

Question de cours

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad \operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \overrightarrow{\operatorname{rot}}(\vec{E}) = \vec{0} - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \overrightarrow{\operatorname{rot}}(\vec{B}) = \mu_0 \vec{j} \left(+ \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

$$\oiint_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad \oiint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} \quad \oint_c \vec{E}_m \cdot d\vec{\ell} = e = -\frac{d\phi}{dt} \quad \oint_c \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \sum I_{\text{enlacés}}$$

Partie 1 : Electrostatique

1.1 • Par définition du conducteur à l'équilibre, le champ électrostatique est nul à l'intérieur de celui-ci.

• Comme le champ \vec{E} à l'intérieur est nul, le potentiel est constant.

1.2 La distribution de charge est invariante :

• par translation selon \vec{e}_x et \vec{e}_y (en coordonnées cartésiennes)

• par translation selon \vec{e}_r (en coordonnées cylindriques)

→ \vec{E} et V ne dépendent pas de r .

• par toute rotation selon tout axe perpendiculaire au plan chargé

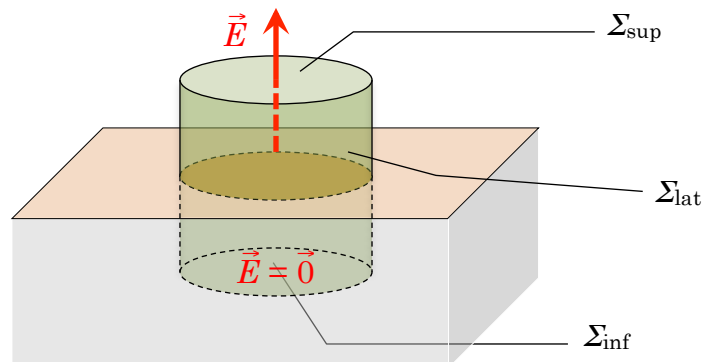
→ \vec{E} et V ne dépendent pas de φ .

• par symétrie selon tout plan perpendiculaire au plan chargé

→ En tout point M tel que $z_M > 0$, \vec{E} appartient à tous les plans de symétrie passant par M . → \vec{E} est dirigé selon \vec{e}_z

• par symétrie selon le plan contenant les charges

1.3 Compte tenu de la symétrie cylindrique du problème, on considère une surface de Gauss Σ consistant en un cylindre de rayon R dont une partie est dans le conducteur et l'autre à l'extérieur de celui-ci.



$$\oiint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

$$\oiint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iint_{\Sigma_{\text{inf}}} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \iint_{\Sigma_{\text{lat}}} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \iint_{\Sigma_{\text{sup}}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iint_{\Sigma_{\text{sup}}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = E(z) \pi R^2$$

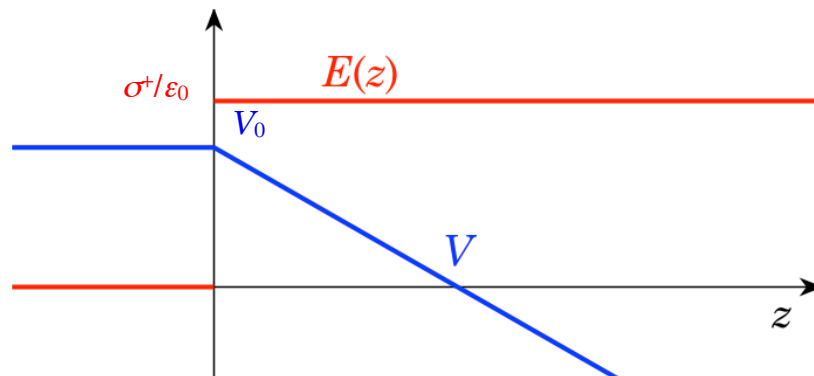
$$\frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} = \frac{\sigma^+ \pi R^2}{\epsilon_0} \quad \Rightarrow E(z) = \frac{\sigma^+}{\epsilon_0} \quad \Rightarrow \vec{E}(\vec{r}) = \frac{\sigma^+}{\epsilon_0} \vec{e}_z \quad \text{pour } z > 0$$

