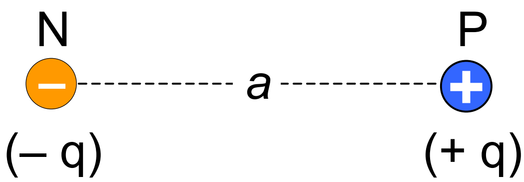
4 LE DIPÔLE ÉLECTRIQUE

4.1 Définition

Un dipôle électrostatique est défini par ensemble de charges distinctes disposées de telle sorte que le barycentre des charges positives ne coïncide pas avec le barycentre des charges négatives.

Le dipôle le plus simple consiste en un couple de charges opposées P (+ q) et N (– q) distantes de ***a*** :



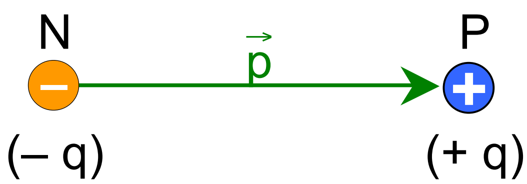
Cette configuration est observable pour certaines molécules (HCl par exemple).

La paramètre ***a*** est généralement très petit (10^{-10} m) devant les distances d'observation (1 m).

4.2 Moment dipolaire

Le moment dipolaire, noté $\vec{p}$ est défini par :

$$\vec{p} = q\,\overrightarrow{NP}$$



Dans le cas d'un ensemble de N charges q_i repérées par leur position $\vec{r}_i$:

$$\vec{\mathrm{p}} = \sum_{i=1}^{N} q_i \ \vec{r}_i$$

L'expression ci-dessus est cohérente avec la définition du dipôle. En effet, on peut montrer que $\vec{\mathrm{p}}$ ne dépend pas de l'origine choisie si la somme des N charges est nulle :

$$\vec{\mathrm{p}} = \sum_{i=1}^{N} q_i \ \vec{r}_i = \sum_{i=1}^{N} q_i \ \overrightarrow{OA_i} = \sum_{i=1}^{N} q_i \left(\overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'A_i}\right)$$

$$= \overrightarrow{OO'} \underbrace{\sum_{i=1}^{N} q_i}_{=0} + \sum_{i=1}^{N} q_i \ \overrightarrow{O'A_i} = \sum_{i=1}^{N} q_i \ \overrightarrow{O'A_i}$$

Unités :

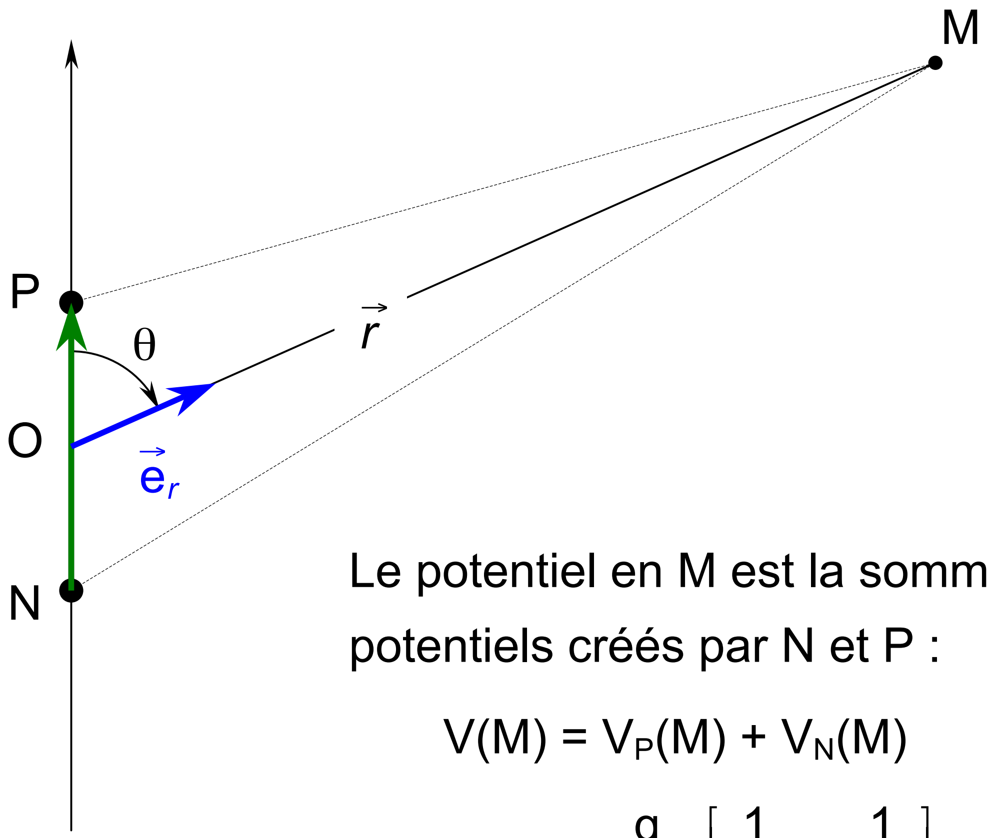
L'unité S.I. est le coulomb-mètre.

