Examen – Épreuve du 16 janvier 2013

Durée : 2 heures

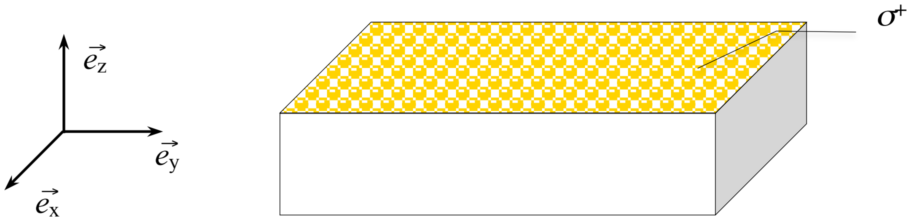
Question de cours

Compléter les expressions et donner leur expression intégrale

$\mathrm{div}\vec{B} = \ldots$ $\qquad$ $\mathrm{div}\vec{E} = \ldots$ $\qquad$ $\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{E}) = \ldots$ $\qquad$ $\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{B}) = \ldots$

Partie 1 : Electrostatique

On considère un conducteur métallique à l'équilibre occupant le demi-espace défini par $z \leq 0$. La surface du conducteur, plan infini xOy d'équation $z = 0$, porte une répartition surfacique σ^+ positive et uniforme.



1.1 Que vaut le champ électrique à l'intérieur du conducteur ?
Que peut-on dire du potentiel à l'intérieur du conducteur ?

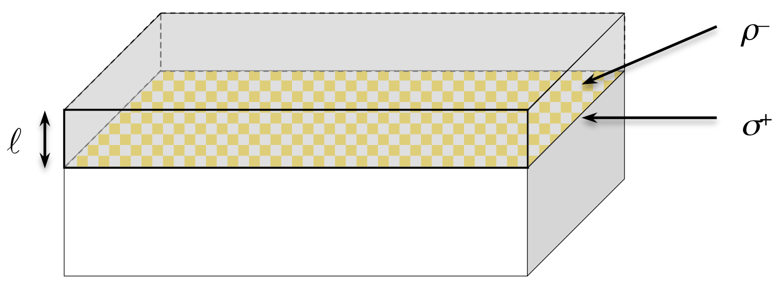
1.2 Analyser **<u>en détail</u>** les propriétés de symétrie de la distribution de charges.
En déduire la direction et le sens du champ électrostatique $\vec{E}$ créé par la distribution de charges en précisant les variables dont dépend $\vec{E}$.

1.3 Par application du théorème de Gauss, établir en fonction de σ^+ et ε_0 l'expression vectorielle du champ électrostatique $\vec{E}$ créé par la distribution de charges.

1.4 Déterminer l'expression du potentiel V créé par la distribution surfacique de charges. On choisira $V(z = 0) = V_0$ où V_0 est une constante positive.

1.5 Représenter sur un graphe les variations de $|\vec{E}|$ et de V pour tout $z \in]-\infty\,;+\infty[$

Le conducteur métallique précédemment considéré est maintenant recouvert par une couche infinie d'épaisseur ℓ de constante diélectrique ε_0 et contenant une densité de charges volumique homogène et négative ρ^-. L'ensemble ainsi constitué du conducteur, des distributions surfacique σ^+ et volumique ρ^- est à l'équilibre.



1.6 Préciser la direction du champ électrostatique $\vec{E}$ créé par l'ensemble des deux distributions de charges (surfacique σ^+ et volumique ρ^-).

1.7 Par application du théorème de Gauss, établir, en fonction des données de l'énoncé, l'expression vectorielle du champ électrostatique $\vec{E}_{tot}$ créé par l'ensemble des deux distributions de charges :

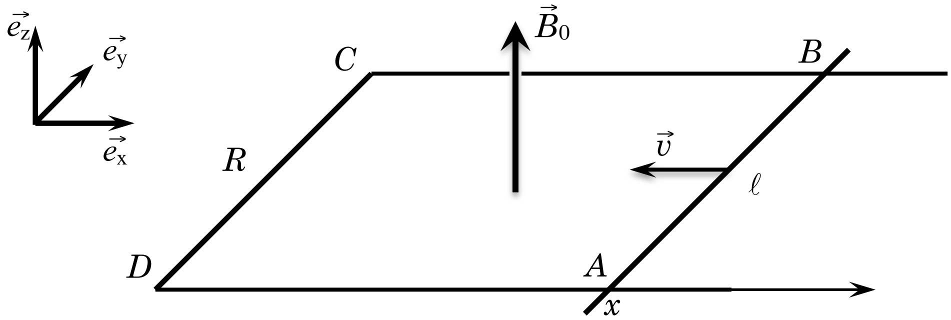
- en tout point M intérieur à la couche , tel que $0 < z_M < \ell$
- en tout point M extérieur au métal et à la couche, tel que $z_M > \ell$

1.8 Quelle condition doivent vérifier σ^+ et ρ^- pour que le champ électrostatique $\vec{E}_{tot}$ soit nul en tout point M extérieur au métal et à la couche, tel que $z_M > \ell$.

