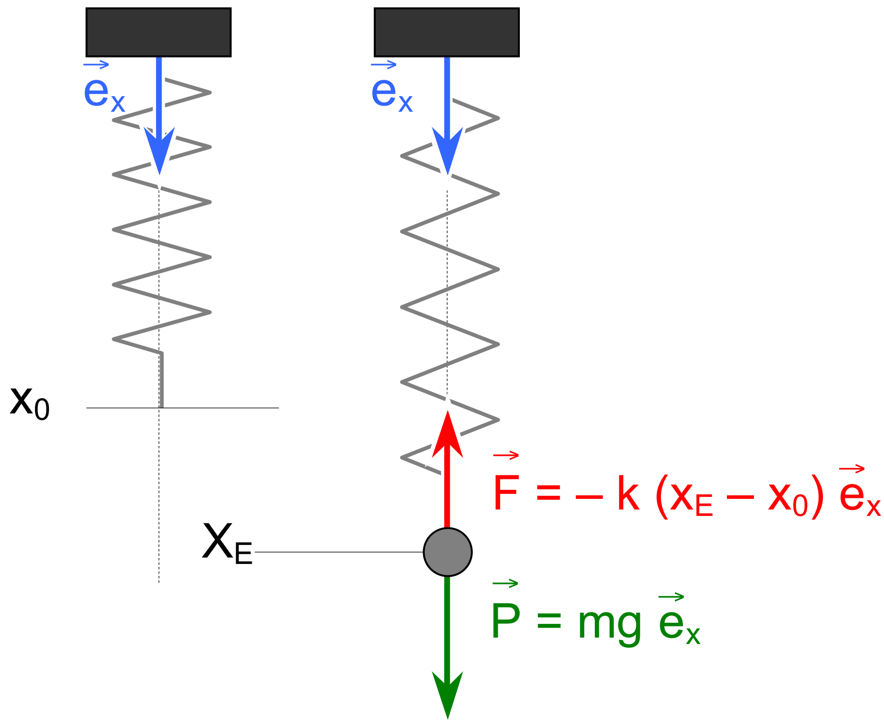


De la relation précédente, on déduit la vitesse de chute libre :

$$v_B = \sqrt{2\,g\,(z_A - z_B)}$$

2.6.3.2 Masse accrochée à un ressort

On considère une masse accrochée à un ressort et suspendue verticalement à celui-ci :



La longueur à vide du ressort est x_0. Quand on accroche la masse m, la position d'équilibre est x_E. La masse est soumise à son poids et à la force de rappel du ressort :

$$\vec{F} + \vec{P} = \vec{0}$$

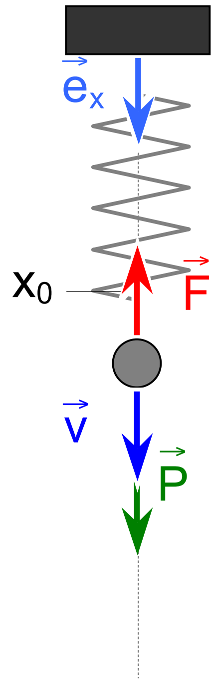
$$mg - k\,(x_E - x_0) = 0$$

$$(x_E - x_0) = \frac{mg}{k}$$

On effectue l'expérience suivante :

- on maintient immobile la masse à la cote x_0,
- on lâche la masse m.

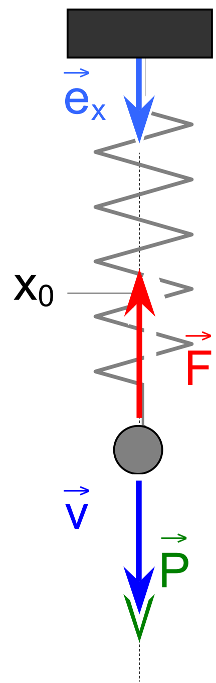
Que se passe t-il ?



- sous l'effet de son poids, la masse entame une chute libre uniformément accélérée :

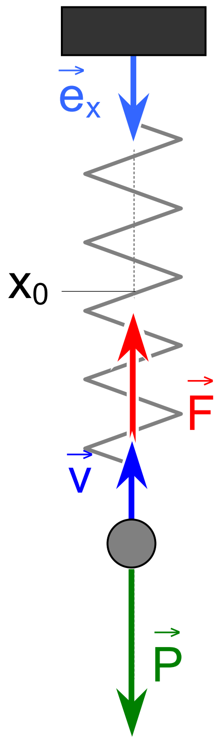
$$\vec{F} + \vec{P} = m\,\vec{\gamma}$$

  l'énergie mécanique est la somme de :
  - E_c qui augmente
  - E_p gravitationnelle qui diminue
  - E_p élastique qui augmente



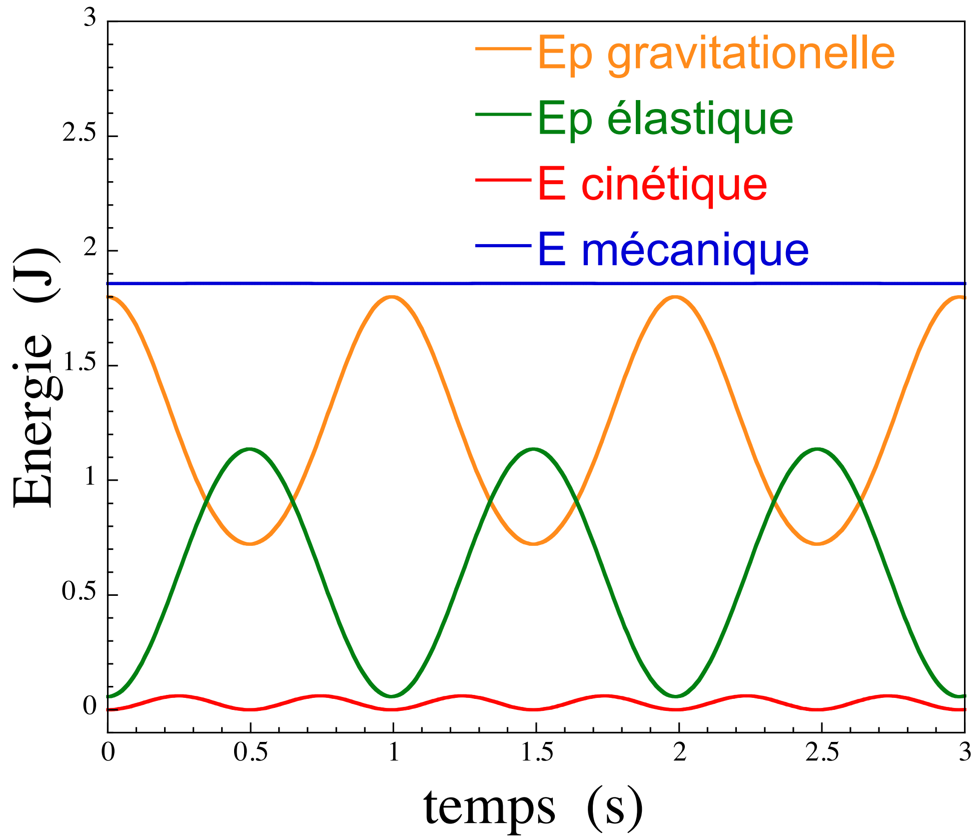
- sa vitesse de chute passe par un maximum puis la masse commence à ralentir car la force de rappel du ressort devient importante
  - E_c passe par un maximum,
  - E_p gravitationnelle diminue
  - E_p élastique augmente,