Remarque : on pouvait aussi considérer un parallélépipède rectangle

1.4 La distribution de charge est infinie ; il faut déterminer V en intégrant l'expression du champ électrostatique :

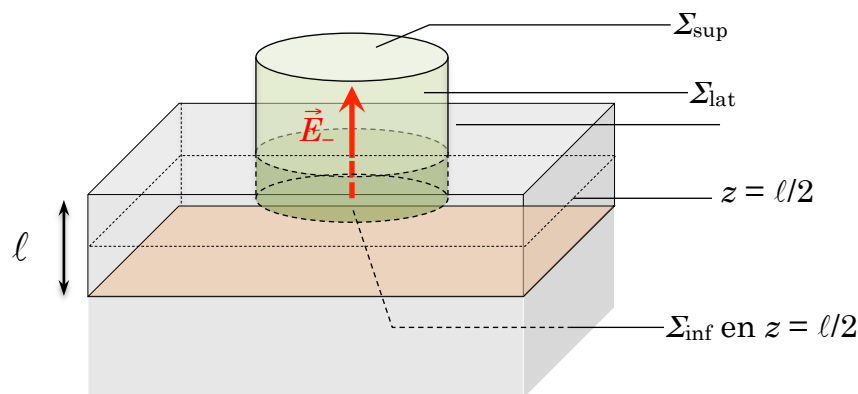
$$V = - \int \vec{E} \cdot d\vec{r} = - \int E(z) dz = - \frac{\sigma^+ z}{\epsilon_0} + V_0 \quad \text{puisque } V(0) = V_0.$$

1.5



1.6 L'ajout de la couche chargée négativement n'a pas changé les propriétés de symétries et d'invariance du problème. Le champ \vec{E}_{tot} créé par l'ensemble des deux distributions de charges (surfactive σ^+ et volumique ρ^-) est indépendant de ρ et φ et est également dirigé vers \vec{e}_z

1.7 En vertu du principe de superposition, on va chercher à calculer le champ \vec{E}_- créé par la distribution de charges volumique ρ^- que l'on ajoutera ensuite à l'expression du champ \vec{E}_+ créé par la distribution surfactive σ^+ calculée précédemment. Compte tenu de la symétrie cylindrique du problème, on considère une surface de Gauss Σ consistant en un cylindre de hauteur $(z - \ell/2)$, de rayon R et dont la base est en $z = \ell/2$. Notons que, par symétrie, le champ \vec{E}_- créé par la couche chargée est nul dans ce plan d'équation $z = \ell/2$.



L'application du théorème de Gauss nous donne d'une part :

$$\oiint_{\Sigma} \vec{E}_- \cdot d\vec{S} = \iint_{\Sigma_{\text{inf}}} \vec{E}_- \cdot d\vec{S} + \iint_{\Sigma_{\text{lat}}} \vec{E}_- \cdot d\vec{S} + \iint_{\Sigma_{\text{sup}}} \vec{E}_- \cdot d\vec{S} = \iint_{\Sigma_{\text{sup}}} \vec{E}_- \cdot d\vec{S} = \vec{E}_-(z) \pi R^2$$

et d'autre part :

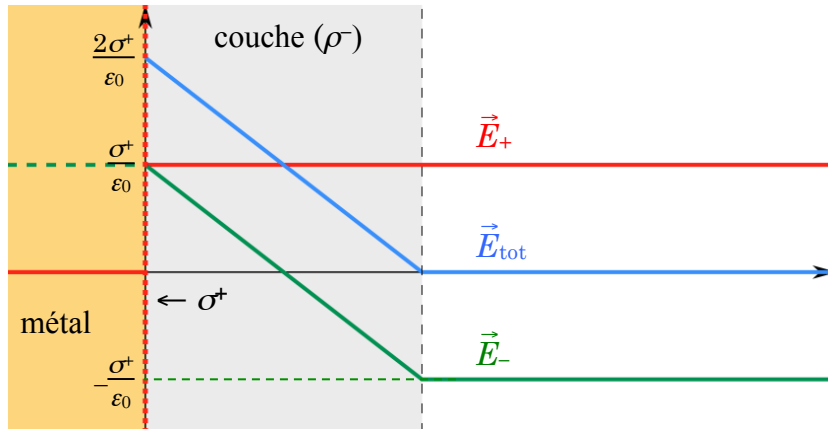
$$\frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} = \iiint \frac{\rho^- d\tau}{\epsilon_0} = \int_{\ell/2}^z \frac{\rho^- \pi R^2 dz}{\epsilon_0} = \begin{cases} \frac{\rho^- \pi R^2}{\epsilon_0} (z - \ell/2) & \text{pour } z < \ell \\ \frac{\rho^- \pi R^2}{\epsilon_0} \ell/2 & \text{pour } z \geq \ell \end{cases}$$

d'où l'expression du champ électrique total :

$$\vec{E}_{\text{tot}}(z) = \vec{E}_+ + \vec{E}_- = \begin{cases} \frac{1}{\epsilon_0} \left[\sigma^+ + \rho^- \left(z - \frac{\ell}{2} \right) \right] \vec{e}_z & \text{pour } z < \ell \\ \frac{1}{\epsilon_0} \left[\sigma^+ + \frac{\rho^- \ell}{2} \right] \vec{e}_z & \text{pour } z \geq \ell \end{cases}$$

