LP 203 Année 2013 – 2014

Contrôle continu – Épreuve du 7 novembre 2013

Durée : 2 heures

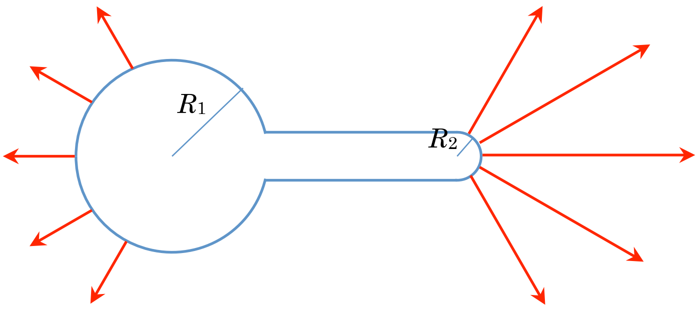
Question de cours /6

• Expliquer l'effet de pointe

Pour un conducteur à un potentiel V, la densité de charge peut varier d'un point à l'autre de la surface de celui-ci. En effet, la densité de charge dépend de la topographie de la surface et en particulier de sa courbure. À potentiel égal, la densité de charges d'un conducteur chargé est plus importante sur la surface ayant une courbure forte (petit rayon) que sur la surface ayant une courbure faible (grand rayon).

$$V = \sigma_1 R_1 = \sigma_2 R_2 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \frac{R_1}{R_2}$$

Comme le champ électrique au voisinage de la surface dépend de la densité locale de charge, ce champ sera d'autant plus fort que la courbure sera faible.



$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{\sigma_2/\varepsilon_0}{\sigma_1/\varepsilon_0} = \frac{R_1}{R_2}$$

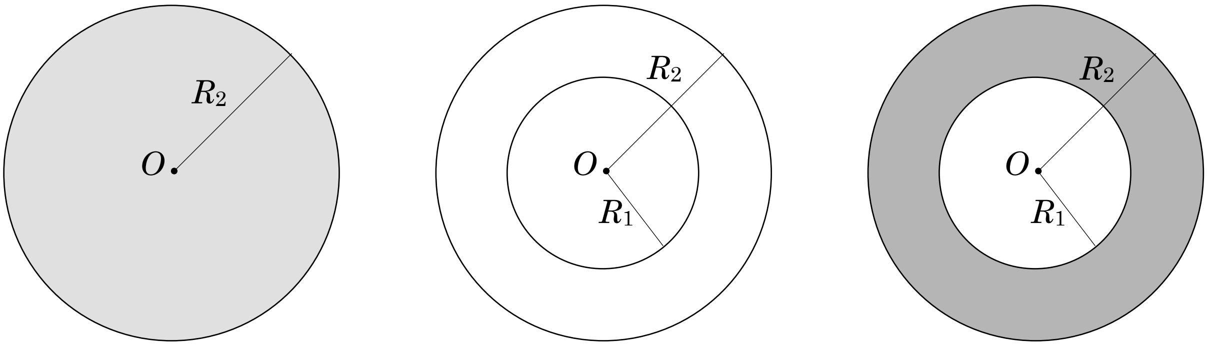
Exercice 1

On considère les trois distributions de charge suivantes considérées comme étant à l'équilibre électrostatique :

(a) une sphère conductrice pleine de centre O de rayon R_2 comportant la charge Q,

(b) deux sphères conductrices, creuses, concentriques, de centre O, de rayons respectifs R_1 et R_2 et comportant les charges respectives $Q_1 = Q_2 = Q/2$,

(c) le volume compris entre deux sphères de rayons respectifs R_1 et R_2 et rempli d'un matériau isolant et comportant la charge Q avec la densité de charge uniforme ρ_0.



(a) (b) (c)

On suppose le potentiel nul à l'infini.

/1 **1.1** Où sont réparties les charges sur le système (a) ? Pourquoi ?

Les charges sont localisées à la surface car comme elles sont mobiles (la sphère est conductrice) et qu'elles se repoussent, elles vont à la surface où elles sont réparties uniformément (cf. question suivante).

/2 **1.2** Pourquoi les charges sont elles réparties uniformément sur les sphères conductrices du système (b) ?

Les charges sont de même signe et elles se repoussent les unes les autres en vertu de la force de Coulomb. De plus, la courbure des sphères est constante, il n'y a donc pas d'effet de pointe, la densité de charge est donc uniforme.

