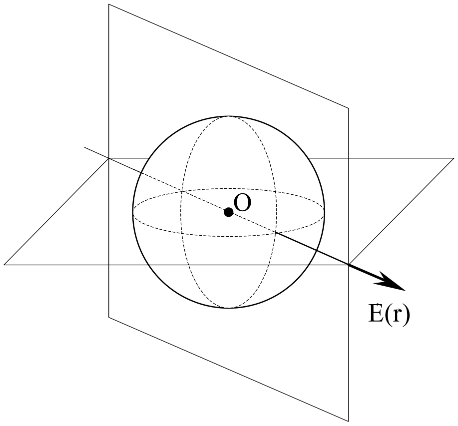
LP203 – Correction du CC du 12/11/2008



Exercice 1

1.1 Symétries de la distribution de charges – Direction de E

Tout plan passant par O est plan de symétrie de la distribution de charge.

Comme le champ E appartient à l'intersection de 2 plans de symétrie, on en déduit que le champ est radial : $E(r) = E(r,\varphi,\theta)\ e_r$

Par symétrie sphérique, il est évident que E ne dépend pas de φ et θ. $E(r,\varphi,\theta) = E(r)\ e_r$

1.2 Champ E en tout point de l'espace

On applique le théorème de Gauss sur une sphère de rayon r centrée sur 0.

- À l'intérieur de la sphère : $r < R$

$$\int E \cdot dS = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} \quad \Leftrightarrow \quad E_{int}(r)\ 4\pi r^2 = \rho\ 4/3\ \pi r^3 \quad \Rightarrow \quad E_{int}(r) = \frac{\rho\ r}{3\ \varepsilon_0}$$

- À l'extérieur de la sphère : $r > R$

$$\int E \cdot dS = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} \quad \Leftrightarrow \quad E_{ext}(r)\ 4\pi r^2 = \rho\ 4/3\ \pi R^3 \quad \Rightarrow \quad E_{ext}(r) = \frac{\rho\ R^3}{3\ \varepsilon_0\ r^2}$$

1.3 Potentiel électrostatique : on applique la relation $E = -\nabla V$

- À l'extérieur de la sphère : $r > R$

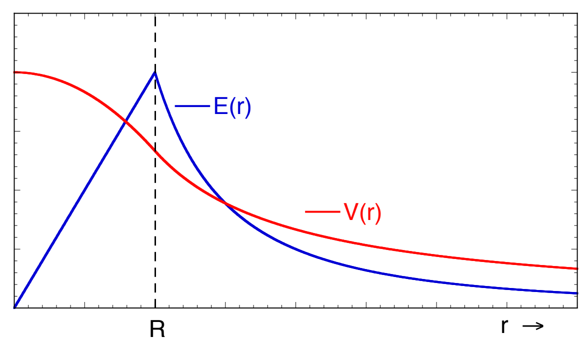
$$V_{ext}(r) = -\int E_{ext}(r)\ dr\ + C^{te}$$

avec $V_{ext}(\infty) = 0 \quad \Rightarrow \quad V_{ext}(r) = \dfrac{\rho\ R^3}{3\ \varepsilon_0\ r}$

- À l'intérieur de la sphère : $r < R$

$$V_{int}(r) = -\int E_{int}(r)\ dr\ + C^{te} = -\frac{\rho\ r^2}{6\ \varepsilon_0} + C^{te}$$

avec $V_{int}(R) = V_{ext}(R) = \dfrac{\rho\ R^2}{3\ \varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad V_{int}(r) = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}\left[\dfrac{R^2}{2} - \dfrac{r^2}{6}\right]$

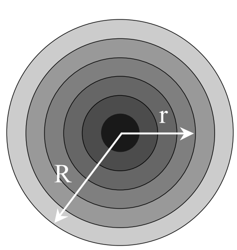


1.4 Énergie potentielle de la sphère chargée

Plusieurs méthodes sont possibles

- On calcule simplement $Ep = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_V \rho(r)\ V_{int}(r)\ d^3r\ = \dfrac{\rho}{2}\displaystyle\int_0^R V_{int}(r)\ 4\pi r^2 dr = \dfrac{2\pi\rho^2}{\varepsilon_0}\displaystyle\int_0^R \left[\dfrac{R^2\ r^2}{2} - \dfrac{r^4}{6}\right] dr = \dfrac{4\ \pi\ \rho^2\ R^5}{15\ \varepsilon_0}$

- On calcule le travail effectué pour amener les charges depuis l'infini en O :



