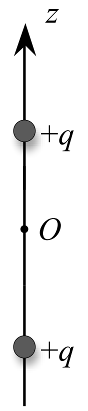
LP 203 Année 2012 – 2013

Contrôle continu – Épreuve du 22 novembre 2012

Correction

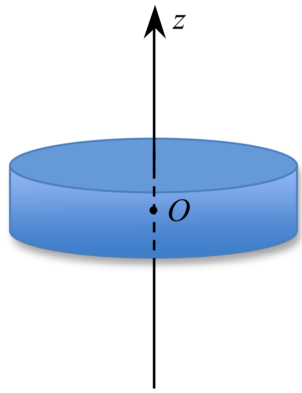
Question de cours

(a)



2 charges identiques

(b)



disque épais chargé négativement

Les deux distributions de charges présentent les mêmes propriétés de symétrie.

Il convient d'utiliser les coordonnées cylindriques

Les deux distributions de charges sont invariantes par :

(1) toute rotation selon l'axe Oz

$\rightarrow$ le champ $\vec{E}$ ne dépend pas de φ $\Rightarrow$ $\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}(\rho, z)$

(2) symétrie selon tout plan passant par l'axe Oz

$\rightarrow$ en tout point, le champ $\vec{E}$ est selon les vecteurs $\vec{e_\rho}$ et $\vec{e_z}$,

$\Rightarrow$ $\vec{E}(\vec{r}) = E_\rho(\rho, z)\,\vec{e_\rho} + E_z(\rho, z)\,\vec{e_z}$

(3) symétrie selon le plan perpendiculaire à l'axe Oz et passant par O.

$\rightarrow$ en tout point du plan perpendiculaire à Oz et contenant O, le champ $\vec{E}$ est selon $\vec{e_\rho}$,

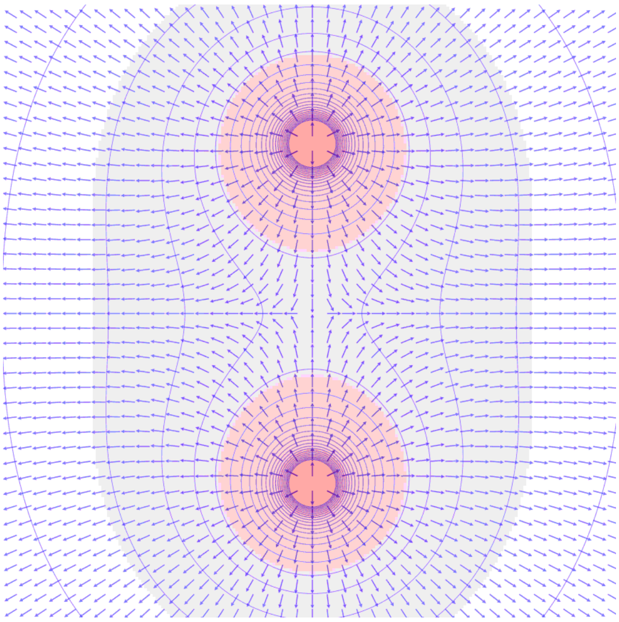
(2) en tout point de l'axe Oz, le champ $\vec{E}$ est selon $\vec{e_z}$ $\Rightarrow$ $\vec{E}(0,0,z) = \vec{E}(z)\,\vec{e_z}$

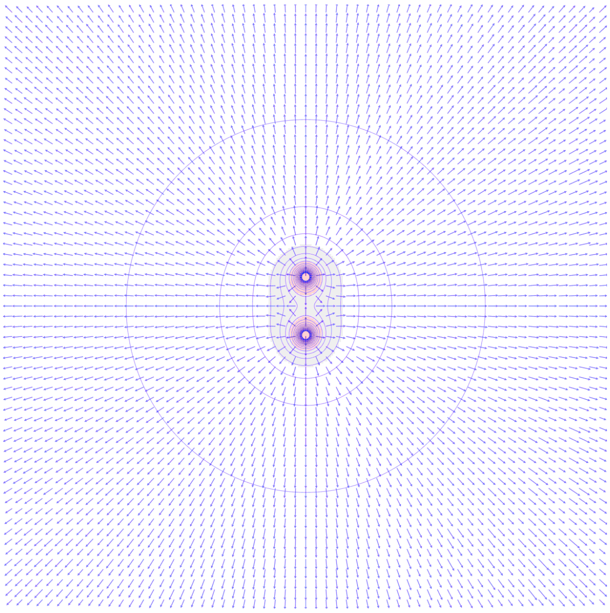
(3) $\vec{E}(-z)\,\vec{e_z} = -\,\vec{E}(z)\,\vec{e_z}$

