

Examen de 2^{nde} session – Épreuve du 28 mai 2014
Calculatrices, documents et téléphones interdits

Questions de cours

1.1 Compléter les équations suivantes et donner, le cas échéant, la formulation non-locale :

(1.11) $\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$ La circulation de \vec{E} sur un contour fermé est nulle

(1.12) $\text{div } \vec{E} = \rho/\epsilon_0$ équivalent à : $\oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_T}{\epsilon_0}$ (Théorème de Gauss)

(1.13) $\text{div } \vec{B} = 0$ équivalent à : $\oiint \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$

(1.14) $\text{rot } \vec{E} = \vec{0}$ le rotationnel d'un gradient est toujours nul

(1.15) $\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$ équivalent à : $\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \sum I$ (Théorème d'Ampère)

Électrostatique

Partie 1

On considère un disque D , de centre O , d'axe $z'Oz$ et de rayon R , uniformément chargé avec la densité surfacique de charge σ ($\sigma < 0$).

2.1 En utilisant des arguments de symétrie, tracer l'allure des lignes de champ électrique en tout point d'un plan contenant l'axe $z'Oz$.

Analyse des symétries

Il convient d'utiliser les coordonnées cylindriques

Les deux distributions de charges sont invariantes par :

(1) toute rotation selon l'axe Oz
→ le champ \vec{E} ne dépend pas de φ $\Rightarrow \vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}(r, z)$

(2) symétrie selon tout plan passant par l'axe Oz
→ en tout point, le champ \vec{E} est selon les vecteurs \vec{e}_r et \vec{e}_z ,
 $\Rightarrow \vec{E}(\vec{r}) = E_r(r, z) \vec{e}_r + E_z(r, z) \vec{e}_z$

(3) symétrie selon le plan perpendiculaire à l'axe Oz et passant par O .
→ en tout point du plan perpendiculaire à Oz et contenant O ,
le champ \vec{E} est selon \vec{e}_z ,

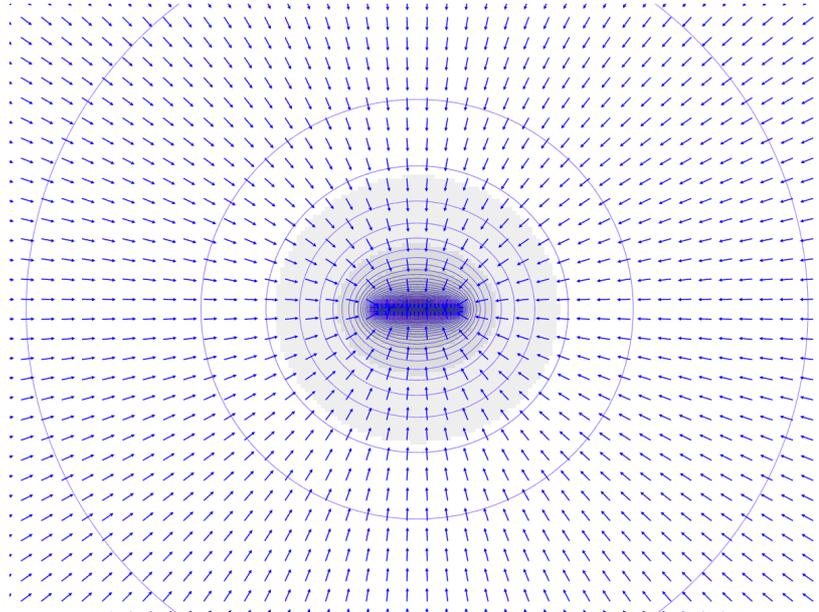
Autres conséquences des propriétés de symétrie

(2) en tout point de l'axe Oz , le champ \vec{E} est selon $\vec{e}_z \Rightarrow \vec{E}(0,0,z) = E(z) \vec{e}_z$

(3) $\vec{E}(-z) \vec{e}_z = -\vec{E}(z) \vec{e}_z$

(3) & (4) : → en O , $\vec{E} = \vec{0}$

d'où l'allure des lignes de champ sur la figure suivante :



2.2 Montrer que le champ électrique $\vec{E}(z)$ créé en tout point de l'axe $z'Oz$ peut être exprimé sous la forme :

$$\vec{E}(z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[\frac{z}{|z|} - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right] \vec{e}_z$$

