Exercice 1

/1 **1.1** $\rho = Q/V = \dfrac{Q}{4/3\ \pi\ R^3}$

/2 **1.2** Tout plan passant par O est plan de symétrie de la distribution de charge. Or $\vec{E}$ est un vecteur polaire contenu dans les plans de symétrie. En O, il est contenu dans tous les plans de symétrie $\rightarrow\ \vec{E} = \vec{0}$

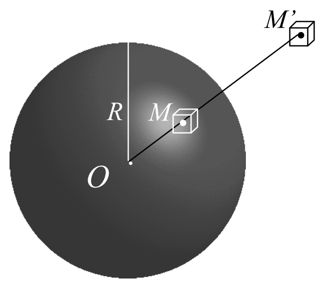
/1 **1.3** $\displaystyle\oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$

/1 **1.4** $\text{div}\,\vec{E} = \rho/\varepsilon_0$

/3 **1.5** En M, tel que $r_M < R$: $\text{div}\,\vec{E}_{\text{INT}} = \rho/\varepsilon_0 \quad \rightarrow \quad \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^2\, E_{\text{INT}}(r)\right) = \rho/\varepsilon_0$

les autres termes de div $\vec{E}$ ne sont pas à prendre en compte puisque $\vec{E}$ est radial

$\rightarrow\quad r^2 E_{\text{INT}}(r) = \dfrac{\rho\, r^3}{3\ \varepsilon_0} + K_1 \qquad$ or $\vec{E}_{\text{INT}}(0) = \vec{0} \qquad$ donc $K_1 = 0$



d'où finalement : $E_{\text{INT}}(r) = \dfrac{\rho\, r}{3\ \varepsilon_0}$ (résultat classique vu en cours)

/3 **1.6** En M', tel que $r_{M'} < R$: $\text{div}\,\vec{E}_{\text{EXT}} = 0$ car $\rho = 0$ (il n'y a pas de charge !)

$\rightarrow\quad \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^2\, E_{\text{EXT}}(r)\right) = 0 \quad \rightarrow \quad E_{\text{EXT}}(r) = \dfrac{K_2}{r^2}$

on détermine K_2 en considérant la continuité du champ électrique en $r = R$:

$E_{\text{EXT}}(r) = \dfrac{\rho\, R^3}{3\ \varepsilon_0\, r^2} = \dfrac{Q}{4\ \pi\ \varepsilon_0\, r^2}$

On retrouve bien un résultat classique vu en cours et TD : le champ $\vec{E}_{\text{EXT}}$ créé par cette sphère chargée est le même que celui dû à une charge Q ponctuelle placée en O.

/2 **1.7** On pouvait partir de la relation $\vec{E}_{\text{EXT}} = -\ \overrightarrow{\text{grad}}\, V_{\text{EXT}}$

ou considérer le résultat classique $V_{\text{EXT}}(r) = \dfrac{Q}{4\ \pi\ \varepsilon_0\, r} + K$ comme pour une charge ponctuelle localisée en O.

En prenant $V_{\text{EXT}}(\infty) = 0$, on obtient $K = 0$.

/1 **1.8** $Ep = \text{q}\cdot\ V_{\text{EXT}}(R_1) = \dfrac{q\, Q}{4\ \pi\ \varepsilon_0\, R_1}$

/2 **1.9** $C = \displaystyle\int_{P_1}^{P_2} \vec{E}_{\text{EXT}}\cdot d\vec{\ell} = V_{\text{EXT}}(P_1) - V_{\text{EXT}}(P_2) = \frac{Q}{4\ \pi\ \varepsilon_0}\left[\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right]$

/1 **1.10** $W_{\text{ELEC}} = \displaystyle\int_{P_1}^{P_2} q\,\vec{E}_{\text{EXT}}\cdot d\vec{\ell} = q\int_{P_1}^{P_2} \vec{E}_{\text{EXT}}\cdot d\vec{\ell} = \text{q}\ [V_{\text{EXT}}(P_1) - V_{\text{EXT}}(P_2)] = -\,\Delta Ep$

/3 **1.11** *Trajet* $P_1 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow P_2$: $W_1 = \underbrace{\displaystyle\int_{P_1}^{A} q\,\vec{E}_{\text{EXT}}\cdot d\vec{\ell}}_{\vec{E}_{\text{EXT}}\ //\ d\vec{\ell}} + \underbrace{\displaystyle\int_{A}^{B} q\,\vec{E}_{\text{EXT}}\cdot d\vec{\ell}}_{\vec{E}_{\text{EXT}}\ \perp\ d\vec{\ell}} + \underbrace{\displaystyle\int_{B}^{P_2} q\,\vec{E}_{\text{EXT}}\cdot d\vec{\ell}}_{\vec{E}_{\text{EXT}}\ \perp\ d\vec{\ell}}$

$$W_1 = q\int_{P_1}^{A} q\,\vec{E}_{\text{EXT}}\cdot d\vec{\ell} = q\ [V_{\text{EXT}}(P_1) - V_{\text{EXT}}(A)] = q\ [V_{\text{EXT}}(P_1) - V_{\text{EXT}}(P_2)]$$