(3) & (4) : $\rightarrow$ en O, $\vec{E} = \vec{0}$

Les figures suivantes représentent les champs et potentiels dans les plans ($\vec{e_\rho}$, $\vec{e_z}$). Les flèches représentent les lignes de champ électrostatique et les courbes en bleu représentent les équipotentielles

Pour la distribution (a) :

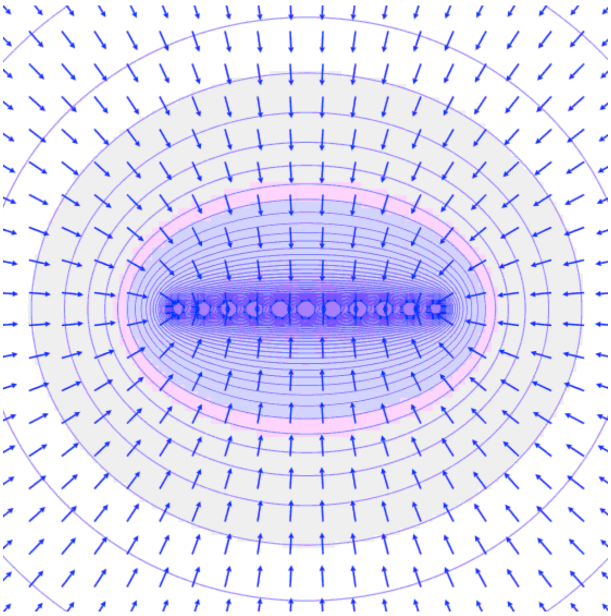


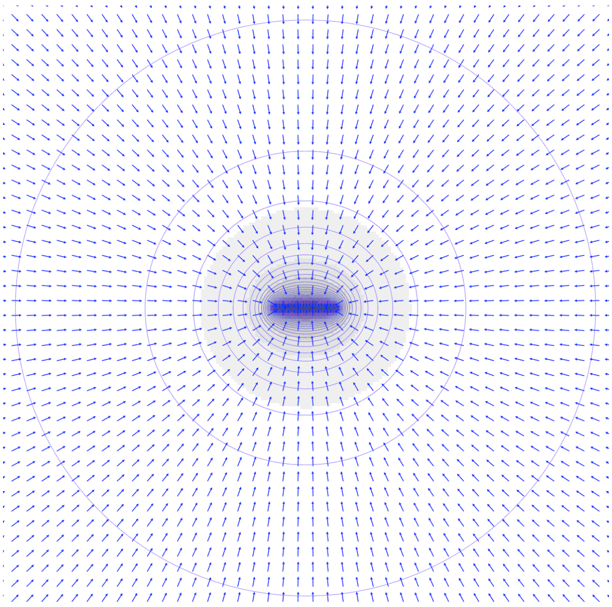


à grande distance, tout se passe comme si on avait une charge $+2q$ en O.

Pour la distribution (b) :

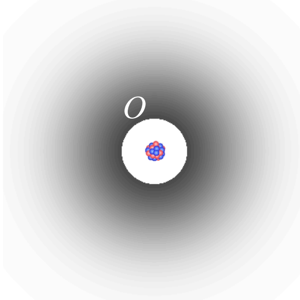
Le disque est vu "sur la tranche" depuis une direction perpendiculaire à l'axe Oz





à grande distance, tout se passe comme si on avait une charge $+Q$ en O.

Problème

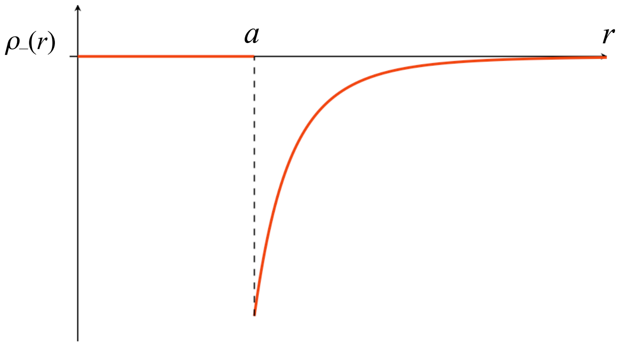


1.1 • La charge Q_+ représente le noyau.

• Z représente le numéro atomique et correspond au nombre de protons présents dans le noyau ainsi que le nombre d'électrons dans l'état neutre de l'atome. Ce nombre définit en quelque sorte les propriétés chimiques de l'élément considéré.

• La distribution de charge négative $\rho_-(r)$ représente le "nuage" électronique. Il s'agit évidemment d'un modèle simpliste analogue à celui étudié dans l'exercice 4 du TD 2.