/2

1.3 Calculer les densités de charge σ_1 et σ_2 des 2 sphères conductrices du système (b)

On part de l'expression générale exprimant la densité de charge

$$\sigma = \frac{dQ}{dS} = \frac{Q}{S} \qquad \text{puisqu'ici } \sigma \text{ est constant}$$

$$\sigma_1 = \frac{Q/2}{4\pi R_1^2} = \frac{Q}{8\pi R_1^2} \qquad \sigma_2 = \frac{Q/2}{4\pi R_2^2} = \frac{Q}{8\pi R_2^2}$$

1.4 Pour le système (c), calculer la densité de charge ρ_0 en fonction de Q.

Puisque la densité de charge ρ_0 est constante :

$$\rho_0 = \frac{dQ}{d\tau} = \frac{Q}{\mathcal{V}} \quad \text{où } \mathcal{V} \text{ est le volume compris entre les deux sphères.}$$

avec $\mathcal{V} = 4/3\pi R_2^3 - 4/3\pi R_1^3 = 4/3\pi\,(R_2^3 - R_1^3)$

d'où $\rho_0 = \dfrac{3Q}{4\pi\,(R_2^3 - R_1^3)}$

1.5 Préciser les propriétés d'invariance des distributions de charge considérées.
En déduire les variables dont dépendent le potentiel et le champ électrique créé par celles-ci dans le système de coordonnées le plus approprié.
Pour le champ électrique, préciser ses composantes vectorielles.

Les distributions de charge présentent manifestement les propriétés de symétrie sphérique, ils convient d'utiliser les coordonnées sphériques. Pour les 3 systèmes considérés, les distributions sont invariantes par :

- toute rotation autour du point O. $\rightarrow$ V et $\vec{E}$ ne dépendent pas de φ ni de θ.
- symétrie selon tout plan passant par le point O. $\rightarrow$ $\vec{E}$ est selon $\vec{e}_r$.

1.6 Rappeler le théorème de Gauss

$$\oint\!\!\oint_{\Sigma} \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

UPMC SORBONNE UNIVERSITÉS

1.7 Calculer le champ et le potentiel en tout point de l'espace pour les 3 systèmes de distribution de charge (a), (b) et (c).

Pour les trois systèmes, pour $r \geq R_2$, le champ et le potentiel sont égaux à ceux créés par une charge ponctuelle Q placée en O :

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\, r^2}\,\vec{e}_r \qquad\qquad V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\, r} \quad \text{puisque } V(\infty) = 0$$

Pour le **premier système (a)**, pour r < R_2, le champ est nul puisqu'il s'agit d'un conducteur à l'équilibre électrostatique (on aurait pu aussi appliquer le théorème de Gauss en considérant une surface de Gauss sphérique de centre O et de rayon $r \leq R_2$).

Le potentiel est donc constant et vaut $V_{\text{int}} = V_{\text{surf}} = V(R_2) = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0\, R_2}$

En résumé, pour le système (a)

pour r $\leq R_2$:	pour r $\geq R_2$:
$E = 0$	$E = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0\, r^2}$
$V = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0\, R_2}$	$V = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0\, r}$

Pour le **deuxième système (b)**, le plus simple est de considérer les contributions individuelles de chaque sphère et de les additionner en vertu du principe de superposition. Ainsi :

- pour la sphère chargée de rayon R_1 :

$$E^1_{r<R_1} = 0 \qquad\qquad V^1_{r<R_1} = \frac{Q/2}{4\pi\varepsilon_0\, R_1} = \frac{Q}{8\pi\varepsilon_0\, R_1}$$

$$E^1_{r>R_1} = \frac{Q/2}{4\pi\varepsilon_0\, r^2} = \frac{Q}{8\pi\varepsilon_0\, r^2} \qquad\qquad V^1_{r>R_1} = \frac{Q}{8\pi\varepsilon_0\, r}$$

- pour la sphère de rayon R_2 :

$$E^2_{r<R_2} = 0 \qquad\qquad V^2_{r<R_2} = \frac{Q/2}{4\pi\varepsilon_0\, R_2} = \frac{Q}{8\pi\varepsilon_0\, R_2}$$

$$E^2_{r>R_2} = \frac{Q/2}{4\pi\varepsilon_0\, r^2} = \frac{Q}{8\pi\varepsilon_0\, r^2} \qquad\qquad V^2_{r>R_2} = \frac{Q}{8\pi\varepsilon_0\, r}$$

En résumé, pour l'ensemble des deux sphères du système (b) :

pour r < R_1 :	pour R_1 < r < R_2 :	pour r > R_2 :
$E = 0$	$E = \dfrac{Q}{8\pi\varepsilon_0\, r^2}$	$E = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0\, r^2}$
$V = \dfrac{Q}{8\pi\varepsilon_0\, R_1} + \dfrac{Q}{8\pi\varepsilon_0\, R_2}$	$V = \dfrac{Q}{8\pi\varepsilon_0\, r} + \dfrac{Q}{8\pi\varepsilon_0\, R_2}$	$V = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0\, r}$

