Correction de l'examen du 11/01/2011

Problème 1 /15

Partie 1

1.1 Symétries du problème /1.5

La distribution de charges est invariante par :

- symétrie par rapport à tout plan passant par l'axe Oz **/0.5**
- symétrie par rapport au plan contenant la boucle **/0.5**
- toute rotation selon l'axe Oz **/0.5**

1.2 Système de coordonnées /0.5

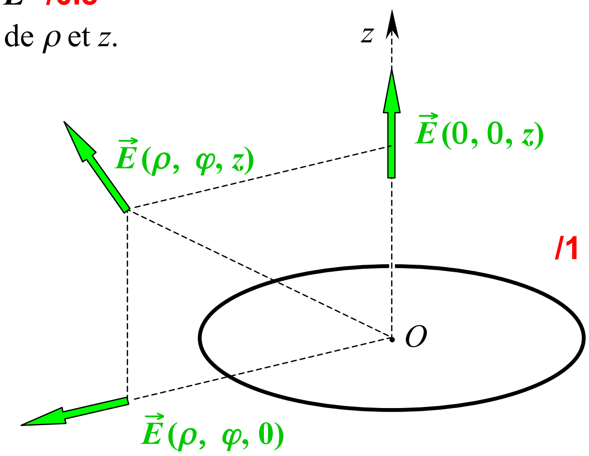
Il convient d'utiliser le système de coordonnées cylindriques

1.3 Variables dont dépend le champ électrique $\vec{E}$ /0.5

Le champ ne dépend pas de φ mais seulement de ρ et z.

1.4 Représentation du champ électrique $\vec{E}$ /2

- $\vec{E}(O) = \vec{0}$ **/0.25**
- $\vec{E}(0, 0, z) = E(z)\,\vec{e}_z$ **/0.25**
- $\vec{E}(\rho, \varphi, 0) = E(\rho)\,\vec{e}_\rho$. **/0.25**
- $\vec{E}(\rho, \varphi, z) = E_\rho(\rho, z)\,\vec{e}_\rho + E_z(\rho, z)\,\vec{e}_z$ **/0.25**



/1

1.5 Champ élémentaire $\vec{dE}$ /1.5

$$\vec{dE} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{PM^3}\vec{PM}$$

avec : $dq = \lambda\, d\ell = \lambda\, R\, d\varphi$

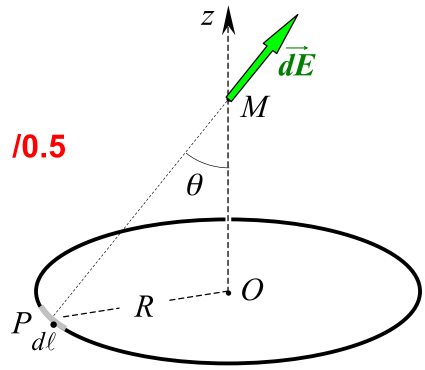
$$\vec{PM} = -R\,\vec{e}_\rho + z\,\vec{e}_z$$

$$PM = (R^2 + z^2)^{1/2}$$

$$\vec{dE} = \frac{\lambda\, R\, d\varphi}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\left[-R\,\vec{e}_\rho + z\,\vec{e}_z\right]}{(R^2+z^2)^{3/2}}$$

/1

/0.5



1.6 Calcul de $\vec{E}(M)$ /1.5

On intègre sur la circonférence :

$$\vec{E}(M) = \frac{\lambda\, R}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{(R^2+z^2)^{3/2}}\left[-R\int_0^{2\pi} d\varphi\,\vec{e}_\rho + z\int_0^{2\pi} d\varphi\,\vec{e}_z\right]$$ **/0.5**

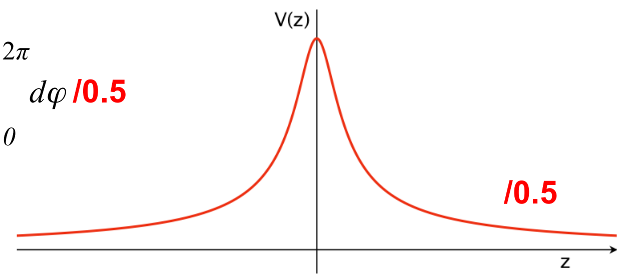
La première intégrale est nulle par symétrie, **/0.5** d'où :

$$\vec{E}(M) = \frac{\lambda\, R\, z}{2\,\varepsilon_0}\frac{1}{(R^2+z^2)^{3/2}}\vec{e}_z$$ **/0.5**

