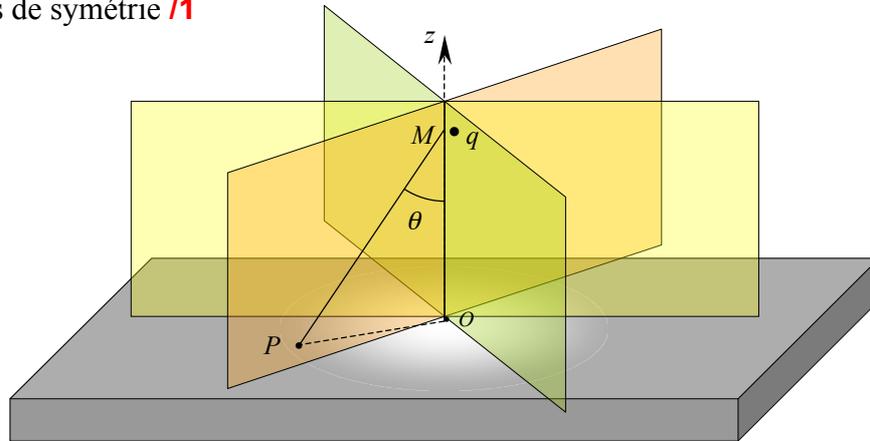


Exercice 1 /29

- /3 1.1** Le système considéré a une symétrie axiale  $\Rightarrow$  coordonnées cylindriques **/1**  
 Éléments de symétrie **/1**



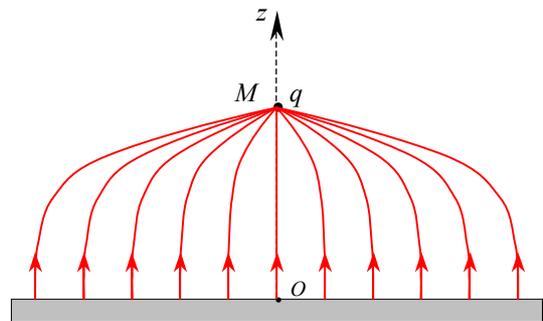
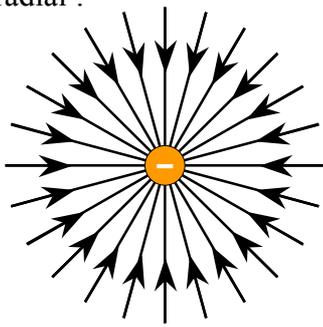
Le champ électrique, grandeur polaire, est donc contenu dans les plans de symétrie.  
 Sur l'axe, le champ est selon l'intersection des plans de symétrie :  $\vec{E} = E(\rho, \varphi, z) \vec{e}_z$  **/0.5**  
 La distribution de charges est invariante par rotation autour de  $Oz$ ,  $E$  ne dépend pas de  $\varphi$ .

$\vec{E}(M) = E(\rho, z) \vec{e}_z$  **/0.5**

- /2 1.2** Le conducteur est à l'équilibre, le champ à l'intérieur de celui-ci est donc nul  
**/2 1.3** Le champ électrique étant aligné avec le gradient du potentiel, celui-ci est donc normal à la surface (cf. cours chap. 1 p.29 et chap. 5 p.3).

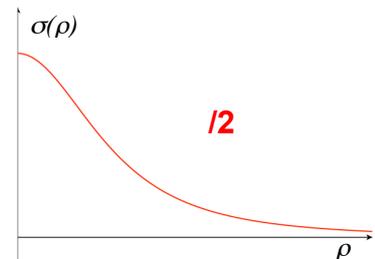
$\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}$  où  $\vec{n}$  est un vecteur unitaire normal à la surface.

