Correction du CC du 02/11/2010

Exercice 1

Remarques préliminaires :

• la façon dont était posé le problème contenait une ambiguïté qui m'a échappé : les questions 1.1 à 1.5 n'étaient pas concernées par la présence de la charge q. Celle-ci n'était à prendre en considération que pour la question 1.6.
Les réponses sont donc proposées selon cette hypothèse.

• Ce problème était très proche de celui traité en TD (TD 2 / exercice 4 / question 3)

1.1 Symétries du problème **/4**

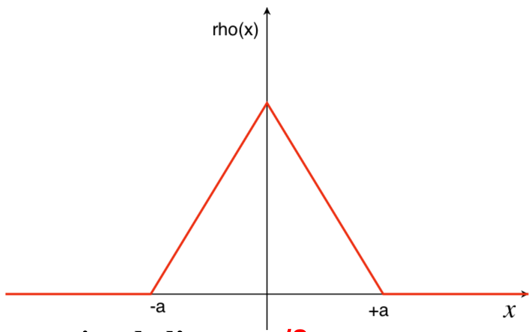
La distribution de charges est invariante par :

- translation parallèlement à $\vec{e}_y$ et $\vec{e}_z$. **/0.5**
- toute symétrie par rapport à un plan perpendiculaire à la couche **/0.5**
- toute rotation selon un axe perpendiculaire à la couche **/0.5**
- symétrie par rapport au plan d'équation $x = 0$. **/0.5**

Conséquences :

- Il convenait d'utiliser le système de coordonnées cylindriques. **/0.5**
- Le champ $\vec{E}(\rho, \varphi, x)$ et le potentiel $V(\rho, \varphi, x)$ ne dépendent ni de ρ ni de φ. **/0.5**
- Le champ $\vec{E}$ est selon $\vec{e}_x$: $\vec{E}(\rho, \varphi, x) = E_x(x)\,\vec{e}_x$. **/0.5**
- $\vec{E}(-x) = -\vec{E}(x)$ **/0.5**
- $\vec{E}(x = 0) = \vec{0}$ **/0.5**

1.2 Graphe de $\rho(x)$ **/2**

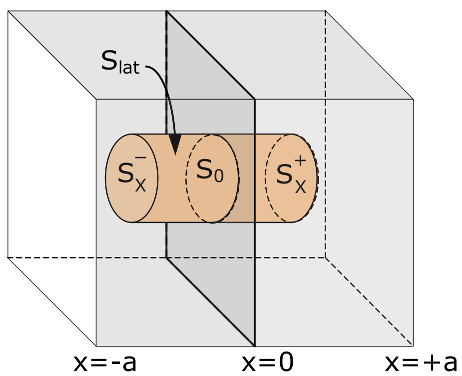


1.3 Champ électrique en tout point de l'espace **/8**

Le calcul complet est assez long, on pouvait toutefois se limiter au calcul dans le demi-espace $x \geq 0$ et déduire l'allure du champ et du potentiel dans l'autre demi-espace par symétrie

Le calcul complet est détaillé ci-après :

• <u>$0 < x < +a$</u> (à l'intérieur, $x > 0$) **/2**



$$\Phi = \oiint \vec{E}^{+}_{int} \cdot \vec{dS} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

Pour le premier membre de l'égalité :

$$\Phi = \oiint \vec{E}^{+}_{int} \cdot \vec{dS} = \int_{S_0} \vec{E}^{+}_{int} \cdot \vec{dS} + \int_{S_{lat}} \vec{E}^{+}_{int} \cdot \vec{dS} + \int_{S_X^+} \vec{E}^{+}_{int} \cdot \vec{dS} = E^{+}_{int}(x) \cdot S$$

Pour le second membre de l'égalité :

$$\frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint_V \rho(\vec{r})\, d\tau = \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint_V \rho_0\,(1 - x/a)\, S \cdot dx = \frac{\rho_0 \cdot S}{\varepsilon_0} \int_0^X (1 - x/a)\, dx$$

d'où $\quad E^{+}_{int}(x) = \dfrac{\rho_0}{\varepsilon_0}\left(x - \dfrac{x^2}{2a}\right)$.