Le debye (D) est parfois employé :

$$1 \text{ D} = 3.336 \ 10^{-30} \text{ C}\cdot\text{m}$$

4.3 Potentiel généré par un dipôle

On considère le dipôle formé par deux charges opposées



Le potentiel en M est la somme des potentiels créés par N et P :

$$V(M) = V_P(M) + V_N(M)$$

$$V(M) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{PM} - \frac{1}{NM}\right]$$

Avec :

$$PM = \left|\overrightarrow{PM}\right| = \left|\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OP}\right|$$

$$= \sqrt{(\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OP})\cdot(\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OP})}$$

$$= \sqrt{OM^2 - 2\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{OP} + OP^2}$$

$$= \sqrt{r^2 - r\,a\cos\theta + \frac{a^2}{4}}$$

Comme a << r, on peut négliger les termes du 2nd ordre :

$$PM \approx \sqrt{r^2 - r\,a\cos\theta}$$

$$= r\sqrt{1 - \frac{a}{r}\cos\theta}$$

On effectue un développement limité au 1er ordre :

$$(1 - x)^{-½} = 1 + \frac{x}{2}$$

d'où $$\frac{1}{PM} = \frac{1}{r}\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{a}{r}\cos\theta}} = \frac{1}{r}\left(1 + \frac{a\cos\theta}{2r}\right)$$

De même pour NM :

$$NM = \left|\overrightarrow{NM}\right| = \left|\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{ON}\right|$$

$$= \sqrt{OM^2 - 2\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON} + ON^2}$$

$$= \sqrt{r^2 + r\,a\cos\theta + \frac{a^2}{4}}$$

$$NM = r\sqrt{1 + \frac{a}{r}\cos\theta}$$

d'où $$\frac{1}{NM} = \frac{1}{r}\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{a}{r}\cos\theta}} = \frac{1}{r}\left(1 - \frac{a\cos\theta}{2r}\right)$$

Finalement : $$\left[\frac{1}{PM} - \frac{1}{NM}\right] = \frac{a\cos\theta}{r^2}$$

d'où : $$V(M) = \frac{q\,a\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0\,r^2}$$

Comme $\qquad q\ a \cos\theta = q\ \overrightarrow{NP}\cdot\frac{\vec{r}}{r} = q\ \overrightarrow{NP}\cdot\vec{e}_r$

V(M) peut s'écrire :

$$V(M) = \frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0\ r^3} = \frac{\vec{p}\cdot\vec{e}_r}{4\pi\varepsilon_0\ r^2}$$

4.4 Champ électrique créé par le dipôle

On déduit le champ électrique $\vec{E}(M)$ créé au point M à partir de l'expression du potentiel :

$$\vec{E} = -\ \overrightarrow{\text{grad}\ V}$$

On travaille en coordonnées sphériques.
Comme le problème a une symétrie axiale, les grandeurs physiques $\vec{E}$ et V ne dépendent pas de φ mais seulement de r et θ.

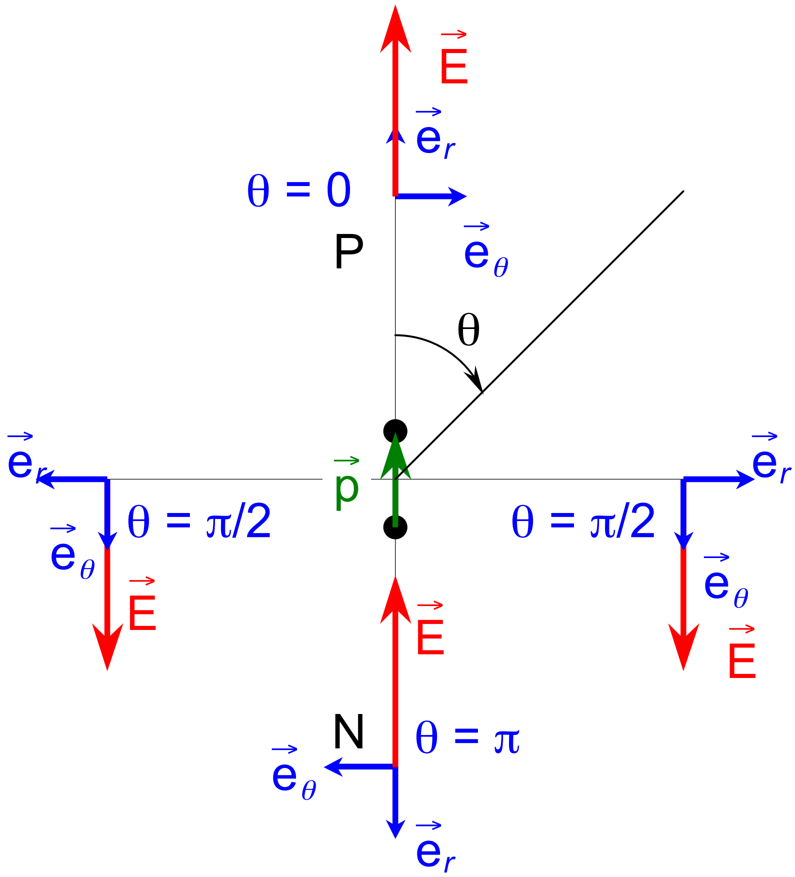
Le champ électrique n'a donc pas de composante selon $\vec{e}_\varphi$,