À chaque étape, on amène une couche d'épaisseur dr correspondant à la quantité de charge dq. Le travail nécessaire pour amener cette couche de charges d'épaisseur dr depuis l'infini sur la petite sphère de rayon r est donnée par :

$$dW = dq\ [V(r) - V(\infty)] = \rho\ 4\pi\ r^2\ dr\ \frac{\rho\ r^2}{3\ \varepsilon_0}$$

où V(r) est le potentiel à la surface de la sphère de rayon r uniformément chargée en volume

$$Ep = \int dW = \frac{4\pi\ \rho^2}{3\ \varepsilon_0}\int_0^R r^4 dr\ = \frac{4\ \pi\ \rho^2\ R^5}{15\ \varepsilon_0}$$

• On pouvait aussi calculer Ep = $\int \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} dV = \int_0^R \frac{\varepsilon_0 E_{int}^2}{2} dV + \int_R^\infty \frac{\varepsilon_0 E_{ext}^2}{2} dV$

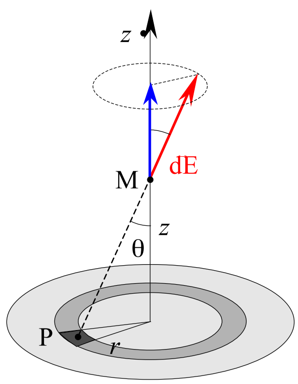
$$Ep = \int_0^R \frac{\varepsilon_0}{2} \left(\frac{\rho r}{3\varepsilon_0}\right)^2 4\pi r^2 dr + \int_R^\infty \frac{\varepsilon_0}{2} \left(\frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2}\right)^2 4\pi r^2 dr = \frac{4 \pi \rho^2 R^5}{15 \varepsilon_0}$$

Exercice 2

2.1 Symétries de la distribution de charges – Direction de E

Tout plan passant par l'axe de disque est plan de symétrie de la distribution de charges. Comme le champ E appartient à l'intersection de 2 plans de symétrie, on en déduit que le champ est vertical: $E(r) = E(r,\varphi,z)\, e_z$

Par symétrie de rotation, il est évident que $E(0,\varphi,z)$ ne dépend pas de φ. $E(0,\varphi,z) = E(z)\, e_z$



2.2 Champ E(z)

La quantité de charge dq localisée en P et correspondant à un élément de surface $dS = r d\varphi dr$ crée en un point M situé sur l'axe le champ élémentaire :

$$\overrightarrow{dE}_{dS} = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 PM^2} \frac{\overrightarrow{PM}}{PM} = \frac{\sigma_- r d\varphi dr}{4\pi\varepsilon_0 PM^2} \frac{\overrightarrow{PM}}{PM}$$

Pour une couronne de rayons r et r+dr, on obtient la somme des projections des champs élémentaires dE sur l'axe :

$$dE_{cour} = \frac{\sigma_- r d\varphi dr}{4\pi\varepsilon_0 PM^2} \frac{\overrightarrow{PM}}{PM} \cdot \vec{e}_z = \frac{\sigma_- r dr}{2\varepsilon_0 (r^2 + z^2)} \cos\theta = \frac{\sigma_- z\, r dr}{2\varepsilon_0 (r^2 + z^2)^{3/2}}$$

Le champ créé en M par tout le disque s'obtient par intégration :

$$E(z) = \frac{\sigma_- z}{2\varepsilon_0} \int_0^R \frac{r dr}{(r^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{\sigma_- z}{2\varepsilon_0} \left[\frac{-1}{(r^2 + z^2)^{1/2}}\right]_0^R = \frac{\sigma_- z}{2\varepsilon_0} \left[\frac{1}{|z|} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + z^2}}\right]$$

D'où finalement : $\vec{E}(z) = \frac{\sigma_-}{2\varepsilon_0} \left[\frac{z}{|z|} - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}}\right] \vec{e}_z$

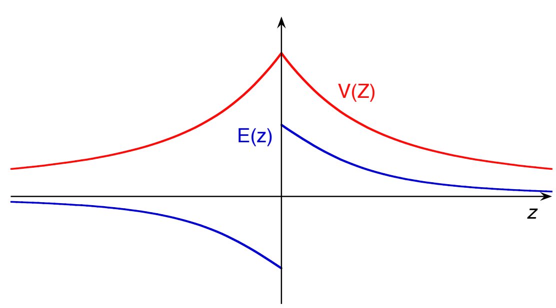
2.3 **Potentiel V(z) sur l'axe** : Le potentiel s'obtient à partir de la relation : $V(z) = \int_0^R \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 PM}$ avec $dq = \sigma_- 2\pi\, r\, dr$,

$$V(z) = \frac{\sigma_-}{2\varepsilon_0} \int_0^R \frac{r dr}{(r^2 + z^2)^{1/2}} = \frac{\sigma_-}{2\varepsilon_0} \left[\sqrt{r^2 + z^2}\right]_0^R = \frac{\sigma_-}{2\varepsilon_0} \left[\sqrt{R^2 + z^2} - |z|\right]$$

Remarque : dans les expressions finales de E(z) et V(z), |z| est nécessaire pour une relation cohérente avec les valeurs négatives de z. Ceci est dû au fait que e_z change de sens quand on passe de $z > 0$ à $z < 0$.