- sa vitesse de chute s'annule avant de changer de sens
    - E_c passe par un minimum,
    - E_p gravitationnelle est minimale
    - E_p élastique est maximale,



- Le mobile remonte en accélérant :
    - E_c augmente
    - E_p gravitationnelle augmente
    - E_p élastique diminue,

Variations des énergies cinétique, potentielles et mécanique

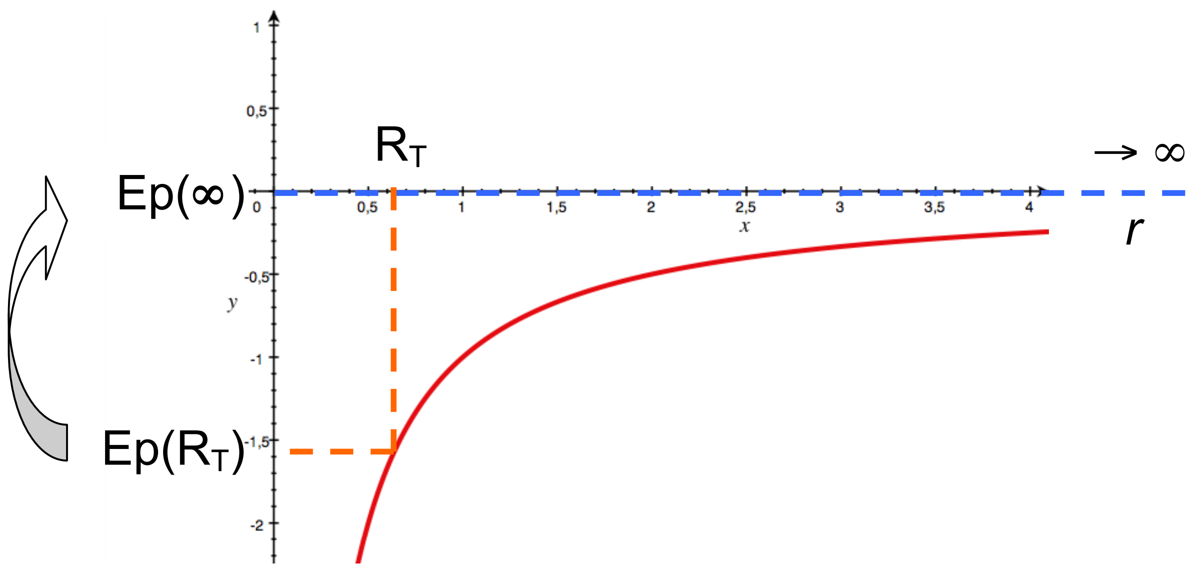


2.6.3.3 Vitesse d'évasion / de libération / d'échappement

La vitesse d'évasion représente la vitesse minimale que doit atteindre un corps pour s'éloigner indéfiniment d'un astre malgré l'attraction gravitationnelle de ce dernier.

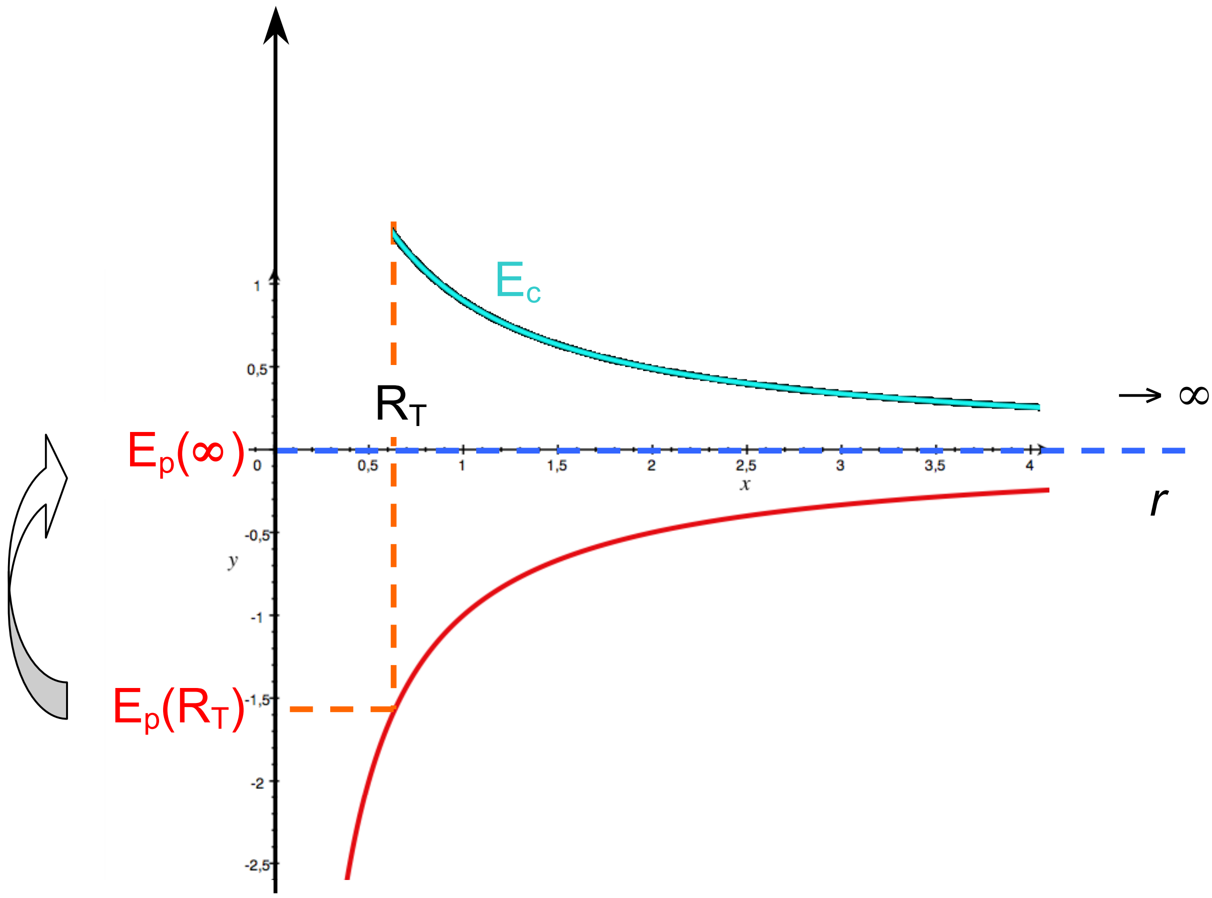
Il s'agit de la vitesse initiale qu'un corps doit avoir pour pouvoir s'échapper de l'attraction de l'astre sans qu'une force additionnelle soit nécessaire pendant le déplacement.
Le cas de figure envisagé est donc distinct du cas où le corps bénéficie d'une force permanente lui permettant d'avancer (exemple du grimpeur montant sur une échelle ou d'une fusée avec ses moteurs constamment en action).

