

Questions de cours /8

$$(1) \quad \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0 \quad /1 \quad \nabla \wedge \vec{E} = \vec{0} \quad /1 \quad (2) \quad \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I \quad /1 \quad \nabla \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \quad /1$$

$$(3) \quad \iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} \quad /1 \quad \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad /1 \quad (4) \quad \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad /1 \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad /1$$

Problème 1 /29

1.1 Champ créé par une portion de circuit /3

D'après la démonstration vue en cours (p. 15 chap. 6) :

$$B = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{\mu_0 I}{4\pi h} \cos\theta \, d\theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi h} \left[\sin\theta \right]_{\alpha_1}^{\alpha_2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi h} (\sin\alpha_2 - \sin\alpha_1)$$

1.2 Symétries du problème /5

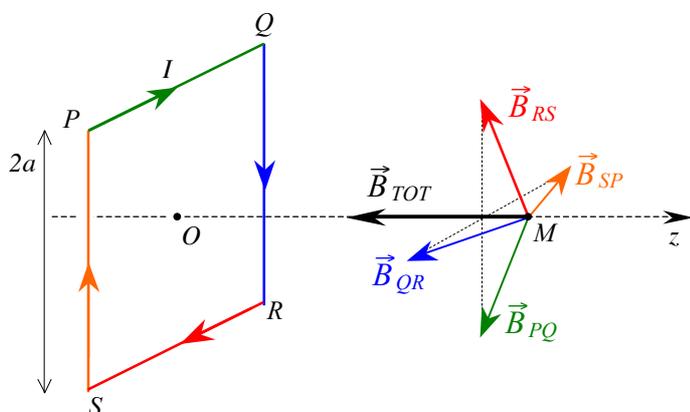
La distribution de courant présente les propriétés de symétrie et d'antisymétrie suivantes :

- antisymétrie par rapport aux plans bissecteurs des 4 segments constituant le circuit /1
- antisymétrie par rapport aux plans passant par les diagonales du circuit et par Oz. /1
- symétrie par rapport au plan contenant la spire /1

Le champ d'induction magnétique est donc parallèle à l'axe Oz. /1

Le sens du champ est donnée par la règle du tire-bouchon : \vec{B} est dirigé vers les z négatifs. /1

1.3 Champs magnétiques élémentaires créés par les 4 portions de circuit /3



La somme des champs élémentaires est dirigée selon l'axe des z dans la direction opposée à \vec{e}_z . Le résultat est donc cohérent avec l'analyse effectuée pour la question précédente.

1.4 Norme du champ élémentaire \vec{B}_{PQ} /4

On note T le milieu du segment [PQ]. On reprend l'expression obtenue précédemment :

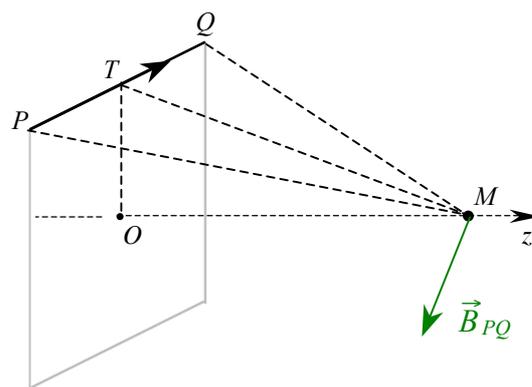
$$B_{PQ} = \frac{\mu_0 I}{4\pi h} (\sin\alpha_2 - \sin\alpha_1)$$

avec : • $h = MT = \sqrt{MO^2 + OT^2} = \sqrt{z^2 + a^2}$

• $\sin\alpha_1 = \frac{TP}{MP} = -\frac{TP}{\sqrt{MT^2 + TP^2}} = -\frac{a}{\sqrt{z^2 + 2a^2}}$

• $\sin\alpha_2 = \frac{TQ}{MT} = +\frac{a}{\sqrt{z^2 + 2a^2}}$

d'où $B_{PQ} = \frac{\mu_0 I}{2\pi\sqrt{z^2 + a^2}} \cdot \frac{a}{\sqrt{z^2 + 2a^2}}$