$$\vec{E}\ (\vec{r}) = \vec{E}\ (r,\theta) = E_r(r,\theta)\ \vec{e}_r + E_\theta(r,\theta)\ \vec{e}_\theta$$

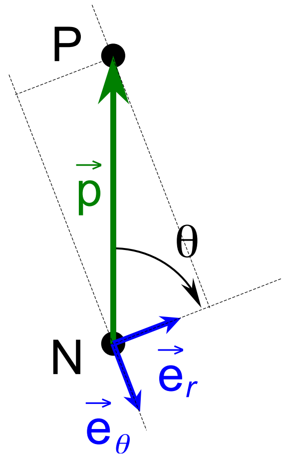
avec : $\qquad E_r(r,\theta) = -\ \frac{\partial V}{\partial r} = \frac{q\ a \cos\theta}{2\pi\varepsilon_0\ r^3}$

et $\qquad E_\theta(r,\theta) = -\ \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{q\ a \sin\theta}{4\pi\varepsilon_0\ r^3}$

d'où $\qquad \vec{E}(r,\theta) = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0\ r^3}\left[\ 2\cos\theta\ \vec{e}_r + \sin\theta\ \vec{e}_\theta\ \right]$



On peut encore réécrire l'expression du champ électrique en fonction de $\vec{p}$.



Dans la base $(\vec{e}_r,\vec{e}_\theta)$, $\vec{p}$ s'exprime :

$$\vec{p} = p\cos\theta\ \vec{e}_r - p\sin\theta\ \vec{e}_\theta$$

$$\Rightarrow \quad p\sin\theta\ \vec{e}_\theta = p\cos\theta\ \vec{e}_r - \vec{p}$$

En introduisant cette égalité dans l'expression de $\vec{E}$, il vient :

$$\vec{E}(r,\theta) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\, r^3}\left[\,3\,p\cos\theta\ \vec{e}_r - \vec{p}\,\right]$$

$$\vec{E}(r,\theta) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\, r^3} \left[\, 3\, (\vec{p}\cdot\vec{e}_r)\, \vec{e}_r - \vec{p}\, \right]$$

Il est recommandé d'aller voir les simulations accessibles aux adresses suivantes :

http://subaru2.univ-lemans.fr/enseignements/physique/02/electri/dipole1.html

http://subaru2.univ-lemans.fr/enseignements/physique/02/electri/dipole.html

http://subaru2.univ-lemans.fr/enseignements/physique/02/electri/tripole.html

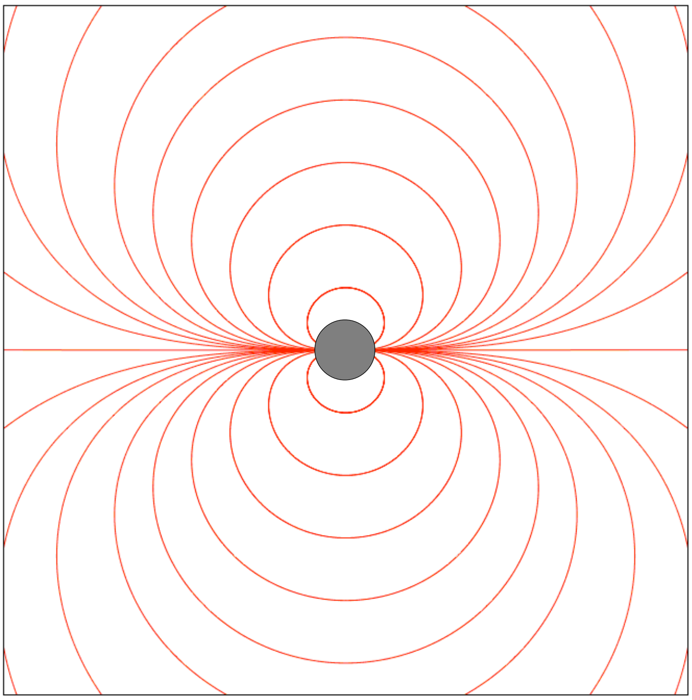
et plus généralement toutes les simulations accessibles depuis :

http://subaru2.univ-lemans.fr/enseignements/physique/02/electri/menuelec.html

Equipotentielles :