- /2 1.4** Au voisinage de la charge, le champ  $\vec{E}$  **/2 1.5** Dans un plan vertical :  
 est radial :



**/4 1.6**  $\sigma(\rho, z) = -\frac{q \cos^3 \theta}{2 \pi z^2}$  avec  $\cos \theta = \frac{z}{(\rho^2 + z^2)^{1/2}}$

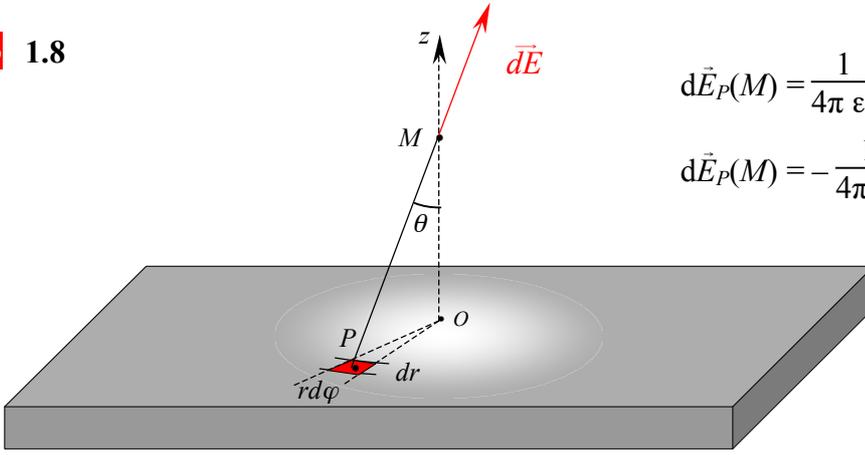
d'où :  $\sigma(\rho, z) = -\frac{q z}{2 \pi (\rho^2 + z^2)^{3/2}}$  **/2**



**/5 1.7**  $q_{tot} = \int_{\text{plan}} \sigma dS = \int_{\text{plan}} \sigma d\rho \rho d\varphi = -\frac{q z}{2 \pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} \frac{\rho d\rho}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} = -q z \left[ \frac{-1}{(\rho^2 + z^2)^{1/2}} \right]_0^{\infty} = -q$  **/3**

**/2** Ce résultat est logique, comme le plan est infini : les deux éléments sont en influence totale.

**1.8**

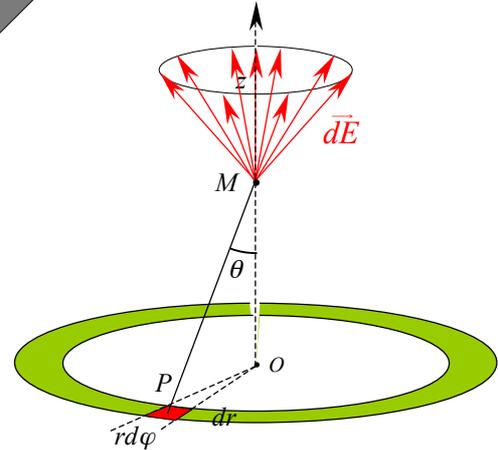


$$d\vec{E}_P(M) = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \sigma(P) \frac{d\rho \rho d\varphi}{PM^3} \vec{PM}$$

$$d\vec{E}_P(M) = -\frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{q z \rho d\rho d\varphi}{2\pi (\rho^2 + z^2)^{3/2}} \frac{-\rho \vec{e}_\rho + z \vec{e}_z}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}}$$

**1.9**

Les champs élémentaires créés par les différentes charges élémentaires réparties sur la couronne sont localisés sur un cône d'ouverture  $\alpha$ . Le champ électrique résultant en E est la somme des projections selon Oz de ces champs élémentaires.



$$dE_{Pz}(M) = -\frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{q z \rho d\rho d\varphi}{2\pi (\rho^2 + z^2)^{3/2}} \frac{z}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}}$$

Les composantes selon  $\vec{e}_\rho$  s'annulent par symétrie.

