LP203

2011 - 2012

Examen – Épreuve du 05 janvier 2012
Durée : 2 heures
Calculatrice et documents non autorisés

Problème 1 : MAGNETOSTATIQUE

Partie 1

On se propose d'étudier le champ d'induction magnétique créé par une boucle circulaire de rayon R et parcourue par un courant d'intensité I.

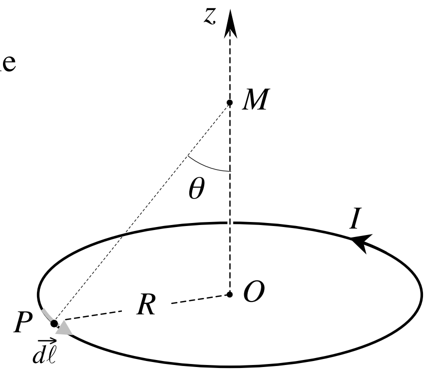

Fig. 1.1

1.1 Analyser **<u>en détail</u>** les propriétés de symétrie / antisymétrie et d'invariance de la distribution de courant.

1.2 En déduire le système de coordonnées à utiliser.

1.3 De quelles variables dépend le champ magnétique $\vec{B}$?

1.4 Représenter schématiquement le champ magnétique :
- au centre de la boucle,
- en un point M situé sur l'axe Oz,
- dans le plan contenant la boucle (à l'extérieur de celle-ci),
- pour un point quelconque.

(on indiquera clairement le sens et la direction des vecteurs, on exprimera le champ d'induction magnétique en fonction des vecteurs $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$ et $\vec{e_3}$ du système de coordonnées choisi sous la forme : $\vec{B}(M) = B_1\vec{e_1} + B_2\vec{e_2} + B_3\vec{e_3}$)

1.5 Établir les expressions **vectorielles** de $\vec{d\ell}$, $\vec{PM}$

1.6 En déduire l'expression **vectorielle** du champ élémentaire $\vec{dB}$ créé en un point M de l'axe Oz par l'élément de longueur $d\ell$ situé en P. Représenter le vecteur $\vec{dB}$.

1.7 En déduire l'expression vectorielle du champ $\vec{B}$ créé en M par la boucle entière.
On vérifiera que le résultat obtenu est conforme aux résultats de la question **1.4**,

1.8 Montrer que ce résultat peut se mettre sous la forme :

$\|\vec{B}\| = \dfrac{\mu_0 I}{2R}\sin^3\theta$ où θ est l'angle entre les vecteurs $\vec{MP}$ et $\vec{MO}$ (*voir fig. 1.1*).

Partie 2

On se propose maintenant de calculer le champ d'induction magnétique créé par un cylindre chargé en rotation à la vitesse angulaire $\boldsymbol{\omega}$ autour de son axe. Le cylindre est <u>creux</u> de rayon $\boldsymbol{R}$ et de longueur $\boldsymbol{2L}$ et chargé avec la densité de charge surfacique uniforme $\boldsymbol{\sigma}$ positive.

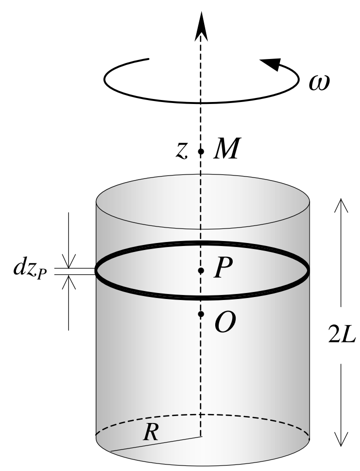

Fig. 1.2

1.9 Indiquer sur un schéma la direction et le sens de la densité surfacique de courant $\vec{j_S}$.

1.10 Quels sont la direction et le sens du champ d'induction magnétique $\vec{B}(M)$ créé en un point M situé sur l'axe Oz ?

On rappelle que la densité de courant volumique $\vec{j}_V$ peut s'exprimer sous la forme :

$\vec{j}_V = \rho\,\vec{v}$ où : ρ est la densité de <u>charges</u> volumique ($C\ m^{-3}$)
$\vec{v}$ la vitesse des charges ($m\ s^{-1}$)

1.11 À l'aide de l'analyse dimensionnelle, exprimer la densité de courant surfacique $\vec{j}_S$ en fonction des grandeurs pertinentes du problème.

On considère une boucle d'épaisseur infinitésimale dz_P située à la cote z_P.

1.12 Exprimer le courant infinitésimal dI équivalent créé par les charges en rotation dans la boucle d'épaisseur dz_P en fonction de j_S.

1.13 En vous aidant de la question **1.7**, établir l'expression du champ d'induction élémentaire $\vec{dB}(M)$ créé au point M situé à la cote z par la boucle d'épaisseur infinitésimale dz_P située à la cote z_P en fonction de μ_0, j_S, R, z, z_P et dz_P.

