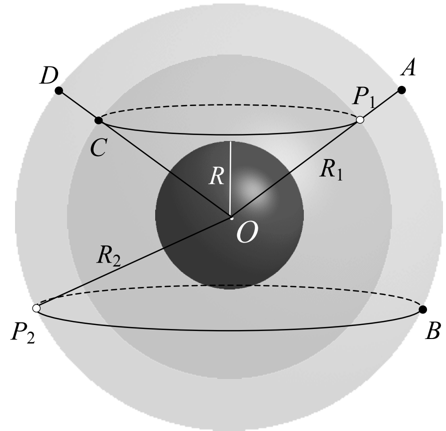
LP 203 Année 2011 – 2012

Contrôle continu – Épreuve du 20 octobre 2011

Durée : 1h15 Calculatrice et documents non autorisés

Exercice n°1

On considère une densité de charge uniforme contenue dans une sphère de rayon R et de centre O. La valeur totale de la charge est Q.



1.1 Calculer la densité de charge volumique ρ.

1.2 En utilisant des arguments de symétrie, déterminer la valeur du champ électrostatique en O.

1.3 Énoncer le théorème de Gauss.

1.4 Rappeler l'équation locale de Maxwell-Gauss.

1.5 À l'aide de l'équation locale de Maxwell-Gauss, déterminer les composantes du champ électrostatique $\vec{E}_{\text{int}}$ régnant à l'intérieur de la sphère.

1.6 À l'aide de l'équation de Maxwell-Gauss et du résultat précédent, déterminer les composantes du champ électrostatique $\vec{E}_{\text{ext}}$ régnant à l'extérieur de la sphère.

1.7 Donner l'expression du potentiel V_{ext} à l'extérieur de la sphère.

On considère maintenant une charge q initialement située au point P_1 à une distance R_1 de O.

1.8 Quelle est son énergie potentielle en R_1 ?

1.9 Calculer la circulation du champ électrique du point P_1 au point P_2 situé à une distance R_2 de O (voir dessin).

1.10 En déduire le travail de la force électrostatique quand la charge q se déplace de P_1 à P_2 de manière quasi-statique.

1.11 Montrer explicitement que le travail de la force électrostatique ne dépend pas du chemin suivi : on calculera à cet effet ce travail pour les trajets suivants $P_1 \to A \to B \to P_2$ et $P_1 \to C \to D \to P_2$.

On rappelle l'expression du gradient et de la divergence en coordonnées curvilignes :

$$\vec{\nabla} U = \frac{\partial U}{\partial \rho}\vec{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial U}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{e}_z$$

$$\vec{\nabla} U = \frac{\partial U}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial U}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \theta}\vec{e}_\theta$$

$$\vec{\nabla}.\vec{A} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho A_\rho) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\vec{\nabla}.\vec{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 A_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta A_\theta)$$

Tournez la page s.v.p.

Exercice n°2

On considère un fil rectiligne infini parallèle à l'axe Oz portant une densité de charge linéique $+\lambda$ uniforme ($\lambda > 0$).

2.1 Analyser **en détail** les invariances et propriétés de symétrie de la distribution de charge.

2.2 Que vaut le champ $\vec{E}$ sur le fil ?

2.3 En déduire les composantes du champ électrique créé par ce fil infini et les variables dont il dépend.

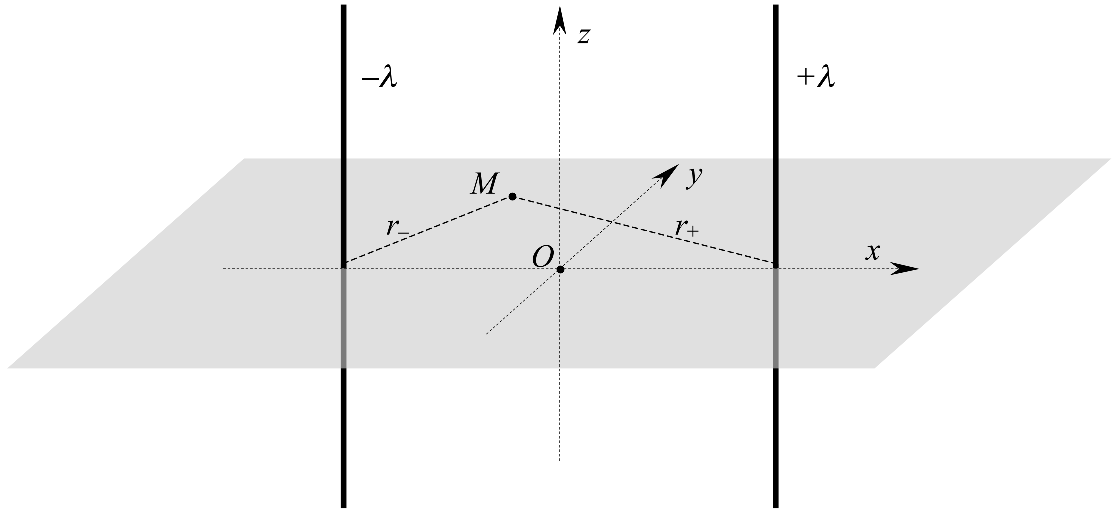
2.4 Déterminer l'expression vectorielle du champ électrique en tout point de l'espace.

2.5 En déduire l'expression du potentiel en tout point de l'espace.

2.6 Quelles sont les surfaces équipotentielles ? justifier

On considère 2 fils rectilignes infinis parallèles à Oz, d'équations respectives $x = -a$ et $x = +a$ et de charges linéiques respectives $-\lambda$ et $+\lambda$ ($\lambda > 0$). Soit un point M appartenant au plan xOy. On note respectivement r_- et r_+ les distances entre M et le fil chargé $-\lambda$ et $+\lambda$ (voir dessin ci-dessous).

2.7 En utilisant le résultat de la question 2.4, calculer le potentiel créé en M par les deux fils infinis.



2.8 Déterminer l'équation de la surface équipotentielle $V(M) = 0$.

2.9 Tracer l'allure générale des lignes de champ et des surfaces équipotentielles.
on effectuera un schéma en vue de dessus :