En intégrant sur toute la surface :

$$E_{Pz}(M) = \frac{-q z^2}{2\pi (4\pi \epsilon_0)} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\infty \frac{\rho d\rho}{(\rho^2 + z^2)^3} = \frac{-q z^2}{4\pi \epsilon_0} \left[ \frac{-1}{4(\rho^2 + z^2)^2} \right]_0^\infty = \frac{-q}{16\pi \epsilon_0 z^2}$$

**1.10**

L'énergie potentielle de la charge  $q$  au point  $M$  peut être calculée de plusieurs manières :

-  $E_p = q \cdot V(M)$

**1** -  $E_p = -W$  (force électrostatique pour amener la charge depuis l'infini jusqu'en  $M$ )

-  $E_p = W$  (force extérieure pour amener la charge depuis l'infini jusqu'en  $M$ )

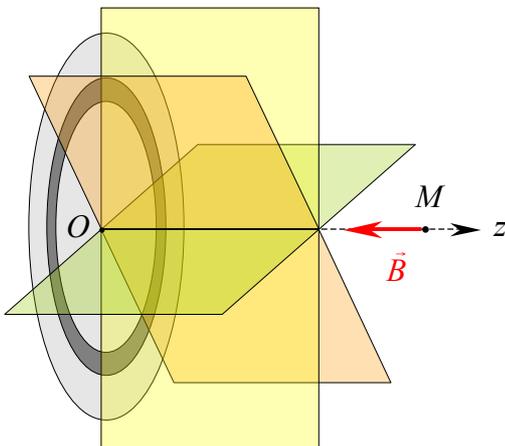
Calculons la deuxième grandeur :

$$W = -\int_\infty^{z_M} q \cdot \vec{E}(M) \cdot d\vec{\ell} = -\int_\infty^{z_M} q \cdot E(z) \cdot dz = \frac{q^2}{16\pi \epsilon_0} \int_\infty^{z_M} \frac{dz}{z^2} = -\frac{q^2}{16\pi \epsilon_0 z_M} \quad \text{1}$$

**Exercice 2 18**

**2.1**

Symétries du problème



Le champ d'induction magnétique  $\vec{B}$ , grandeur axiale, est donc contenu dans les plans d'antisymétrie. **1**

La distribution de courant est invariante par rotation autour de Oz,  $E$  ne dépend pas de  $\varphi$ . **1**

**2.2** Direction et sens de  $\vec{B}$  sur l'axe. **2**

Sur l'axe, le champ est selon l'intersection des plans d'antisymétrie :  $\vec{B} = B(r, \varphi, z) \vec{e}_z$  **1**

$$\vec{B}(M) = B(r, z) \vec{e}_z$$

Comme le disque est chargé négativement, le champ est

opposé à  $\vec{e}_z$ . **1**

$$/2 \quad 2.3 \quad \vec{B} = -\frac{\mu_0 I}{2r} \sin^3 \theta \vec{e}_z$$

$$/2 \quad 2.4 \quad dq = \sigma 2\pi r dr$$

$$/2 \quad 2.5 \quad T = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$/2 \quad 2.6 \quad di = dq / T = \sigma r \omega dr$$

$$/2 \quad 2.7 \quad d\vec{B}(M) = -\frac{\mu_0 di}{2r} \sin^3 \theta \vec{e}_z = -\frac{\mu_0 \sigma \omega dr}{2} \sin^3 \theta \vec{e}_z$$

**/4 2.8** Pour obtenir le champ total créé par le disque, il faut intégrer l'expression précédente sur le rayon du disque. Il faut bien évidemment effectuer quelques changements de variables :

$$r = z \tan \theta \quad \Rightarrow \quad dr = z d(\tan \theta) = z \frac{d\theta}{\cos^2 \theta}$$

$$dB = -\frac{\mu_0 \sigma \omega}{2} \frac{\sin^3 \theta}{\cos^2 \theta} d\theta$$

$$B = -\frac{\mu_0 \sigma \omega}{2} \int_0^\alpha \frac{\sin^3 \theta}{\cos^2 \theta} d\theta = -\frac{\mu_0 \sigma \omega}{2} \int_0^\alpha \frac{\sin^3 \theta}{\cos^2 \theta} d\theta = -\frac{\mu_0 \sigma \omega}{2} \left[ \frac{1}{\cos \theta} + \cos \theta \right]_0^\alpha$$

$$\vec{B} = -\frac{\mu_0 \sigma \omega}{2} \left[ \frac{1}{\cos \alpha} + \cos \alpha - 2 \right] = -\frac{\mu_0 \sigma \omega}{2} \left[ \frac{2z^2 + R^2 - 2z\sqrt{R^2 + z^2}}{z\sqrt{R^2 + z^2}} \right] \vec{e}_z$$