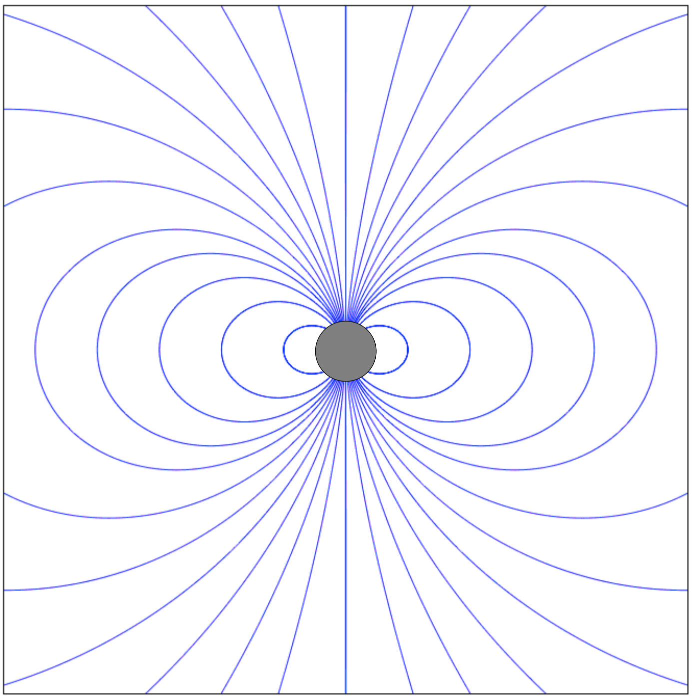
Elles sont définies par l'équation $V(M) = \dfrac{q\, a \cos\theta}{4\pi\varepsilon_0\, r^2} = Cte$

Soit $r^2 = K{\cdot}\cos\theta$



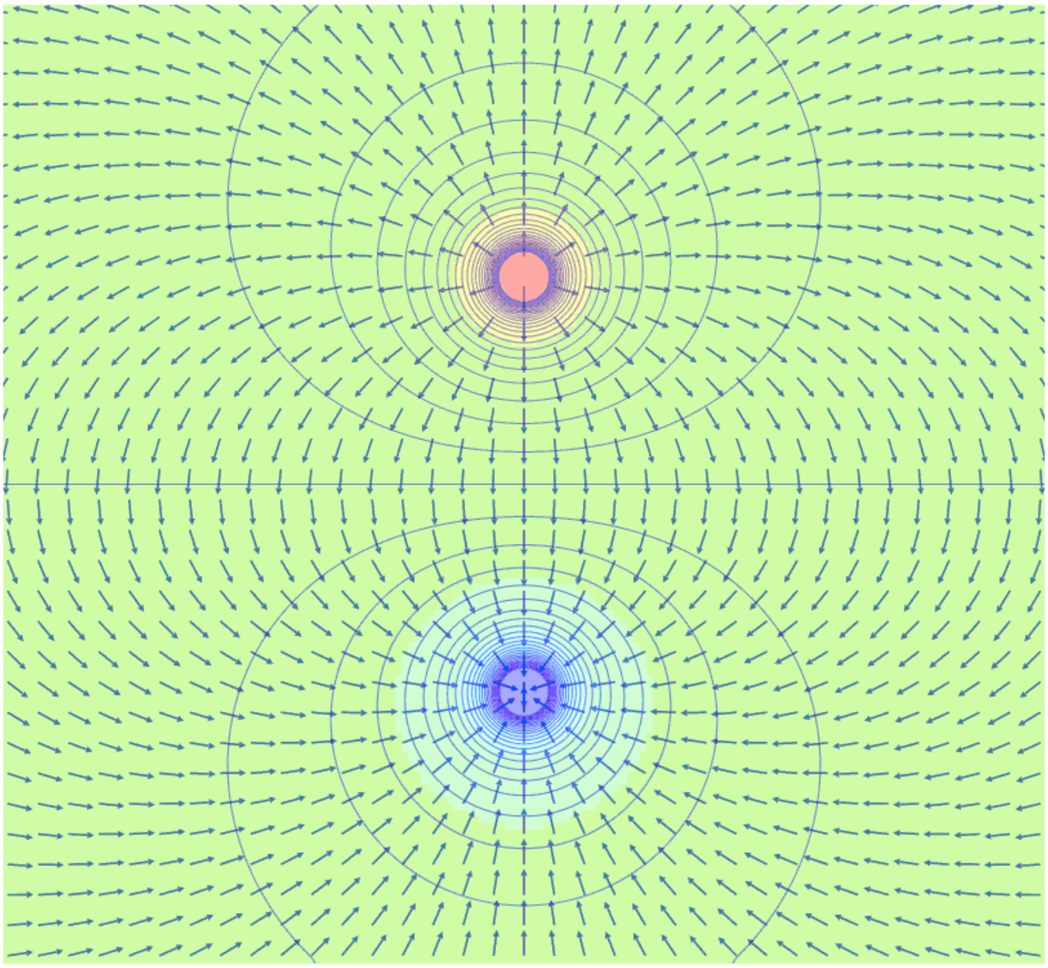
Lignes de champ :