1.8 $\vec{E}_{\text{tot}}(z) = \frac{1}{\epsilon_0} \left[\sigma^+ + \frac{\rho^- \ell}{2} \right] \vec{e}_z = \vec{0}$ pour $\sigma^+ = -\frac{\rho^- \ell}{2}$

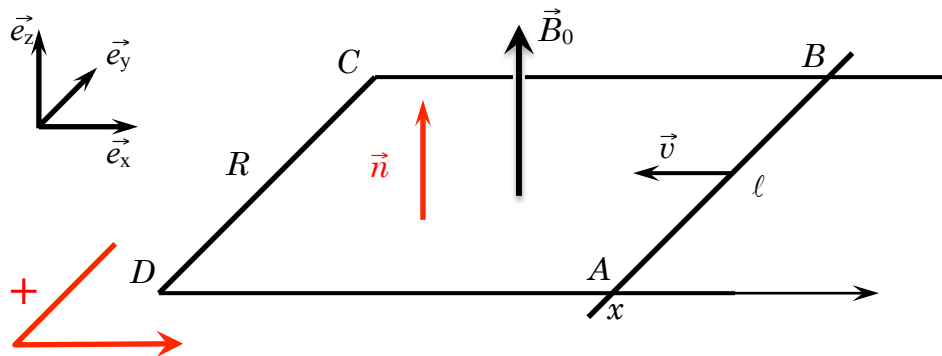
1.9



La couche d'épaisseur ℓ permet donc d'obtenir un écranage du champ électrostatique créée par la densité superficielle de charges σ^+ .

Partie 2 : Magnétostatique

2.1 On oriente le circuit de manière arbitraire en choisissant un sens de parcours tel que la normale \vec{n} associée est dans le même sens que \vec{B}_0 .



Dans ce cas, il vient : $\phi = \iint_S \vec{B}_0 \cdot d\vec{S} = B_0 x \ell$

2.2 Loi de Lenz : sous l'effet de la variation de flux, le circuit conducteur "réagit" : le phénomène induit est tel qu'il s'oppose aux causes qui lui ont donné naissance, c.a.d. la diminution du flux. Il apparaît donc :

- une f.e.m. telle que le courant induit crée un champ qui s'oppose à la diminution du flux.
 - \vec{B}_{ind} dans le même sens que \vec{B}_0 → i_{ind} dans le sens positif
- une force qui s'oppose au déplacement de la barre

Loi de Faraday :

La surface du contour correspondant au circuit diminue : $d\phi < 0$

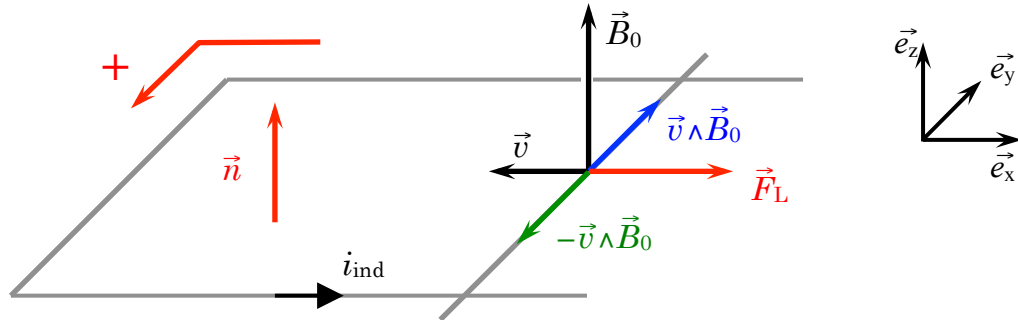
Il apparaît donc une force électromotrice : $e = -\frac{d\phi}{dt} > 0$

Comme le circuit est conducteur, un courant induit $i_{\text{ind}} = e/R > 0$ apparaît.