Le calcul de l'intégrale sur S_X^+ a été effectué avec $\vec{n} = \vec{e}_x$. Dans ce cas, il vient $\vec{E}^{+}_{int} = \dfrac{\rho_0}{\varepsilon_0}\left(x - \dfrac{x^2}{2a}\right)\vec{e}_x$.

• <u>$-a < x < 0$</u> (à l'intérieur, x < 0) la même méthode conduit à : **/2**

$$\Phi = \oiint \vec{E}\cdot\vec{dS} = \int_{S_0} \vec{E}\cdot\vec{dS} + \int_{S_{lat}} \vec{E}\cdot\vec{dS} + \int_{S_X^-} \vec{E}\cdot\vec{dS} = E_{int}^-(X)\cdot S$$

$$\Phi = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0}\iiint_V \rho(\vec{r})\, d\tau = \frac{1}{\varepsilon_0}\iiint_V \rho_0\,(1+x/a)\,S\cdot dx = \frac{\rho_0\cdot S}{\varepsilon_0}\int_X^0 (1+x/a)\,dx$$

d'où $\quad E_{int}^-(x) = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\left(-x-\frac{x^2}{2a}\right)$

Le calcul de l'intégrale sur S_X^- a été effectué avec $\vec{n} = -\vec{e}_x$. Alors : $\vec{E}_{int}^- = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\left(x+\frac{x^2}{2a}\right)\vec{e}_x$.

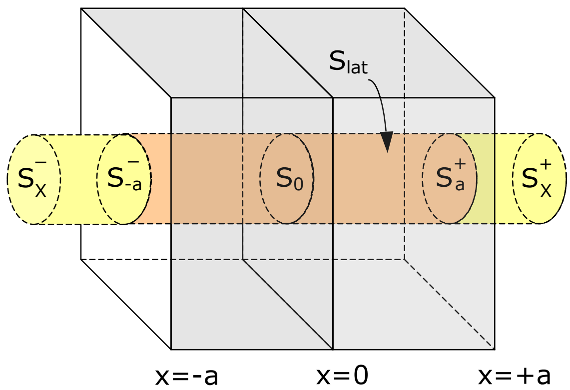
• $x > +a$ (à l'extérieur, x > 0) **/2**

$$\Phi = \oiint \vec{E}\cdot\vec{dS} = E_{ext}^+(X)\cdot S$$

La quantité de charges contenues dans le volume d'intégration est désormais fixe :

$$\Phi = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} = \frac{\rho_0\cdot S}{\varepsilon_0}\int_0^a (1-x/a)\,dx = \frac{\rho_0\cdot S\cdot a}{2\varepsilon_0}$$

d'où $\quad \vec{E}_{ext}^+(x) = \frac{\rho_0\, a}{2\varepsilon_0}\,\vec{e}_x, \qquad$ constant à l'extérieur



• $x < -a$ (à l'extérieur, x < 0) la même méthode conduit à : **/2**

$$\Phi = \oiint \vec{E}\cdot\vec{dS} = E_{ext}^-(X)\cdot S = \frac{1}{\varepsilon_0}\iiint_V \rho_0\,(1+x/a)\,S\cdot dx = \frac{\rho_0\cdot S}{\varepsilon_0}\int_{-a}^0 (1+x/a)\,dx = \frac{\rho_0\cdot S\cdot a}{2\varepsilon_0}$$

Remarque : il n'était pas nécessaire de calculer cette dernière intégrale ; par symétrie, il apparaît qu'elle est la même que celle calculée précédemment.

Le calcul de l'intégrale sur S_X^- a été effectué avec $\vec{n} = -\vec{e}_x$. Alors : $\vec{E}_{ext}^- = -\frac{\rho_0\, a}{2\varepsilon_0}\vec{e}_x$.