Pour le **troisième système (c)**, puisqu'il n'y pas de charge dans la cavité, on en déduit que pour $r < R_1$, $E = 0$ et $V = C^{te}$ *(qui sera déterminée plus tard …)*

Pour $R_1 <$ r $< R_2$, il faut utiliser le théorème de Gauss en considérant une sphère de rayon $R_1 <$ r $< R_2$. Dans ce cas :

$$\oiint_{\Sigma} \vec{E} \cdot \vec{dS} = \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint \rho_0 \, d\tau \qquad\qquad 4\pi r^2 \, E(r) = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_{R_1}^{r} \rho_0 \, 4\pi r'^2 \, dr'$$

d'où, finalement :

$$E(r) = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0 \, r^2} \left[\frac{r'^3}{3}\right]_{R_1}^{r} = \frac{\rho_0}{3\,\varepsilon_0} \left[r - \frac{R_1^3}{r^2}\right] = \frac{Q\left(r^3 - R_1^3\right)}{4\pi\varepsilon_0 r^2 \, (R_2^3 - R_1^3)}$$

Le potentiel pour $R_1 <$ r $< R_2$ se déduit de l'expression du champ par la relation :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} \, V \qquad\qquad \text{d'où : } V = -\int E(r) \, dr$$

$$V = -\frac{\rho_0}{3\,\varepsilon_0} \left[\frac{r^2}{2} + \frac{R_1^3}{r}\right] + K$$

On détermine la constante K à partir de la continuité du potentiel en $r = R_2$:

$$-\frac{\rho_0}{3\,\varepsilon_0} \left[\frac{R_2^2}{2} + \frac{R_1^3}{R_2}\right] + K = \frac{\rho_0}{3\,\varepsilon_0} \frac{R_2^3 - R_1^3}{R_2} \qquad\qquad \Rightarrow K = \frac{\rho_0}{3\,\varepsilon_0} \frac{3R_2^2}{2}$$

d'où finalement :

$$V(r) = \frac{\rho_0}{3\,\varepsilon_0} \left[-\frac{r^2}{2} - \frac{R_1^3}{r} + \frac{3R_2^2}{2}\right]$$
$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 \, (R_2^3 - R_1^3)} \left[-\frac{r^2}{2} - \frac{R_1^3}{r} + \frac{3R_2^2}{2}\right]$$

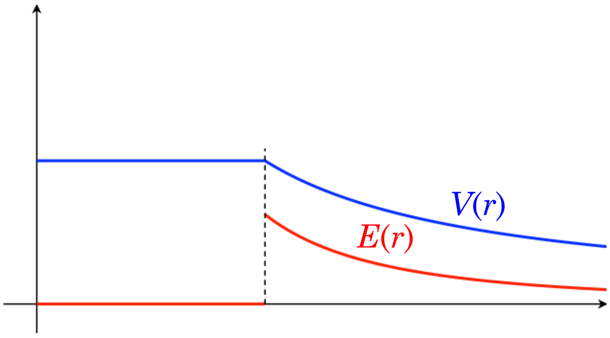
pour $r < R_1$ $V = C^{te} = \frac{\rho_0}{3\,\varepsilon_0} \left[-\frac{R_1^2}{2} - \frac{R_1^3}{R_1} + \frac{3R_2^2}{2}\right] = \frac{\rho_0}{2\,\varepsilon_0} \left[R_2^2 - R_1^2\right]$

En résumé, pour la sphère isolante creuse :

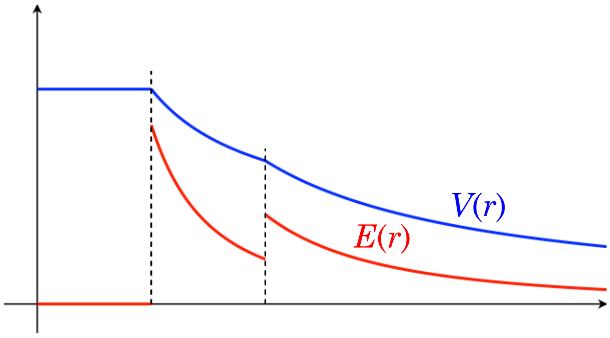
pour r $< R_1$:	pour $R_1 <$ r $< R_2$:	pour r $> R_2$:
$E = 0$	$E(r) = \frac{\rho_0}{3\,\varepsilon_0} \left[r - \frac{R_1^3}{r^2}\right]$	$E(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 \, r^2}$
$V(r) = \frac{\rho_0}{2\,\varepsilon_0} \left[R_2^2 - R_1^2\right]$	$V(r) = \frac{\rho_0}{3\,\varepsilon_0} \left[-\frac{r^2}{2} - \frac{R_1^3}{r} + \frac{3R_2^2}{2}\right]$	$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 \, r}$

