3 RELATIONS LOCALES

3.1 Théorème de Gauss

Nous avons abordé le théorème de Gauss exprimé sous sa forme intégrale :

$$\oiint_{\Sigma} \vec{E}(\vec{r}).\vec{dS} = \frac{1}{\varepsilon_0}\iiint_V \rho(\vec{r})\, d\tau$$

Cette formulation peut être réécrite sous une forme locale grâce au théorème de Green-Ostrogradski (théorème de flux divergence) :

Le théorème de Green-Ostrogradski stipule que :
Le flux d'un champ de vecteurs à travers une surface fermée est égal à l'intégrale de la divergence de ce champ sur le volume défini par la surface :

$$\oiint_{\Sigma} \vec{E}(\vec{r}).\vec{dS} = \iiint_V \mathrm{div}(\vec{E})\, d\tau$$

avec, en coordonnées cartésiennes :

$$\mathrm{div}(\vec{E}) = \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

on arrive donc à l'égalité suivante :

$$\frac{1}{\varepsilon_0}\iiint_V \rho(\vec{r})\, d\tau = \iiint_V \mathrm{div}(\vec{E})\, d\tau$$

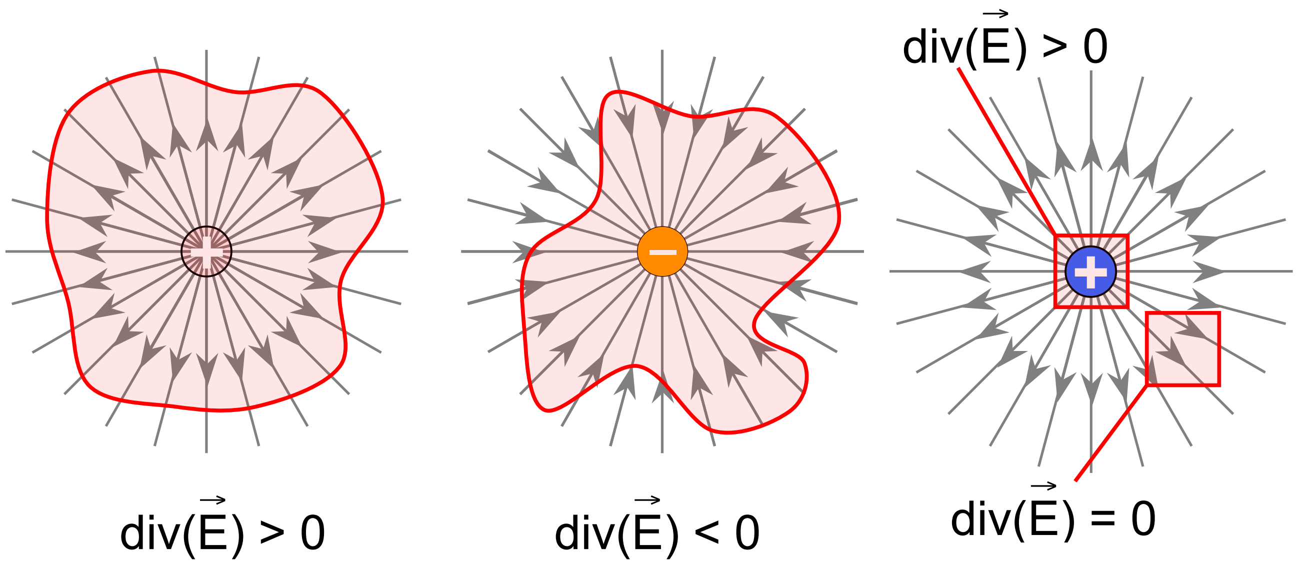
d'où l'expression du théorème de Gauss sous sa forme locale :

$$\boxed{\mathrm{div}(\vec{E}) = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad \text{Équation de Maxwell – Gauss}}$$

Signification physique :

Il ne faut pas s'attacher au sens premier de "divergence".