Trajet $P_1 \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow P_2$: $W_2 = \underbrace{\displaystyle\int_{P_1}^{C} q\,\vec{E}_{\text{EXT}}\cdot d\vec{\ell}}_{\vec{E}_{\text{EXT}}\ \perp\ d\vec{\ell}} + \underbrace{\displaystyle\int_{C}^{D} q\,\vec{E}_{\text{EXT}}\cdot d\vec{\ell}}_{\vec{E}_{\text{EXT}}\ //\ d\vec{\ell}} + \underbrace{\displaystyle\int_{D}^{P_2} q\,\vec{E}_{\text{EXT}}\cdot d\vec{\ell}}_{\vec{E}_{\text{EXT}}\ \perp\ d\vec{\ell}}$

Une démonstration similaire est présentée dans le poly de cours pages 28-29 / chap. 1

$$W_2 = q\int_{C}^{D} \vec{E}_{\text{EXT}}\cdot d\vec{\ell} = q\ [V_{\text{EXT}}(C) - V_{\text{EXT}}(D)] = q\ [V_{\text{EXT}}(P_1) - V_{\text{EXT}}(P_2)] = W_1$$

Exercice 2

/2 **2.1** (1) La distribution de charges est invariante par translation selon Oz

(2) La distribution de charges est invariante par rotation autour de Oz

(3) Tout plan contenant le fil est plan de symétrie

(4) Tout plan perpendiculaire au fil est plan de symétrie

/1 **2.2** $\vec{E}$ est un vecteur polaire contenu dans les plans de symétrie.

En O, il est contenu dans tous les plans de symétrie $\rightarrow$ $\vec{E} = \vec{0}$

/2 **2.3** D'après les réponses de la question 2.1 :

(1) $\rightarrow$ $\vec{E}(\vec{r})$ ne dépend pas de z

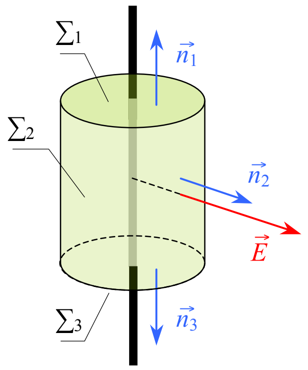
(2) $\rightarrow$ $\vec{E}(\vec{r})$ ne dépend pas de φ

(3) $\rightarrow$ $\vec{E}(\vec{r})$ est contenu dans le plan $(\vec{e}_\rho\ ;\ \vec{e}_z)$

(4) $\rightarrow$ $\vec{E}(\vec{r})$ est contenu dans le plan $(\vec{e}_\rho\ ;\ \vec{e}_\varphi)$

$\rightarrow$ $\vec{E}(\rho, \varphi, z) = E(\rho)\, \vec{e}_\rho$

/4 **2.4** On applique le théorème de Gauss en choisissant une surface de Gauss adaptée au système (cf. cours) :



Vous devez absolument préciser en détail quelle surface de Gauss vous utilisez (au besoin au moyen d'un dessin)

La surface de Gauss considérée est un cylindre de longueur L et de rayon ρ.

Le théorème de Gauss stipule que :

$$\oint\!\!\oint_\Sigma \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} \qquad \text{où} \quad \Sigma = \Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3 \ \text{(voir dessin)}$$

$$\oint\!\!\oint_\Sigma \vec{E}\cdot d\vec{S} = \underbrace{\iint_{\Sigma_1} \vec{E}\cdot d\vec{S}}_{\vec{E}\perp\vec{n}_1} + \underbrace{\iint_{\Sigma_2} \vec{E}\cdot d\vec{S}}_{\vec{E}\,//\,\vec{n}_2} + \underbrace{\iint_{\Sigma_3} \vec{E}\cdot d\vec{S}}_{\vec{E}\perp\vec{n}_3} = \iint_{\Sigma_2} \vec{E}\cdot d\vec{S} = E(\rho)\, 2\pi\rho L$$

$$\frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} = \frac{\lambda L}{\varepsilon_0} \qquad \text{d'où} \qquad E(\rho) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\,\rho} \qquad \vec{E}(\rho) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\,\rho}\vec{e}_\rho$$

/2 **2.5** $\vec{E}(\rho) = -\,\overrightarrow{\text{grad}}\,V = -\dfrac{\partial V}{\partial\rho}\vec{e}_\rho$ $\rightarrow$ $\text{V} = -\displaystyle\int \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\,\rho}\,\text{d}\rho = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\rho + \text{K}$

/2 **2.6** Les surfaces équipotentielles sont des cylindres d'axe confondu avec le fil

/3 **2.7** Pour le fil (–) : $V_-(M) = +\dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln r_-$ pour le fil (+) : $V_+(M) = -\dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln r_+$

En vertu du théorème de superposition : $V_{TOT}(M) = V_-(M) + V_+(M) = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\dfrac{r_-}{r_+}\right)$

/2 **2.8** Bien que le potentiel soit défini à une constante près, il fallait considérer le cas le plus simple à savoir le cas pour lequel $\ln(r_-/r_+) = 0$, c'est à dire le plan contenant les points équidistants des fils : le plan d'équation $x = 0$.

/2 **2.9** Lignes de champ et équipotentielles : on retrouve une situation analogue à celle du dipôle :