

**Questions de cours**

1.1 (1.11)  $\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0$  La circulation de  $\vec{E}$  sur un contour fermé est nulle

(1.12)  $\oint_C \vec{E}_m \cdot d\vec{\ell} = e$   $e$  est la force électromotrice

(1.13)  $\text{rot } \vec{E}_m = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$  équivalent  $e = -\frac{d\phi}{dt}$  Loi de Faraday

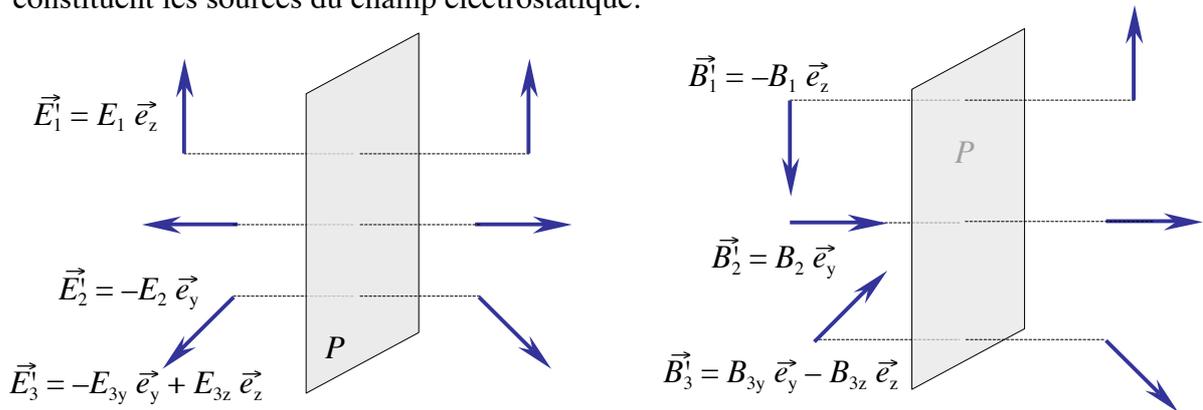
(1.14)  $\text{div } \vec{E} = \rho/\epsilon_0$  équivalent à :  $\oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_T}{\epsilon_0}$  Théorème de Gauss

(1.15)  $\text{div } \vec{B} = 0$  équivalent à :  $\oiint \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$

(1.16)  $\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$  équivalent à :  $\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \Sigma I$  Théorème d'Ampère

L'expression (1.15) exprime le fait que le flux de  $\vec{B}$  à travers une surface fermée est toujours nul, alors qu'il peut ne pas l'être dans le cas du champ électrostatique (1.14). Cette équation implique qu'il n'existe pas de monopôles ou de "charges" magnétiques similaires à celles qui constituent les sources du champ électrostatique.

1.2



1.3 Le coefficient de proportionnalité entre le courant  $I$  et le flux du champ créé par une spire à travers elle-même s'appelle le coefficient d'auto-induction ou inductance propre.

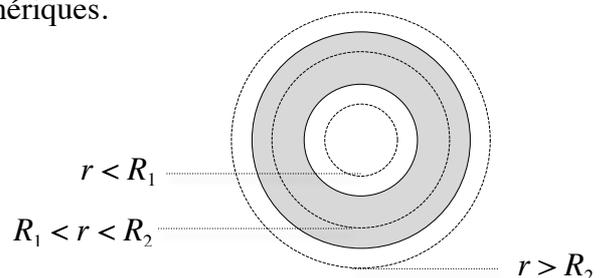
**Électrostatique**

2.1 (a) La distribution de charges est invariante par toute rotation autour du point O  
 (b) Tout plan passant par O est plan de symétrie de la distribution de charge

2.2 D'après 2.1 (a), le champ électrostatique ne dépend pas de  $\varphi$  et  $\theta$ .  
 D'après 2.1 (b), le champ électrostatique est dirigé selon  $\vec{e}_r$ , il est radial :  $\vec{E}(\vec{r}) = E(r) \vec{e}_r$   
 On utilise évidemment le système de coordonnées sphériques.