Elles sont définies par l'équation $\vec{d\ell} \wedge \vec{E} = \vec{0}$
Soit $r = K{\cdot}\sin^2\theta$



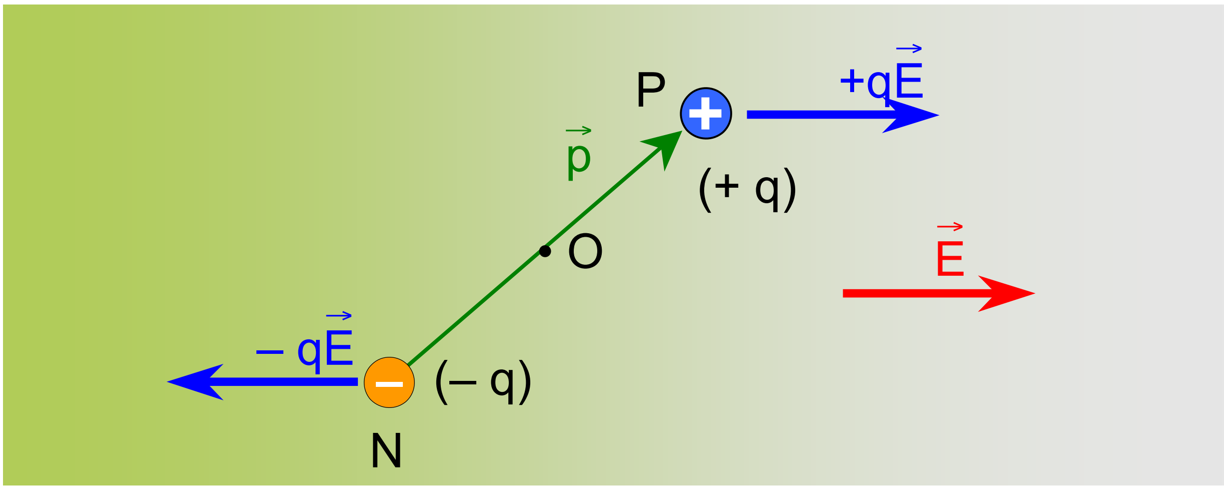
Les équations définissant les lignes de champ et les équipotentielles ne sont valables que pour $r >> a$.
La partie centrale de chaque figure est grisée car dans cette région, les équations précédentes ne sont plus valables.

Pour une description plus précise des lignes de champ et des équipotentielles, il faut calculer numériquement les valeurs en chaque point :



Dipôle dans un champ électrique uniforme

On considère un dipôle dans une région de l'espace où règne un champ électrique uniforme :



Le dipôle est soumis à un couple de forces.

Le moment du couple est donné par la relation :

$$\vec{C} = \vec{M}_{-q\vec{E}/O} + \vec{M}_{+q\vec{E}/O}$$

$$\vec{C} = \overrightarrow{ON} \wedge (-\,q\vec{E}) + \overrightarrow{OP} \wedge (+\,q\vec{E})$$

$$\vec{C} = (\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{NO}) \wedge q\vec{E} = q\,\overrightarrow{NP} \wedge \vec{E} = \vec{p} \wedge \vec{E}$$