Les résultats obtenus concernant le champ électrique peuvent s'écrire sous la forme condensée :

• à l'extérieur de la couche : $\vec{E}(x) = \frac{\rho_0\, a}{2\varepsilon_0}\frac{|x|}{x}\vec{e}_x$ • à l'intérieur de la couche : $\vec{E}(x) = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\left(x-\frac{|x|}{x}\frac{x^2}{2a}\right)\vec{e}_x$

1.4 Calcul du potentiel **/8**

On part de l'équation $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$ et, compte tenu des symétries du problème : $V(x) = -\int E(x)\,dx$ **/2**

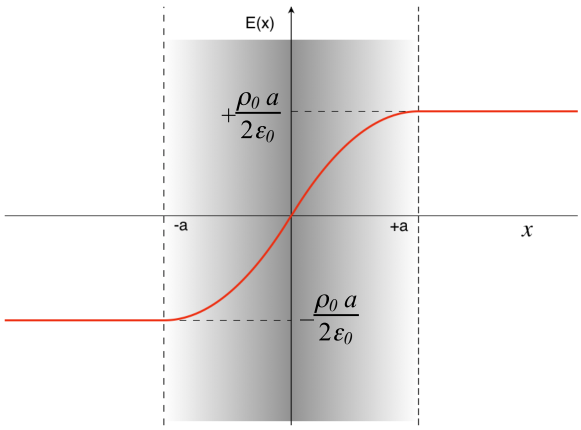
Tous calculs faits (intégration et détermination des constantes avec $V(-a) = V(a) = 0$), on arrive à :

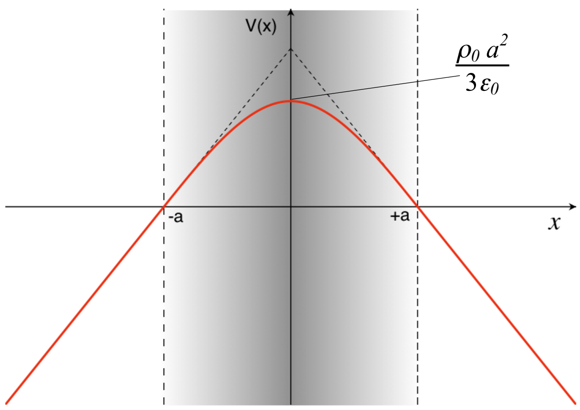
• $V_{ext}^- = \frac{\rho_0\, a^2}{2\varepsilon_0}\left(1+\frac{x}{a}\right)$ **/2** • $V_{int}^- = \frac{\rho_0\, a^2}{\varepsilon_0}\left(\frac{1}{3}-\frac{x^2}{2a^2}-\frac{x^3}{6a^3}\right)$ **/2**

• $V_{int}^+ = \frac{\rho_0\, a^2}{\varepsilon_0}\left(\frac{1}{3}-\frac{x^2}{2a^2}+\frac{x^3}{6a^3}\right)$ **/2** • $V_{ext}^+ = \frac{\rho_0\, a^2}{2\varepsilon_0}\left(1-\frac{x}{a}\right)$ **/2**

1.5 Allure des courbes E(x) et V(x) /4

/2 /2





1.6 Vitesse mimimale de la charge pour traverser la couche /4

La particule chargée positivement arrive vers la couche en $x = -a$.

Elle subit une force de répulsion coulombienne dirigée selon $-\vec{e}_x$ de la part des charges contenues dans la couche. Pour traverser cette dernière, il lui suffira d'avoir une énergie cinétique suffisante pour traverser la demi-couche comprise entre les plans $x = -a$ et $x = 0$.

En effet, une fois passé le plan d'équation $x = 0$, elle pénètre dans une région où le champ est dirigé selon $+\vec{e}_x$, elle sera alors soumise à une force coulombienne qui l'éloignera de la couche chargée.

Autre façon de considérer le problème : la charge parvient dans une région de potentiel électrostatique croissant, son énergie potentielle augmente donc au fur et à mesure qu'elle s'approche de la couche chargée.

N'étant soumise à aucune autre force non conservative, son énergie mécanique est conservée. Le gain d'énergie potentielle se fait au détriment de son énergie cinétique :

$$E_m = E_c + E_p = Cte$$

Avec en particulier, si on cherche à déterminer la vitesse minimale en $x = -a$ pour pouvoir traverser la couche :

$$E_m(x=-a) = E_c(x=-a) + E_p(x=-a) = \tfrac{1}{2}\,m\,v^2 + 0$$

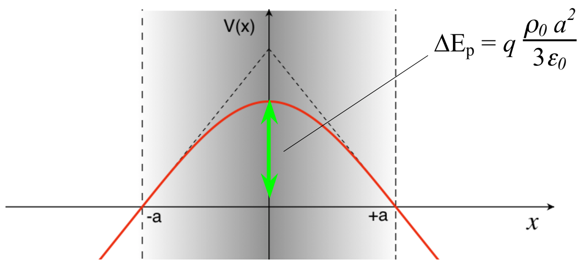
$$E_m(x=0) = E_c(x=0) + E_p(x=0) = 0 + q\,\frac{\rho_0\, a^2}{3\,\varepsilon_0}$$