La quantité de charge dq localisée en P et correspondant à un élément de surface $dS = r d\varphi dr$ crée en un point M situé sur l'axe le champ élémentaire :

$$\vec{dE}_{dS} = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 PM^2} \frac{\vec{PM}}{PM} = \frac{\sigma r d\varphi dr}{4\pi\epsilon_0 PM^2} \frac{\vec{PM}}{PM}$$

Pour une couronne de rayons r et $r + dr$, on obtient la somme des projections des champs élémentaires \vec{dE} sur l'axe :

$$\begin{aligned} dE_{\text{cour}} &= \frac{\sigma r d\varphi dr}{4\pi\epsilon_0 PM^2} \frac{\vec{PM}}{PM} \cdot \vec{e}_z = \frac{\sigma r dr}{2\epsilon_0 (r^2 + z^2)} \cos\theta \\ &= \frac{\sigma r dr}{2\epsilon_0 (r^2 + z^2)} \frac{z}{(r^2 + z^2)^{1/2}} = \frac{\sigma z r dr}{2\epsilon_0 (r^2 + z^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

Le champ créé en M par tout le disque s'obtient par intégration :

$$E(z) = \frac{\sigma z}{2\epsilon_0} \int_0^R \frac{r dr}{(r^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{\sigma z}{2\epsilon_0} \left[\frac{-1}{(r^2 + z^2)^{1/2}} \right]_0^R = \frac{\sigma z}{2\epsilon_0} \left[\frac{1}{|z|} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right]$$

D'où finalement :
$$\vec{E}(z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[\frac{z}{|z|} - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right] \vec{e}_z$$

2.3 Calculer le potentiel électrique $V(z)$ créé en tout point de l'axe $z'Oz$.

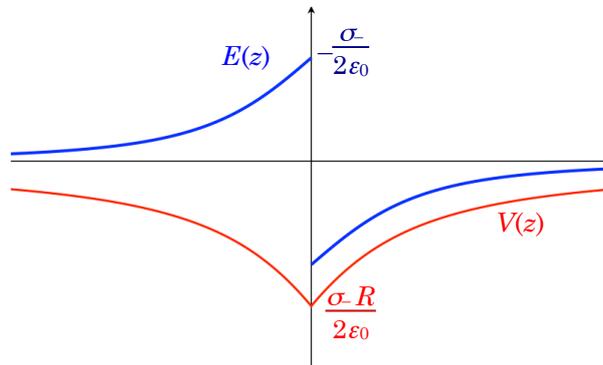
Le potentiel s'obtient à partir de la relation :

$$V(z) = \int_0^R \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 PM} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \int_0^R \frac{r dr}{(r^2 + z^2)^{1/2}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[\sqrt{r^2 + z^2} \right]_0^R$$

D'où finalement : $V(z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} [\sqrt{R^2 + z^2} - |z|]$

Remarque : on obtenait évidemment le même résultat à partir de $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V$

2.4 Tracer les courbes représentatives de $E(z)$ et $V(z)$.



2.5 Exprimer $\vec{E}(z)$ dans le cas où $z \ll R$, interpréter le résultat obtenu

Le point M est infiniment proche du disque de taille finie : $\frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \rightarrow 0$

$$\vec{E}(z) \rightarrow \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \frac{z}{|z|} \vec{e}_z \Rightarrow \text{on se ramène au cas du plan infini :}$$

2.6 Exprimer $\vec{E}(z)$ dans le cas où $z \gg R$, interpréter le résultat obtenu

Vu depuis le point M à l'infini, le disque est vu comme une charge ponctuelle.

On peut exprimer $\vec{E}(z)$ sous une autre forme :

$$\begin{aligned} \vec{E}(z) &= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[\frac{z}{|z|} - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right] \vec{e}_z = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[\frac{z}{|z|} - \frac{z}{\sqrt{z^2 (1 + R^2/z^2)}} \right] \vec{e}_z \\ &= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \frac{z}{|z|} \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1 + R^2/z^2}} \right] \vec{e}_z \end{aligned}$$

en prenant un développement limité à l'ordre 1 : $(1 + R^2/z^2)^{-1/2} = 1 - \frac{R^2}{2z^2}$

