

Problème 1 – Partie 1 /40

- /3** 1.1 (a) Tout plan passant par l'axe Oz est plan d'antisymétrie /1
 (b) le plan contenant la spire est plan de symétrie /1
 (c) La distribution admet une symétrie de rotation autour de l'axe Oz /1

/1 1.2 Il faut utiliser le système de coordonnées cylindriques /1

/1 1.3 D'après 1.1 (c), le champ magnétique ne dépend pas de la variable φ , $\vec{B} = \vec{B}(\rho, z)$ /1

- /4** 1.4 • $\vec{B}(O) = B(0, 0, 0) \vec{e}_z$ /0.5
 • $\vec{B}(0, 0, z) = B(z) \vec{e}_z$ /0.5
 • $\vec{B}(\rho, \varphi, 0) = B(\rho) \vec{e}_z$ /0.5
 • $\vec{B}(\rho, \varphi, z) = B_\rho(\rho, z) \vec{e}_\rho + B_z(\rho, z) \vec{e}_z$ /0.5

/2 1.5 $d\vec{\ell} = d\ell \vec{e}_\varphi = R d\varphi \vec{e}_\varphi$ /1 $\vec{PM} = (\vec{PO} + \vec{OM}) = -R \vec{e}_\rho + z \vec{e}_z$ /1

/3 1.6 $d\vec{B} = \frac{\mu_0 I d\vec{\ell} \wedge \vec{PM}}{4\pi PM^3}$ (relation de Biot et Savart) /1

$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I d\ell}{4\pi (R^2 + z^2)^{3/2}} [R \vec{e}_z + z \vec{e}_\rho]$ /1 dessin de $d\vec{B}$ ci-contre

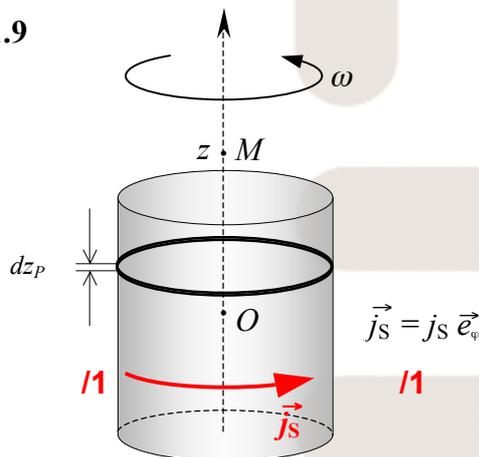
/4 1.7 Pour la spire entière :

- Les composantes perpendiculaires à \vec{e}_z s'annulent deux à deux par symétrie /1
- Les composantes selon \vec{e}_z , toutes dans le même sens, s'additionnent simplement : /1

$\vec{B} = \frac{\mu_0 I R}{4\pi PM^3} \vec{e}_z \oint_{spire} d\ell = \frac{\mu_0 I R^2}{2 (R^2 + z^2)^{3/2}} \vec{e}_z$ /1 = $\frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \vec{e}_z$ /1

/1 1.8 $\|\vec{B}\| = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 I}{2 R} \left(\frac{R}{(R^2 + z^2)^{1/2}} \right)^3 = \frac{\mu_0 I}{2 R} \sin^3 \theta$ /1

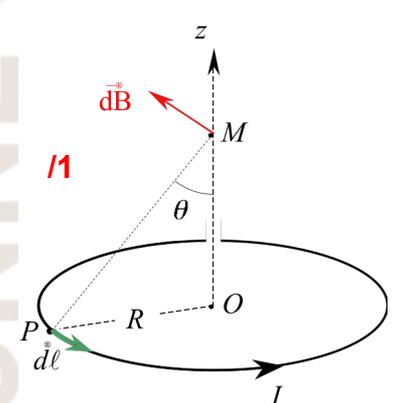
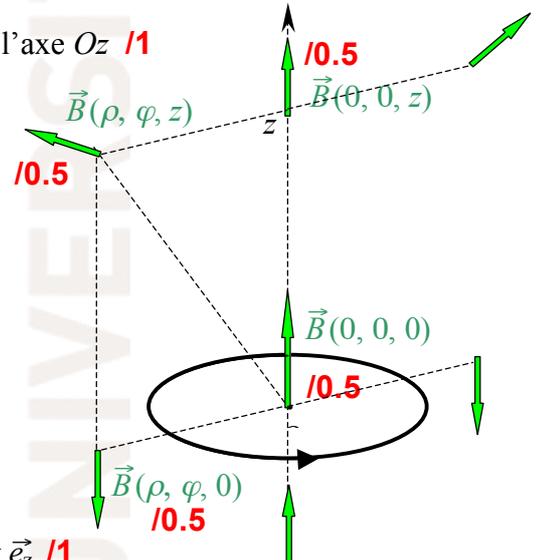
/2 1.9



