

Correction de l'examen de LP203 du 12 janvier 2010

1 Questions de cours : /8

- 1.1 $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho / \epsilon_0$ forme locale du théorème de Gauss $\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$
- 1.2 $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ forme locale de $\oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$
- 1.3 $\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$ forme locale du théorème d'Ampère $\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{S} = \mu_0 I$
- 1.4 le flux de \vec{B} à travers une surface fermée est nul, il n'existe pas de monopôle magnétique.

2. Exercice /13

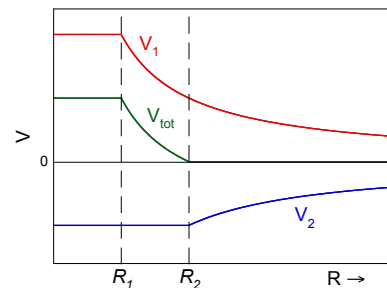
- 2.1 La petite sphère conductrice est à l'équilibre. Le champ à l'intérieur de celle-ci est donc nul
- 2.2 Le champ étant nul, le potentiel est donc constant dans toute la sphère.
- 2.3 Le champ électrique étant aligné avec le gradient du potentiel, celui-ci est donc normal à la surface (cf. cours chap. 1 p.29 et chap. 5 p.3).
- 2.4 Les charges sont localisées en surface. Leur répartition est homogène car elles se repoussent et ont donc tendance à se répartir sur toute la surface de la sphère.
- 2.5 Le potentiel dans la petite sphère est la somme des potentiels dus à la petite sphère V_1 et à la grande sphère creuse V_2 (principe de superposition).

On considère séparément les contributions de chacune des sphères. Le potentiel dû aux charges (+) localisées à la surface de la petite sphère est constant et égal au potentiel en O :

$$V_1(O) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{S_1} \frac{\sigma dS}{r} = \frac{+q}{4\pi\epsilon_0 R_1}$$

Le potentiel dû aux charges (-) localisées à la surface de la grande sphère est constant et égal au potentiel en O :

$$V_2(O) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{S_2} \frac{\sigma dS}{r} = \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 R_2} + K \quad \text{avec } K = 0 \text{ puisque } V(\infty) = 0$$



Le potentiel total à l'intérieur de la petite sphère est donc : $V_{\text{tot}}(O) = \frac{+q}{4\pi\epsilon_0 R_1} + \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 R_2}$

Autre démonstration : pour $r > R_2$, $\vec{E} = \vec{0}$ ($Q_{\text{int}} = 0$), donc $V_{\text{tot}} = 0$ puisque $V(\infty) = 0$ d'où ...

- 2.6 $\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}$ où \vec{n} est un vecteur unitaire normal à la surface
- 2.7 Le champ est *a priori* la somme des champs électriques créés par les deux distributions de charges. En utilisant le théorème de Gauss, on peut montrer que le champ créé par la sphère externe est nul.

Finalement, le champ électrique entre les deux sphères est celui créé par la petite sphère qui est égal à celui d'une charge ponctuelle localisée en O :

$$\vec{E} = \frac{+q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$$

2.8 Circulation de $\vec{E} = \int_{R_1}^{R_2} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \frac{+q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{-1}{r} \right]_{R_1}^{R_2} = \frac{+q}{4\pi\epsilon_0} \frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2}$

Cette circulation ne dépend pas du chemin suivi car la force électrostatique a un caractère conservatif.

2.9 On sait que $\int_{R_1}^{R_2} \vec{E} \cdot d\vec{r} = V_1 - V_2 = U$ d'où $C = 4\pi\epsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}$

3 **Problème /39**
Partie A /7

3.1 $\vec{OP} = R \vec{e}_r, \quad \vec{OM} = z \vec{e}_z, \quad \vec{PM} = (\vec{PO} + \vec{OM}) = -R \vec{e}_r + z \vec{e}_z, \quad d\vec{\ell} = dl \vec{e}_\varphi$

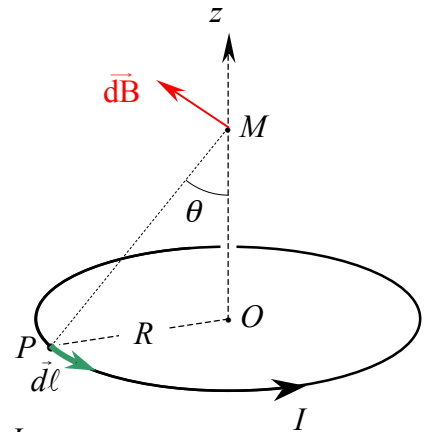
3.2 $d\vec{B} = \frac{\mu_0 I d\vec{\ell} \wedge \vec{PM}}{4\pi PM^3}$ (relation de Biot et Savart)