Force de Lorentz :

Consécutivement au déplacement de la barre, les porteurs de charges (e^-) subissent la composante magnétique de la force de Lorentz :

$$\vec{F}_M = -e \vec{v} \wedge \vec{B}_0 \quad \text{exprimée dans le repère associé au cadre rigide}$$



La force de Lorentz $\vec{F}_M = -e \vec{v} \wedge \vec{B}_0$ s'exerçant sur les électrons est selon $-\vec{e}_y$.

Le courant induit circule donc dans le sens positif

2.3 Dans le repère associé à la barre, la force à laquelle sont soumis les électrons s'exprime sous la forme :

$$\vec{F} = -e \vec{E}_m \quad \text{avec} \quad \vec{E}_m = \vec{v} \wedge \vec{B}_0$$

$$\vec{E}_m = -v \vec{e}_x \wedge B_0 \vec{e}_z = +v B_0 \vec{e}_y$$

2.4 Loi de Faraday :

$$e = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{d}{dt}(B_0 x \ell) = -B_0 \ell \frac{dx}{dt} = -B_0 \ell (-v) = +B_0 \ell v$$

Circulation de \vec{E}_m sur le trajet $A \rightarrow B$:

$$e = \int_A^B \vec{E}_m \cdot d\vec{\ell} = \int_A^B v B_0 \vec{e}_y \cdot d\ell \vec{e}_y = B_0 \ell v$$

2.5 $i_{\text{ind}} = e/R = \frac{B_0 \ell v}{R}$

2.6 La force de Laplace \vec{F}_L s'oppose au déplacement, elle est donc dirigée selon \vec{e}_x .

2.7 $\vec{F}_L = \int_A^B i_{\text{ind}} d\vec{\ell} \wedge \vec{B}_0 = \int_A^B i_{\text{ind}} d\ell \vec{e}_y \wedge B_0 \vec{e}_z = +i_{\text{ind}} B_0 \ell \vec{e}_x = \frac{B_0^2 \ell^2 v}{R} \vec{e}_x$

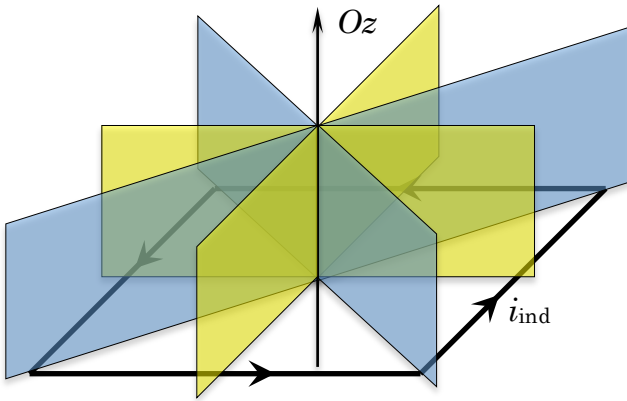
2.8 La distribution de courant présente les propriétés de symétrie suivantes :

- les plans perpendiculaires à \vec{e}_x , \vec{e}_y , $(\vec{e}_x + \vec{e}_y)$ et $(\vec{e}_x - \vec{e}_y)$ passant par l'axe Oz sont des plans d'antisymétrie. Ces plans sont concourants en Oz .
- le plan $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y)$ est plan de symétrie

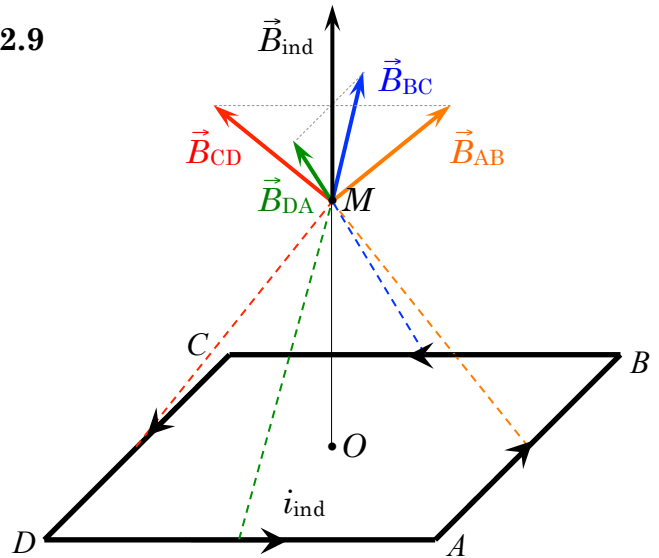
Sur l'axe Oz , le champ magnétique induit \vec{B}_{ind} est selon \vec{e}_z .