1.7 Calcul du potentiel sur l'axe /2

$$V(M) = \int_C \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{PM}$$ **/0.5** $$= \frac{\lambda\, R}{4\pi\varepsilon_0\,(R^2+z^2)^{1/2}}\int_0^{2\pi} d\varphi$$ **/0.5**

$$V(M) = \frac{\lambda\, R}{2\varepsilon_0\,(R^2+z^2)^{1/2}}$$ **/0.5**

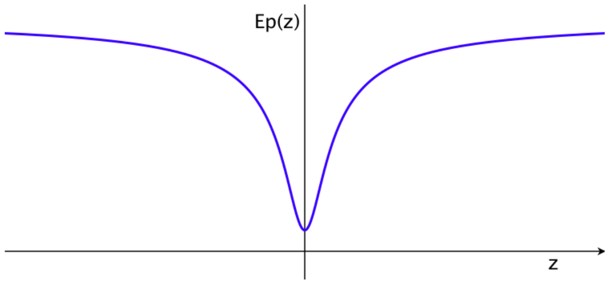


/0.5

1.8 Position d'équilibre de la particule /1

La particule va se placer à la position du minimum d'énergie potentielle : en $z = 0$

On retrouve ce résultat en prenant les forces coulombiennes exercées sur la particule : la force $\vec{F}$ est exercée vers le bas (resp. vers le haut) quand la particule est en $z > 0$ (resp. $z < 0$).



Partie 2

1.9 Champ créé par un cylindre sur l'axe *Oz* /0.5

L'analyse des symétries montre que tout plan passant par l'axe Oz laisse la distribution invariante.

$$\vec{E}(0, 0, z) = E(z)\,\vec{e}_z$$ **/0.25 si pas de justification**

1.10 Charge sur la surface du cylindre /0.5

$$Q_T = \iint_S \sigma\, dS = \sigma \iint_S dS = 4\pi\sigma R L$$

1.11 Charge infinitésimale dans la tranche d'épaisseur *dz* /0.5

$$dq = \sigma\, dS = \sigma 2\pi R\, dz_P$$

1.12 Champ régnant en un point de l'axe /3

On reprend l'expression du champ créé par l'anneau contenant la charge $q = 2\pi R\lambda$:

$$\vec{E}(M) = \frac{\lambda R}{2\varepsilon_0}\frac{z}{(R^2+z^2)^{3/2}}\vec{e}_z = \frac{2\pi R\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\frac{z}{(R^2+z^2)^{3/2}}\vec{e}_z$$

On identifie la charge contenue dans l'anneau ($q = 2\pi R\lambda$) à la charge élémentaire dq contenue dans la tranche d'épaisseur dz_P. On en déduit le champ infinitésimal créé en M par la tranche située à la cote z_P :

$$dE(M) = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0}\frac{z - z_P}{(R^2 + (z - z_P)^2)^{3/2}} = \frac{\sigma R}{2\varepsilon_0}\frac{(z - z_P)\, dz_P}{(R^2 + (z - z_P)^2)^{3/2}}$$

d'où :

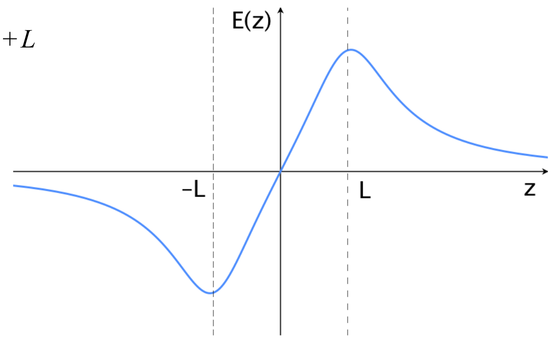
$$E(M) = \frac{\sigma R}{2\varepsilon_0}\int_{-L}^{+L}\frac{(z - z_P)\, dz_P}{(R^2 + (z - z_P)^2)^{3/2}}$$