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I dl}{4\pi PM^3} [R \vec{e}_z + z \vec{e}_r]$$

3.3 Pour la spire entière :

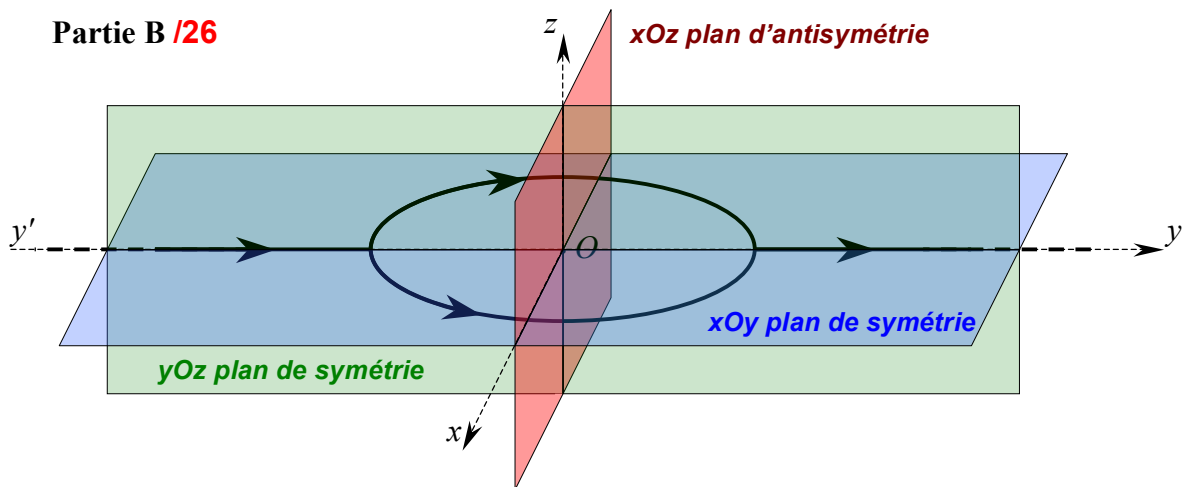
- Les composantes perpendiculaires à \vec{e}_z s'annulent deux à deux par symétrie
- Les composantes selon \vec{e}_z , toutes dans le même sens, s'additionnent simplement :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I R}{4\pi PM^3} \vec{e}_z \oint_{spire} dl = \frac{\mu_0 I R^2}{2 PM^3} \vec{e}_z = \frac{\mu_0 I}{2 R} \frac{R^3}{PM^3} \vec{e}_z = \frac{\mu_0 I}{2 R} \sin^3 \theta \vec{e}_z$$