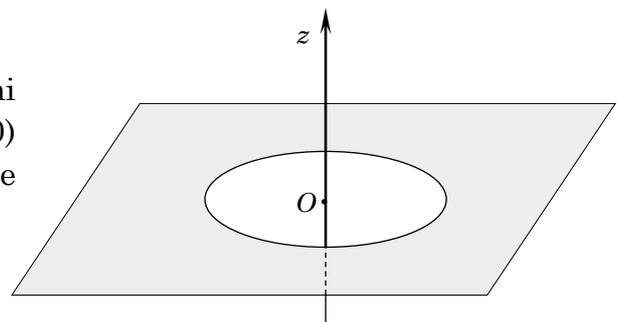
$$\text{d'où finalement : } \vec{E}(z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \frac{z}{|z|} \frac{R^2}{2z^2} \vec{e}_z$$

$$\text{avec } Q = \sigma \pi R^2, \text{ on obtient : } \vec{E}(z) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{|z|} \frac{1}{z^2} \vec{e}_z$$

résultat attendu pour une charge considérée comme ponctuelle

Partie 2

On considère maintenant un plan infini uniformément chargé (densité de charge $\sigma_+ > 0$) percé d'un disque de centre O , d'axe $z'Oz$ et de rayon R .



2.7 À partir de quelles distributions de charge surfaciques simples peut-on construire une distribution équivalente à ce plan chargé et percé ?

Du point de vue des distributions de charges le plan infini chargé uniformément ($\sigma_+ > 0$) percé d'un disque de rayon R est équivalent à la superposition :

- d'un plan infini chargé uniformément avec $\sigma_+ > 0$
- d'un disque de rayon R chargé uniformément avec $\sigma_- = -\sigma_+ (< 0)$

2.8 Déterminer la direction du champ électrique \vec{E} créé par cette distribution pour un point situé sur l'axe $z'Oz$.

Les propriétés de symétrie de cette distribution de charge sont les mêmes que celles du disque : sur l'axe $\vec{E}(0,0,z) = E(z) \vec{e}_z$

2.9 Quelle est l'orientation du champ électrique au voisinage de la surface du plan ?

En chaque point au voisinage du plan : $\vec{E} = \frac{\sigma_+}{2\varepsilon_0} \frac{z}{|z|} \vec{e}_z$ normal au plan.

2.10 En utilisant le théorème de superposition, calculer le champ électrique $\vec{E}(z)$ créé en tout point de l'axe $z'Oz$.

D'après le principe de superposition :

$$\vec{E}_{\text{tot}} = \vec{E}_{\text{plan } \infty} + \vec{E}_{\text{disque}} = \frac{\sigma_+}{2\varepsilon_0} \frac{z}{|z|} \vec{e}_z - \frac{\sigma_+}{2\varepsilon_0} \left[\frac{z}{|z|} - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right] \vec{e}_z$$

$$\vec{E}_{\text{tot}}(z) = \frac{\sigma_+}{2\varepsilon_0} \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \vec{e}_z$$

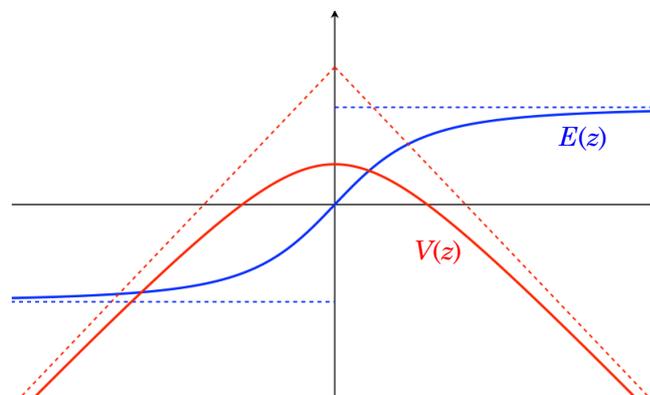
2.11 Calculer le potentiel électrique $V(z)$ créé en tout point de l'axe $z'Oz$.

On applique le même raisonnement, d'après le principe de superposition :

$$V_{\text{tot}} = V_{\text{plan } \infty} + V_{\text{disque}} = \frac{\sigma_+ |z|}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma_+}{2\varepsilon_0} \left[\sqrt{R^2 + z^2} - |z| \right] + K$$

$$V_{\text{tot}}(z) = -\frac{\sigma_+}{2\varepsilon_0} \sqrt{R^2 + z^2} + K$$

2.12 Tracer les courbes représentatives de $E(z)$ et $V(z)$.



Les lignes en pointillés représentent les valeurs des potentiel et champ dans le cas du plan infini.

