

Contrôle continu – Épreuve du 8 janvier 2014

Durée : 2 heures

Exercice 1

On se propose d'étudier quantitativement la répartition des charges induites sur une sphère conductrice métallique neutre placée dans un champ électrostatique uniforme \vec{E}_0 . Pour cela, on étudie dans un premier temps un système analogue consistant en un dipôle placé dans un champ électrique.

Partie 1

Dans une région de l'espace règne un champ électrostatique uniforme : $\vec{E}_0 = E_0 \vec{e}_z$.

1.1 Exprimer le potentiel $V_0(M)$ en un point M en fonction de E_0 et des coordonnées cartésiennes du point M . Le potentiel sera choisi nul à l'origine en O .

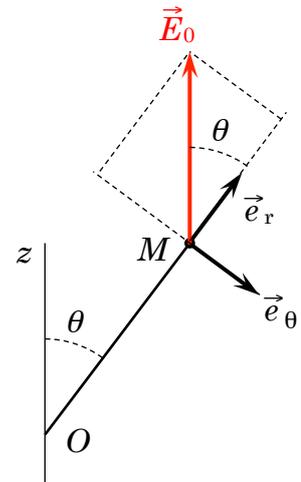
$$\vec{E}_0 = E_0 \vec{e}_z \quad \vec{E}_0 = -\overrightarrow{\text{grad}} V_0 = -\frac{\partial V_0}{\partial x} \vec{e}_x - \frac{\partial V_0}{\partial y} \vec{e}_y - \frac{\partial V_0}{\partial z} \vec{e}_z$$

$$\rightarrow V_0 = -\int E(z) dz = -\int E_0 dz = -E_0 z + K \quad \text{avec } V_0(0) = 0 \quad K = 0$$

$$\rightarrow V_0 = -E_0 z$$

1.2 Exprimer le champ électrostatique \vec{E}_0 au point M en fonction des vecteurs de base du système de coordonnées sphériques.

$$\vec{E}_0(r, \theta) = E_0 \cos \theta \vec{e}_r - E_0 \sin \theta \vec{e}_\theta$$



1.3 Montrer que le potentiel $V_0(M)$ s'écrit $V_0(M) = -r \cos \theta E_0$ dans le système de coordonnées sphériques.

$$\vec{E}_0(r, \theta) = -\overrightarrow{\text{grad}} V_0 = -\frac{\partial V_0}{\partial r} \vec{e}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial V_0}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V_0}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi$$

$$\rightarrow V_0 = -E_0 r \cos \theta$$

On place un dipôle au point O de telle sorte que son moment dipolaire \vec{p} ne soit initialement pas aligné avec le champ électrique \vec{E}_0 .

1.4 À quelle(s) force(s) est soumis le dipôle ?

Le champ est uniforme, la somme des forces auxquelles est soumis le dipôle est nulle ; celui-ci n'est soumis qu'à un couple de force qui tend à aligner \vec{p} avec \vec{E}_0 .

Donner l'expression de son énergie potentielle.

$$E_p = - \vec{p} \cdot \vec{E}_0.$$

Quelle est sa position d'équilibre stable ?