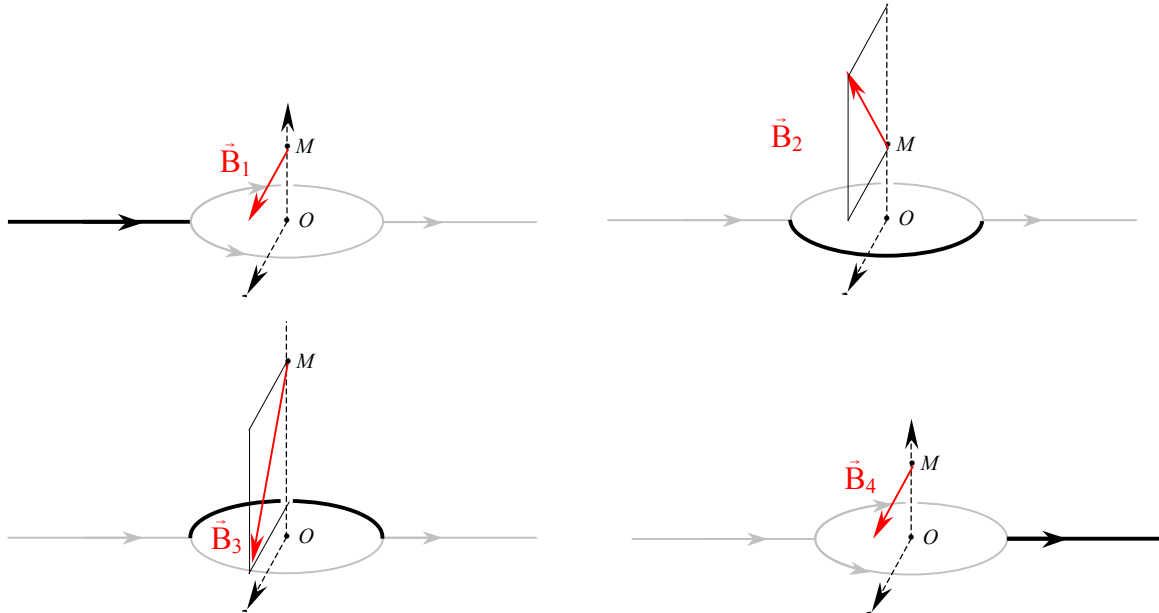
Partie B /26

3.4

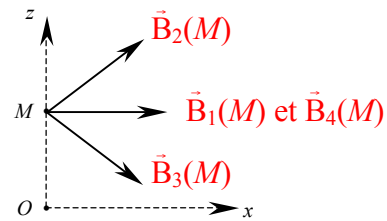


3.5 \vec{B} est perpendiculaire à tout plan de symétrie et contenu dans tout plan d'antisymétrie
 \vec{B} est parallèle à Ox

3.6



Les 4 champs élémentaires $\vec{B}_1(M)$, $\vec{B}_2(M)$, $\vec{B}_3(M)$ et $\vec{B}_4(M)$ sont dans le plan xOz :



3.7 Les champs \vec{B}_1 et \vec{B}_4 s'additionnent simplement

Pour \vec{B}_2 et \vec{B}_3 , les composantes horizontales s'additionnent alors que les composantes verticales s'annulent par symétrie.

$$\vec{B}(M) = \vec{B}_1(M) + \vec{B}_2(M) + \vec{B}_3(M) + \vec{B}_4(M) = B(M) \vec{e}_x \text{ selon } Ox$$

$$\vec{B}(M') = -B(M) \vec{e}_x \quad (\text{opposé du symétrique})$$

3.8 La symétrie de la distribution impose que $\vec{B}(O) = \vec{0}$

3.9 Il faut partir de la relation exprimant le champ créé par une portion de conducteur rectiligne :

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} [\sin\alpha_2 - \sin\alpha_1]$$

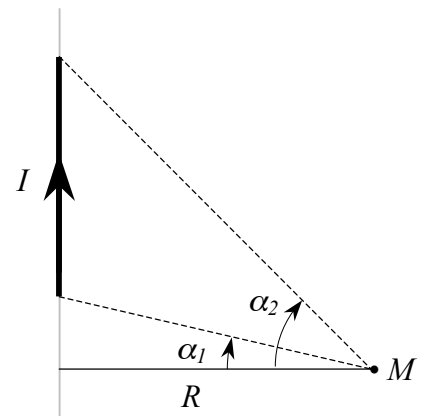
Dans notre cas : pour le fil semi-infini $y'Y'$:

$$R = z; \quad \alpha_2 = -\theta; \quad \alpha_1 = -\pi/2 \quad B_1 = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} [-\sin\theta + 1]$$

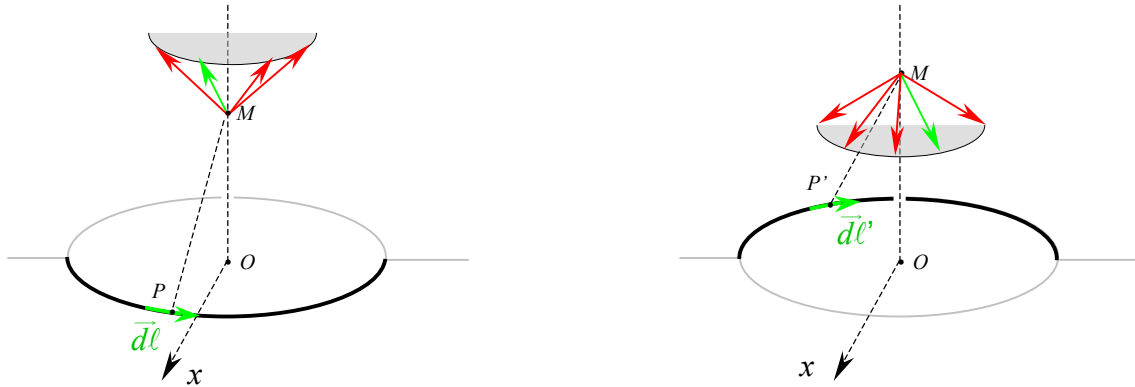
pour le fil semi-infini $y'Y'$:

$$R = z; \quad \alpha_2 = +\pi/2; \quad \alpha_1 = +\theta \quad B_4 = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} [1 - \sin\theta]$$

$$\text{Finalement : } B_1 + B_4 = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} [1 - \sin\theta] = \frac{\mu_0 I}{2\pi z} \left[1 - \frac{R}{\sqrt{z^2 + R^2}} \right]$$



3.10 Champs élémentaires créés par les 2 demi-spires



3.11 On utilise les résultats de la question 3.2

$$\vec{dB}_2 = \frac{\mu_0 (I/2) \vec{d\ell} \wedge \vec{PM}}{4\pi PM^3} = \frac{\mu_0 (I/2) dl}{4\pi PM^3} [R \vec{e}_z + z \vec{e}_r] \quad (\text{idem question 3.3})$$

$$\vec{dB}_3 = \frac{\mu_0 (I/2) \vec{d\ell}' \wedge \vec{P'M}}{4\pi P'M^3} = \frac{\mu_0 (I/2)}{4\pi} \frac{(-dl \vec{e}_s) \wedge [-R \vec{e}_r + z \vec{e}_z]}{P'M^3} = \frac{\mu_0 I dl}{8\pi P'M^3} [-R \vec{e}_z - z \vec{e}_r]$$

3.12 D'après la question précédente :

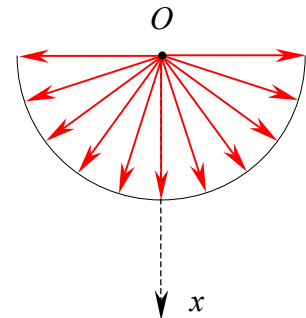
$$dB_{2z} = \frac{\mu_0 I R dl}{8\pi PM^3} \quad \text{d'où : } B_{2z} = \frac{\mu_0 I R}{8\pi PM^3} \int_{\text{1/2 spire}} dl = \frac{\mu_0 I}{8 R} \frac{R^3}{(z^2 + R^2)^{3/2}}$$

3.13 Calcul de la composante horizontale

$$\vec{dB}_{2 \text{ horiz}} = \frac{\mu_0 I z dl}{8\pi PM^3} \vec{e}_r$$

Les projections des $\vec{dB}_{2 \text{ horiz}}$ individuels sur l'axe Ox s'additionnent :

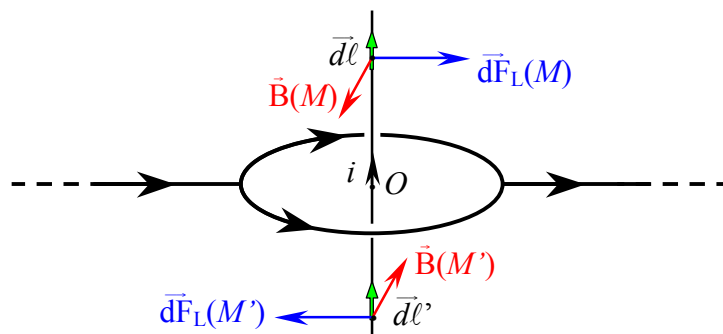
$$\vec{B}_{2 \text{ horiz}} = \frac{\mu_0 I z}{8\pi PM^3} \int_0^\pi \sin\varphi R d\varphi = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{R z}{(z^2 + R^2)^{3/2}}$$



Partie C /6

3.14 Les parties élémentaires du circuit subissent des forces de Laplace :

$$\vec{dF}_L(M) = I \vec{d\ell} \wedge \vec{B}(M) \quad \text{et} \quad \vec{dF}_L(M') = I \vec{d\ell}' \wedge \vec{B}(M')$$



3.15 Le fil rectiligne est soumis à un couple de forces, il va basculer vers la droite (dans le sens des y croissants) dans le plan (O, y, z)