Calcul de la vitesse d'évasion v_e :
On considère l'exemple d'une fusée qui quitte la surface de la Terre.
S'éloigner indéfiniment ⇔ aller à l'infini
Dans ce cas, cela correspond à un gain d'énergie potentielle :

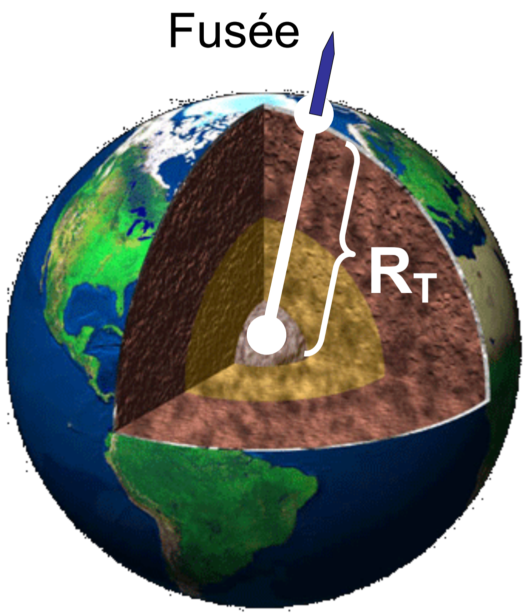


Dans la mesure où aucune force ne permet à la fusée d'avancer (elle se déplace grâce à son élan), le gain d'énergie potentielle est permis grâce à la perte d'énergie cinétique.

On va utiliser le principe de la conservation de l'énergie mécanique pour déterminer v_e.



En théorie, cette vitesse minimale de libération est celle nécessaire juste pour s'affranchir de l'attraction terrestre, quand la fusée est infiniment loin, la fusée n'a plus d'énergie cinétique



Initialement, la fusée est à la distance R_T du centre de la Terre et sa vitesse est la vitesse de libération v_e.

Son énergie mécanique initiale est donc :

$$E_m^{ini} = \frac{1}{2} m v_e^2 - \frac{G M m}{R_T}$$

Quand la fusée est infiniment loin :

- son énergie potentielle est nulle $E_p(\infty) = 0$
- son énergie cinétique est nulle car $v_{finale} = 0$
- son énergie mécanique est nulle $E_m^{final} = 0$

La conservation de l'énergie mécanique totale implique :

$$E_m^{final} = E_m^{ini} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2} m v_e^2 - \frac{G M m}{R_T} = 0$$

d'où :

$$v_e = \sqrt{\frac{2 G M}{R_T}}$$

Quelques exemples :

sur Terre : $v_e = 11.19 \text{ km s}^{-1}$

sur Mars: $v_e = 5 \text{ km s}^{-1}$

sur Jupiter: $v_e = 50.9 \text{ km s}^{-1}$

2.6.4 Forces non conservatives

Ces forces sont qualifiées de non-conservatives car, contrairement aux forces précédemment étudiées :

- leur travail dépend du chemin suivi,
- leur travail correspond à une énergie qui est dissipée le plus souvent sous forme de chaleur

Ces forces sont qualifiées de dissipatives.

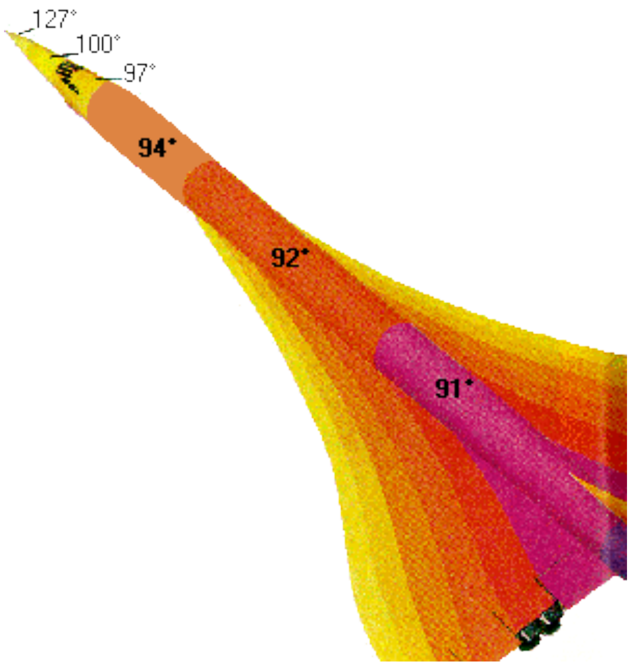
Les forces de frottement sont dissipatives, on distingue :

- les frottements solides (indépendant de v)
- les frottements visqueux (dépendant de v ou v^2)

Leur travail est dissipé sous forme de chaleur

$\rightarrow$ échauffement

Sous l'effet des forces de frottements atmosphériques, le véhicule européen ATV, se désintègre avec ses 6 t de déchets. Crédits : ESA/D. Ducros



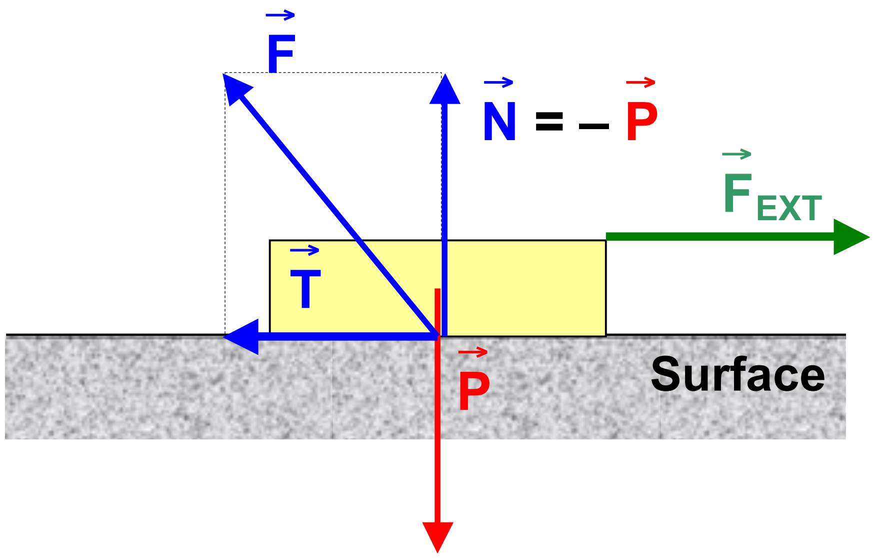
Exemple du frottement solide

Selon que ces solides glissent ou non l'un contre l'autre, on parle de glissement (frottement dynamique) ou d'adhérence (frottement statique).