En effectuant le changement de variable $Z = z - z_P$ avec $dZ = -\,dz_P$, il vient :

$$E(M) = \frac{\sigma R}{2\varepsilon_0}\int_{z+L}^{z-L}\frac{-Z\, dZ}{(R^2 + Z^2)^{3/2}} = \frac{\sigma R}{2\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\sqrt{R^2 + Z^2}}\right]_{z+L}^{z-L}$$

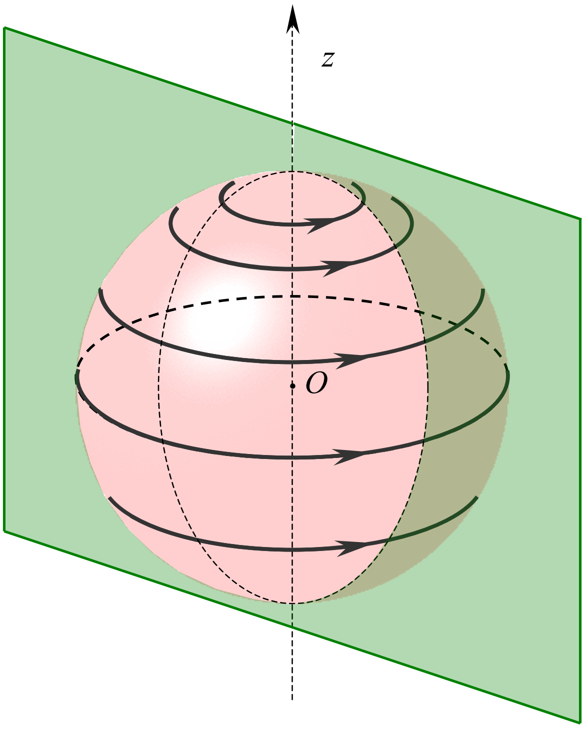
D'où finalement :

$$E(M) = \frac{\sigma R}{2\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\sqrt{R^2 + (z - L)^2}} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + (z + L)^2}}\right]$$



Problème 2 /15

2.1 Analyse des symétries /1



La distribution de courant est invariante par toute rotation selon l'axe Oz

La distribution de courants présente des plans :
- d'antisymétrie passant par l'axe Oz,
- de symétrie perpendiculaire à l'axe Oz et passant par O.

2.2 Valeur du champ /2

- $\vec{B}(O) = B(0)\,\vec{e}_z$ **/0.5**
- $\vec{B}(0, 0, z) = B(z)\,\vec{e}_z$ **/0.5**
- $\vec{B}(\rho, \varphi, 0) = B(\rho, \varphi, 0)\,\vec{e}_z$ **/0.5**
- $\vec{B}(\rho, \varphi, z) = B_\rho\,\vec{e}_\rho + B_z\,\vec{e}_z$ **/0.5**

2.3 Vecteurs $\vec{OP}$, $\vec{OM}$, $\vec{PM}$ et $\vec{d\ell}$ /2

$\vec{OP} = \rho\,\vec{e}_\rho + z\,\vec{e}_z$ **/0.5**

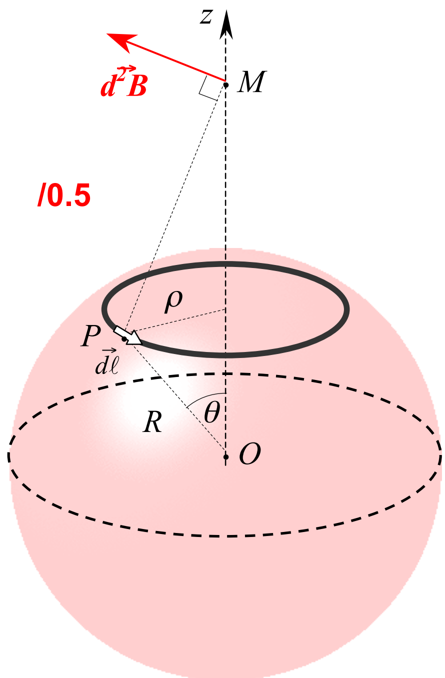
$\vec{OM} = z_M\,\vec{e}_z$ **/0.5**

$\vec{PM} = \vec{PO} + \vec{OM} = -\rho\,\vec{e}_\rho - z\,\vec{e}_z + z_M\,\vec{e}_z = -\rho\,\vec{e}_\rho + (z_M - z)\,\vec{e}_z$ **/0.5**