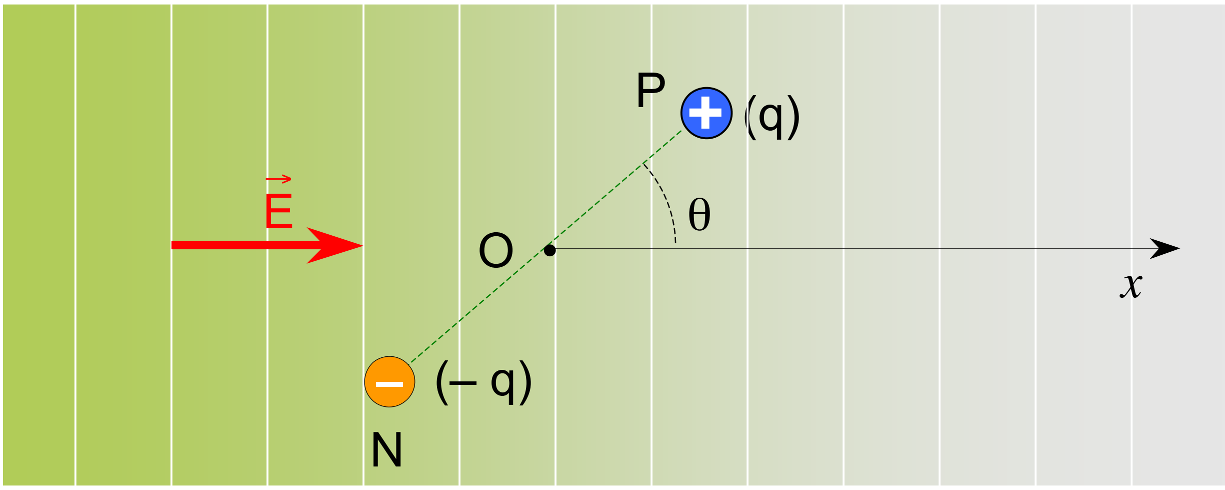
Le champ électrique influence le dipôle en le faisant tourner de telle sorte que $\vec{p}$ s'aligne avec $\vec{E}$.

Remarque :

La force résultante exercée sur le dipôle est nulle.

- si le dipôle ne peut pas tourner, il ne se passe rien
- si le dipôle peut tourner, il s'aligne alors selon $\vec{E}$.

Calculons l'énergie potentielle du dipôle (énergie qu'il possède du fait de son orientation relative par rapport au champ : si on le lâche, il se tourne spontanément) :



On choisit $\vec{E}$ parallèle à Ox, $\vec{p}$ fait un angle θ avec $\vec{E}$.

$$E_p = E_p(N) + E_p(P)$$

$$E_p = -q\,V(N) + q\,V(P) = q\,[\,V(P) - V(N)\,]$$

Or en chaque point, le potentiel est relié au champ électrique par :

$$-\overrightarrow{\text{grad}}\,V = \vec{E}$$

d'où, dans le cas présent :

$$V(x) = -\int E\,dx$$

$$V(x) = -E\,x + C^{te}$$

Donc l'énergie potentielle du dipôle est :