Dans les deux cas, les actions réciproques qui s'exercent entre ces solides comportent :

* une composante normale $\vec{N}$ qui les presse l'un contre l'autre (opposée à $\vec{P}$),

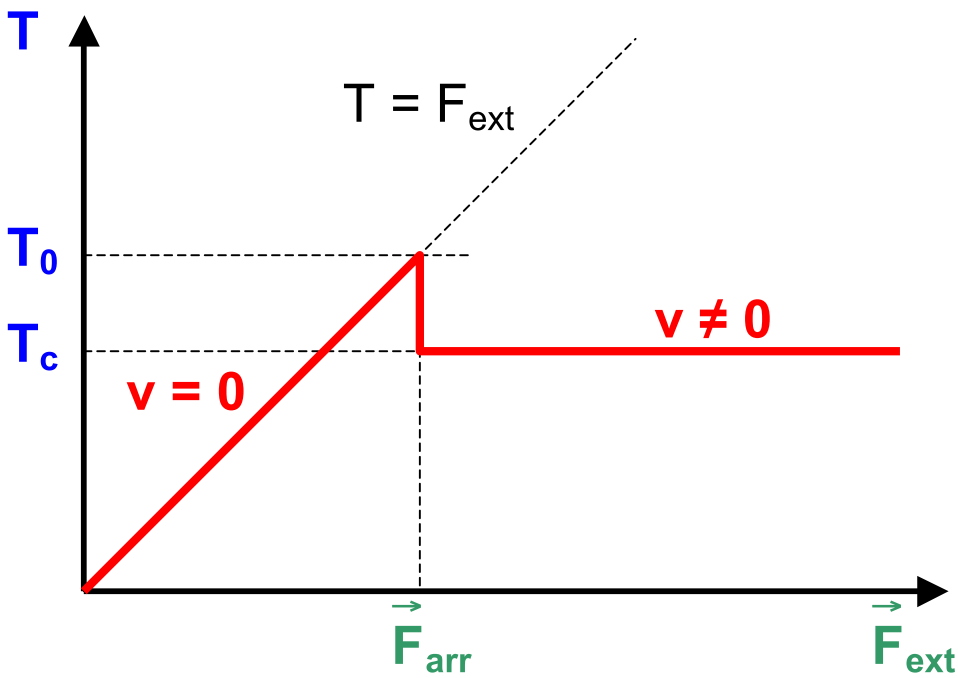
* une composante tangentielle $\vec{T}$ qui s'oppose, ou tend à s'opposer, au glissement.



Adhérence ou frottement statique

Tant que la composante tangentielle n'atteint pas une certaine limite T_0, le glissement ne se produit pas.

Lorsque la limite est atteinte ($F = F_{arr}$), le glissement se produit.



La loi de Coulomb détermine cette force limite T_0 :

$$T_0 = f_0.N$$

où f_0 est le **coefficient d'adhérence**, dont la valeur dépend avant tout des deux matériaux en présence et de l'état de leurs surfaces.

Glissement

Lorsque les solides glissent l'un contre l'autre, la composante tangentielle $\vec{T}_C$ est indépendante de la vitesse de glissement et déterminée par la loi de Coulomb :

$$T_C = f_C \,.\, N$$

où f_C est le coefficient de frottement de glissement, dont la valeur dépend entre autres des deux matériaux en présence et de l'état de leurs surfaces.

On a dans la plupart des cas :

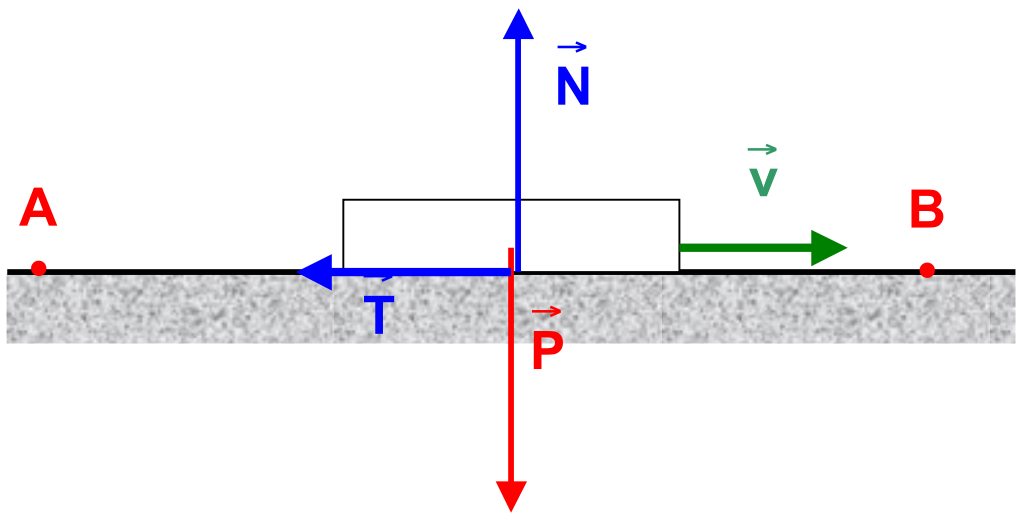
$$f_0 \geq f \text{ ou } T_0 \geq T_C$$

c'est à dire que la force nécessaire pour entretenir le glissement est généralement inférieure à la force limite d'adhérence.

Ceci explique que lorsque l'on pousse une armoire, le plus difficile est de la mettre en mouvement (vaincre le frottement statique).

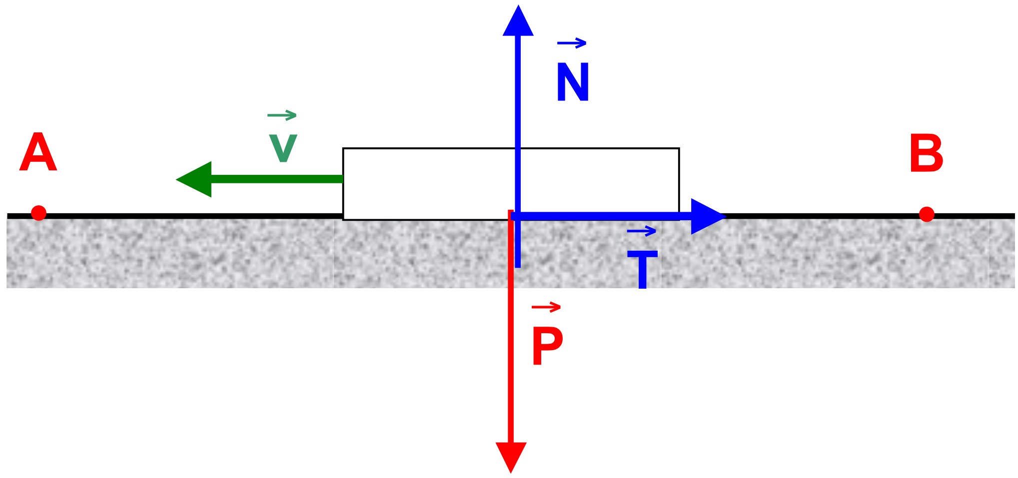
Travail des forces de frottement

On considère un solide que l'on déplace sur un plan horizontal d'un point A vers un point B à la vitesse v. Au cours du mouvement, ce solide est soumis à des forces de frottement solide dont on cherche à calculer le travail