/1 1.10 L'analyse des symétries montre que \vec{B} est selon \vec{e}_z comme pour la spire unique. /1

/2 1.11 Si $\vec{j}_V = \rho \vec{v}$ représente la densité volumique de courant alors la densité surfacique de courant doit être de la forme : $\vec{j}_S = \sigma \vec{v}$ où \vec{v} représente la vitesse des charges, soit : $\vec{v} = R \omega \vec{e}_\varphi$

D'où finalement : $\vec{j}_S = \sigma R \omega \vec{e}_\varphi$
 $j_S = \sigma R \omega$ /2

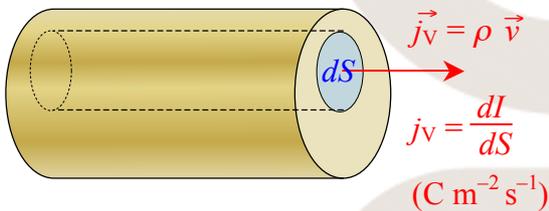


12 1.12 Il faut utiliser une règle de trois (ou de proportionnalité) : le courant total I traversant la ligne de longueur L est uniformément réparti. Le courant infinitésimal dI traverse la ligne de longueur dz_p , d'où :

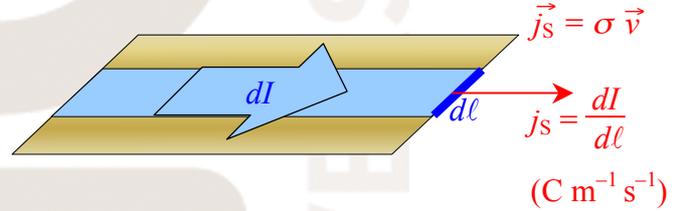
$$\frac{I}{2L} j_s = \frac{dI}{dz_p} \Rightarrow dI = j_s dz_p \quad \text{12}$$

Quelques précisions sur la différence entre \vec{j}_V et \vec{j}_S :

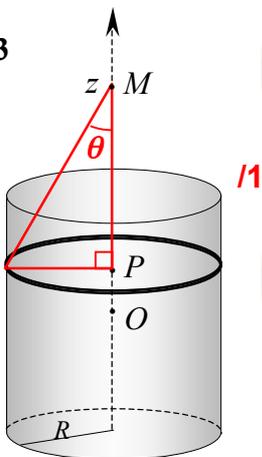
Pour un courant en volume :



Pour un courant à la surface d'un conducteur :



13 1.13



D'après le résultat de la question 1.7, le champ infinitésimal créé par la boucle de courant d'épaisseur dz_p est :

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 dI}{2} \frac{R^2}{(R^2 + (z - z_p)^2)^{3/2}} \vec{e}_z \quad \text{11}$$

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 j_s R^2}{2} \frac{dz_p}{(R^2 + (z - z_p)^2)^{3/2}} \vec{e}_z \quad \text{11}$$

remarque : la variable est z_p ! z est la cote du point M .

15 1.14 On obtient l'expression du champ total en intégrant l'expression précédente de $-L$ à L :

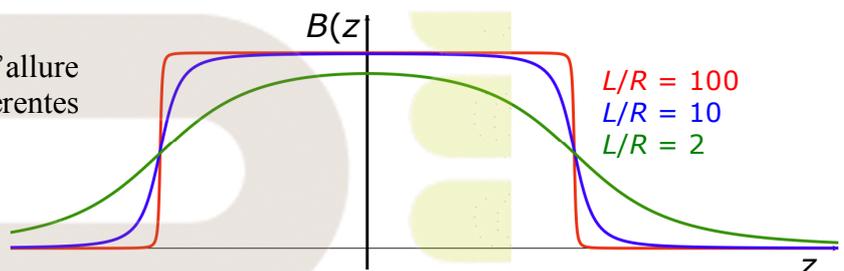
$$\vec{B} = \frac{\mu_0 j_s R^2}{2} \int_{-L}^{+L} \frac{dz_p}{(R^2 + (z - z_p)^2)^{3/2}} \vec{e}_z \quad \text{11}$$