Quand \vec{p} est aligné avec \vec{E}_0

Seules les réponses argumentées seront prises en considération

Le dipôle est dans une position d'équilibre stable

1.5 Donner l'expression du potentiel total régnant maintenant en tout point M en fonction de r , p , θ et E_0 .

D'après le principe de superposition : $V_{\text{tot}} = V_0 + V_{\text{dip}}$

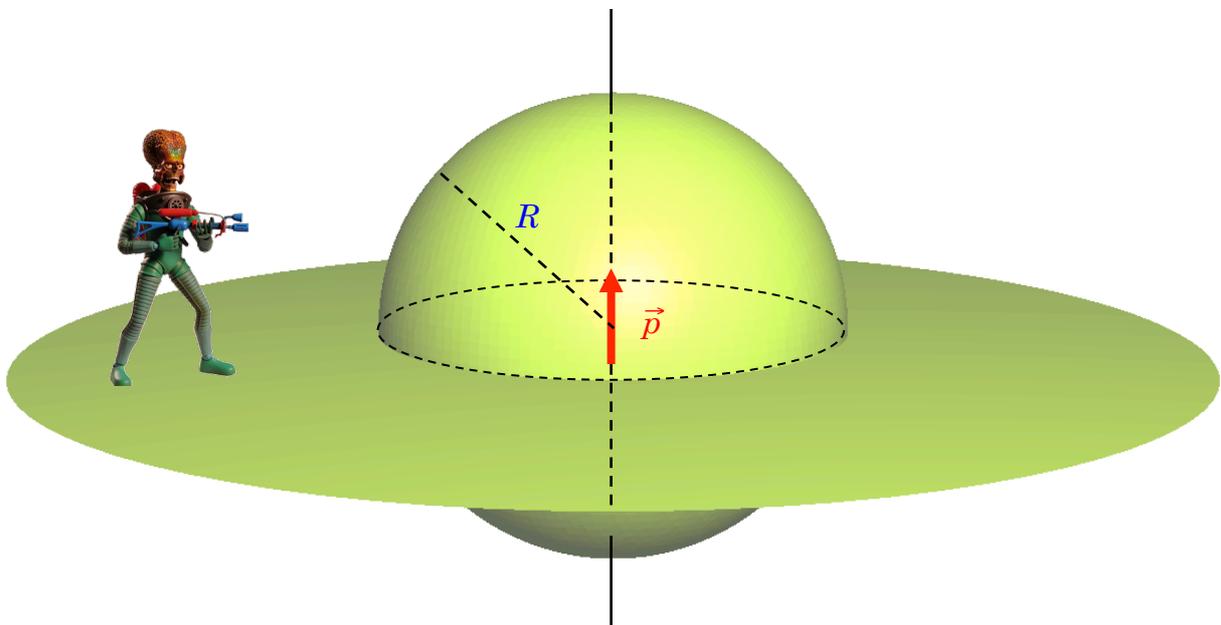
$$\text{avec } V_{\text{dip}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{e}_r}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cos\theta}{r^2}$$

$$V_{\text{tot}} = - E_0 r \cos\theta + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cos\theta}{r^2} = \cos\theta \cdot \left[\frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^2} - E_0 r \right]$$

1.6 Montrer que la surface équipotentielle sur laquelle $V_{\text{tot}} = 0$ est constituée d'un plan dont on déterminera l'équation et d'une sphère de centre O dont on calculera le rayon R en fonction de p , ϵ_0 et E_0 .

$$V_{\text{tot}} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \cos\theta \cdot \left[\frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^2} - E_0 r \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos\theta = 0 \Rightarrow \theta = \pi/2 \Rightarrow \text{plan } xOy \\ \frac{p \cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} - E_0 r = 0 \Rightarrow \text{sphère de centre } O \text{ et de rayon } R = \sqrt[3]{\frac{p}{4\pi\epsilon_0 E_0}} \end{cases}$$



Partie 2

On remplace le dipôle par une sphère métallique pleine de rayon R (le même que celui de la sphère équipotentielle calculé en 1.6), de centre O et reliée à la terre. La sphère métallique est donc immergée dans un champ électrique.

1.7 Décrire qualitativement la répartition des charges à sa surface.

Montrer que la sphère métallique pleine se comporte alors comme le dipôle étudié dans la partie 1.

L'effet du champ est de polariser la sphère métallique : les charges ($-$) sont attirées vers $z < 0$ alors que les charges ($+$) sont repoussées vers $z > 0$. Le fait qu'elle soit reliée à la terre ne change rien à cette répartition mais à pour conséquence que l'ensemble de la sphère est au potentiel nul.

La sphère est donc globalement neutre et présente un moment dipolaire. De plus, elle est telle que pour $r = R$? $V = 0$, ce qui correspond exactement au cas traité dans la partie 1.

1.8 En utilisant le résultat de la question 1.6, établir l'expression du moment dipolaire équivalent à la sphère.

$$R = \sqrt[3]{\frac{p}{4\pi\epsilon_0 E_0}} \quad \Rightarrow \quad p = 4\pi\epsilon_0 E_0 R^3$$

1.9 Montrer que l'expression du potentiel pour $r > R$ est : $V_{\text{ext}} = E_0 \cos\theta \left[\frac{R^3}{r^2} - r \right]$

$$\text{pour } r > R, \quad V_{\text{ext}} = \cos\theta \cdot \left[\frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^2} - E_0 r \right]$$

$$\text{avec } p = 4\pi\epsilon_0 E_0 R^3, \text{ il vient :} \quad V_{\text{ext}} = E_0 \cos\theta \left[\frac{R^3}{r^2} - r \right]$$

1.10 Établir l'expression du champ électrique en tout point.