De A à B, le travail des forces de frottement vaut :

$$W_{AB} = \vec{T}.\,\vec{AB} = -\,f_C\,mg\,AB$$



De B à A, le travail des forces de frottement vaut :

$$W_{BA} = \vec{T} \cdot \vec{BA} = - f_C \, mg \, AB$$

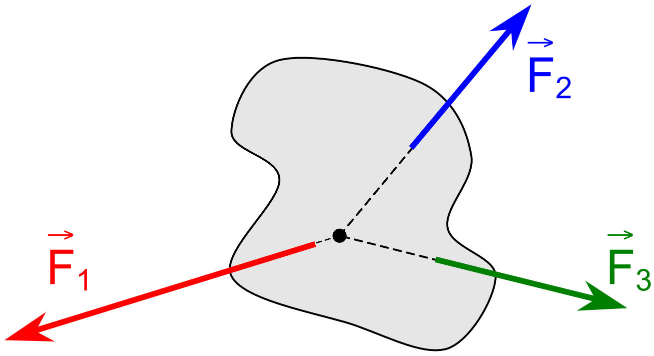
Au total, $W_{ABA} = W_{AB} + W_{BA}$ est non nul, le travail des forces de frottement est **non conservatif**.

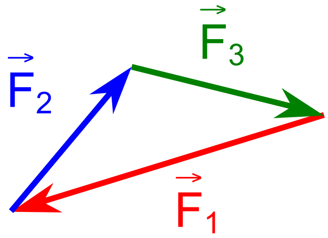
2.7 Énergie potentielle et stabilité – Équilibre statique

2.7.1 Conditions d'équilibre d'un système

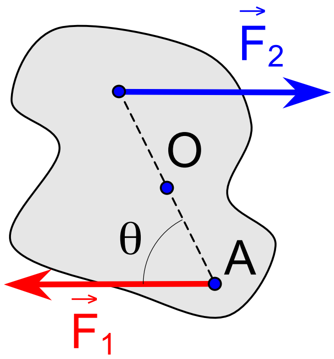
Pour qu'un système soumis à des forces soit en équilibre, il faut vérifier deux conditions :

- il faut que la somme des forces exercées sur le système soit nulle,





- il faut aussi que la somme des **moments** des forces exercées sur le système soit nulle :

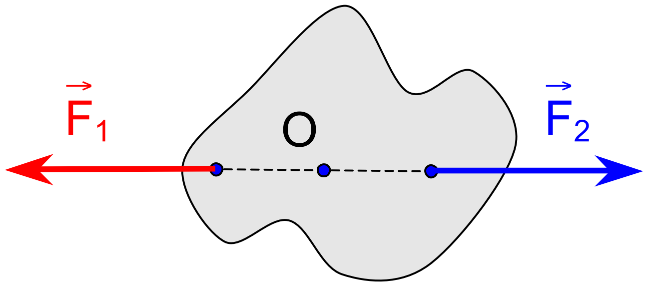


Rappel : moment d'une force :

$$\overrightarrow{M}_{\vec{F}_1/O} = F\cdot OA\cdot\sin\theta$$

Dans le cas présent, la somme des forces $\vec{F}_1 + \vec{F}_2$ est nulle, mais le solide n'est pas à l'équilibre. Le solide va tourner sous l'effet du couple de moments des forces $\vec{F}_1$ et $\vec{F}_2$.

Sa position d'équilibre est :



Dans le cadre du cours de LP104, nous ne nous intéresserons qu'à la première condition.

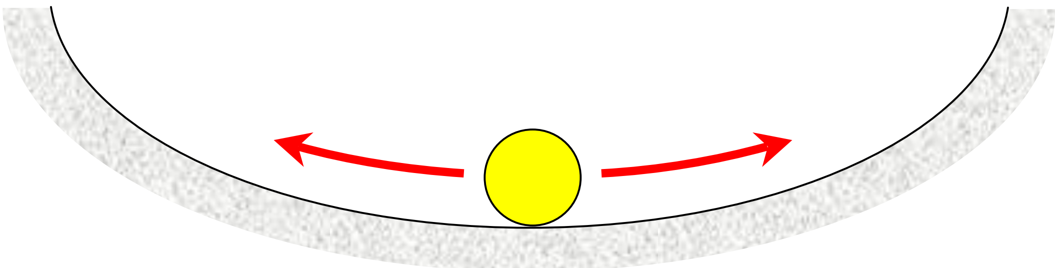
2.7.2 Stabilité d'un équilibre

Pour préciser si un équilibre est stable ou non, on le soumet à une légère perturbation.

Trois cas de figure apparaissent :

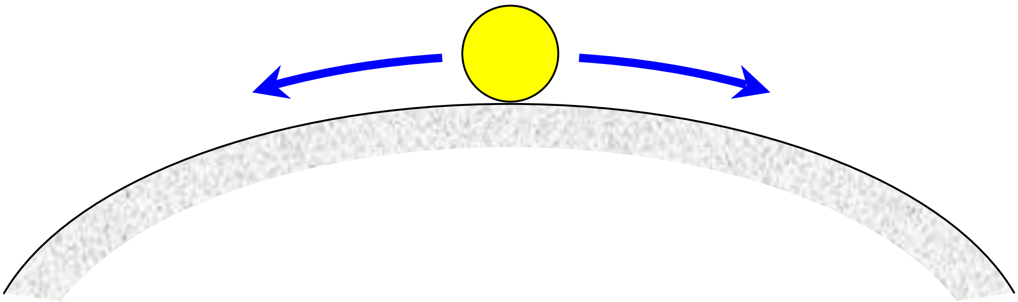
- Le système revient **spontanément** à son état initial. Il effectue généralement quelques oscillations :

  → **équilibre stable**

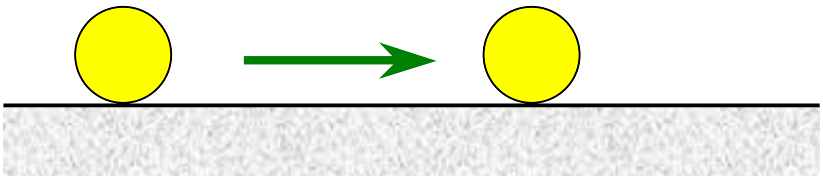


- Le système s’écarte **spontanément** de sa position d’équilibre initiale et évolue vers un autre état :