• Allure de $\rho_-(r)$



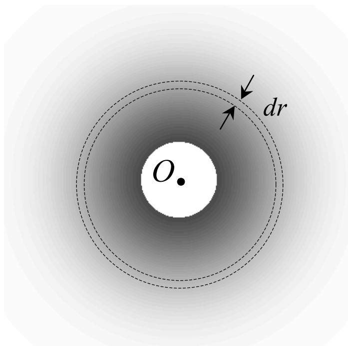
• a représente la distance minimale e^- – noyau. L'ordre de grandeur de a correspond au rayon atomique soit de l'ordre de 10^{-10} m. Cette notion de rayon atomique est toutefois susceptible de dépendre du modèle considéré (voir http://fr.wikipedia.org/wiki/Rayon_atomique)

• Q_+ est assimilable à une charge ponctuelle car la taille du noyau est d'environ 10^{-15} m soit beaucoup plus petit que a.

1.2 Invariances de la distribution de charge $\rho_-(r)$

• $\rho_-(r)$ présente manifestement les propriétés de symétrie sphérique :

- invariance par rotation autour de tout axe passant par O
- invariance par symétrie selon tout plan passant par O.



1.3 $dq(r) = \rho_-(r)\, d\tau$

• pour $r < a$: $dq(r) = 0$

• pour $r > a$: $dq(r) = \frac{A}{r^5} 4\pi r^2\, dr = \frac{4\pi A}{r^3}\, dr$

1.4 $$Q_-(r) = \int_a^r \frac{4\pi A}{r'^3}\, dr' = 4\pi A \left[\frac{-1}{2r'^2}\right]_a^r = 2\pi A\left[\frac{1}{a^2} - \frac{1}{r^2}\right]$$

d'où la charge électronique négative associée à cet atome, obtenue en intégrant l'expression précédente de $a \rightarrow \infty$:

$$Q_- = Q_-(\infty) = \frac{2\pi A}{a^2}$$

1.5 La constante A est obtenue en prenant en compte la neutralité de l'atome :

$Q_- + Q_+ = 0$

$Ze + \frac{2\pi A}{a^2} = 0$ d'où $A = -\frac{Zea^2}{2\pi}$ $Q_-(r) = -Ze\left[1 - \frac{a^2}{r^2}\right]$

1.6 Les invariances de la distribution de charge totale de l'atome, c'est-à-dire de l'ensemble formé par $Q_+ + \rho_-(r)$, sont celles recensées pour la question 1.2. Les conséquences pour le champ électrique $\vec{E}$ créé par l'atome sont les suivantes :

- invariance par rotation autour de tout axe passant par O

  $\rightarrow \vec{E}$ ne dépend ni de φ ni de θ.

- invariance par symétrie selon tout plan passant par O. Or $\vec{E}$ est contenu dans les plans de symétrie et toute droite passant par O correspond à l'intersection de deux plans de symétrie. $\rightarrow \vec{E}$ est selon $\vec{e}_r$ (radial)

1.7 Théorème de Gauss sous forme intégrale : $\displaystyle\oiint \vec{E}\cdot\vec{dS} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$

Expression locale du théorème de Gauss : $\mathrm{div}\vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$

1.8 Pour $r > a$: $Q(r) = Q_+ + Q_-(r) = Ze - Ze\left[1 - \dfrac{a^2}{r^2}\right] = \dfrac{Zea^2}{r^2}$

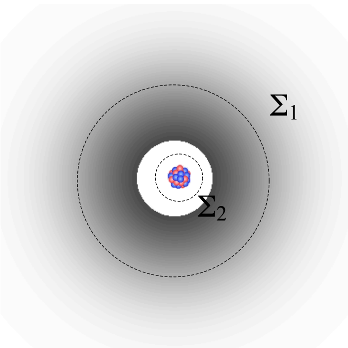
1.9 Compte tenu de la symétrie du problème, on détermine $\vec{E}(\vec{r})$ en appliquant le théorème de Gauss sur une surface de Gauss sphérique centrée sur O. Dans ce cas, en chaque point de la surface considérée :

- $\vec{E}(\vec{r})$ est parallèle à la normale à cette surface ,
- la norme de $\vec{E}(\vec{r})$ est constante : $|\vec{E}(\vec{r})| = E(r)$

d'où :

$$\oiint_\Sigma \vec{E}\cdot\vec{dS} = \oiint_\Sigma E\cdot dS = E(r)\oiint_\Sigma dS = E(r)\,4\pi r^2 = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

Il convient toutefois de distinguer deux cas de figure :



• $r > a$, la surface de Gauss est Σ_1 : dans ce cas Q_{int} : $Q(r)$
d'où :

$$E_{ext}(r)\,4\pi r^2 = \frac{Q(r)}{\varepsilon_0} = \frac{Zea^2}{\varepsilon_0\, r^2} \quad\Rightarrow\quad \vec{E}_{ext}(r) = \frac{Zea^2}{4\pi\varepsilon_0\, r^4}\,\vec{e}_r$$