En déduire la valeur du champ régnant au voisinage immédiat de la sphère conductrice (en $r \approx R$). La direction du champ $\vec{E}_{\text{ext}}(R)$ est-elle conforme à ce qui était attendu ?

$$\vec{E}_{\text{int}}(r < R) = \vec{0} \quad \text{car } \vec{E} = \vec{0} \text{ dans un conducteur à l'équilibre}$$

$$\vec{E}_{\text{ext}} = -\vec{\text{grad}}V_{\text{ext}} = -\frac{\partial V_{\text{ext}}}{\partial r} \vec{e}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial V_{\text{ext}}}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial V_{\text{ext}}}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi$$

$$\text{d'où : } E_r = E_0 \cos\theta \cdot \left[\frac{2R^3}{r^3} + 1 \right]$$

$$E_\theta = E_0 \sin\theta \cdot \left[\frac{R^3}{r^3} - 1 \right]$$

Au voisinage immédiat de la surface de la sphère, en $r = R$, l'expression du champ est :

$$E_r = 3 E_0 \cos\theta$$

$$E_\theta = 0$$

Le résultat est conforme car $\vec{E}_{\text{ext}} = 3 E_0 \cos\theta \vec{e}_r$ perpendiculaire à la surface de la sphère.

1.11 En déduire la densité surfacique de charge σ en tout point de la sphère.

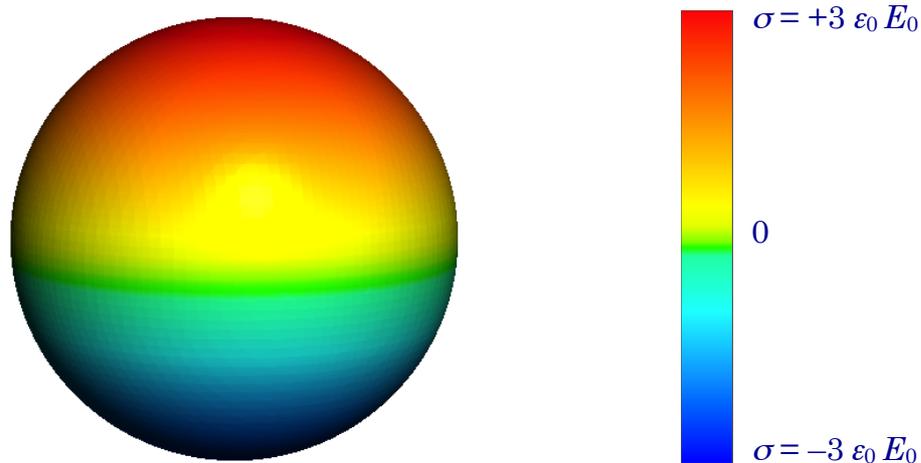
On sait que le champ au voisinage de la surface est proportionnel à la densité de charge locale : $\vec{E} = \sigma/\epsilon_0 \vec{n}$ où \vec{n} est un vecteur unitaire normal à la surface du conducteur. Dans le cas présent, $\vec{E} = \sigma/\epsilon_0 \vec{e}_r$, d'où :

$$\sigma = 3 \epsilon_0 E_0 \cos\theta$$

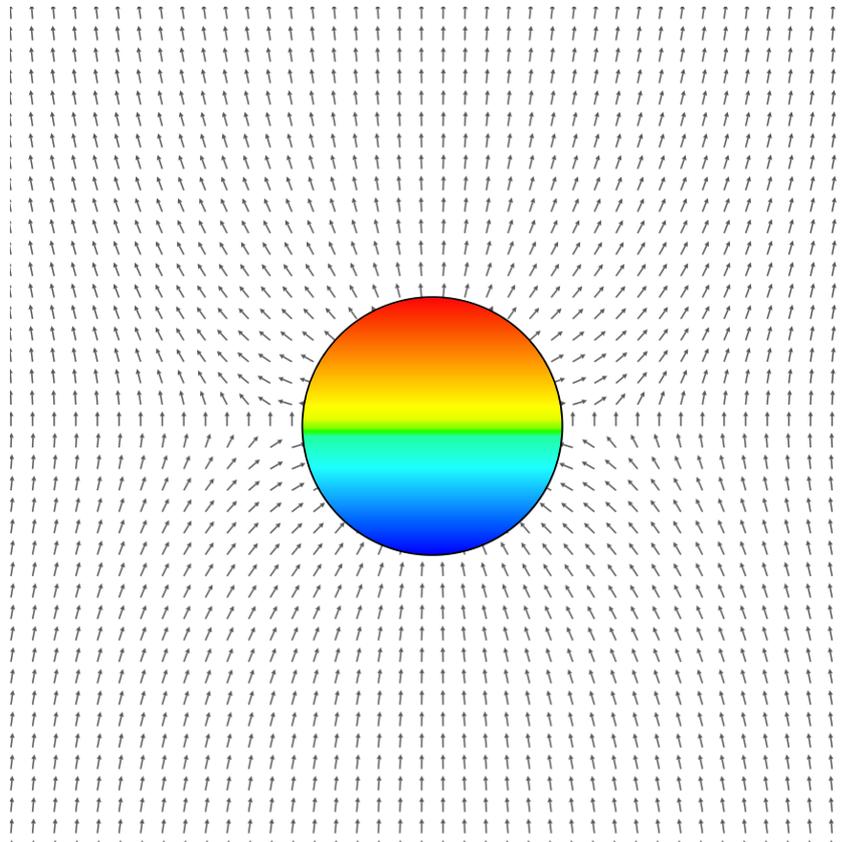
Montrer qu'il existe sur la sphère un contour où σ est nulle (ligne neutre).