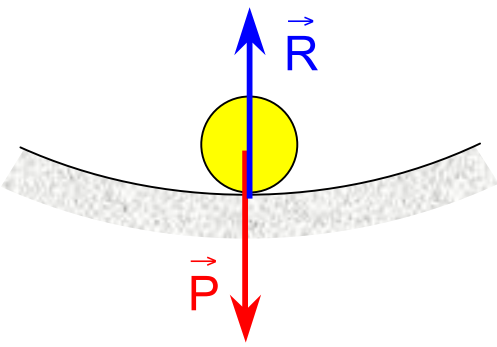
   → **équilibre instable**



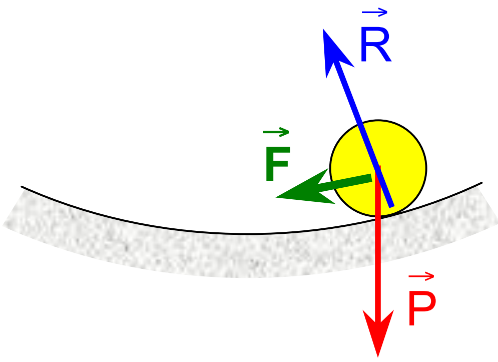
- Le système reste en équilibre. On parle alors d’équilibre **indifférent** :



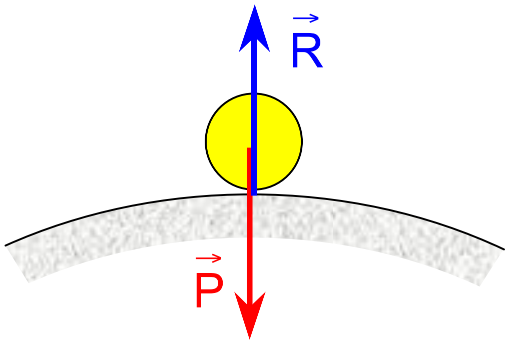
La condition d’équilibre est déterminée par la résultante des forces exercées si on écarte le système de sa condition d’équilibre :

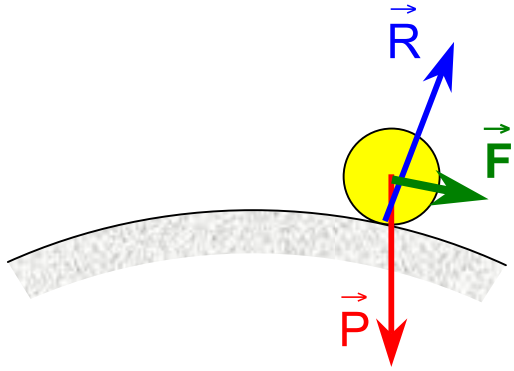


$\vec{P} + \vec{R} = \vec{0}$



$(\vec{P} + \vec{R})$ ramène le solide à sa position d’équilibre



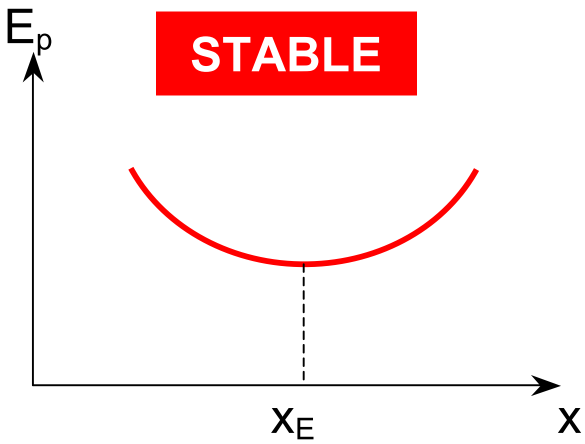


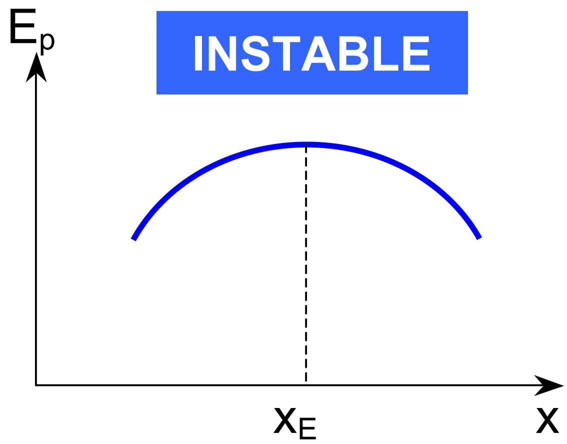
$\vec{P} + \vec{R} = \vec{0}$

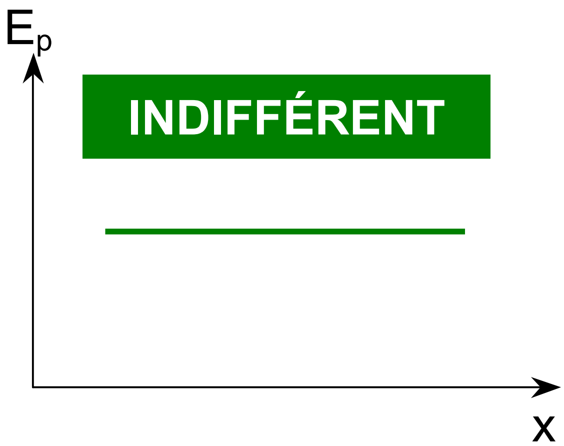
$(\vec{P} + \vec{R})$ écarte le solide de sa position d'équilibre

2.7.3 Énergie potentielle et stabilité d'un équilibre

L'énergie potentielle des cas précédents peut-être représentée par les courbes suivantes :







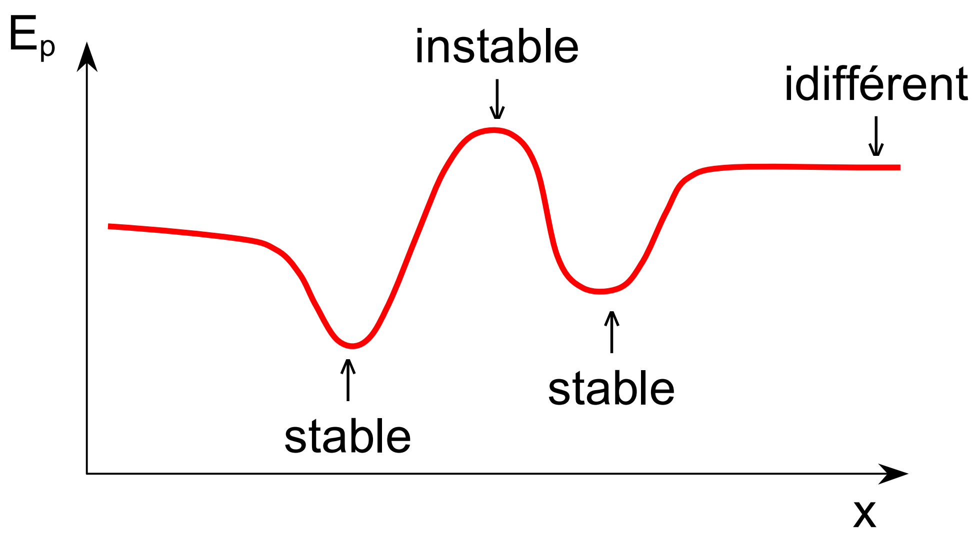
La nature stable ou instable d'un équilibre dépend de la courbure de la courbe $E_p(x)$ autour de la position d'équilibre initiale x_E :