2.8 (suite)

plans d'anti-symétrie de la distribution de courants



2.9



2.10 Les normes des champs créés par chaque portion du circuit sont égales par symétrie. Il suffit donc de calculer une seule contribution.

On note T, le milieu du segment [AB]. On utilise l'expression de l'énoncé :

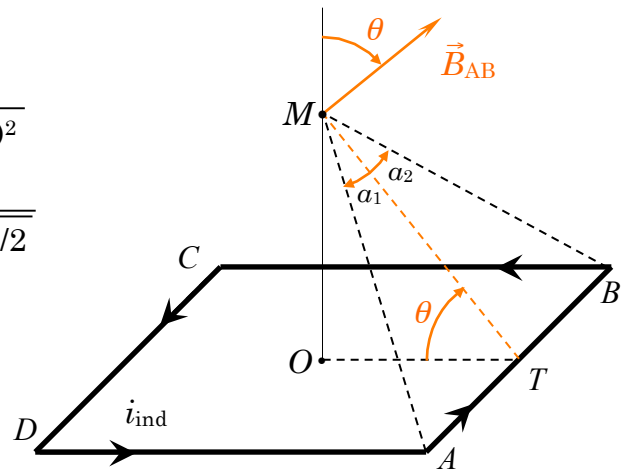
$$B_{DA} = \frac{\mu_0 i_{\text{ind}}}{4\pi r} (\sin\alpha_2 - \sin\alpha_1)$$

avec : $r = MT = \sqrt{MO^2 + OT^2} = \sqrt{z^2 + (\ell/2)^2}$

$$\sin\alpha_1 = \frac{TA}{MA} = -\frac{TA}{\sqrt{MT^2 + TA^2}} = -\frac{\ell/2}{\sqrt{z^2 + \ell^2/2}}$$

$$\sin\alpha_2 = \frac{TB}{MT} = +\frac{\ell/2}{\sqrt{z^2 + \ell^2/2}}$$

d'où $B_{AB} = \frac{\mu_0 i_{\text{ind}}}{4\pi\sqrt{z^2 + (\ell/2)^2}} \cdot \frac{\ell}{\sqrt{z^2 + \ell^2/2}}$

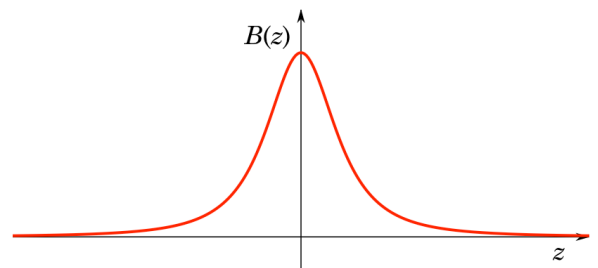


2.11 En vertu du théorème de superposition :

$$\vec{B}_{\text{ind}} = \vec{B}_{AB} + \vec{B}_{BC} + \vec{B}_{CD} + \vec{B}_{DA} = 4 |\vec{B}_{AB}| \cos\theta$$

avec $\cos\theta = \frac{OT}{MT} = \frac{OT}{\sqrt{MO^2 + OT^2}} = \frac{\ell/2}{\sqrt{z^2 + (\ell/2)^2}}$

d'où $\vec{B}_{\text{ind}}(z) = \frac{\mu_0 i_{\text{ind}}}{2\pi(z^2 + \ell^2/4)} \cdot \frac{\ell^2}{\sqrt{z^2 + \ell^2/2}}$



2.12 Le flux à travers le circuit augmente, il apparaît donc une f.e.m. e telle qu'elle s'oppose aux causes qui lui ont donné naissance. Il apparaît donc un courant induit négatif qui crée un champ \vec{B}_{ind} opposé à \vec{B}_0 . En parallèle, la barre est soumise à une force qui s'oppose à son déplacement. Sous l'effet de cette force de Laplace, la barre ralentit. L'augmentation du flux diminue, la force de Laplace aussi et la barre ralentit moins vite. On peut montrer que la vitesse de la barre diminue de manière exponentielle :

$$v(t) = v_0 e^{-t/\tau} \quad \text{avec } \tau = \frac{m R}{B_0^2 \ell^2} \quad \text{où } m \text{ est la masse de la barre.}$$