Correction du CC du 19/11/2009

1.1 Symétries du problème

On a évidemment une symétrie sphérique.

Tout plan passant par le centre de la sphère est un plan de symétrie

$\vec{E}$ est commun à tous ces plans de symétrie $\Rightarrow \vec{E}(\vec{r}) = E(\vec{r})\,\vec{e}_r$

Par ailleurs, la distribution de charge est invariante par toute rotation autour du centre de la sphère. $\vec{E}$ ne dépend pas de φ et $\theta \Rightarrow E(r, \varphi, \theta) = E(r)$

$\vec{E}(\vec{r}) = E(r)\,\vec{e}_r$

1.2 Champ $\vec{E}(\vec{r})$

On applique le théorème de Gauss

- Pour $r < R_1$: pas de charge. $Q_{int} = 0 \;\Rightarrow\; \vec{E}_{cav} = \vec{0}$
- Pour $R_1 < r < R_2$: . $Q_{int} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}\dfrac{4\pi}{3}(r^3 - R_1^3) \qquad \Rightarrow E_{int}(r) = \dfrac{\rho}{3\varepsilon_0}\left(\dfrac{r^3 - R_1^3}{r^2}\right)$
- Pour $r > R_2$: $Q_{int} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}\dfrac{4\pi}{3}(R_2^3 - R_1^3) \qquad \Rightarrow E_{ext}(r) = \dfrac{Q_{int}}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \rho\,\dfrac{R_2^3 - R_1^3}{3\varepsilon_0 r^2}$

1.3 Potentiel $V(\vec{r})$

On suppose (même si cela n'est pas précisé explicitement dans l'énoncé) que $V(\infty) = 0$

Pour calculer le potentiel dans tout l'espace, on va utiliser la relation :

$V(r) = -\displaystyle\int E(r)\,dr$ *valable car E ne dépend que de r.*

L'intégration va se faire à une constante près. Comme la seule donnée dont on dispose est $V(\infty) = 0$, il faut donc commencer à calculer V pour $r > R_2$.

- Pour $r > R_2$: $V_{ext} = -\displaystyle\int E_{ext}(r)\,dr = -\frac{Q_{int}}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{dr}{r^2} = \frac{Q_{int}}{4\pi\varepsilon_0 r} + K_1 = \frac{Q_{int}}{4\pi\varepsilon_0 r} = \rho\,\frac{R_2^3 - R_1^3}{3\varepsilon_0 r}$
- Pour $R_1 < r < R_2$: $V_{int} = -\displaystyle\int E_{int}(r)\,dr = -\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left(\frac{r^2}{2} + \frac{R_1^3}{r}\right) + K_2$

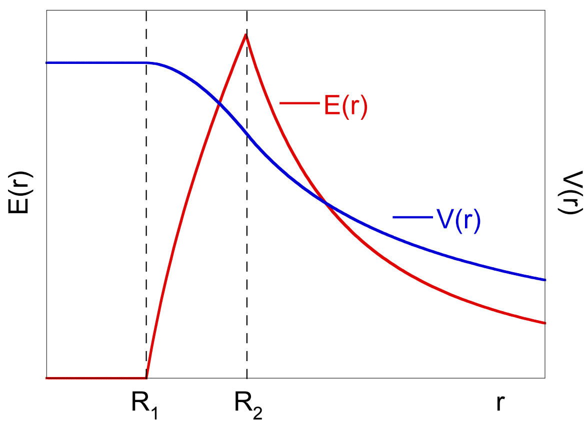
on détermine K_2 en écrivant la continuité du potentiel à la surface externe de la sphère :

$V_{ext}(R_2) = V_{int}(R_2) \Rightarrow K_2 = \dfrac{R_2^2}{2\varepsilon_0}$ d'où finalement : $V_{int}(r) = -\dfrac{\rho}{3\varepsilon_0}\left(\dfrac{r^2}{2} + \dfrac{R_1^3}{r} - \dfrac{3R_2^2}{2}\right)$

Pour s'assurer partiellement de la validité du résultat, il convient de vérifier la cohérence dimensionnelle du résultat obtenu à savoir que les termes entre parenthèses sont homogènes à r^2.