En effectuant le changement de variable $Z = z - z_p$ avec $dZ = -dz_p$, il vient : 11

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 j_s R^2}{2} \int_{z+L}^{z-L} \frac{-dZ}{(R^2 + Z^2)^{3/2}} \vec{e}_z = \frac{\mu_0 j_s R^2}{2} \left[\frac{-Z}{R^2 \sqrt{R^2 + Z^2}} \right]_{z+L}^{z-L} \quad \text{11}$$

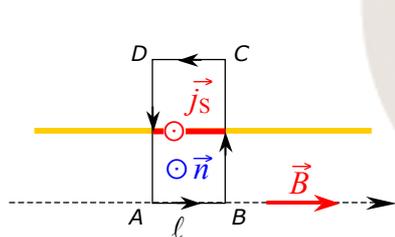
$$\vec{B} = \frac{\mu_0 j_s}{2} \left[\frac{z+L}{\sqrt{R^2 + (z+L)^2}} - \frac{z-L}{\sqrt{R^2 + (z-L)^2}} \right] = \frac{\mu_0 \sigma R \omega}{2} \left[\frac{z+L}{\sqrt{R^2 + (z+L)^2}} - \frac{z-L}{\sqrt{R^2 + (z-L)^2}} \right] \quad \text{12}$$

Le graphe ci-contre montre l'allure de la courbe $B(z)$ pour différentes valeurs du rapport L/R .



/6 1.15 Le tube infini en rotation est équivalent à un solénoïde infini. Il a été démontré en cours qu'à l'extérieur d'un solénoïde, le champ était nul. **/2**

On le démontre avec le théorème d'Ampère :



$$\oint_{ABCD} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \sum I \quad \text{!1} \quad \text{avec d'une part : } \mu_0 \sum I = + \mu_0 \sigma R \omega \ell \quad \text{!1}$$

$$\text{et d'autre part : } \oint_{ABCD} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \vec{B} \cdot \vec{AB} + 0 + \vec{B} \cdot \vec{CD} + 0 \quad \text{!1}$$

Pour un fil infini : $L = \infty$, donc $\vec{B} = \mu_0 \sigma R \omega \vec{e}_z$; **/0,5**

$$\text{donc : } \oint_{ABCD} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \sigma R \omega \ell - B_{CD} \cdot \ell = \mu_0 \sigma R \omega \ell \quad \text{d'où : } B_{CD} \cdot \ell = 0 \quad \text{d'où : } B_{\text{EXT}} = 0 \quad \text{!0.5}$$

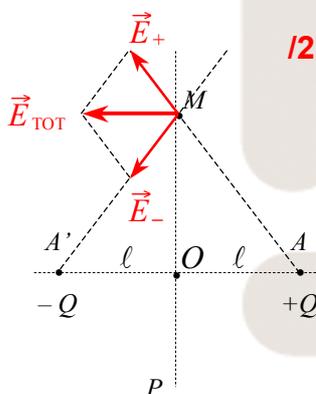
On pouvait également prendre le cadre à l'extérieur du tube infini. En supposant que $\vec{B}(\infty)$ est nul, on arrivait à $B_{\text{EXT}} = 0$

Problème 2 : ÉLECTROSTATIQUE **/25 + /5**

- /5 2.1**
- Dans un conducteur à l'équilibre, le potentiel est constant : tout le conducteur est au même potentiel. Comme le conducteur est à la terre, le potentiel est nul, $V_{\text{INT}} = 0$ **/1**
 - $V_{\text{SURF}} = V_{\text{INT}} = 0$ **/1**
 - Par définition, dans un conducteur à l'équilibre, $\vec{E}_{\text{INT}} = \vec{0}$ **/1**
 - Par influence, il apparaît des charges négatives attirées par la charge $+Q$. **/1**
 - Il y a symétrie cylindrique selon l'axe Oz . **/1**

- /3 2.2** Le système réel représenté sur la figure 2.1 peut être décrit par l'existence d'un plan avec $V = 0$ et d'une charge $+Q$ situé à la distance ℓ de ce plan. **/1**
L'état d'équilibre est donc parfaitement défini (cf. cours). Tout autre système présentant les mêmes caractéristiques définira le même état d'équilibre **/1**, ce qui est le cas du système représenté sur la figure 2.2. En effet, le plan médiateur du segment $[A'A]$ est au potentiel nul puisqu'à égale distance des deux charges. **/1**