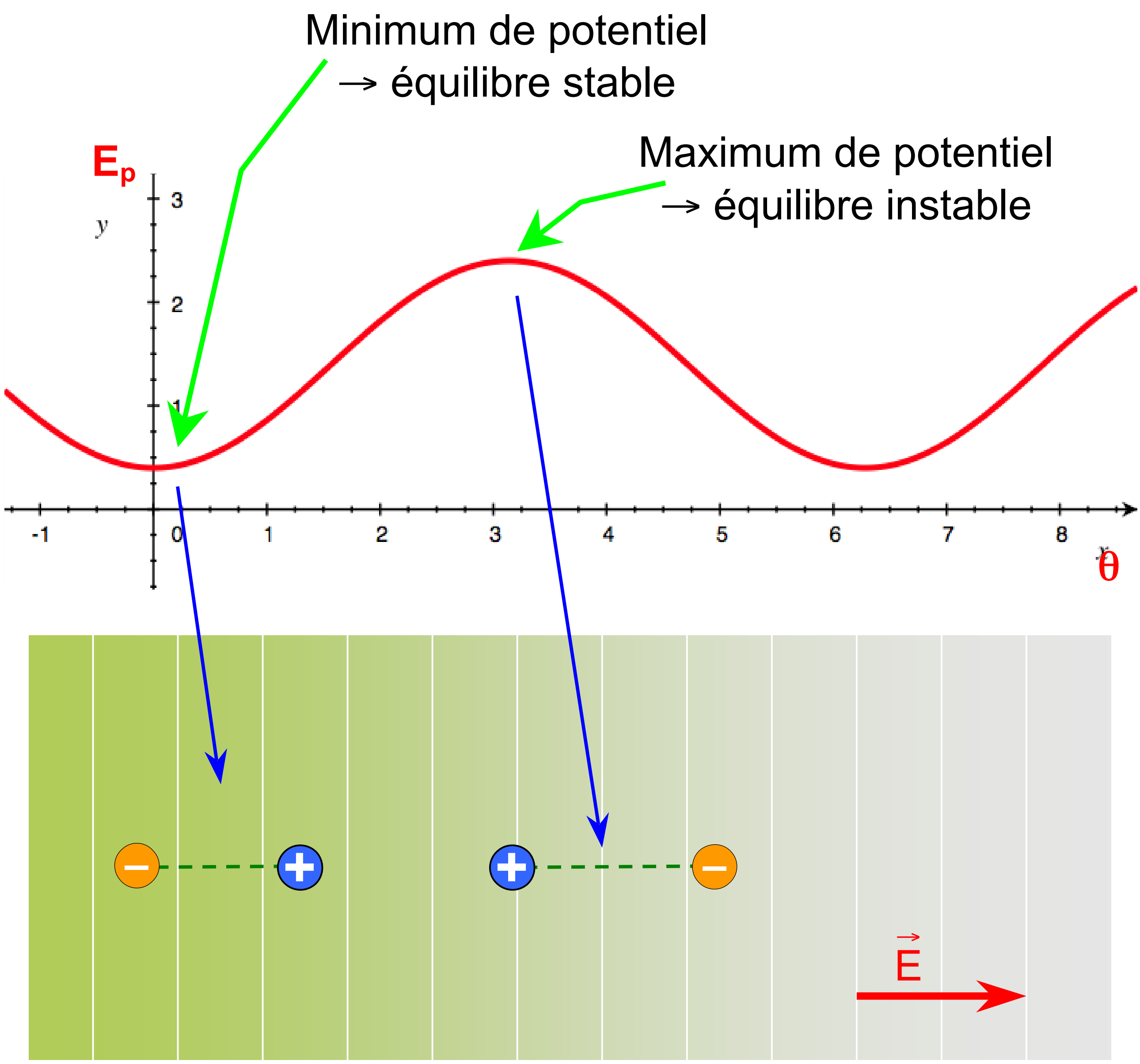
$$E_p = - q\, E\, (x_P - x_N)$$

Avec $\quad x_P - x_N = NP \cos\theta$

D'où $\quad E_p = - q\, NP\, E \cos\theta$

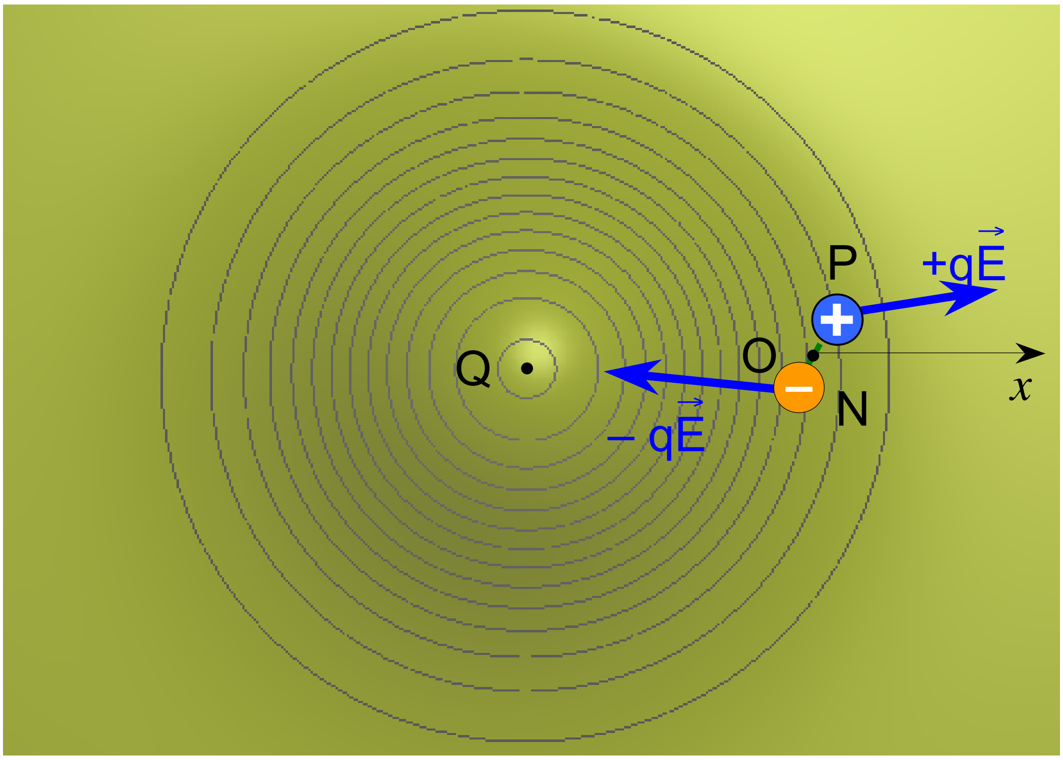
Soit, sous forme vectorielle :

$$E_p = - \vec{p} \cdot \vec{E}$$



4.5 Dipôle dans un champ électrique quelconque (non uniforme)

On considère un dipôle dans une région de l'espace où règne un champ électrostatique non uniforme :



La résultante des forces appliquées sur le dipôle est non nulle : rotation + déplacement.