Ce qui compte est la présence ou non de charges à l'intérieur du volume considéré :



3.2 Équation de Poisson (1781 – 1840)

On peut réécrire cette expression locale du théorème de Gauss en introduisant l'opérateur différentiel laplacien :

$$\vec{E} = -\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, V$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = -\,\vec{\nabla}\cdot\overrightarrow{\text{grad}\ V} = -\,\text{div}(\overrightarrow{\text{grad}\ V}) = -\Delta V$$

avec $$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$ en coord. cartésiennes

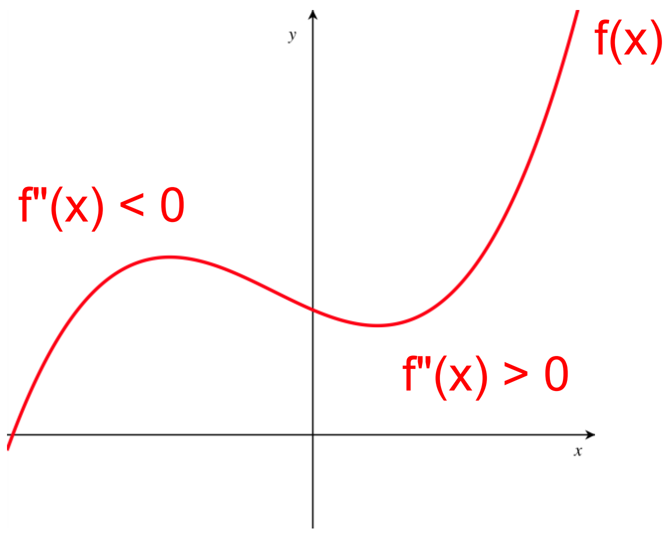
L'équation de Maxwell – Gauss peut donc être exprimée sous la forme :

$$\boxed{\Delta V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad \text{Équation de Poisson}}$$

Signification physique :

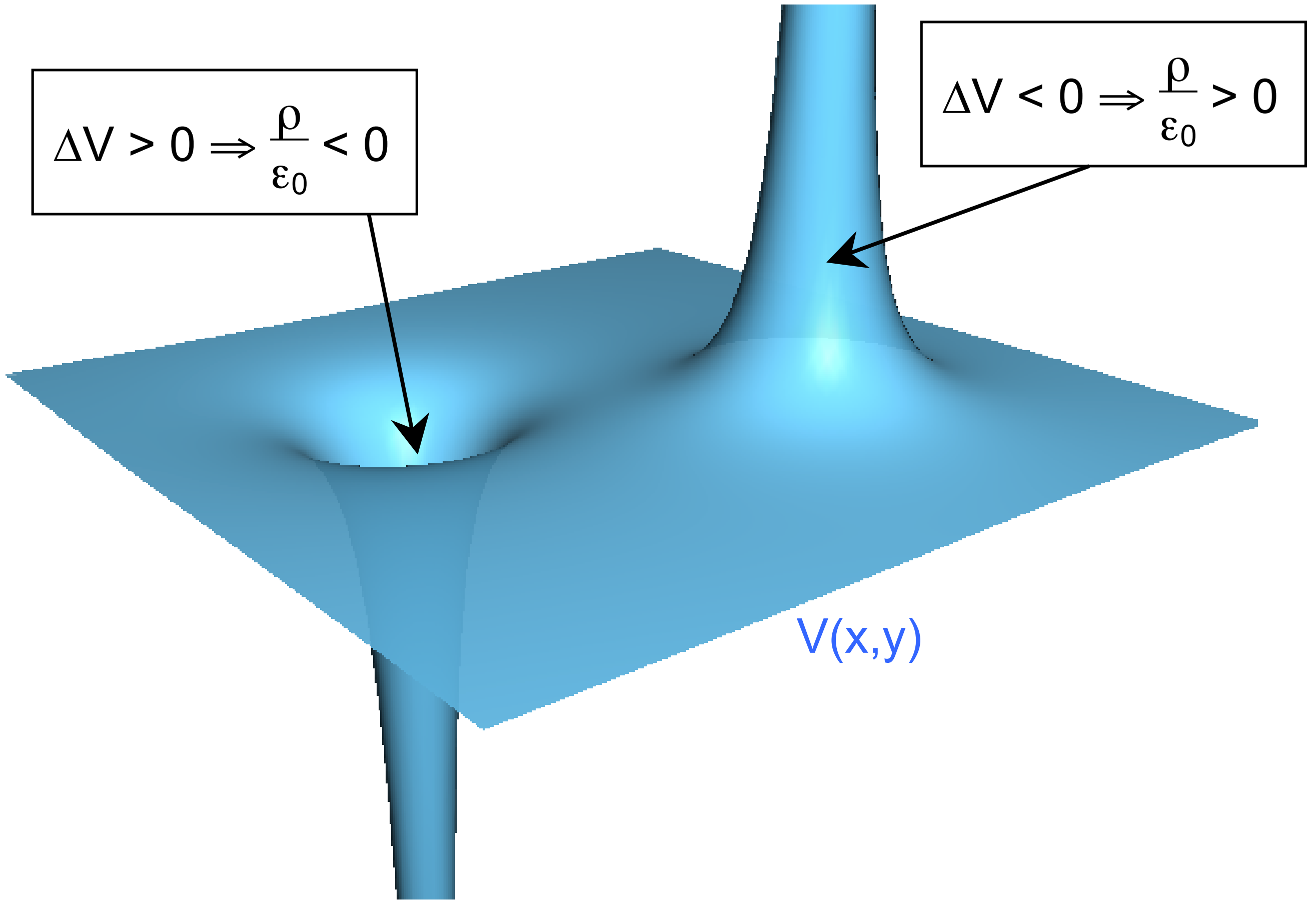
Le laplacien du potentiel calculé en un point P est relié aux variations de V autour du point P.
$\Delta V(P)$ mesure la différence entre la valeur de $V(P)$ et la valeur moyenne $\overline{V(P)}$ autour du point P.