• $r < a$, la surface de Gauss est Σ_2 : dans ce cas $Q_{\mathrm{int}} = Q_+ = Ze$
d'où :

$$E_{int}(r)\,4\pi r^2 = \frac{Ze}{\varepsilon_0} \quad\Rightarrow\quad \vec{E}_{int}(r) = \frac{Ze}{4\pi\varepsilon_0\, r^2}\,\vec{e}_r$$

1.10 $\vec{E} = -\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,V$

1.11 Deux méthodes possibles :

• en intégrant l'expression $\vec{E} = -\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,V$:

$V(r) = -\displaystyle\int E(r)\,dr$ puisque $\vec{E}$ n'a qu'une composante : selon $\vec{e}_r$

• en calculant la circulation de $\vec{E}$:

On distinguera néanmoins deux régions :

• $r > a$:

$V_{r>a}(r) - V_{r>a}(\infty) = V_{r>a}(r)$ puisque $V(\infty) = 0$

$$V_{r>a}(r) = \int_{\infty}^{r} \vec{E}_{ext} \cdot d\vec{\ell} = \int_{\infty}^{r} E_{ext}(r')\, dr'$$

$$V_{r>a}(r) = \int_{\infty}^{r} \frac{Zea^2}{4\pi\varepsilon_0\, r'^4}\, dr' = \frac{Zea^2}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{3r'^3}\right]_{\infty}^{r} = \frac{Zea^2}{12\,\pi\varepsilon_0\, r^3}$$ homogène à un potentiel

• $r < a$:

On peut calculer la circulation de $\vec{E}$ ou plus simplement considérer que le potentiel recherché est celui créé par une charge ponctuelle $Q_+ = Ze$ localisée en O.

Dans ce cas :

$$V_{r<a}(r) = \frac{Ze}{4\,\pi\varepsilon_0\, r} + K$$

1.12 La continuité du potentiel impose $V_{r>a} = V_{r>a}$

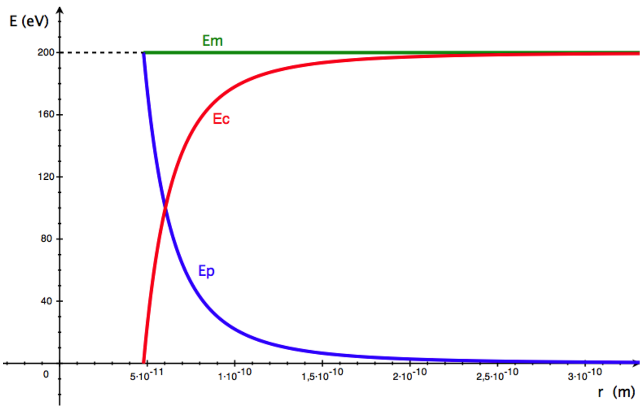
1.13 $V_{r<a}(a) = V_{r>a}(a) = \dfrac{Ze}{12\,\pi\varepsilon_0\, a} \quad \Rightarrow \quad K = -\dfrac{Ze}{6\,\pi\varepsilon_0\, a}$

D'où finalement l'expression de $V(r)$: $\begin{cases} \dfrac{Ze}{4\,\pi\varepsilon_0\, r} - \dfrac{Ze}{6\,\pi\varepsilon_0\, a} & \text{pour } r < a \\ \dfrac{Zea^2}{12\,\pi\varepsilon_0\, r^3} & \text{pour } r > a \end{cases}$

1.14 L'énergie potentielle de la particule α, dans le potentiel créé par l'atome situé en O et à la distance r de celui-ci est :

$$E_P(r) = q_\alpha \cdot V(r) = 2e \cdot \frac{Zea^2}{12\,\pi\varepsilon_0\, r^3}$$

1.15



1.16 $E_M(\infty) = E_P(\infty) + E_C(\infty) = E_C(\infty)$ puisque $E_P(\infty) = 0$

$E_M(a) = E_P(a) + E_C(a) = E_P(a)$ puisque $E_C(a) = 0$ les particules sont à l'arrêt.

La conservation de l'énergie mécanique implique : $E_M(\infty) = E_M(a)$ c.a.d. $E_C(\infty) = E_P(a)$ soit :

$$2e \cdot \frac{Ze}{12\,\pi\varepsilon_0\, a} = E_C(\infty) \qquad \text{d'où : } a = \frac{Ze^2}{6\,\pi\varepsilon_0\, E_C(\infty)}$$

1.17 $a = \dfrac{Ze^2}{6\,\pi\varepsilon_0\, E_C(\infty)} = \dfrac{10 \cdot (1.6\ 10^{-19})^2}{6\,\pi\varepsilon_0\,(200 \cdot 1.6\ 10^{-19})} = 0.479\ 10^{-10}$ m soit ≈ 0.5 Å

La valeur obtenue est proche de celle estimée pour le rayon d'un atome.