- Pour $r < R_1$: $V_{cav} = C^{te} = V_{int}(R_1) = \rho\,\dfrac{R_2^2 - R_1^2}{2\varepsilon_0}$

1.4 E(r) et V(r)



1.5 Énergie de la distribution de charges

On pouvait utiliser les 3 méthodes vues en TD :

- $E_p = \frac{\varepsilon_0}{2}\iiint E^2 d\tau$
- $E_p = \frac{1}{2}\iiint \rho(\vec{r})V(\vec{r})\, d\tau$
- $E_p = \int q\, \vec{E}\, d\vec{r}$ (travail pour amener les charges depuis l'infini)

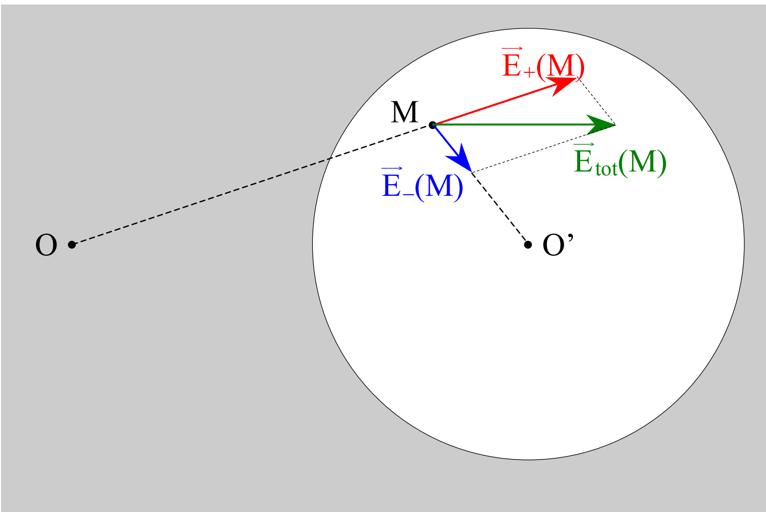
Dans le cas présent, le plus rapide consistait à utiliser la deuxième méthode puisque ρ est non nulle entre R_1 et R_2.

$$E_p = \frac{\varepsilon_0}{2}\iiint \rho(\vec{r})V_{int}(\vec{r})\, d\tau = \frac{\varepsilon_0}{2}\int_{R_1}^{R_2} \rho\left(-\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left(\frac{r^2}{2}+\frac{R_1^3}{r}-\frac{3R_2^2}{2}\right)\right)4\pi r^2 dr = \frac{2\pi\rho^2}{15\varepsilon_0}\left(2R_2^5+3R_1^5-5R_1^3R_2^2\right)$$

1.6 Comment construire la distribution de charges ?

Il faut considérer une sphère pleine de centre O et de rayon R_2 ayant une densité de charges ρ (> 0) à laquelle on ajoute sphère pleine de centre O' et de rayon R_1 ayant une densité de charges $-\rho$ (< 0). Dans le volume défini par cette sphère, la densité de charge sera nulle (les charges + étant compensées par les charges –)

1.7 Le champ est constant dans la cavité



En appliquant le principe de superposition, on considère que le champ régnant dans la cavité est la somme : - du champ dû à la distribution de charge (+) centrée en O, $\vec{E}_+(M)$

- du champ dû à la distribution de charge (–) centrée en O', $\vec{E}_-(M)$

Le champ $\vec{E}_+(M)$ est déterminé en appliquant le théorème de Gauss :

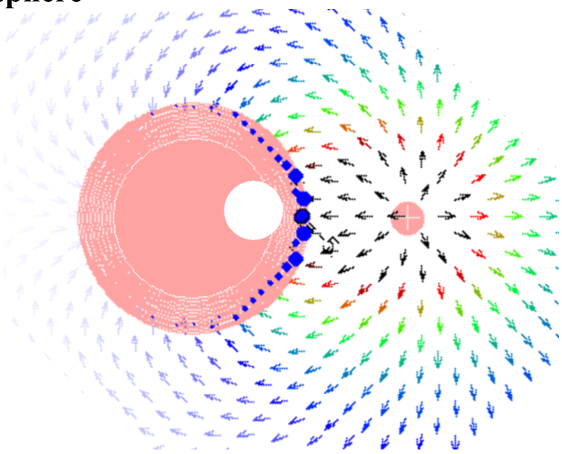
$$\vec{E}_+(M) = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}\vec{e}_r = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} OM \cdot \frac{\overrightarrow{OM}}{OM} \qquad \text{(cf. cours § 2.3.4)}$$