1.5 Norme du champ créé par la spire carrée /3

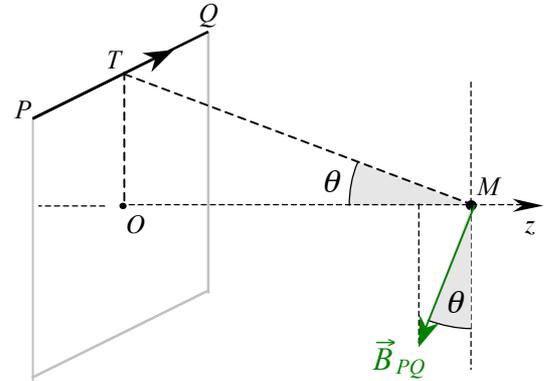
La norme du champ créé par la spire carrée est la somme des projections des 4 champs élémentaires créés par chaque portion du circuit :

$$B_{TOT} = -4 B_{PQ} \cdot \sin\theta$$

où θ est l'angle (\widehat{OMT})

$$\text{Avec } \sin\theta = \frac{OT}{MT} = \frac{a}{\sqrt{z^2 + a^2}},$$

$$\text{il vient finalement : } \vec{B}_{TOT} = -\frac{2\mu_0 I}{\pi} \frac{a^2}{(z^2 + a^2)\sqrt{z^2 + 2a^2}} \vec{e}_z.$$



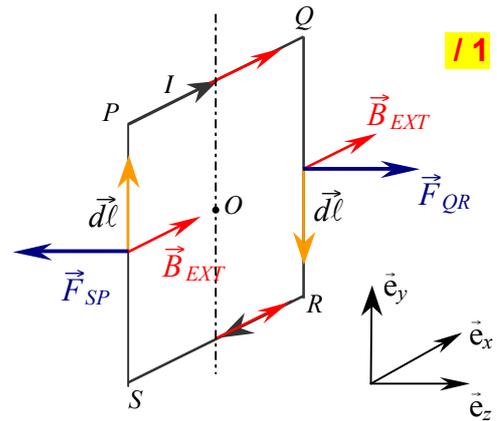
1.6 Forces exercées sur la spire /4

Il s'agit des forces de Laplace /0.5 exercées sur chaque portion de circuit traversée par un courant. Par exemple, pour le segment [SP] :

$$\vec{F}_{SP} = \int_S^P I d\vec{\ell} \wedge \vec{B}_{EXT} = \int_S^P I d\ell \vec{e}_y \wedge B_{EXT} \vec{e}_x = -2 a I B \vec{e}_z \quad /1$$

Pour le segment [QR], le calcul conduit à :

$$\vec{F}_{QR} = +2 a I B \vec{e}_z \quad /0.5$$



Pour les segments [PQ] et [RS], \vec{B}_{EXT} étant colinéaire à $P\vec{Q}$ et $R\vec{S}$, la force de Laplace est nulle. /1

1.7 Mouvement de la spire /2

Sous l'effet du couple de forces, la spire se met à tourner autour d'un axe vertical passant par O. /1

La spire s'oriente de telle sorte que la règle du flux maximum est vérifiée, i.e. $\vec{B}_{TOT} // \vec{B}_{EXT}$ /1

1.8 État d'équilibre /2

La spire est orientée de telle sorte que le champ \vec{B}_{TOT} créé par la spire est aligné (même direction, même sens) que le champ \vec{B}_{EXT} . /1

Le moment magnétique de la spire $\vec{M} = I S \vec{n}$ est aligné avec le champ \vec{B}_{EXT} . /1

1.9 \vec{B}_{EXT} diminue brutalement, que se passe-t-il dans la bobine ? /3

On peut prévoir ce qui va se passer dans la bobine à partir de plusieurs raisonnements :

- **qualitatif** : la loi de Lenz prédit que le courant induit qui va apparaître va s'opposer aux causes qui lui ont donné naissance à savoir la diminution du flux de \vec{B}_{EXT} à travers le circuit conducteur PQRS. Il y aura donc apparition d'une force électromotrice induite e qui va entraîner l'apparition d'un courant induit i_{IND} circulant dans le même sens que le courant circulant déjà dans la spire.
- **quantitatif** : la loi de Maxwell – Faraday permet de quantifier les effets dus aux phénomènes d'induction :