2.13 Une particule de charge négative q est astreinte à se déplacer le long de l'axe $z'Oz$. Quelle est sa position d'équilibre (sans calcul)

L'énergie potentielle de la particule dépend de sa position sur l'axe selon la relation :

$$E_P(z) = q V_{\text{tot}}(z) \text{ avec } q < 0$$

Il apparaît ainsi que $E_P(z)$ sera minimale pour $z = 0$.

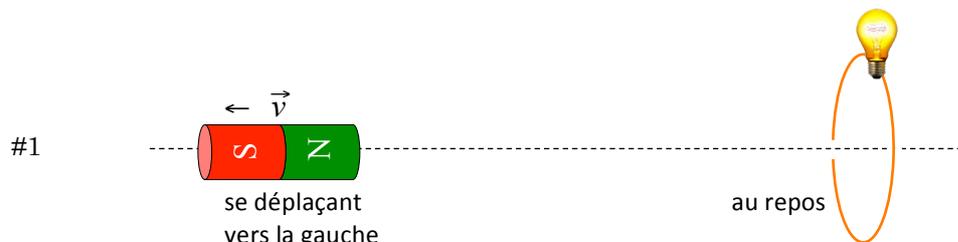
La position d'équilibre est donc obtenue pour $z = 0$.

Phénomènes d'induction

Chaque situation ci-dessous fait intervenir un aimant cylindrique et une petite ampoule reliée à un fil de cuivre formant une spire. Le plan de la spire est perpendiculaire à l'axe de référence. Les mouvements de l'aimant et de la spire sont indiqués sur les figures, où \vec{v} représente la vitesse.

3.1 Dans quelle situation la lampe s'allume t-elle ?

Justifier la réponse en énonçant la/les loi(s) utilisée(s) et en précisant le cas échéant le sens de circulation du courant (horaire ou anti-horaire).

#1  se déplaçant vers la gauche au repos $\frac{d\Phi}{dt} < 0 \Rightarrow e > 0$

#2  repos spire se contractant $\frac{d\Phi}{dt} < 0 \Rightarrow e > 0$

#3  repos spire en rotation autour de son axe $\frac{d\Phi}{dt} = 0 \Rightarrow e = 0$

#4  repos se déplaçant vers la gauche $\frac{d\Phi}{dt} > 0 \Rightarrow e < 0$

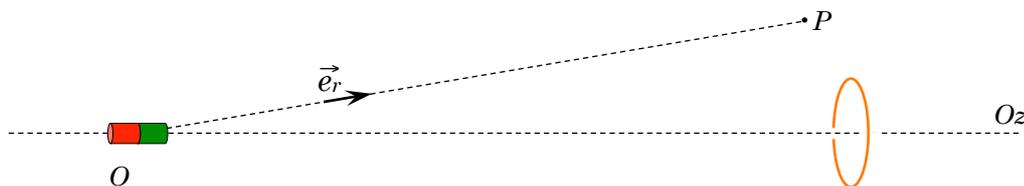
On s'intéresse à la situation #4. Le centre de l'aimant est situé au point O et celui de la spire au point P . La spire a un rayon a et une résistance R_S . Les axes de la spire et de l'aimant sont confondus avec l'axe Oz .

À grande distance de l'aimant, le champ d'induction magnétique créé par l'aimant peut s'écrire sous la forme :

$$\vec{B}(P) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3(\vec{M} \cdot \vec{e}_r)\vec{e}_r - \vec{M}}{r^3} \quad (1)$$

- r est la distance du point P à l'aimant (supposé ponctuel car $r \gg a$).
- \vec{e}_r : vecteur unitaire colinéaire à \vec{OP} .
- \vec{M} est le moment magnétique caractérisant l'aimant, dirigé selon Oz et noté :

$$\vec{M} = M \vec{e}_z \quad (2)$$



3.2 En utilisant l'expression (1), donner l'expression du champ d'induction magnétique à la distance z sur l'axe Oz .

On veut calculer le champ en un point P sur l'axe.

Dans ce cas : $\vec{e}_r = \vec{e}_z$ et l'expression (1) devient :

$$\vec{B}(P) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3(\vec{M} \cdot \vec{e}_r)\vec{e}_r - \vec{M}}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3(M \vec{e}_z \cdot \vec{e}_z)\vec{e}_z - M \vec{e}_z}{z^3} = \frac{\mu_0 M}{2\pi z^3} \vec{e}_z$$

3.3 Dans la mesure où la spire est petite, on suppose que le champ est homogène (même norme, même intensité) sur toute la surface définie par la spire.