- si la courbure est "vers le haut", $E_p(x)$ est convexe en x_E

$$\frac{d^2E_p}{dx^2}(x_E) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \text{équilibre stable}$$

- si la courbure est "vers le haut", $E_p(x)$ est concave en x_E

$$\frac{d^2E_p}{dx^2}(x_E) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \text{équilibre instable}$$

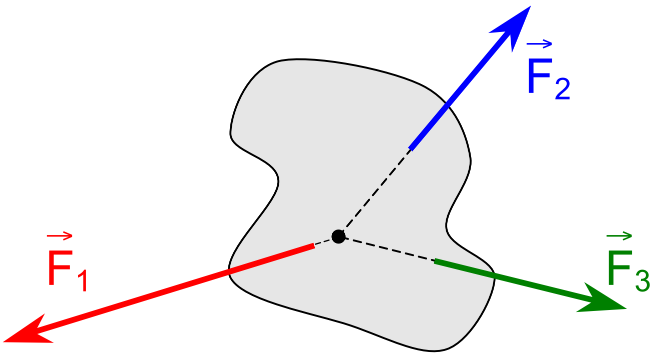


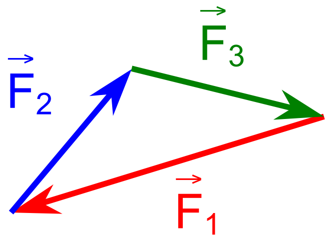
2.7.4 Système soumis à 3 forces concourantes

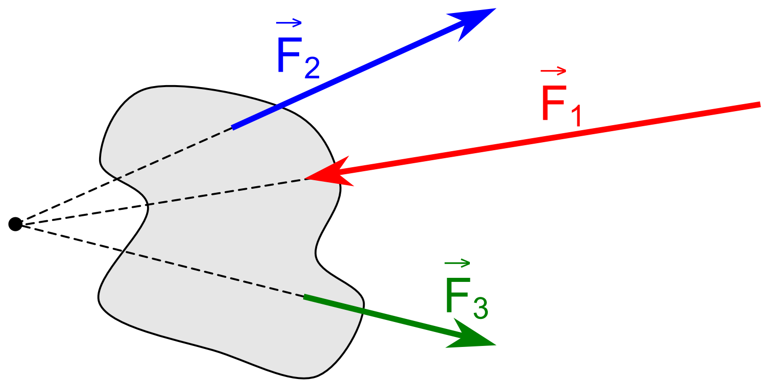
Les conditions d'équilibre définies au paragraphe 2.7.1 exprimées pour un systèmes soumis à 3 forces sont :

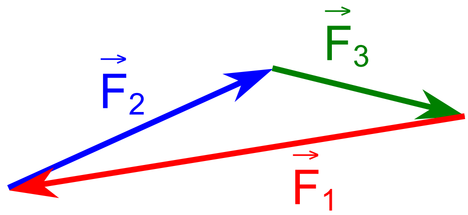
- la somme des forces exercées sur le système doit être nulle,
- les forces doivent être coplanaires et concourantes

Exemples :

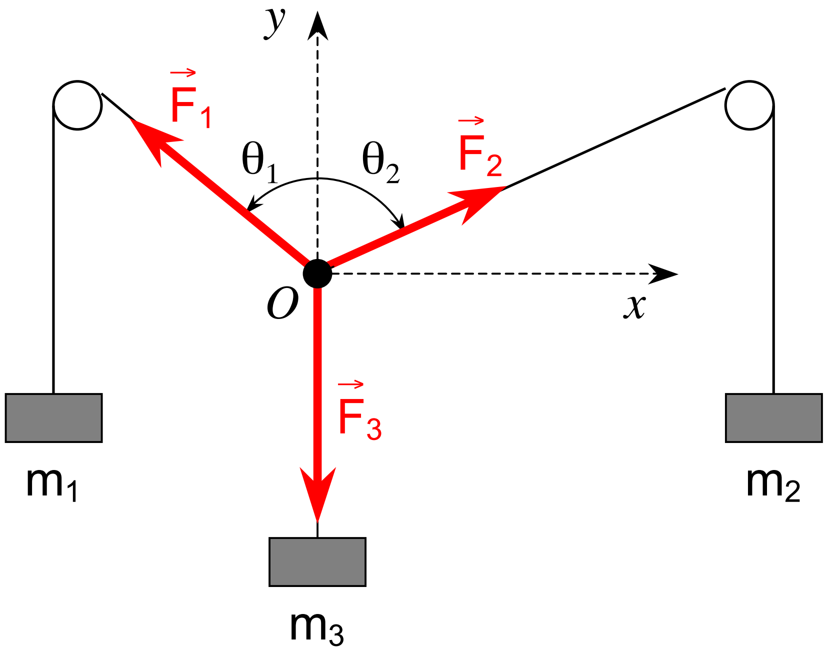








Un système soumis à trois forces concourantes et coplanaires peut être représenté par le cas suivant :



À l'équilibre :

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \vec{0}$$

en projetant sur les axes Ox et Oy :

$$-F_1 \sin\theta_1 + F_2 \sin\theta_2 = 0$$

$$F_1 \cos\theta_1 + F_2 \cos\theta_2 - F_3 = 0$$

avec :

$F_1 = m_1\, g$

$F_2 = m_2\, g$

$F_3 = m_3\, g$

La résolution d'un tel système n'est pas immédiate sauf dans quelques cas particuliers.