2.4 On vérifie sans problème que $\vec{E} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, V$

2.5 Courbes représentatives



2.6 E(z) pour z << R :

Le point M est infiniment proche du disque de taille finie,

→ on se ramène au cas du plan infini : $R \to 0$

$$\vec{E}(z) = \frac{\sigma_-}{2\varepsilon_0} \frac{z}{|z|} \vec{e}_z$$

E(z) pour z >> R :

Vu depuis le point M à l'infini, le disque est vu comme une charge ponctuelle.

→ on se ramène au cas du plan infini :

$$\vec{E}(z) = \frac{\sigma_-}{2\varepsilon_0}\left[\frac{z}{|z|} - \frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}\right]\vec{e}_z = \frac{\sigma_-}{2\varepsilon_0}\left[\frac{z}{|z|} - \frac{z}{\sqrt{z^2\,(1+R^2/z^2)}}\right]\vec{e}_z$$

$$= \frac{\sigma_-}{2\varepsilon_0}\left[\frac{z}{|z|} - \frac{z}{\sqrt{z^2\,(1+R^2/z^2)}}\right]\vec{e}_z = \frac{\sigma_-}{2\varepsilon_0}\frac{z}{|z|}\left[1 - \frac{1}{\sqrt{1+R^2/z^2}}\right]\vec{e}_z$$

en prenant un développement limité à l'ordre 1 : $(1 + R^2/z^2)^{-1/2} = 1 - \dfrac{R^2}{2\,z^2}$

d'où finalement : $\vec{E}(z) = \dfrac{\sigma_-}{2\varepsilon_0}\dfrac{z}{|z|}\dfrac{R^2}{2\,z^2}\,\vec{e}_z$

avec $Q = \sigma_-\,\pi\,R^2$, on obtient : $\vec{E}(z) = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{z}{|z|}\,\vec{e}_z$

résultat attendu pour une charge considérée comme ponctuelle

2.7 Direction du champ E

Les propriétés de symétrie sont les mêmes que dans le cas du disque, E(z) est donc selon e_z.

2.8 E(z)

Cette distribution de charge peut-être considérée comme équivalente à la somme d'un plan infini chargé positivement (σ_+) et d'un disque de rayon R chargé négativement($\sigma_- = -\,\sigma_+$).

D'après le principe de superposition :

$$\vec{E}_{\text{tot}} = \vec{E}_{\text{plan }\infty} + \vec{E}_{\text{disque}} = \frac{\sigma_+}{2\varepsilon_0}\frac{z}{|z|}\vec{e}_z - \frac{\sigma_+}{2\varepsilon_0}\left[\frac{z}{|z|} - \frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}\right]\vec{e}_z$$

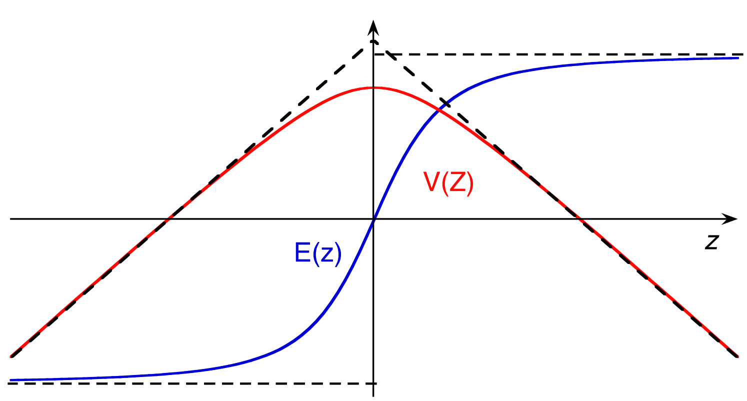
$$\vec{E}_{\text{tot}}(z) = \frac{\sigma_+}{2\varepsilon_0}\frac{|z|}{\sqrt{R^2+z^2}}\vec{e}_z$$

2.9 V(z)

On applique le même raisonnement, d'après le principe de superposition :

$$V_{\text{tot}} = V_{\text{plan }\infty} + V_{\text{disque}} = \frac{\sigma_+|z|}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma_+}{2\varepsilon_0}\left[\sqrt{R^2+z^2} - |z|\right] + K$$

$$V_{\text{tot}}(z) = -\frac{\sigma_+}{2\varepsilon_0}\sqrt{R^2+z^2} + K$$



Les lignes en pointillés rappellent les valeurs des potentiel et champ dans le cas du plan infini.