$$\sigma = 0 \text{ pour } \theta = \pi/2$$

Une représentation de la distribution de charge est présentée sur la figure ci-dessous :



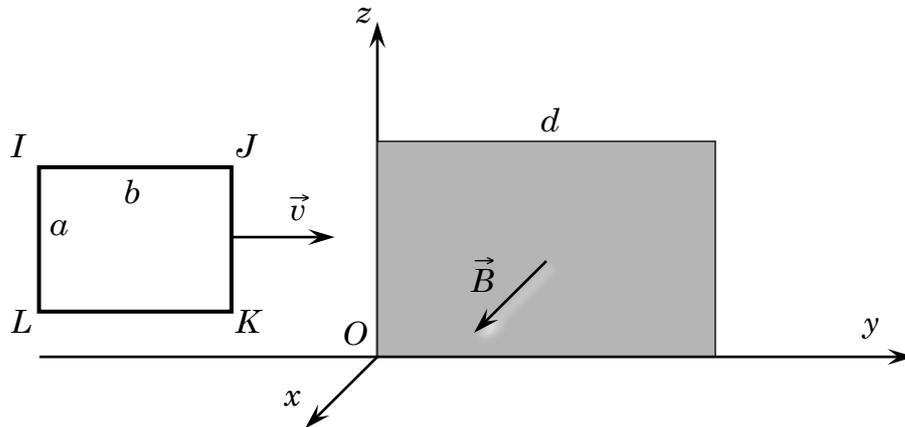
1.12 Tracer approximativement les lignes de champ



Exercice 2 : Magnétostatique

Une spire conductrice rectangulaire indéformable $IJKL$, de côtés a et b , de masse m , de résistance R et d'inductance négligeable, se déplace parallèlement à (Oy) dans le plan (yOz) grâce à l'action d'un opérateur.

La spire traverse une zone de longueur d ($d > b$) où le champ magnétique est constant et uniforme et égal à $\vec{B} = B_0 \vec{e}_x$. On négligera toute force autre que magnétique et on notera $y(t)$ l'abscisse du côté JK de longueur a et $v(t)$ la vitesse de la spire.



L'opérateur exerce une force telle que la spire se déplace à vitesse constante. On s'intéresse à la force exercée par l'opérateur au cours du déplacement de $y < 0$ à $y > d + b$.

2.1 Exprimer la loi de Lenz

L'induction produit des effets qui s'opposent aux causes qui lui ont donné naissance.

2.2 Exprimer la loi de Maxwell- Faraday en précisant les causes possibles de variation du flux.

D'une manière générale, quand un circuit filiforme C est soumis à une variation de flux d'induction magnétique \vec{B} au cours du temps et dont l'origine est due à :

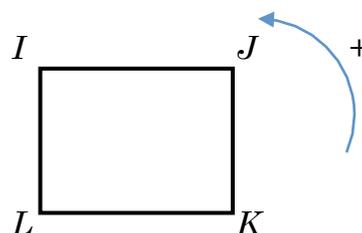
- une déformation de C ,
- un déplacement de C dans un champ magnétique non uniforme,
- une variation de \vec{B} au cours du temps,

on observe l'apparition d'une force électromotrice d'induction :

$$e = - \frac{d\phi}{dt} \quad \text{loi de Faraday}$$

2.3 En ayant préalablement orienté le cadre $IJKL$, déterminer le sens du courant quand le cadre pénètre dans la zone où règne le champ \vec{B} .

