Contrôle continu – Épreuve du 8 janvier 2014
Durée : 2 heures

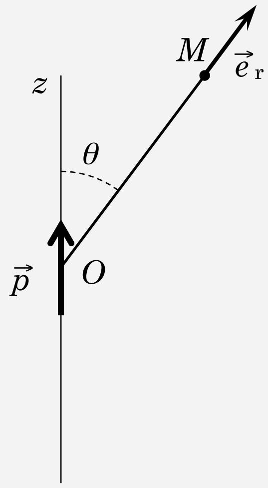
Rappel :

- L'expression du potentiel créé en un point M situé à la distance r du centre O d'un dipôle dans la direction du vecteur unitaire $\vec{e}_r$ par un dipôle de moment dipolaire $\vec{p} = p\ \vec{e}_z$ est donnée par l'approximation dipolaire :

$$V_{dip} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{p}\cdot\vec{e}_r}{r^2}$$

- L'expression de l'opérateur gradient en coordonnées sphériques est :

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, f = \frac{\partial f}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi$$



Exercice 1

On se propose d'étudier quantitativement la répartition des charges induites sur une sphère conductrice métallique neutre placée dans un champ électrostatique uniforme $\vec{E}_0$. Pour cela, on étudie dans un premier temps un système analogue consistant en un dipôle placé dans un champ électrique.

Partie 1

Dans une région de l'espace règne un champ électrostatique uniforme : $\vec{E}_0 = E_0\ \vec{e}_z$.

1.1 Exprimer le potentiel $V_0(M)$ en un point M en fonction de E_0 et des coordonnées cartésiennes du point M. Le potentiel sera choisi nul à l'origine en O.

1.2 Exprimer le champ électrostatique $\vec{E}_0$ au point M en fonction des vecteurs de base du système de coordonnées sphériques.

1.3 Montrer que le potentiel $V_0(M)$ s'écrit $V_0(M) = -\ r\cos\theta\ E_0$ dans le système de coordonnées sphériques.

On place un dipôle au point O de telle sorte que son moment dipolaire $\vec{p}$ ne soit initialement pas aligné avec le champ électrique $\vec{E}_0$.

1.4 À quelle(s) force(s) est soumis le dipôle ?
Donner l'expression de son énergie potentielle.
Quelle est sa position d'équilibre stable ?
Seules les réponses argumentées seront prises en considération

Le dipôle est dans une position d'équilibre stable

1.5 Donner l'expression du potentiel total régnant maintenant en tout point M en fonction de r, p, θ et E_0.

1.6 Montrer que la surface équipotentielle sur laquelle $V_{tot} = 0$ est constituée d'un plan dont on déterminera l'équation et d'une sphère de centre O dont on calculera le rayon R en fonction de p, ε_0 et E_0.

Partie 2

On remplace le dipôle par une sphère métallique pleine de rayon R (le même que celui de la sphère équipotentielle calculé en **1.6**), de centre O et reliée à la terre. La sphère métallique est donc immergée dans un champ électrique.

1.7 Décrire qualitativement la répartition des charges à sa surface.
Montrer que la sphère métallique pleine se comporte alors comme le dipôle étudié dans la partie 1.

1.8 En utilisant le résultat de la question **1.6**, établir l'expression du moment dipolaire équivalent à la sphère.

1.9 Montrer que l'expression du potentiel pour $r > R$ est : $V_{ext} = E_0 \cos\theta \left[\dfrac{R^3}{r^2} - r\right]$

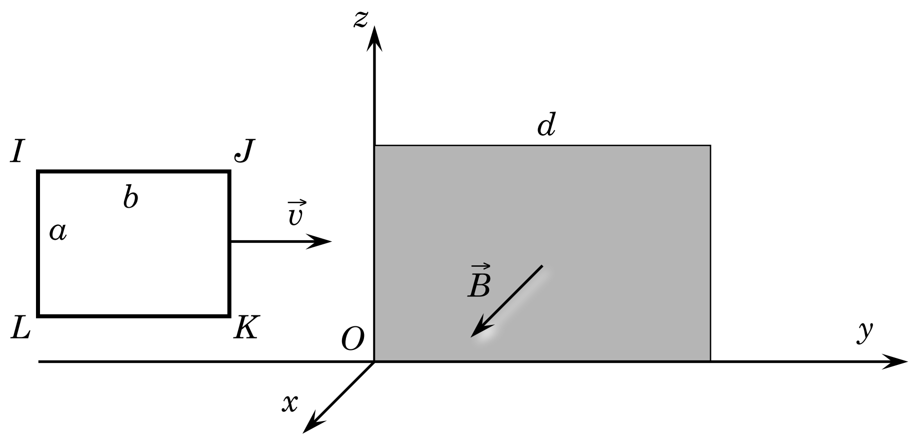
1.10 Établir l'expression du champ électrique en tout point.
En déduire la valeur du champ régnant au voisinage immédiat de la sphère conductrice (en $r \approx R$). La direction du champ $\vec{E}_{ext}(R)$ est-elle conforme à ce qui était attendu ?

1.11 En déduire la densité surfacique de charge σ en tout point de la sphère.
Montrer qu'il existe sur la sphère un contour où σ est nulle (ligne neutre).

1.12 Tracer approximativement les lignes de champ

Exercice 2 : Magnétostatique

Une spire conductrice rectangulaire indéformable *IJKL*, de côtés a et b, de masse m , de résistance R et d'inductance négligeable, se déplace parallèlement à (Oy) dans le plan (yOz) grâce à l'action d'un opérateur.
La spire traverse une zone de longueur d $(d > b)$ où le champ magnétique est constant et uniforme et égal à $\vec{B} = B_0\,\vec{e_x}$. On négligera toute force autre que magnétique et on notera $y(t)$ l'abscisse du côté *JK* de longueur a et $v(t)$ la vitesse de la spire.



L'opérateur exerce une force telle que la spire se déplace à vitesse constante. On s'intéresse à la force exercée par l'opérateur au cours du déplacement de $y < 0$ à $y > d + b$.

2.1 Exprimer la loi de Lenz

2.2 Exprimer la loi de Maxwell–Faraday en précisant les causes possibles de variation du flux dans le cas le plus général.

2.3 En ayant préalablement orienté le cadre *IJKL*, déterminer le sens du courant quand le cadre pénètre dans la zone où règne le champ $\vec{B}$.

2.4 Établir l'expression du courant induit i_{ind} circulant dans la spire au moment où le cadre pénètre dans la zone où règne le champ $\vec{B}$.

2.5 Représenter les forces auxquelles sont soumis les segments du circuit *IJKL* sur un schéma clair et soigné

2.6 Établir l'expression vectorielle de la force exercée sur le segment *JK*.
Pourquoi les forces exercées sur les segments *IJ* et *KL* n'interviennent pas ?

2.7 Calculer le travail de ces forces pendant le trajet $y = 0 \rightarrow y = b$ par deux méthodes différentes.

2.8 Tracer qualitativement sur quatre graphes superposés les variations en fonction de la position y du cadre *IJKL* :
- du flux de $\vec{B}$ à travers le cadre,
- du courant circulant dans le cadre
- de la force exercée par l'opérateur pour maintenir la vitesse du cadre constante
  on indiquera sur les axes des abscisses les valeurs de y pour lesquelles les variations surviennent.