- **1^{er} cas particulier : $m_1 = m_2$**

Dans ce cas, les forces F_1 et F_2 sont égales,

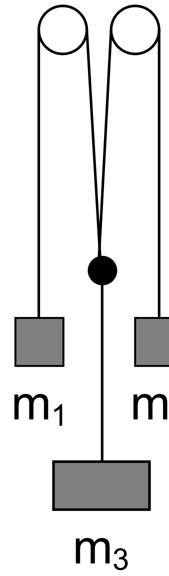
donc : $\sin\theta_1 = \sin\theta_2$

Comme θ_1 et $\theta_2 < \pi/2$, il en résulte que $\theta_1 = \theta_2 = \theta$

D'où, finalement :

$$\cos\theta = \frac{F_3}{2\,F_1} = \frac{m_3}{2\,m_1}$$

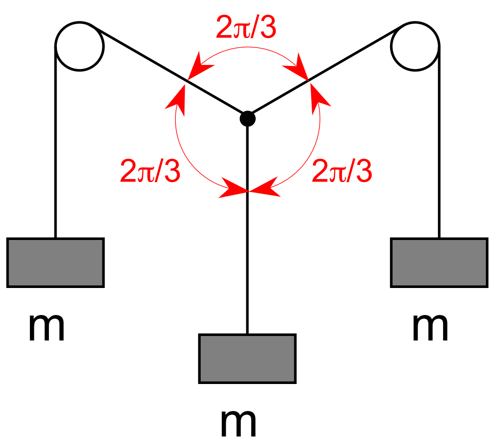
L'équilibre n'est possible que si $\mathbf{m_3 \leq 2\,m_1}$ $(\cos\theta \leq 1)$



$m_3 = 2\,m_1$

alors $\cos\theta \approx 1$

d'où $\theta \approx 0$



$m_3 = m_1 = m_2$

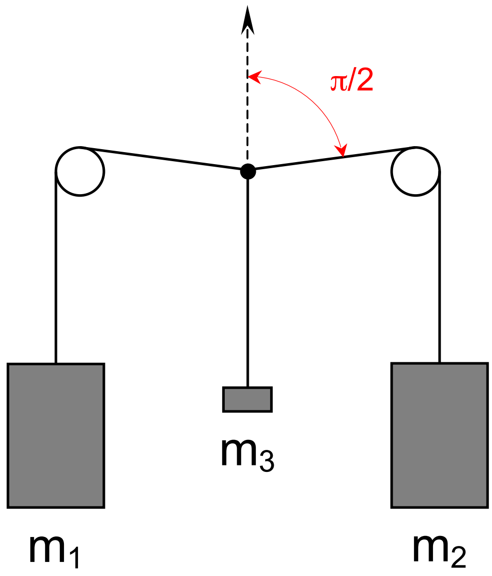
alors $\cos\theta \approx 1/2$

d'où $\theta \approx \pi/3$

$\mathbf{m_1 = m_2 >> m_2}$

alors $\cos\theta \rightarrow 0$

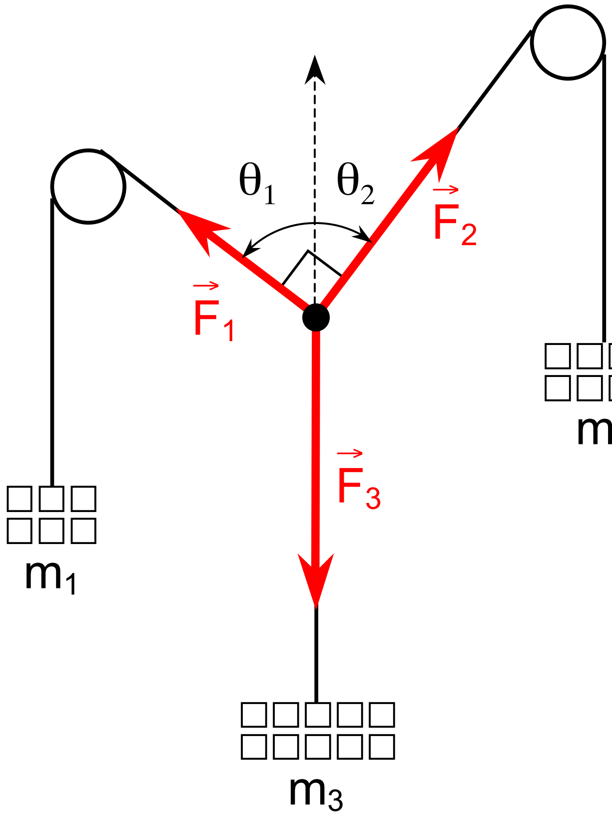
d'où $\theta \rightarrow \pi/2$



• **$2^{ème}$ cas particulier : $\frac{m_1}{m_3} = \frac{3}{5}$ et $\frac{m_2}{m_3} = \frac{4}{5}$**

Représentation graphique :

$\theta_1 + \theta_2 = \pi/2$

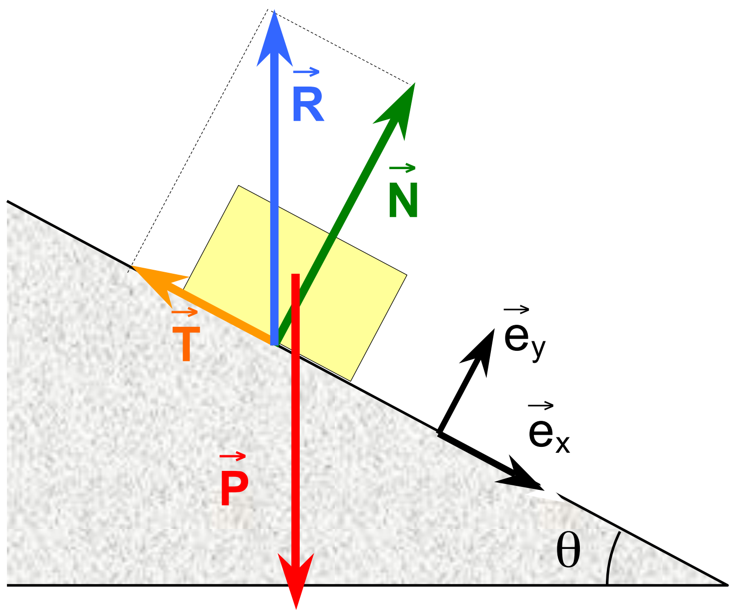


Remarque :

On constate expérimentalement que ces équilibres sont stables.

2.7.5 Systèmes avec frottement solide

On considère une masse m posée sur un plan incliné :



La masse est soumise à :

- son poids $\vec{P}$
- une force de réaction normale (⊥) $\vec{N}$
- une force de frottement solide $\vec{T}$

La condition d'équilibre est donnée par la relation :

$$\vec{P} + \vec{R} = \vec{0} \qquad \text{avec} \qquad \vec{R} = \vec{N} + \vec{T}$$

Projetée selon $\vec{e}_x$ et $\vec{e}_y$, cette équation vectorielle devient :

$/\vec{e}_x$: $\quad P \sin\theta - T = 0 \quad \Leftrightarrow \quad P \sin\theta = T$

$/\vec{e}_y$: $\quad -P \cos\theta + N = 0 \quad \Leftrightarrow \quad P \cos\theta = N$

Le solide reste immobile tant que la composante tangentielle du poids reste inférieure à la valeur limite d'arrachement (cf. § 2.6.4 page 41) :

$$P \sin\theta < T_0$$

$$\Leftrightarrow \quad m\, g \sin\theta < f_0\, N$$

$$\Leftrightarrow \quad m\, g \sin\theta < f_0\, m\, g \cos\theta$$

Cette dernière équation nous donne une condition sur l'angle limite θ_0 en deçà duquel l'équilibre est indifférent (le solide ne bouge pas) et au-delà duquel le solide se met à glisser :

$$\tan\theta < f_0$$

2.7.6 Équilibre des corps flottants

→ sera vu au chapitre suivant