D'où on déduit que la vitesse minimale pour franchir la couche est :

$$v_{min} = \sqrt{\frac{2\,q\,\rho_0\,a^2}{3\text{ m }\varepsilon_0}}$$

On peut aussi considérer que la vitesse minimale de la particule correspondra à l'énergie cinétique nécessaire pour "franchir" la barrière de potentiel d'une hauteur de $\rho_0\, a^2/3\varepsilon_0$.

On en déduit alors directement la perte d'énergie cinétique ΔE_c correspondante d'où v_{min}.



Exercice 2

2.1 Analyse des symétries /3

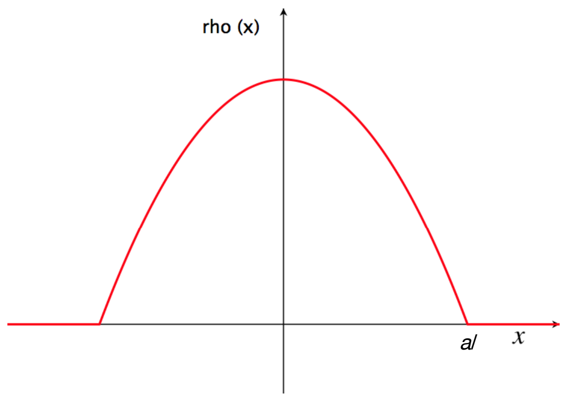
La distribution de charges est invariante par :

- toute symétrie par rapport à un plan passant par O /0.5
- toute rotation selon un axe passant par O /0.5

Conséquences :

- Il convenait d'uiliser le système de coordonnées sphériques. /0.5
- Le champ $\vec{E}(r, \varphi, \theta)$ et le potentiel $V(r, \varphi, \theta)$ ne dépendent ni de φ ni de θ. /0.5
- Le champ $\vec{E}$ est radial : $\vec{E}(r, \varphi, \theta) = E_r(r)\, \vec{e}_r$. /0.5

2.2 Allure de ρ(x) /2



2.3 Charge élémentaire comprise entre r et r+dr /2

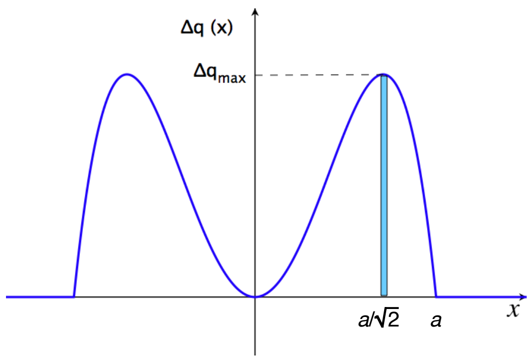
$$dq = \rho(r)\, dr = \rho_0 \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right) 4\pi\, r^2\, dr$$

2.4 Δq_{max} /4

$$\Delta q = \rho_0 \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right) 4\pi\, r^2\, \Delta r$$

Il faut déterminer les extrema de la fonction $f(r) = 4\pi\, \rho_0 \left(r^2 - \frac{r^4}{a^2}\right)$ en cherchant pour quelles valeurs de x la dérivée de $f(x)$ s'annule. /2

On trouve $x = 0$ et $x = a/\sqrt{2}$ /2



2.5 Q_T /4

$$Q_T = \iiint_V \rho(\vec{r})\, d\tau = \int_0^a \rho_0 \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right) 4\pi\, r^2\, dr = 4\pi\, \rho_0 \left[\frac{r^3}{3} - \frac{r^5}{5a^2}\right]_0^a = \frac{8\pi\, \rho_0\, a^3}{15}$$