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} \quad \text{si le circuit a une résistance } r, \quad i_{IND} = -\frac{1}{r} \frac{d\Phi}{dt} \quad \text{avec } \frac{d\Phi}{dt} < 0 \quad \text{donc } i_{IND} > 0.$$

Problème 2 /29

2.1 Où sont localisées les charges ? /2

La sphère conductrice est conductrice et à l'équilibre électrostatique : les charges sont donc localisées en surface. /2

2.2 Densité de charges uniforme /2

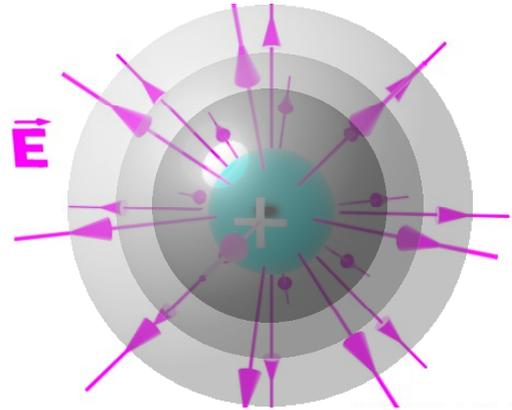
Les charges sont réparties à la surface de la sphère et ont tendance à se repousser mutuellement. Par conséquent, elles vont se répartir à égale distance les unes des autres, d'où le fait que la densité surfacique de charges est uniforme.

2.3 Lignes de champ / surfaces équipotentielles /2

La distribution de charges a une symétrie sphérique. Le champ électrique est donc radial :

$$\vec{E} = E(r) \vec{e}_r$$

Les surfaces équipotentielles sont perpendiculaires aux lignes de champ : ce sont donc des surfaces sphériques concentriques.



2.4 \vec{E} au voisinage de la surface de la sphère /3

- On peut faire état du résultat de cours : au voisinage de la surface d'un conducteur à l'équilibre, le champ électrique vaut :

$$\vec{E} = \frac{d}{\epsilon_0} \vec{e}_r \quad \text{remarque : } d \text{ est évidemment assimilable à } \sigma$$

- Si on ne se souvenait pas de ce résultat de cours, on pouvait refaire la démonstration du cours en appliquant le théorème de Gauss (chap. 5, § 5.1.3).
- On pouvait aussi calculer le champ en $r = R$. Hors de la sphère, le champ est identique à celui créé par une charge ponctuelle localisée en O :

$$\vec{E}(R) = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 R^2} \vec{e}_r \quad \text{avec } Q = d 4\pi R^2, \quad \text{d'où : } \vec{E} = \frac{d}{\epsilon_0} \vec{e}_r$$

2.5 Potentiel $V(R)$ sur la sphère /2

Le potentiel est constant dans un conducteur à l'équilibre : il a par exemple la même valeur à la surface ($r = R$) qu'au centre ($r = 0$). Ce dernier est simple à calculer (cf. cours, § 5.1.4) :

$$V(O) = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \iint_S \frac{d \, dS}{R} = \frac{d}{4\pi \epsilon_0 R} \iint_S dS = \frac{d}{4\pi \epsilon_0 R} \cdot 4\pi R^2 = \frac{d R}{\epsilon_0}$$

2.6 Énergie potentielle électrostatique de la sphère chargée /3

Plusieurs méthodes sont possibles pour calculer l'énergie potentielle de la sphère chargée uniformément (on reprend la notation usuelle σ pour la densité de charges surfacique) :

$$\bullet \text{ Ep} = \frac{1}{2} \iint_S \sigma(\vec{r}) \cdot V(\vec{r}) \, dS = \frac{1}{2} Q V = \frac{1}{2} 4\pi \sigma R^2 \frac{\sigma R}{\epsilon_0} = \frac{2 \pi \sigma^2 R^3}{\epsilon_0}$$

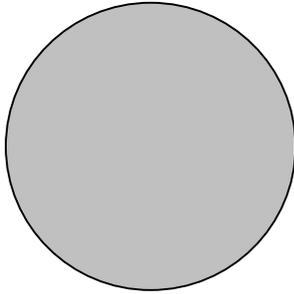
$$\bullet \text{ Ep} = \iiint_{\text{espace}} \frac{\epsilon_0 E^2(\vec{r})}{2} \, d\tau = \frac{\epsilon_0}{2} \int_R^\infty \left(\frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r^2} \right)^2 4\pi r^2 \, dr = \frac{2 \pi \sigma^2 R^4}{\epsilon_0} \left[-\frac{1}{r} \right]_R^\infty = \frac{2 \pi \sigma^2 R^3}{\epsilon_0}$$