On peut aussi relier cette notion à celle de courbure d'une courbe :



Le laplacien non-nul du potentiel traduit l'existence d'un extremum du potentiel.

On prend l'exemple du potentiel V(x,y) créé par deux charges de signes opposés :



Au contraire, si V(r) varie de manière régulière $(\partial V, \partial r) = C^{te}$, alors on sait que le champ électrique $\vec{E}$ est constant.
Dans ce cas :

$$\boxed{\Delta V = 0 \qquad \text{Équation de Laplace}}$$

$\Rightarrow$ pas de charges

Le potentiel n'admet pas d'extremum en dehors de l'endroit où sont localisées les charges

3.3 Rotationnel de $\vec{E}$

Nous cherchons à calculer $\overrightarrow{\text{rot}}\,(\vec{E})$

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{E}) = \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right)\vec{e}_x + \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}\right)\vec{e}_y + \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right)\vec{e}_z$$

avec $\quad \vec{E} = -\,\overrightarrow{\text{grad}}\,V$

$$\vec{E} = -\frac{\partial V}{\partial x}\vec{e}_x - \frac{\partial V}{\partial y}\vec{e}_y - \frac{\partial V}{\partial z}\vec{e}_z \qquad \text{en coord. cartésiennes}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{E}) = &-\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)\right)\vec{e}_x \\ &-\left(\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)\right)\vec{e}_y \\ &-\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)\right)\vec{e}_z\end{aligned}$$

D'où finalement :

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{E}) = \vec{0}$$

Le rotationnel d'un gradient est toujours nul !

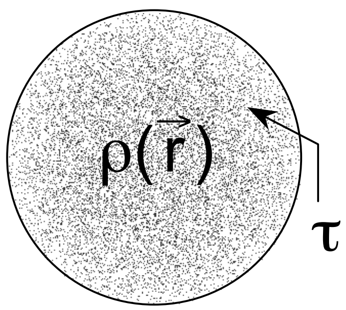
Dans le domaine de l'électrostatique :

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{E}) = \vec{0}$$

Cette équation se généralise à l'électromagnétisme :

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \text{Équation de Maxwell – Faraday :}$$

