LP 203 Année 2009 – 2010

Examen – Épreuve du 12 janvier 2010 – Durée : 2h00

Calculatrice et documents non autorisés

Certaines parties du problème sont indépendantes et peuvent donc être traitées isolément.

1. Questions de cours

Compléter les équations (locales) suivantes et donner pour chacune d'elles leur formulation non-locale : **(1.1)** $\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \ldots$

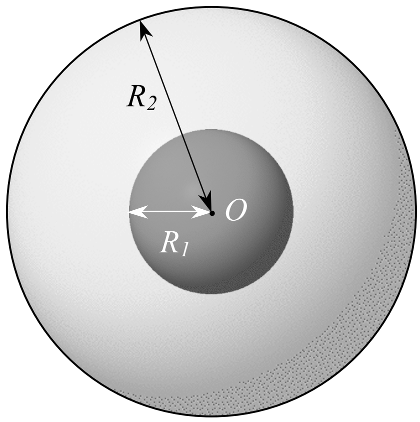
(1.2) $\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = \ldots$

(1.3) $\vec{\nabla}\wedge\vec{B} = \ldots$

1.4 Pour la relation (1.2), on explicitera le sens physique de cette relation.

2. Exercice

On considère deux sphères conductrices concentriques et de rayon respectifs R_1 et R_2. La petite sphère est pleine et porte la charge $+q$ et la grande sphère creuse porte la charge $-q$.
L'ensemble formé par les 2 conducteurs est à l'équilibre



2.1 Quel est le champ électrostatique à l'intérieur de la petite sphère ?

2.2 Comment varie le potentiel à l'intérieur de la petite sphère ?

2.3 Quelle est l'orientation du champ électrique au voisinage de la surface de la petite sphère ?

2.4 Où sont localisées les charges pour la petite sphère ?
La distribution est-elle homogène ? Pourquoi ?

2.5 Calculer le potentiel électrique dans la petite sphère.

2.6 Établir/rappeler l'expression vectorielle du champ électrique **au voisinage** de la surface de la petite sphère.

2.7 Établir l'expression vectorielle du champ électrique régnant entre les deux sphères chargées.

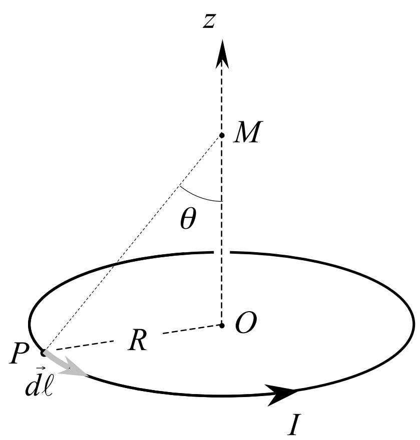
2.8 Calculer la circulation du champ électrique entre les deux sphères.
Cette circulation dépend-elle du chemin suivi ? Pourquoi ?

2.9 En déduire la capacité du condensateur formé par les deux sphères.

3. Problème

Partie A

On considère une spire circulaire de rayon R parcourue par un courant d'intensité I. On cherche à calculer le champ d'induction magnétique en un point M de l'axe de la spire et de coordonnées (0, 0, z) exprimées dans un repère en coordonnées cylindriques.



3.1 Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{PM}$ et $\vec{d\ell}$ en fonction des vecteurs $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\varphi$ et $\vec{e}_z$.

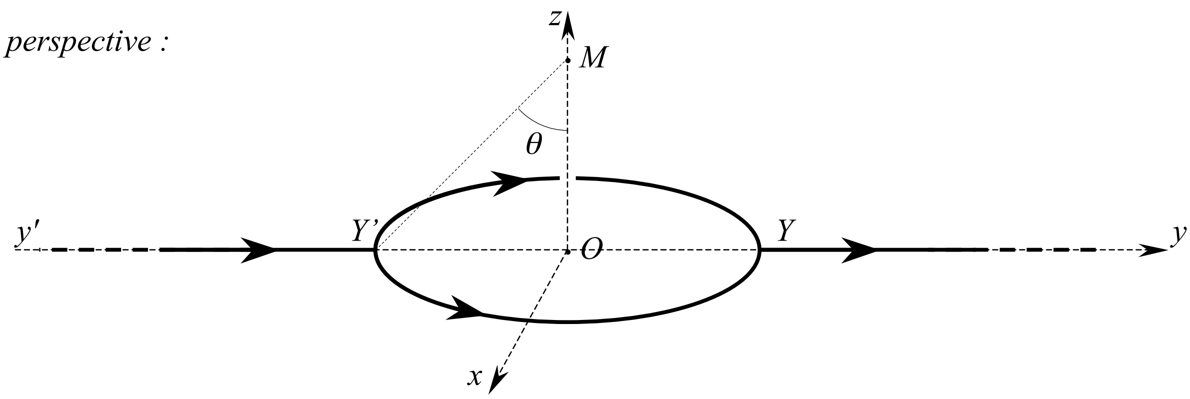
3.2 Exprimer le champ d'induction magnétique élémentaire $\overrightarrow{dB}$ créé en M par l'élément de circuit $\vec{d\ell}$ en fonction des vecteurs $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\varphi$ et $\vec{e}_z$.
Représenter ce vecteur dans le cas de la figure ci-dessus.