2.3  $V = \frac{4}{3} \pi (R_2^3 - R_1^3)$  d'où :  $Q_T = \frac{4}{3} \rho \pi (R_2^3 - R_1^3)$

2.4  $\oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_T}{\epsilon_0}$   $\text{div } \vec{E} = \rho/\epsilon_0$



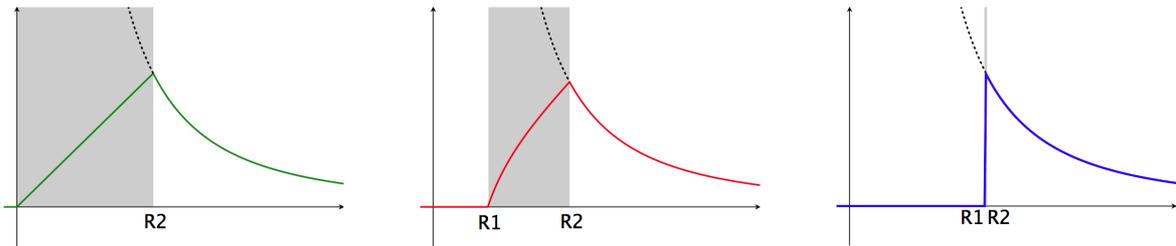
2.5 Il fallait appliquer le théorème de Gauss en utilisant des sphères de différents rayons :

•  $r < R_1$  :  $\oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0 \Rightarrow E(r) \cdot 4\pi r^2 = 0 \Rightarrow E(r) = 0$

•  $R_1 < r < R_2$  :  $\oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow E(r) \cdot 4\pi r^2 = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{4}{3} \rho \pi (r^3 - R_1^3) \Rightarrow E(r) = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \frac{(r^3 - R_1^3)}{r^2}$

•  $r > R_2$  : Le champ créé est le même que celui créé par une charge ponctuelle  $Q_T$  en  $O$  :  
 $E(r) = \frac{Q_T}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \frac{(R_2^3 - R_1^3)}{r^2}$

2.6



## Phénomènes d'induction

3.1 Il apparaît un courant dans la barre et l'opérateur ressent une force qui s'oppose au déplacement de la barre. Le courant est dû la composante magnétique de la force de Lorentz exercées sur les charges mobiles. Plusieurs explications du phénomène étaient possibles :

- Dans le repère fixe du laboratoire, toutes les charges contenues dans la barre sont soumises à la composante magnétique de la force de Lorentz  $\vec{F}_M = q \vec{v} \wedge \vec{B}$  où  $\vec{v}$  est la vitesse imposée par l'opérateur. Sous l'effet de cette force, les charges mobiles se déplacent et provoquent l'apparition d'un courant. Les charges immobiles, par définition, ne bougent pas (dans le repère de la barre).
- On peut également interpréter ces observations dans le cadre de la loi de Lenz : le courant induit est tel qu'il s'oppose aux causes qui lui ont donné naissance, à savoir l'augmentation du flux à travers le circuit. Le sens du courant induit est tel qu'il crée un champ  $\vec{B}$  induit visant à diminuer le flux total du champ d'induction magnétique à travers le circuit.
- Avec la loi de Faraday : la surface du circuit augmentant avec le déplacement de la barre, il apparaît une f.e.m. liée à l'augmentation du flux de  $\vec{B}$  à travers le circuit.

3.2 Il s'agit de la force de Laplace. Elle est de même direction mais de sens opposé au déplacement. Elle est due à la différence des forces exercées respectivement sur les charges mobiles et sur les charges immobiles contenues dans la barre conductrice.

3.3  $e = -\frac{d\phi}{dt}$  avec  $\phi = \iint \vec{B} \cdot d\vec{S} = B \cdot S$   $\frac{d\phi}{dt} = \frac{dB}{dt} S + B \frac{dS}{dt} = B \frac{dS}{dt} = B a \frac{dy}{dt} = B a v$

donc finalement  $e = -B a v$  d'où  $i = e/R = -\frac{B a v}{R}$

3.4 L'expression de la force de Laplace est :  $\vec{F}_L = \int_{barre} I d\vec{\ell} \wedge \vec{B}$

Avec  $d\vec{\ell} = dl \vec{e}_x$  et  $\vec{B} = B \vec{e}_z$ , il vient :  $\vec{F}_L = \int_{barre} I (dl \vec{e}_x) \wedge (B \vec{e}_z) = -I a B \vec{e}_y = -\frac{B^2 a^2 v}{R} \vec{e}_y$

3.5 Le travail des forces électromagnétiques lors d'une transformation d'un circuit parcouru par un courant  $I$  constant est égal au produit de l'intensité du courant par la variation de flux à travers ce circuit :  $W = I (\phi_C - \phi_0)$

3.6 On pouvait calculer la puissance mécanique de plusieurs manières :

$$P = \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{dW}{dt} = I \frac{d\phi}{dt} = -\frac{B a v}{R} \cdot B a v = -\frac{B^2 a^2 v^2}{R}$$

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{d}{dt} (\vec{F}_L \cdot \vec{d\ell}) = -F_L d\ell/dt = -\frac{B^2 a^2 v^2}{R}$$

Le résultat obtenu est cohérent avec le résultat de la question 3.2 car la puissance est négative et traduit bien le fait que les forces magnétiques s'opposent au déplacement (loi de Lenz).