$\vec{d\ell} = \rho\,d\varphi\,\vec{e}_\varphi$ **/0.5**

2.4 Distance PM /0.5

$$PM = \sqrt{\rho^2 + (z_M - z)^2}$$



/0.5

2.5 Calcul et représentation de $d^2\vec{B}$ /2

D'après la relation de Biot et Savart :

$$d^2\vec{B} = \frac{\mu_0\,dI}{4\pi}\,\frac{\vec{d\ell} \wedge \vec{PM}}{PM^3}$$ **/0.5**

$$d^2\vec{B} = \frac{\mu_0\,dI}{4\pi}\,\frac{\rho\,d\varphi\,\vec{e}_\varphi \wedge [-\rho\,\vec{e}_\rho + (z_M - z)\,\vec{e}_z]}{\left(\rho^2 + (z_M - z)^2\right)^{3/2}}$$ **/0.5**

$$d^2\vec{B} = \frac{\mu_0\,dI}{4\pi}\,\frac{\rho^2\,d\varphi\,\vec{e}_z + \rho\,d\varphi\,(z_M - z)\,\vec{e}_\varphi}{\left(\rho^2 + (z_M - z)^2\right)^{3/2}}$$ **/0.5**

2.6 Composante de $d^2\vec{B}$ selon $\vec{e}_z$ /0.5

$$d^2B_Z = d^2\vec{B}\cdot\vec{e}_z = \frac{\mu_0\,dI}{4\pi}\,\frac{\rho^2\,d\varphi}{\left(\rho^2 + (z_M - z)^2\right)^{3/2}}$$

2.7 Champ élémentaire $\vec{dB}(M)$ créé par le contour de rayon ρ /1

$$dB = \frac{\mu_0\,dI}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\rho^2\,d\varphi}{\left(\rho^2 + (z_M - z)^2\right)^{3/2}} = \frac{\mu_0\,dI}{2}\,\frac{\rho^2}{\left(\rho^2 + (z_M - z)^2\right)^{3/2}}$$

Ce champ élémentaire $\vec{dB}(M)$ est dirigé selon $\vec{e}_z$

2.8 Champ créé en M sur l'axe Oz /2

Pour obtenir le champ créé par l'ensemble de la nappe de courant, il suffit d'intégrer sur θ variant de 0 à π :

$$B(M) = \frac{\mu_0}{2}\int_0^{\pi} \frac{\rho^2\ \sigma\rho\omega R\,\mathrm{d}\theta}{\left(\rho^2 + (z_M - z)^2\right)^{3/2}}$$

On pose $\rho = R\sin\theta$ et $z = R\cos\theta$, dans ce cas, il vient :

$$B(M) = \frac{\mu_0\,\sigma\,\omega\,R^4}{2}\int_0^{\pi} \frac{\sin^3\theta\ \mathrm{d}\theta}{\left[R^2\sin^2\theta + (z_\mathrm{M} - R\cos\theta)^2\right]^{3/2}}$$

2.9 Champ créé en M sur l'axe Oz avec $z_\mathrm{M} \gg R$ /2

On peut négliger R devant z_M, dans ce cas, l'intégrale se résume à :

$$B(M) = \frac{\mu_0\,\sigma\,\omega\,R^4}{2}\int_0^{\pi} \frac{\sin^3\theta\ \mathrm{d}\theta}{z_\mathrm{M}^3}$$

avec $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin^3\theta\ \mathrm{d}\theta = \int_0^{\pi} \sin\theta\,(1 - \sin^2\theta)\ \mathrm{d}\theta = 4/3$

d'où finalement sur l'axe et à grande distance de la sphère : $B(M) = \dfrac{2\,\mu_0\,\sigma\,\omega\,R^4}{3\,z_\mathrm{M}^3}$

2.10 B(O) /2

$$B(O) = \frac{\mu_0\,\sigma\,\omega\,R^4}{2}\int_0^{\pi} \frac{\sin^3\theta\ \mathrm{d}\theta}{\left[R^2\sin^2\theta + R^2\cos^2\theta\right]^{3/2}} = \frac{\mu_0\,\sigma\,\omega\,R}{2}\int_0^{\pi}\sin^3\theta\ \mathrm{d}\theta = \frac{2\,\mu_0\,\sigma\,\omega\,R}{3}$$