3.3 En déduire l'expression du champ d'induction magnétique créé par la spire en un point de son axe. Comparer avec le résultat classiquement obtenu (en fonction de $\sin\theta$).

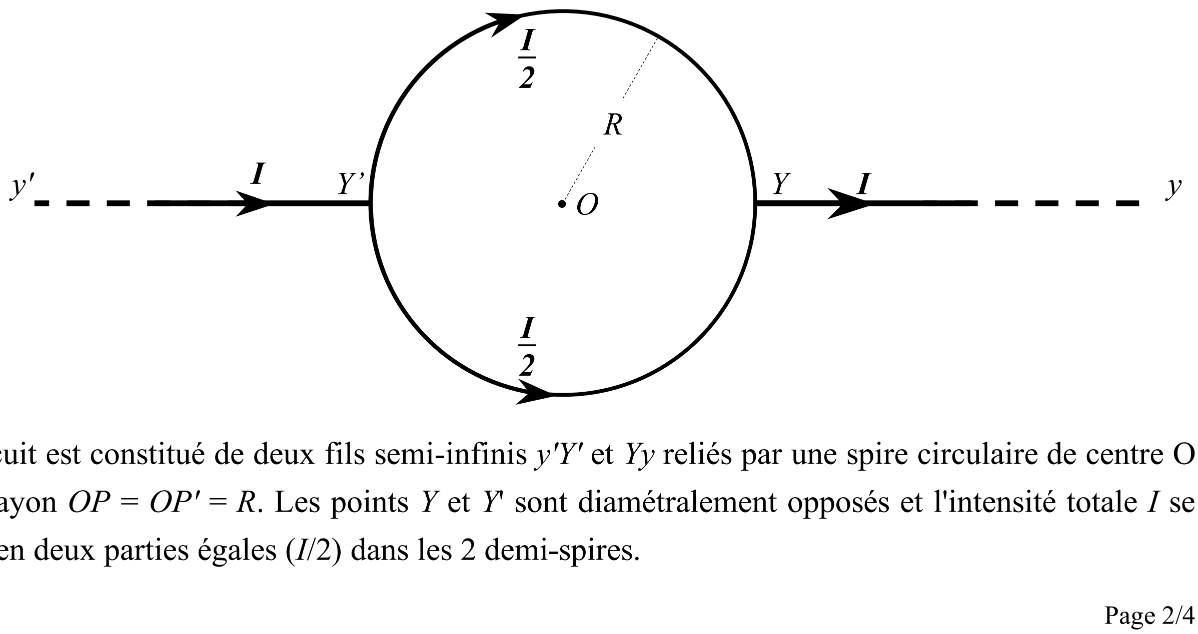
Partie B :

On considère maintenant le circuit représenté ci-dessous :

vue en perspective :



vue selon Oz :



Ce circuit est constitué de deux fils semi-infinis $y'Y'$ et Yy reliés par une spire circulaire de centre O et de rayon $OP = OP' = R$. Les points Y et Y' sont diamétralement opposés et l'intensité totale I se divise en deux parties égales ($I/2$) dans les 2 demi-spires.

On procède dans un premier temps à l'analyse qualitative, ***sans calcul***, du champ d'induction magnétique produit par le circuit.