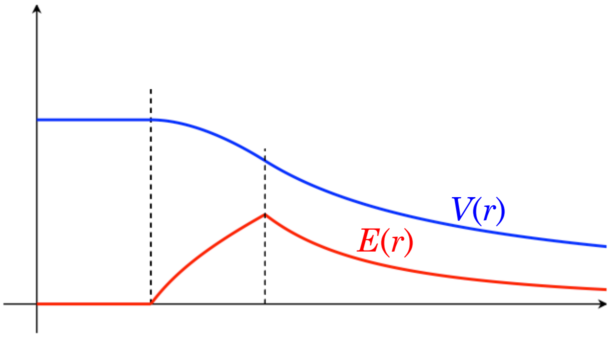
1.8 Pour chaque système, représenter schématiquement les variations du champ et le potentiel en fonction de la (des) variable(s) pertinente(s).

système (a)



système (b)





système (c)

1.9 Calculer la différence de potentiel $U = (V_1 - V_2)$ entre les deux armatures du système (b)

On peut calculer U de deux manières :

- en reprenant les expressions du potentiel déterminées question 1.7

$$V(R_1) = \frac{Q}{8\pi\varepsilon_0\, R_1} + \frac{Q}{8\pi\varepsilon_0\, R_2} \qquad\qquad V(R_2) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\, R_2}$$

d'où : $U = (V_1 - V_2) = \dfrac{Q}{8\pi\varepsilon_0\, R_1} - \dfrac{Q}{8\pi\varepsilon_0\, R_2}$

On peut aussi calculer la circulation de $\vec{E}$ entre les deux armatures. Dans ce cas, il vient :

$$U = \int_{R_1}^{R_2} \vec{E}\cdot\vec{d\ell} = \int_{R_1}^{R_2} \frac{Q}{8\pi\varepsilon_0\, r^2}\, dr = \frac{Q}{8\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{r}\right]_{R_1}^{R_2} = \frac{Q}{8\pi\varepsilon_0\, R_1} - \frac{Q}{8\pi\varepsilon_0\, R_2}$$

1.10 Calculer les énergies potentielles correspondant aux distributions de charges (a) et (b)

Pour le premier système (a) :

$$Ep = \frac{1}{2}\iint_S \sigma(M)\; V(M)\; dS = \frac{1}{2}\, V(R_2)\iint_S \sigma\, dS = \frac{1}{2}\, V(R_2)\; Q = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0\, R_2}$$

Pour le deuxième système (b) :

- Première méthode :

$$Ep = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n=2} Q_i\, V_i = \frac{1}{2}\left[\frac{Q}{2}\cdot\left(\frac{Q}{8\pi\varepsilon_0\, R_1} + \frac{Q}{8\pi\varepsilon_0\, R_2}\right) + \frac{Q}{2}\cdot\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\, R_2}\right] = \frac{Q^2}{32\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{3}{R_2}\right)$$

- Deuxième méthode :

$$\begin{aligned} Ep &= \frac{\varepsilon_0}{2}\iiint_{espace} E^2\, d\tau = \frac{\varepsilon_0}{2}\int_0^{\infty} E^2\, 4\pi r^2\, dr \\ &= \frac{\varepsilon_0}{2}\int_0^{R_1} E^2\, 4\pi r^2\, dr + \frac{\varepsilon_0}{2}\int_{R_1}^{R_2} E^2\, 4\pi r^2\, dr + \frac{\varepsilon_0}{2}\int_{R_2}^{\infty} E^2\, 4\pi r^2\, dr \\ &= 0 + \frac{\varepsilon_0}{2}\int_{R_1}^{R_2}\left[\frac{Q}{8\pi\varepsilon_0\, r^2}\right]^2 4\pi r^2\, dr + \frac{\varepsilon_0}{2}\int_{R_2}^{\infty}\left[\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\, r^2}\right]^2 4\pi r^2\, dr \\ &= \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\left[\int_{R_1}^{R_2}\frac{dr}{4r^2} + \int_{R_2}^{\infty}\frac{dr}{r^2}\right] = \frac{Q^2}{32\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{3}{R_2}\right) \end{aligned}$$

1.11 Calculer la capacité du système (a)

$$Q = C\cdot U \qquad \Rightarrow C = \frac{Q}{U} = \frac{Q}{V(R_2)} = Q\cdot\frac{4\pi\varepsilon_0\, R_2}{Q} = 4\pi\varepsilon_0\, R_2$$