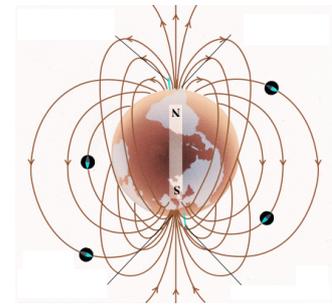
3.7 Dans le repère mobile associé à la barre, toutes les charges contenues dans la barre sont immobiles. La force de Lorentz ne peut donc expliquer le mouvement des charges. Or les charges bougent puisqu'on constate l'apparition d'un courant ! La seule explication possible est que dans le repère mobile, il existe un champ électrique électromoteur équivalent à  $\vec{v} \wedge \vec{B}$  (mesuré dans le repère fixe). Il s'agit d'un champ électrique ne dérivant pas d'un potentiel et dont la circulation sur un contour fermé est non nulle et vaut  $e$  (f.e.m.).

## Magnétostatique

4.1  $M$  est contenu dans le plan de symétrie de la spire. Le champ  $\vec{B}$  est donc perpendiculaire au plan  $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y)$  contenant la spire et le point  $M$ . Le sens de  $\vec{B}$  peut être déduit de l'analyse des symétries et du fait la contribution de la portion de la spire proche de  $M$  va être plus importante que celles des portions plus éloignées.

La règle "des 3 doigts" impose que  $\vec{B}$  soit selon  $-\vec{e}_z$ .

La figure ci-contre illustre l'allure des lignes de champ



4.2  $\vec{OM} = r \vec{e}_x$      $\vec{OP} = R \cos\theta \vec{e}_x + R \sin\theta \vec{e}_y$      $\vec{PM} = \vec{PO} + \vec{OM} = (r - R \cos\theta) \vec{e}_x - R \sin\theta \vec{e}_y$

4.3 
$$\vec{dB}(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{\ell} \wedge \vec{PM}}{PM^3}$$

avec :  $d\vec{\ell} = -R d\theta \sin\theta \vec{e}_x + R d\theta \cos\theta \vec{e}_y$  et  $\vec{PM} = (r - R \cos\theta) \vec{e}_x - R \sin\theta \vec{e}_y$

$$d\vec{\ell} \wedge \vec{PM} = (-R d\theta \sin\theta \vec{e}_x + R d\theta \cos\theta \vec{e}_y) \wedge ((r - R \cos\theta) \vec{e}_x - R \sin\theta \vec{e}_y)$$

$$= (R^2 d\theta \sin^2\theta \vec{e}_z + R^2 d\theta \cos^2\theta \vec{e}_z - Rr d\theta \cos\theta \vec{e}_z) = R d\theta (R - r \cos\theta) \vec{e}_z$$

$$PM = (R^2 + r^2 - 2rR \cos\theta)^{1/2}$$

d'où 
$$\vec{dB}(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} R d\theta \frac{R - r \cos\theta}{(R^2 + r^2 - 2rR \cos\theta)^{3/2}} \vec{e}_z$$

4.4 Avec  $r \gg R$ , on peut recalculer une expression approchée de  $\vec{dB}(M)$ .

$$(R^2 + r^2 - 2rR \cos\theta)^{-3/2} \approx (r^2 - 2rR \cos\theta)^{-3/2} = r^{-3} \left[ 1 - \frac{2R \cos\theta}{r} \right]^{-3/2} \approx r^{-3} \left[ 1 + \frac{3R \cos\theta}{r} \right]$$

d'où 
$$\vec{dB}(M) = \frac{\mu_0 I R}{4\pi r^3} \left[ R + \frac{3R^2 \cos\theta}{r} - r \cos\theta - 3R \cos^2\theta \right] \vec{e}_z$$

avec  $\cos^2\theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}$ , il vient : 
$$\vec{dB}(M) = \frac{\mu_0 I R}{4\pi r^3} \left[ -\frac{R}{2} + \left( \frac{3R^2}{r} - r \right) \cos\theta - \frac{3R}{2} \cos 2\theta \right] \vec{e}_z$$

4.5 Pour déterminer l'expression du champ d'induction magnétique créé en  $M$  par la spire entière, on intègre sur le contour :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I R}{4\pi r^3} \int_0^{2\pi} \left[ -\frac{R}{2} + \left( \frac{3R^2}{r} - r \right) \cos\theta - \frac{3R}{2} \cos 2\theta \right] d\theta \vec{e}_z$$

$$\vec{B}(M) = -\frac{\mu_0 I R}{4\pi r^3} \pi R \vec{e}_z = -\frac{\mu_0 I R^2}{4 r^3} \vec{e}_z$$