3.4 Analyser en détail **toutes** les propriétés de symétrie de la distribution de courant.

3.5 En déduire la direction du champ créé par le circuit au point M de coordonnées $(0, 0, z)$.

3.6 À l'aide de dessins soignés, donner la direction et le sens des contributions au champ magnétique créé au point M par le circuit des différentes portions du circuit :

- le fil semi-infini $y'Y'$: $\vec{B}_1$
- la demi-spire $Y'Y$ du côté des x > 0 : $\vec{B}_2$
- la demi-spire $Y'Y$ du côté des x < 0 : $\vec{B}_3$
- le fil semi-infini Yy : $\vec{B}_4$

3.7 En déduire la direction et le sens des champs créés par le circuit au point M et au point M' symétrique de M par rapport à O. (*On cherchera à les exprimer en fonction de $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$ ou $\vec{e}_z$).*

3.8 Quelle est la valeur du champ d'induction magnétique au point O ?

On procède maintenant à l'analyse quantitative du champ $\vec{B}$ produit par le circuit.

3.9 Montrer que la norme du champ d'induction magnétique $(\vec{B}_1 + \vec{B}_4)$ créé par les fils semi-infinis $y'Y'$ et Yy vaut :

$$B_1 + B_4 = \frac{\mu_0 I}{2\pi z}\left[1 - \frac{R}{\sqrt{z^2 + R^2}}\right]$$

Il n'est pas demandé de refaire la démonstration pour un fil infini

3.10 Représenter, à l'aide de dessins soignés, les champs élémentaires $\vec{dB}$ créés par chacune des 2 demi-spires au point M.

3.11 Exprimer les champs d'induction magnétique élémentaires $\vec{dB}_2$ et $\vec{dB}_3$ créés en M par un élément de circuit $\vec{d\ell}$ des demi-spires en fonction des vecteurs $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\varphi$ et $\vec{e}_z$.

3.12 Montrer que la composante selon Oz du champ d'induction magnétique $\vec{B}_2$ créé par la demi-spire $Y'Y$ du côté des x positifs vaut :

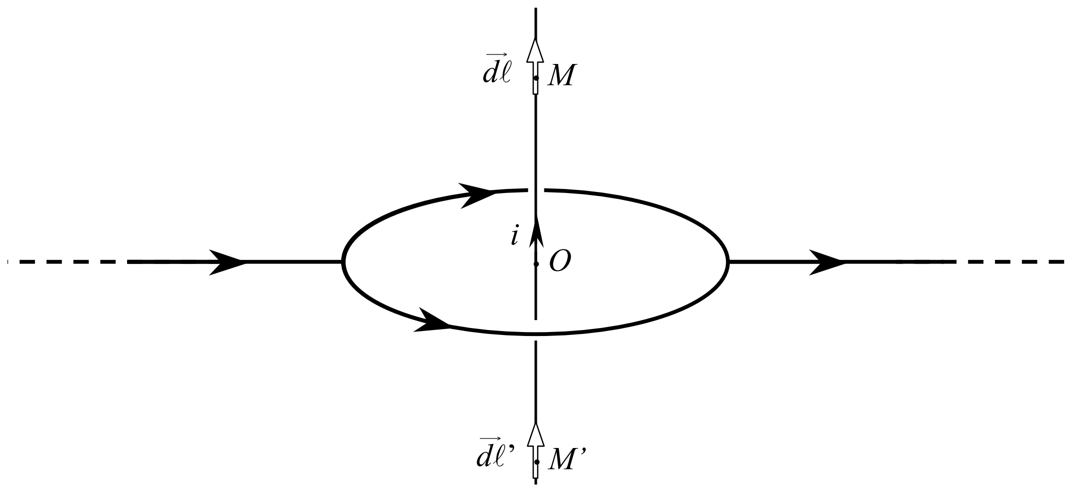
$$B_{2z} = \frac{\mu_0 I}{8R}\frac{R^3}{(z^2 + R^2)^{3/2}}$$

3.13 Montrer que la composante horizontale du champ d'induction magnétique $\vec{B}_2$ créé par la demi-spire $Y'Y$ du côté des x positifs vaut :

$$B_{2\,horiz} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{R\,z}{(z^2 + R^2)^{3/2}}$$

Partie C : (*sans calcul, indépendamment des 5 questions précédentes, l'analyse des symétries du problème suffit*).

Un fil conducteur rectiligne infini, vertical et parcouru par un courant i est maintenant placé au centre de la spire comme indiqué sur le dessin ci-dessous :



3.14 Que subissent les portions de conducteur $\vec{d\ell}$ et $\vec{d\ell}$' situées de part et d'autre de la spire (*voir dessin ci-dessus*). Représenter explicitement (direction et sens) les grandeurs physiques en question.

3.15 En déduire le mouvement du fil rectiligne infini.