2.7 Effet du champ électrique \vec{E}_{EXT} sur la distribution de charges /2

Le champ électrique modifie la distribution de charge : les charges (-) sont attirés vers le bas (potentiel élevé) alors que les charges (+) sont repoussées vers le haut de la sphère.

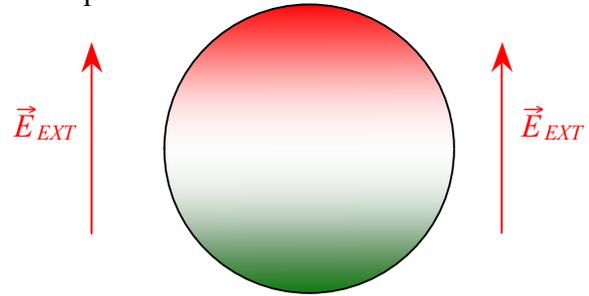
2.8 Représentation de la distribution de charges /2

Sans champ :



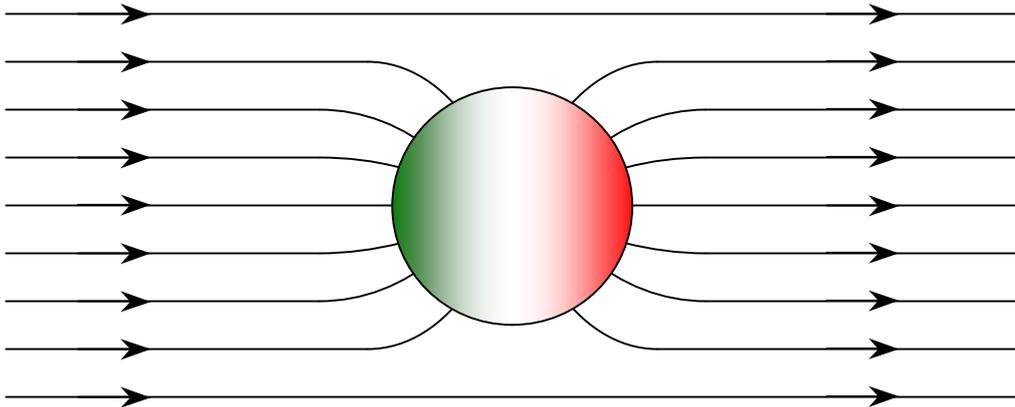
Répartition homogène des charges

Avec champ :



Les charges (-) sont attirées vers le bas (potentiel élevé mais E_p minimale) alors que les charges (+) sont repoussées vers le haut de la sphère.

2.9 Allure des lignes du champ \vec{E} dans la région où est placée cette sphère /2



2.10 Potentiels des deux sphères conductrices reliées par un conducteur /2

Les potentiels sont égaux puisque reliées par un conducteur (à l'intérieur d'un conducteur, le potentiel est constant)

2.11 Relation entre σ_1 , σ_2 , R_1 , et R_2 /2

$$V_1 = V_2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\sigma_1 R_1}{\epsilon_0} = \frac{\sigma_2 R_2}{\epsilon_0} \quad \Leftrightarrow \quad \sigma_1 R_1 = \sigma_2 R_2$$

2.12 Champ au voisinage de chaque sphère /3

$$\vec{E}_1 = \frac{\sigma_1}{\epsilon_0} \vec{e}_r \quad \text{et} \quad \vec{E}_2 = \frac{\sigma_2}{\epsilon_0} \vec{e}_r$$

comme $R_1 > R_2$ alors $\sigma_1 < \sigma_2$, /1 donc $|\vec{E}_1| < |\vec{E}_2|$ /1

Le champ électrique au voisinage de la petite sphère est plus intense que celui régnant au voisinage de la grande sphère : c'est l'effet de pointe qu'on met à profit dans les paratonnerres, les canons à électrons et les dispositifs de sonde atomique. /1