d'où on en déduit par analogie $\vec{E}_-(M) = -\frac{\rho}{3\varepsilon_0} O'M \cdot \frac{\overrightarrow{O'M}}{O'M}$

$$\vec{E}_{tot}(M) = \vec{E}_+(M) + \vec{E}_-(M) = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} OM \cdot \frac{\overrightarrow{OM}}{OM} - \frac{\rho}{3\varepsilon_0} O'M \cdot \frac{\overrightarrow{O'M}}{O'M} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left(\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{O'M}\right) = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\overrightarrow{OO'}$$

Le champ est donc constant dans la cavité !

1.8 Répartition de charges à la surface de la sphère



La charge $+Q$ située au voisinage de la sphère conductrice va modifier par influence la répartition des charges à la surface de celle-ci.

On va donc avoir une accumulation de charges (–) sur la surface proche de la charge $+Q$.

Ces charges (–) sont représentées en bleu sur la figure ci-contre.

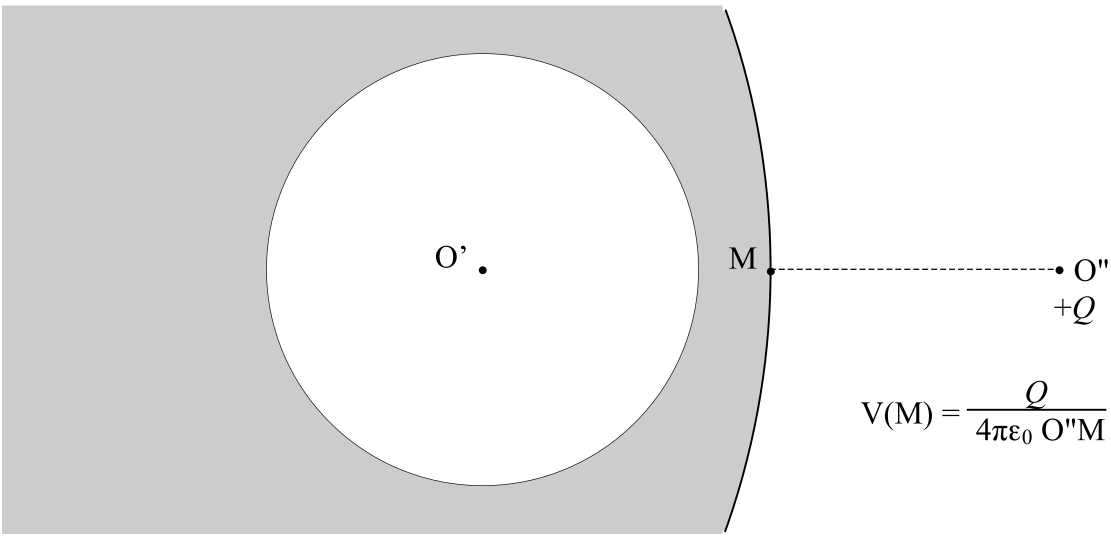
On va aussi observer une accumulation de charges (+) sur la face opposée de la sphère (non représentée). Cette accumulation apparente de charges (+), pourtant *a priori* immobiles, résulte d'un déficit de charges (–) qui sont elles mobiles.

1.9 Champ $\vec{E}$ dans la cavité

Le champ dans la sphère conductrice est nul, le potentiel y est donc constant. Comme il n'y a pas d'extremum de charges dans la sphère ni dans la cavité, le potentiel est constant partout, y compris dans la cavité. Le champ électrique est donc nul dans la cavité.

1.10 Potentiel dans la cavité

La sphère conductrice était initialement à un potentiel nul. Celui-ci est modifié par la présence de la charge $+Q$.



Avec OO" = OM + MO" (les points O, M et O" sont alignés) $\Rightarrow$ O"M = OO" – OM = $3a - R_2$

$$V(M) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\,(3a - R_2)}$$

Comme le potentiel est constant : $\quad V_{\text{cavité}} = V(M) = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0\,(3a - R_2)}$