En déduire l'expression du flux de \vec{B} à travers la spire située à la distance z de l'aimant en fonction de μ_0 , M , z et a .

$$\Phi = \iint \vec{B} \cdot d\vec{S} = \iint B dS = B \iint dS = B \pi a^2 = \frac{\mu_0 M a^2}{2 z^3}$$

3.4 Dans le cas où la spire s'approche de l'aimant à la vitesse constante \vec{v} (situation #4), partant d'une distance z_0 , exprimer le courant induit dans le circuit.

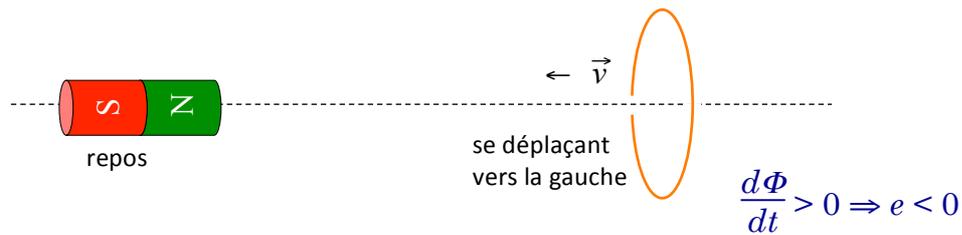
Comme la position z de la spire varie avec le temps, il apparaît une f.e.m. induite due à l'augmentation du flux (loi de Maxwell-Faraday), d'où l'apparition d'un courant :

$$i(t) = \frac{e}{R_S} = -\frac{1}{R_S} \frac{d\Phi}{dt} = -\frac{1}{R_S} \frac{d}{dt} \left(\frac{\mu_0 M a^2}{2 z^3(t)} \right) = -\frac{\mu_0 M a^2}{2 R_S} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{z^3(t)} \right) = -\frac{\mu_0 M a^2}{2 R_S} \left(\frac{-3 z'}{z^4(t)} \right)$$

en posant $z(t) = z_0 - vt$, il vient : $i(t) = -\frac{3}{2} \frac{\mu_0 M a^2}{R_S} \left(\frac{v}{(z_0 - vt)^4} \right)$

Indiquer sur un schéma le sens du courant dans la spire en le justifiant.

On utilise le même raisonnement que pour la question 3.1 #4 :



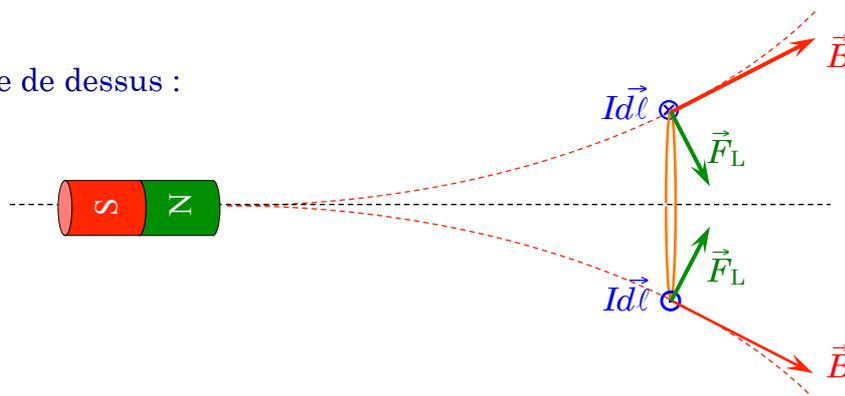
- 3.5 Donner l'expression de la force $d\vec{F}$ exercée sur un élément de circuit $d\ell$ parcouru par un courant I et plongé dans un champ magnétique extérieur (force de Laplace).

$$d\vec{F} = I d\vec{\ell} \wedge \vec{B}$$

- 3.6 Dans la situation considérée précédemment, la spire parcourue par le courant induit est soumise à cette force.

Indiquer sur un schéma les lignes de champ créées par l'aimant et la force s'appliquant sur un élément de circuit (on ne négligera plus les composantes du champ orthogonales à Oz).

En vue de dessus :



En déduire la direction de la force totale exercée sur la spire.

En chaque point de la spire, la force de Laplace a deux composantes :

- une dirigée vers le centre de la spire et perpendiculaire au déplacement. La spire étant supposée indéformable, cette composante n'a aucun effet.
- une composante dont le sens est opposée à \vec{v} et qui s'oppose au déplacement conformément à la loi de Lenz