### Exercice 3 **/13**

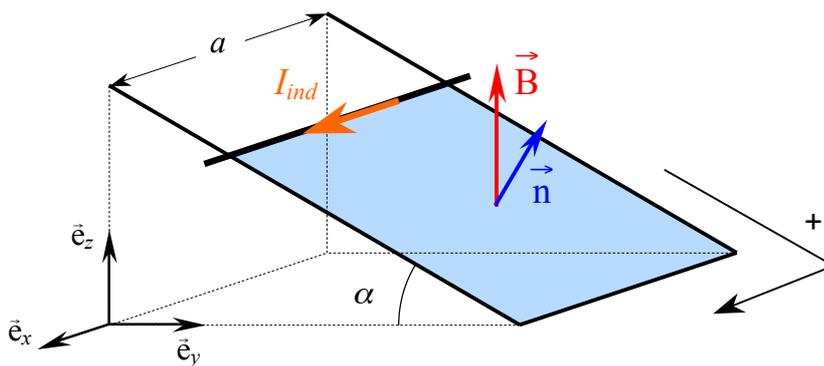
**/4 3.1** On peut utiliser la loi de Lenz :

Sous l'effet de son poids ; la barre va glisser sur les rails. La surface délimitée par le cadre et la barre conductrice (surface bleue sur la figure ci-dessous) va diminuer.

Il en résulte une diminution du flux à travers cette surface.

Il apparaît donc une f.e.m.  $e = -\frac{d\phi}{dt}$ . En orientant la surface avec le vecteur  $\vec{n}$ , on montre

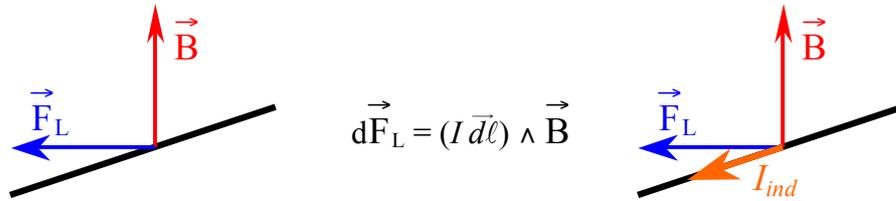
que le courant induit est dans le sens qui va s'opposer à la variation de flux.



**/3 3.2** On déduit la réponse de celle donnée à la question précédente : il est le même que celui qui apparaît spontanément quand on lâche la barre.

On peut le montrer en prenant en compte la résultante des forces de Laplace :

- compte tenu des orientations relatives du champ d'induction magnétique et de la barre conductrice, les forces de Laplace susceptibles d'apparaître sont horizontales ;
- il est évident que seules celles dirigées vers la gauche (pour le dessin) s'opposent à la chute de la barre :



**3.3**  $\vec{dF}_L = (I \vec{d\ell}) \wedge \vec{B} \Leftrightarrow \vec{dF}_L = (I d\ell) \vec{e}_x \wedge B \vec{e}_z = -dF_L \vec{e}_y$   
 $\Rightarrow \vec{F}_L = -I a B \vec{e}_y$

**3.4** Il faut vérifier la relation d'équilibre suivante :

$$\vec{P} + \vec{F} + \vec{R} = \vec{0}$$

en projetant sur la direction oblique des rails :

$$P \sin\alpha - F_L \cos\alpha = 0$$

$$m g \sin\alpha - I a B \cos\alpha = 0$$

d'où :

$$I = \frac{m g}{a B} \tan\alpha.$$