2.6 $\vec{E}_{ext}$ /4

À l'extérieur de la sphère chargée, le champ perçu est celui d'une sphère de même charge placée en O, à savoir :

$$\vec{E}_{ext} = \frac{Q_T}{4\pi\, \varepsilon_0\, r^2}\, \vec{e}_r \text{ /2 } = \frac{2\, \rho_0\, a^3}{15\, \varepsilon_0\, r^2}\, \vec{e}_r.$$

/2 (ou /4 si Th. Gauss utilisé)

2.7 $\vec{E}_{int}$ /5

Il faut utiliser le théorème de Gauss en prenant comme surface de Gauss une sphère de rayon R centrée en O. Dans ce cas :

$$\Phi = \oiint \vec{E}_{int} \cdot \vec{dS} = \frac{Q(R)}{\varepsilon_0} \quad /2$$

Compte tenu de la symétrie, l'intégrale de surface vaut : $\Phi = E_{int}(R)\, 4\pi R^2$ /1

Le calcul de $\frac{Q(R)}{\varepsilon_0}$ a déjà été abordé: $Q(R) = \frac{4\pi \rho_0}{\varepsilon_0}\left[\frac{r^3}{3} - \frac{r^5}{5a^2}\right]_0^R = \frac{4\pi \rho_0}{\varepsilon_0}\left(\frac{R^3}{3} - \frac{R^5}{5a^2}\right)$ /2

D'où l'expression du champ électrique : $\vec{E}_{int}(r) = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\left(\frac{r}{3} - \frac{r^3}{5a^2}\right)\vec{e}_r$. /1

2.8 V(r) /7

Le calcul de V_{ext} est immédiat, le champ perçu est celui d'une sphère de même charge placée en O, à savoir :

- $V_{ext}(r) = \frac{Q_T}{4\pi\, \varepsilon_0\, r} = \frac{2\, \rho_0\, a^3}{15\, \varepsilon_0\, r}$ /2

Pour calculer V_{int} on part de l'équation $\vec{E} = -\vec{\nabla} V$.

Compte tenu des symétries du problème : $V(r) = -\int E(r)\, dr$ /1

Tous calculs faits (intégration et détermination des constantes avec la continuité du potentiel en $r = a$ /2), on arrive à :

- $V_{int} = \frac{\rho_0}{2\varepsilon_0}\left(\frac{r^4}{10a^2} - \frac{r^2}{3} - \frac{a^2}{2}\right)$ /2

2.9 E(r) max /3

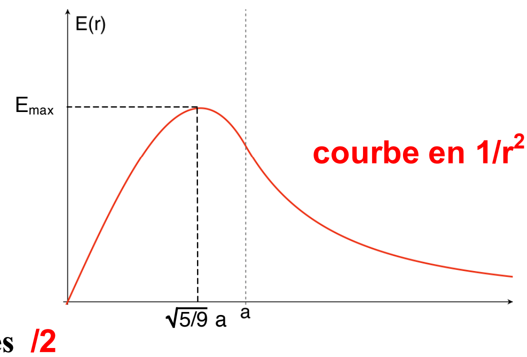
On détermine la valeur de r pour laquelle $\frac{dE_{int}}{dr} = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\left(\frac{1}{3} - \frac{3r^2}{5a^2}\right)$ /2 s'annule : $r = \sqrt{5/9}\, a$.

Avec $\frac{d^2E_{int}}{dr^2} = -\frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\frac{6r}{5a^2} < 0$ pour $r > 0$. On a donc un maximum de E(r) pour $r = \sqrt{5/9}\, a$. /1

2.10 Continuité de E /3

$E_{int}(a) = \frac{2\, \rho_0\, a}{15\, \varepsilon_0} = E_{ext}(a)$ /2 le champ est continu en $r = a$. /1

2.11 Allure de E(r) /2



2.12 Nombre de charges /2

$$Q_T = \frac{8\pi\, \rho_0\, a^3}{15} \approx \frac{8 \cdot 3 \cdot 4\, 10^{25} \cdot (4\, 10^{-15})^3}{15} = \frac{32 \cdot 64}{5}\, 10^{-20} \approx \frac{2048}{5}\, 10^{-20}$$

$$\approx 410\, 10^{-20} \approx 41\, 10^{-19}\ \text{C}$$

d'où $n = \frac{41\, 10^{-19}}{1{,}6\, 10^{-19}} \approx 26$. (*avec une machine à calculer, le résultat est plus proche de 27*)