LP203

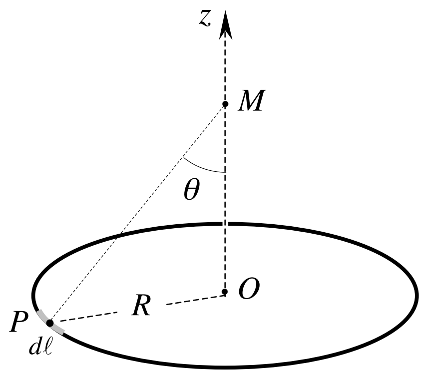
2010 - 2011

Examen – Épreuve du 11 janvier 2011
Durée : 2 heures
Calculatrice et documents non autorisés

Problème 1 : Électrostatique

Partie 1

On se propose d'étudier le champ électrostatique créé par une boucle circulaire de rayon R chargée avec la densité de charge linéique uniforme λ ($\lambda > 0$).



1.1 Analyser **en détail** les invariances par symétrie de la distribution de charge.

1.2 En déduire le système de coordonnées à utiliser.

1.3 De quelles variables dépend le champ électrostatique $\vec{E}$?

1.4 Représenter schématiquement le champ électrostatique (sens et direction) :
- au centre de la boucle,
- en un point M situé sur l'axe Oz,
- dans le plan contenant la boucle (à l'extérieur de celle-ci),
- pour un point quelconque.

(on exprimera le champ électrostatique en fonction des vecteurs du système de coordonnées choisi).

1.5 Établir l'expression **vectorielle** du champ élémentaire $d\vec{E}$ créé en un point M de l'axe Oz par l'élément de longueur $d\ell$ situé en P.

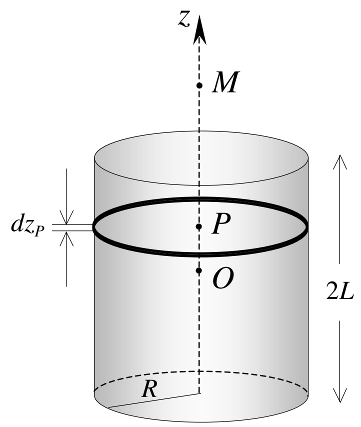
1.6 En tenant compte des résultats du **1.4**, déduire l'expression vectorielle du champ $\vec{E}$ créé en M par la boucle entière.

1.7 Calculer l'expression du potentiel électrostatique en M. Tracer l'allure de $V(z)$.

1.8 Une particule négative est astreinte à se déplacer le long de l'axe des z. Quelle est sa position d'équilibre ? (*sans calcul*)

Partie 2

On se propose maintenant de calculer le champ électrostatique créé par un cylindre creux de rayon R et de longueur $2L$ et chargé avec la densité de charge surfacique uniforme σ.



1.9 Quelle est la direction du champ électrostatique créé en un point M situé sur l'axe Oz ?

1.10 Calculer la charge totale Q_T répartie sur la surface du cylindre.

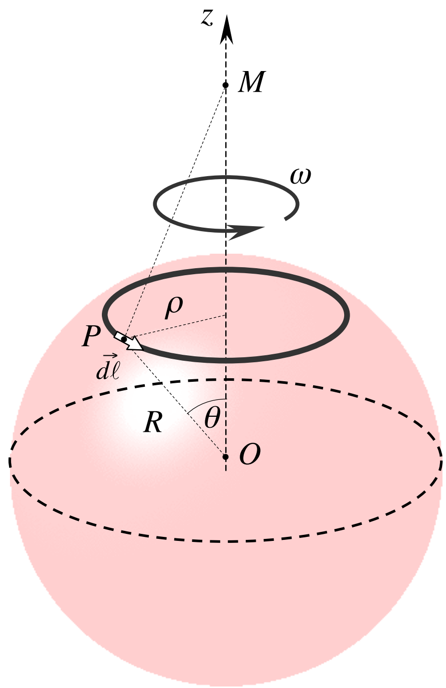
On considère une boucle d'épaisseur infinitésimale dz_P située à la cote z_P.

1.11 Calculer la charge infinitésimale contenue dans la tranche d'épaisseur dz_P.

1.12 En déduire l'expression du champ électrique régnant en M.

Tournez la page, s.v.p.

Problème 2 : Magnétostatique



Soit une sphère de rayon R portant une densité de charge surfacique positive σ uniforme. La sphère est mise en rotation (sens trigonométrique) autour de l'axe (Oz) avec une pulsation ω entraînant l'apparition d'un courant à la surface de la sphère.

2.1 Analyser **<u>en détail</u>** les propriétés de symétrie de la distribution de courant.

2.2 En déduire le sens et la direction du champ d'induction magnétique :

- au centre de la sphère,
- le long de l'axe Oz,
- dans le plan passant par le centre de la sphère et perpendiculaire à l'axe Oz.
- pour un point quelconque.

(on exprimera le champ d'induction magnétique en fonction des vecteurs du système de coordonnées cylindriques)

Les coordonnées du point P et du point M sont respectivement (ρ, φ, z) et (0, 0, z_M) en coordonnées cylindriques.

2.3 Exprimer les vecteurs $\vec{OP}$, $\vec{OM}$, $\vec{PM}$ et $\vec{d\ell}$ en fonction des vecteurs $\vec{e}_\rho$, $\vec{e}_\varphi$ et $\vec{e}_z$
(*on explicitera le plus possible l'expression de* $\vec{d\ell}$)

2.4 Calculer la distance PM.

2.5 Exprimer le champ d'induction magnétique élémentaire $d^2\vec{B}$ créé en M par l'élément de circuit $\vec{d\ell}$ en fonction des vecteurs $\vec{e}_\rho$, $\vec{e}_\varphi$ et $\vec{e}_z$ et du courant élémentaire dI parcourant le contour de rayon ρ.
Représenter ce vecteur dans le cas de la figure ci-dessus.

2.6 En déduire l'expression de la composante $d^2B_z(M)$ de $d^2\vec{B}(M)$ selon l'axe Oz.

2.7 Calculer le champ élémentaire $d\vec{B}(M)$ créé par le contour de rayon ρ.

On cherche maintenant à calculer le champ créé par l'ensemble du courant dû à cette distribution de charges en rotation.

On admettra que l'expression de l'intensité dI parcourant le contour de rayon ρ est :

$$dI = \sigma\rho\omega R\,\mathrm{d}\theta$$

2.8 Montrer alors que le champ créé en M sur l'axe Oz par l'ensemble de la sphère est :

$$B(M) = \frac{\mu_0\,\sigma\,\omega\,R^4}{2}\int_0^{\pi}\frac{\sin^3\theta\ \mathrm{d}\theta}{\left[R^2\sin^2\theta + (z_M - R\cos\theta)^2\right]^{3/2}}$$

2.9 Calculer le champ sur l'axe à très grande distance de la sphère pour $z_M >> R$.
(*On pourra se souvenir que* : $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$)

2.10 Calculer le champ en O.