On oriente le cadre dans le sens anti-horaire



Quand le cadre pénètre dans la zone où règne le champ \vec{B} , le flux de \vec{B} à travers la surface définie par le cadre augmente. Comme le circuit est conducteur, il apparaît un courant induit qui s'oppose aux causes qui lui ont donné naissance, i.e. l'augmentation du flux. Le sens du courant est tel que :

- un champ induit \vec{B}_{ind} apparaît, opposé au champ \vec{B} .
- la force de Laplace exercée sur le segment JK s'oppose au déplacement

Le sens du courant est donc négatif

2.4 Établir l'expression du courant induit i_{ind} circulant dans la spire au moment où le cadre pénètre dans la zone où règne le champ \vec{B} .

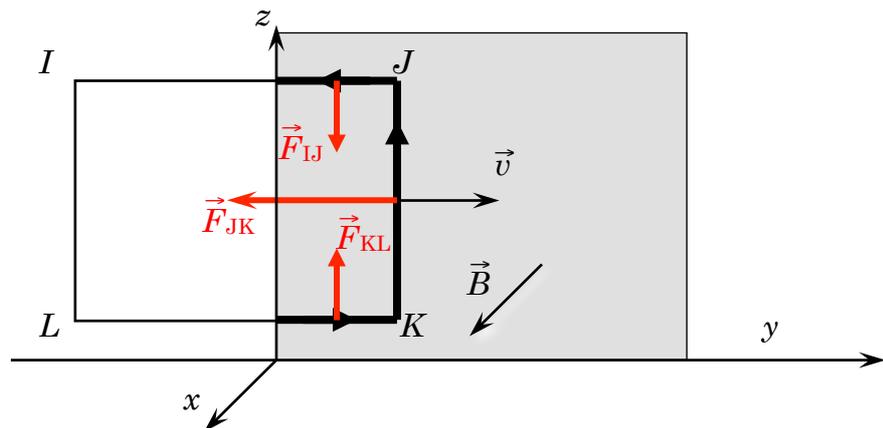
On part de l'expression du flux de \vec{B} à travers le cadre :

$$d\phi = \vec{B} \cdot d\vec{S} = B dS = B a dy$$

$$e = -\frac{d\phi}{dt} = -B a \frac{dy}{dt} = -B a v$$

$$i_{\text{ind}} = \frac{e}{R} \quad \text{d'où :} \quad i_{\text{ind}} = -\frac{B a v}{R}$$

2.5 Représenter les forces auxquelles sont soumis les segments du circuit $IJKL$ sur un schéma clair et soigné



2.6 Établir l'expression vectorielle de la force exercée sur le segment JK . Pourquoi les forces exercées sur les segments IJ et KL n'interviennent pas ?

La force de Laplace exercée sur le segment JK est :

$$\vec{F}_{JK} = \int_K^J |i_{\text{ind}}| d\vec{\ell} \wedge \vec{B} = \frac{B a v}{R} \int_K^J dz \vec{e}_z \wedge B \vec{e}_x = -\frac{B^2 a^2 v}{R} \vec{e}_y$$

Les forces exercées sur les segments IJ et KL n'interviennent pas car elles sont perpendiculaires au déplacement (et que le cadre est indéformable).

2.7 Calculer le travail de ces forces pendant le trajet $y = 0 \rightarrow y = b$ par deux méthodes différentes.

1^{ère} méthode : La force magnétique est constante le long du trajet $y = 0 \rightarrow y = b$. Par conséquent, son travail s'exprime :

$$W = \int_0^b \vec{F}_{JK} \cdot d\vec{y} = -\frac{B^2 a^2 b v}{R}$$

2^{ème} méthode : D'après le théorème de Maxwell, le travail des forces magnétiques est égal à la variation de flux à travers le cadre multipliée par le courant circulant dans la spire :

$$W = i_{\text{ind}} \cdot \Delta\phi = i_{\text{ind}} \cdot [\phi_f - \phi_i]$$

où ϕ_f et ϕ_i sont les flux initiaux et finaux : $\phi_f = B a b$ et $\phi_i = 0$

d'où :
$$W = \frac{B a v}{R} B a b = - \frac{B^2 a^2 b v}{R}$$

Le signe (-) indique qu'il s'agit bien d'un travail résistant.

2.8 Tracer qualitativement sur quatre graphes superposés les variations en fonction de la position y du cadre $IJKL$:

- du flux de \vec{B} à travers le cadre,
- du courant circulant dans le cadre
- de la force exercée par l'opérateur pour maintenir la vitesse du cadre constante *on indiquera sur les axes des abscisses les valeurs de y pour lesquelles les variations surviennent.*