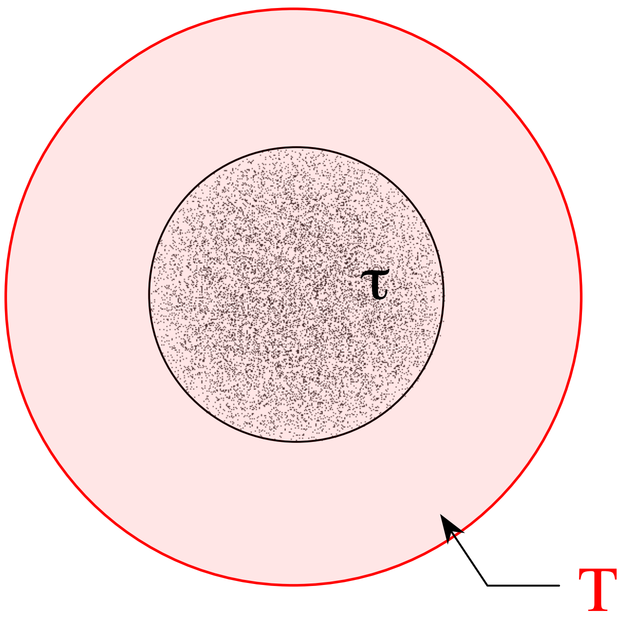
3.4 Densité d'énergie électrostatique



Pour une distribution volumique de charges, l'énergie potentielle est :

$$E_p = \frac{1}{2}\iiint_{\tau} \rho(\vec{r})\, V(\vec{r})\, d\tau$$

Cette intégrale peut se calculer sur un volume défini par une surface Σ entourant très largement le volume τ de départ :



En effet, en dehors de τ, la densité de charges est nulle,

$\Rightarrow$ le calcul de E_p n'est pas affecté par ce choix de domaine d'intégration

Le calcul de l'énergie potentielle dans ce cas devient :

$$E_p = \frac{1}{2}\iiint_{T} \rho(\vec{r})\, V(\vec{r})\, d\tau$$

avec $\rho = \varepsilon_0\, \vec{\nabla}\cdot\vec{E}$ (équation de Maxwell – Gauss)

$$E_p = \frac{\varepsilon_0}{2}\iiint_{T} \mathrm{div}(\vec{E})\, V(\vec{r})\, d\tau$$

En tenant compte de l'identité vectorielle suivante :

$$\mathrm{div}(V\vec{E}) = (\overrightarrow{\mathrm{grad}\,V})\cdot\vec{E} + V\cdot\mathrm{div}(\vec{E})$$

On arrive à :

$$E_p = \frac{\varepsilon_0}{2}\iiint_T \mathrm{div}(V\vec{E})\,d\tau - \frac{\varepsilon_0}{2}\iiint_T (\overrightarrow{\mathrm{grad}\,V})\cdot\vec{E}\,d\tau$$

Or, d'après le théorème d'Ostrogradski :

$$\iiint_T \mathrm{div}(V\vec{E})\,d\tau = \oiint_\Sigma (V\vec{E})\cdot\vec{dS}$$

De plus, par définition :

$$\vec{E} = -\,\overrightarrow{\mathrm{grad}\,V}$$

Donc,

$$E_p = \frac{\varepsilon_0}{2}\oiint_\Sigma (V\vec{E})\cdot\vec{dS} + \frac{\varepsilon_0}{2}\iiint_T \vec{E}\cdot\vec{E}\,d\tau$$

Quand on fait varier la taille du volume (T) et de la surface (Σ) d'intégration jusqu'à l'infini, la distribution de charge est assimilable à une charge ponctuelle.

Dans ces conditions, à grande distance sur Σ :

- $V(\vec{r})$ diminue en $1/r$
- $E(\vec{r})$ diminue en $1/r^2$
- dS augmente en r^2

$$\Rightarrow \quad (V\vec{E})\cdot\vec{dS} \to 0 \qquad \text{quand } r \to \infty$$

$$\Rightarrow \oiint_{\Sigma} (V\vec{E})\cdot\vec{dS} \to 0 \qquad \text{quand } r \to \infty$$

L'expression de l'énergie potentielle se résume à :

$$E_p = \frac{\varepsilon_0}{2} \iiint_T E^2 \, d\tau$$

La quantité $\frac{\varepsilon_0}{2}E^2(M)$ est assimilable à une énergie volumique ou à une densité d'énergie.