/2 2.3



- /4 2.4** En vertu du théorème de superposition **/1**, le champ électrique régnant au voisinage de la surface est la somme du champ \vec{E}_+ dû à la présence de la charge $+Q$ et du champ \vec{E}_- dû à la présence des charges de surface. **/1**

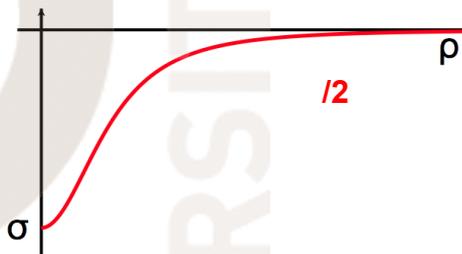
$$\begin{aligned} \vec{E}_{\text{SURF}} &= \vec{E}_{\text{SURF}} = \vec{E}_+ + \vec{E}_- = -2 \|\vec{E}_+\| \cos\theta \vec{e}_z \\ &= -2 \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 AM^2} \cos\theta \vec{e}_z \\ &= -2 \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 (\ell^2 + \rho^2)} \frac{\ell}{(\ell^2 + \rho^2)^{1/2}} \vec{e}_z \\ \vec{E}_{\text{SURF}} &= \frac{-2 Q \ell}{4\pi\epsilon_0 (\ell^2 + \rho^2)^{3/2}} \vec{e}_z \quad \text{!2} \end{aligned}$$

- /12** 2.5 D'une manière générale, au voisinage de la surface d'un conducteur chargé avec la densité de charge σ (uniforme ou non), le champ électrique est :

$$\vec{E}_{\text{SURF}} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n} \quad /2$$

- /14** 2.6 Par identification, on en déduit l'expression de la densité de charges superficielle :

$$\sigma = \frac{-2 Q \ell}{4\pi (\ell^2 + \rho^2)^{3/2}} \quad /2$$



/15 2.7
$$Q_{\text{SURF}} = \int_{\text{plan}} \sigma dS = \int_{\text{plan}} \sigma d\rho \rho d\varphi = -\frac{Q \ell}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} \frac{\rho d\rho}{(\rho^2 + \ell^2)^{3/2}} = -Q \ell \left[\frac{-1}{(\rho^2 + \ell^2)^{1/2}} \right]_0^{\infty} = -Q$$

La charge sur le plan en correspondance de la charge $+Q$ est égale à $-Q$. D'après le théorème des éléments correspondants, on en conclut que les deux conducteurs sont en influence totale. /2

HORS BARÈME

- /12** 2.8 Deux méthodes : /2

- on considère que le plan chargé est équivalent à la particule $-Q$ placée en A' ; dans ce cas, le champ perçu en A est celui créé par la charge $-Q$:

$$\vec{E}(A) = \frac{-Q}{4\pi\epsilon_0 (2\ell)^2} \vec{e}_z$$

- l'autre méthode consiste à calculer la quantité $\vec{E}(A) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_{\text{plan}} \frac{\sigma dS \vec{PM}}{PM^2 PM}$.

Le calcul complet est disponible sur la correction de l'examen du 28/01/2010 ([lien](#))

/11 2.9
$$\vec{F} = Q \cdot \vec{E} = \frac{-Q^2}{4\pi\epsilon_0 (2\ell)^2} \vec{e}_z \quad /1$$

- /12** 2.10 L'énergie potentielle de la charge q au point M peut être calculée de plusieurs manières : /2

- $E_p = Q \cdot V(A)$
- $E_p = -W$ (force électrostatique pour amener la charge depuis l'infini jusqu'en A)
- $E_p = W$ (force extérieure pour amener Q la charge depuis l'infini jusqu'en A)

- Première méthode : on considère le potentiel créé par la charge $-Q$ en A :

$$V_{-Q}(A) = \frac{-Q}{4\pi\epsilon_0 (2\ell)} \quad \text{donc} \quad E_p = -\frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 \ell}$$

- Deuxième méthode :

$$E_p = -\int_{\infty}^{2\ell} Q \cdot \vec{E}(M) \cdot d\vec{\ell} = -\int_{\infty}^{2\ell} Q \cdot E(z) \cdot dz = \frac{Q^2}{16\pi \epsilon_0} \int_{\infty}^{2\ell} \frac{dz}{z^2} = -\frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 \ell}$$