1.14 En déduire l'expression du champ d'induction magnétique $\vec{B}$ régnant en M.

On utilisera le résultat suivant : $\displaystyle\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^{3/2}} = \frac{x}{a^2\sqrt{a^2+x^2}}$

On considère maintenant le cas où L tend vers l'infini (tube infini chargé en rotation).

1.15 Que vaut le champ d'induction magnétique à l'extérieur du cylindre ?

Problème 2 : ÉLECTROSTATIQUE

Une charge ponctuelle $+Q$ est placée en un point A à la distance ℓ d'un volume conducteur semi-infini limité par un plan P d'équation $z = 0$ et maintenu au potentiel nul (fig 2.1)
L'ensemble est dans un état d'équilibre électrostatique.

2.1 Quel est le potentiel V_{INT} dans le conducteur ?
Quel est le potentiel V_{SURF} à la surface du conducteur ?
Quel est le champ électrique $\vec{E}_{INT}$ dans le conducteur ?
Qu'apparaît t-il autour du point O sous l'influence de la charge $+Q$?
Quelles sont les propriétés de symétrie du problème ?

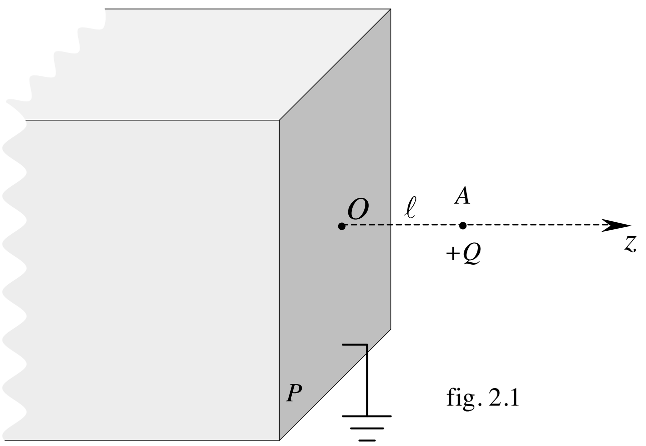

fig. 2.1

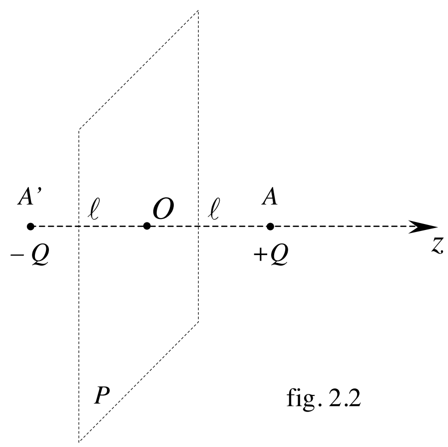

fig. 2.2

2.2 Montrer sans calcul, en utilisant le théorème d'unicité des états d'équilibre, que le potentiel et le champ électrostatique dans le demi-espace ($z > 0$) – limité par le plan P – sont les mêmes que si l'on supprimait le volume conducteur et que l'on plaçait une charge $-Q$ en un point A' symétrique de A par rapport à P (fig 2.2).

Dans la suite du problème, on admettra donc le résultat de la question précédente : l'équivalence entre le cas réel (décrit par la fig. 2.1) et le système équivalent (fig. 2.2).

2.3 Représenter la somme vectorielle des champs électriques créés par $+Q$ et $-Q$ en un point M situé au voisinage immédiat du plan P (fig. 2.3)

2.4 En déduire l'expression du champ électrostatique $\vec{E}_{\text{SURF}}$ au voisinage immédiat du plan P en fonction de ρ, distance du point M à l'axe Oz.
(on considérera que $A'M = AM$).

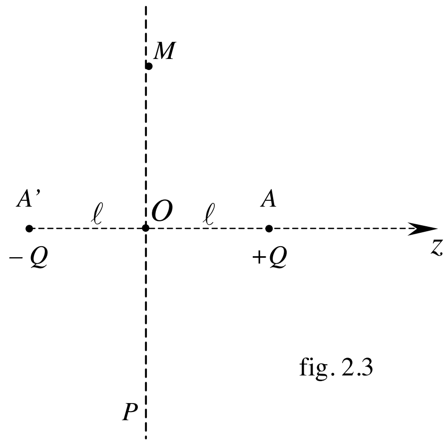

fig. 2.3

2.5 Rappeler (ou retrouver) l'expression **vectorielle** générale du champ électrique $\vec{E}_{\text{SURF}}$ au voisinage immédiat de la surface d'un conducteur chargé.

2.6 En déduire l'expression de la densité de charges σ à la surface du conducteur considéré dans ce problème. Tracer l'allure de la fonction $\sigma(\rho)$.

2.7 Calculer la charge totale à la surface du conducteur.
Interpréter ce résultat.

HORS BAREME :

2.8 Calculer le champ électrostatique $\vec{E}(A)$ créé en A par la densité de charge localisée à la surface du conducteur.

2.9 En déduire la force exercée sur la charge $+Q$.

2.10 Calculer l'énergie potentielle de la charge $+Q$ placée en A.