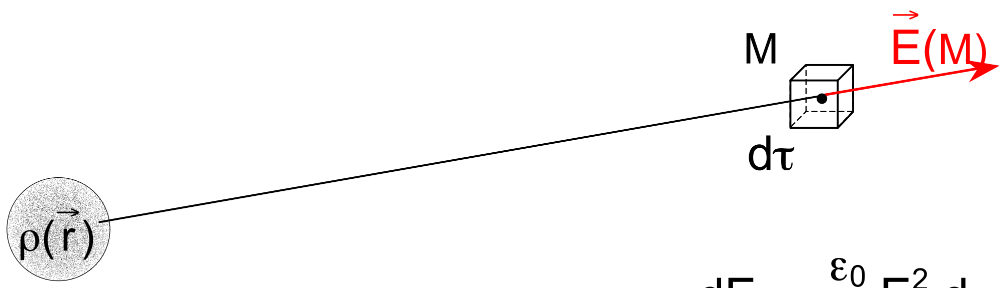
$$[\varepsilon_0] = M^{-1}\, L^{-3}\, T^4\, I^2$$

$$[E] = M\, L\, T^{-3}\, I^{-1}$$

$$\Rightarrow \left[\frac{\varepsilon_0}{2}E^2\right] = M\, L^{-1}\, T^{-2} = (M\, L^2\, T^{-2})\, L^{-3} \quad \text{énergie / volume}$$

Application :

Connaissant l'expression du champ électrique rayonné par une distribution de charges, il est possible de calculer l'énergie potentielle électrostatique de cette distribution de charges.



$$dE_p = \frac{\varepsilon_0}{2} E^2 \, d\tau$$

Exemple d'application :

Calcul de l'énergie potentielle d'une sphère de rayon R uniformément chargée en volume avec la densité de charge ρ.

Les expressions des potentiels et champs électriques à l'intérieur et à l'extérieur de la sphère ont été établies dans le chapitre 2 – théorème de Gauss.

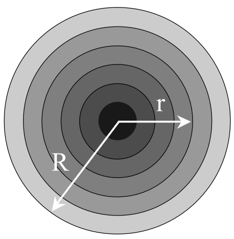
Plusieurs méthodes sont possibles pour calculer l'énergie potentielle de la sphère chargée :

• On calcule simplement $E_p = \frac{1}{2}\int_V \rho(r)\, V_{int}(r)\, d^3r = \frac{\rho}{2}\int_0^R V_{int}(r)\, 4\pi r^2 dr = \frac{2\pi\rho^2}{\varepsilon_0}\int_0^R \left(\frac{R^2 r^2}{2} - \frac{r^4}{6}\right) dr = \frac{4\,\pi\,\rho^2\,R^5}{15\,\varepsilon_0}$

• On peut aussi calculer $E_p = \int_{Espace} \frac{\varepsilon_0 E^2}{2}\, dV = \int_0^R \frac{\varepsilon_0 E_{int}^2}{2}\, dV + \int_R^\infty \frac{\varepsilon_0 E_{ext}^2}{2}\, dV$

$$E_p = \int_0^R \frac{\varepsilon_0}{2}\left(\frac{\rho r}{3\varepsilon_0}\right)^2 4\pi r^2 dr + \int_R^\infty \frac{\varepsilon_0}{2}\left(\frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0\, r^2}\right)^2 4\pi r^2 dr = \frac{4\,\pi\,\rho^2\,R^5}{15\,\varepsilon_0}$$

• On calcule le travail effectué pour amener les charges depuis l'infini en O :



À chaque étape, on amène une couche d'épaisseur *dr* correspondant à la quantité de charge *dq*. Le travail nécessaire pour amener cette couche de charges d'épaisseur *dr* depuis l'infini sur la petite sphère de rayon *r* est donnée par :

$$dW = dq\,[V(r) - V(\infty)] = \rho\, 4\pi\, r^2\, dr\, \frac{\rho\, r^2}{3\,\varepsilon_0}$$

où V(r) est le potentiel à la surface de la sphère de rayon r uniformément chargée en volume

$$E_p = \int dW = \frac{4\pi\,\rho^2}{3\,\varepsilon_0}\int_0^R r^4 dr = \frac{4\,\pi\,\rho^2\,R^5}{15\,\varepsilon_0}$$