1.9 En supposant la condition précédente vérifiée, tracer l'allure de la courbe représentative de la fonction $E_{tot}(z)$ pour tout $z \in \,]-\infty\,;+\infty\,[$

Partie 2 : Magnétostatique

Deux rails métalliques parallèles et distants de ℓ, parfaitement conducteurs, sont reliés par une tige conductrice CD rectiligne de résistance R. Ces conducteurs constituent un ensemble rigide, indéformable et immobile.
Le circuit est fermé par une barre mobile parfaitement conductrice de masse m posée sur les rails (A et B sont les points de contact) et orthogonale à ceux-ci. La barre, dont la position est repérée par son abscisse $DA = x$, peut se déplacer parallèlement à elle-même sans frottements sur les rails. L'ensemble est plongé dans un champ d'induction magnétique uniforme et constant $\vec{B}_0 = B_0\,\vec{e}_z$ avec $B_0 > 0$ (voir dessin ci-dessous).



2.1 Après avoir orienté le circuit et précisé l'orientation de la normale à la surface définie par le cadre $ABCD$, exprimer en fonction des données de l'énoncé le flux ϕ du champ d'induction magnétique à travers le cadre $ABCD$.
Ne pas hésiter à refaire un dessin !

La barre mobile est animée d'un mouvement de translation rectiligne uniforme de vitesse $\vec{v} = -v\,\vec{e}_x$ avec v positif.

2.2 Montrer l'existence d'un courant induit i_{ind} dans le circuit en précisant son sens :

- en appliquant qualitativement la loi de Lenz
- en appliquant qualitativement la loi de Faraday
- en faisant intervenir la composante magnétique de la force de Lorentz (on précisera la direction et le sens de celle-ci).

2.3 Montrer alors que les porteurs de charges sont soumis dans la barre à l'action d'un champ électrique $\vec{E}_m$ (appelé champ électromoteur) dont on donnera l'expression vectorielle.

2.4 Calculer la force électromotrice e induite dans le circuit en fonction de v, B_0 et ℓ :

- en appliquant la loi de Faraday
- en calculant la circulation de $\vec{E}_m$ sur le trajet $A \to B$.

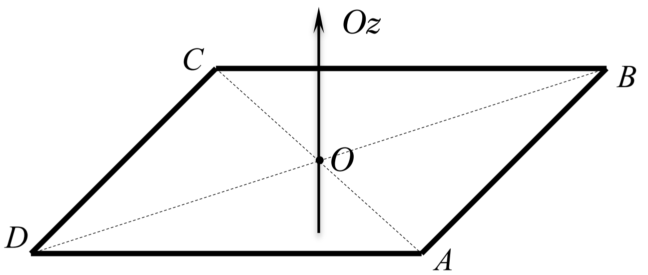
2.5 Exprimer l'intensité du courant i_{ind} en fonction de R, v, B_0 et ℓ.

2.6 La circulation du courant induit s'accompagne de forces dites de Laplace appliquées à toutes les portions du circuit. Préciser la direction et le sens de la résultante $\vec{F}$ des forces d'induction qui s'exercent sur la barre [AB].

2.7 Calculer l'intensité de la résultante $\vec{F}$ des forces d'induction qui s'exercent sur la barre [AB] en fonction de R, v, B_0 et ℓ (ou de i_{ind}, B_0 et ℓ si l'expression de i_{ind} n'est pas connue).

La barre étant en mouvement, on considère l'instant particulier où le quadrilatère formé par le circuit $ABCD$ est un carré de côté ℓ. On désire calculer le champ d'induction magnétique $\vec{B}_{ind}$ créé par le circuit en un point d'un axe Oz passant par le centre du carré $ABCD$ et perpendiculaire à celui-ci.

Cette partie de l'exercice peut être traitée indépendamment en choisissant arbitrairement un courant i_{ind}.



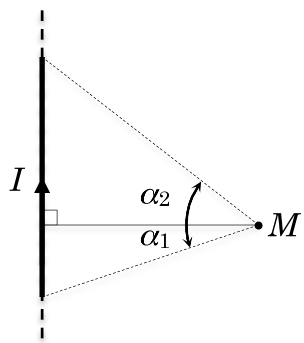
N.B. le sens du courant i_{ind} n'est pas précisé sur ce schéma.

2.8
- Analyser en détail les propriétés de symétrie et d'invariance de la distribution de courant dans le cadre $ABCD$.
- En déduire la direction et le sens du champ d'induction magnétique $\vec{B}_{ind}$ en tout point de l'axe Oz.

2.9 Sur un schéma clair et soigné, représenter distinctement les contributions dues à chaque portion de circuit au champ d'induction magnétique $\vec{B}_{ind}$

On rappelle que la norme du champ créé par une portion de circuit vue sous les angles α_1 et α_2 (voir dessin ci-contre) vaut :

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi r}\left[\sin\alpha_2 - \sin\alpha_1\right]$$



2.10 Calculer la norme des contributions dues à chaque portion de circuit au champ d'induction magnétique.

2.11 En déduire la norme de $\vec{B}_{ind}(z)$ en un point de l'axe Oz.

2.12 **Question hors barème**
À l'instant t, on lance et on lâche la barre avec une vitesse initiale $\vec{v}_0 = v_0\, \vec{e}_x$ avec v_0 positif. Décrire qualitativement l'ensemble des phénomènes observés (courant induit, mouvement de la barre, variation de la vitesse au cours du temps).