Le dessin ci-dessus n'est pas très représentatif du cas de figure généralement observé. La taille du dipôle est très petite (10^{-10} m) devant la distance caractéristique des variations du champ électrostatique (1 m).

Pour des raisons de simplicité, nous effectuerons les calculs en coordonnées cartésiennes. Les résultats obtenus pourront cependant être considérés comme valables pour les autres système de coordonnées.

Calculons la composante de cette force $\vec{F}$ selon Ox :

$$F_x = q\ [\ E_x(P) - E_x(N)\ ]$$

comme N et P sont proches en regard de la distance qui les sépare de la charge Q, on peut effectuer un développement limité à l'ordre 1 :

$$E_x(P) = E_x(N) + (x_P - x_N)\,\frac{\partial E_x}{\partial x} + (y_P - y_N)\,\frac{\partial E_x}{\partial y} + (z_P - z_N)\,\frac{\partial E_x}{\partial z}$$

Ce qui peut se réécrire :

$$F_x = p_x\,\frac{\partial E_x}{\partial x} + p_y\,\frac{\partial E_x}{\partial y} + p_z\,\frac{\partial E_x}{\partial z}$$

$$F_x = (\vec{p}\cdot\overrightarrow{\text{grad}})E_x = (\vec{p}\cdot\vec{\nabla})\ E_x$$

On peut généraliser le résultat à F_y et F_z, d'où :

$$\vec{F} = (\vec{p}\cdot\vec{\nabla})\ E_x\ \vec{e}_x + (\vec{p}\cdot\vec{\nabla})\ E_y\ \vec{e}_y + (\vec{p}\cdot\vec{\nabla})\ E_z\ \vec{e}_z$$

$$\vec{F} = (\vec{p}\cdot\vec{\nabla})\ \vec{E}$$

Il apparaît ainsi que la force exercée sur le dipôle dépend :

- de l'orientation du dipôle / variations du champ
- des variations du champ : plus celles-ci sont importantes, plus la force exercée va être grande.

L'énergie potentielle de ce dipôle placé dans un champ non uniforme est :

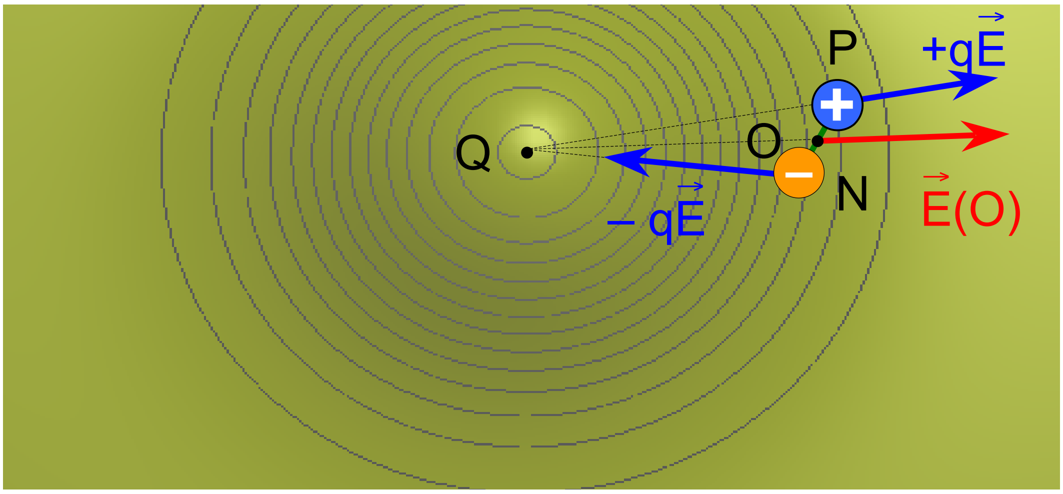
$$E_p = q\,[\,V(P) - V(N)\,]$$

avec $V(P) = V(N) + \overrightarrow{\nabla V}\cdot\overrightarrow{NP}$

d'où : $E_p = q\,\overrightarrow{NP}\cdot\overrightarrow{\nabla V}$

$$E_p = -\,\vec{p}\cdot\vec{E}(O)$$

Encore une fois, on suppose que les variations du potentiel sont faibles sur les distances caractéristiques du dipôle et que $\overrightarrow{\nabla V}$ est correctement approximé par $\vec{E}(O)$, le champ régnant au point O.



L'action d'un champ non uniforme