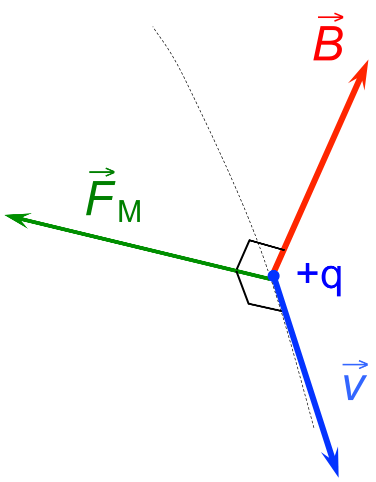
7. ACTION D'UN CHAMP MAGNÉTIQUE SUR UNE CHARGE EN MOUVEMENT ET SUR UN CIRCUIT PARCOURU PAR UN COURANT

7.1 Composante magnétique de la force de Lorentz

Soit une particule chargée se mouvant dans une région de l'espace où règne un champ magnétique $\vec{B}$:



La particule est soumise à la composante magnétique de la force de Lorentz :

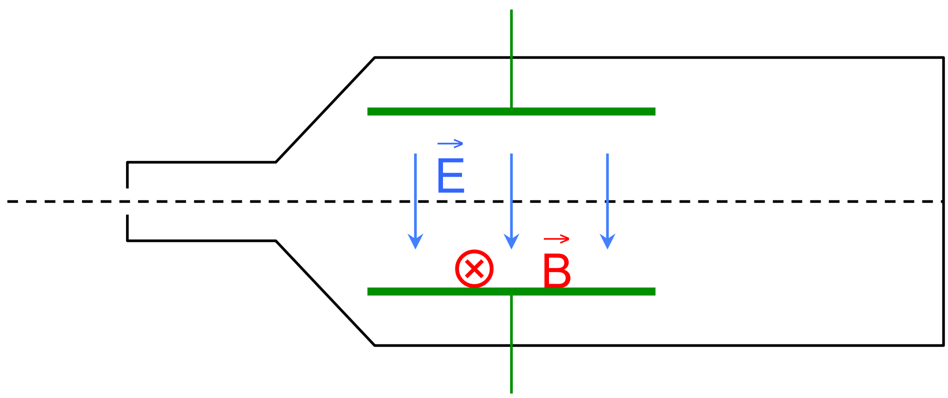
$$\vec{F}_M = q\ \vec{v} \wedge \vec{B}$$

À ne pas confondre avec la force de Laplace ! (étudiée ultérieurement)

7.2 Expérience de Thomson (1897)

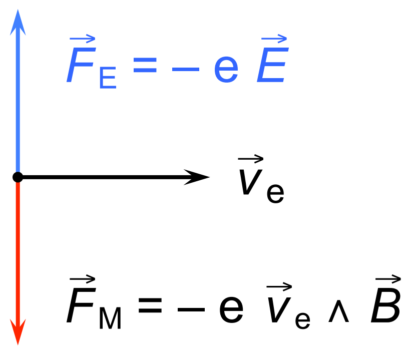
On considère une ampoule sous vide dans laquelle on accélère un faisceau d'e$^-$ (qq dizaine de keV)

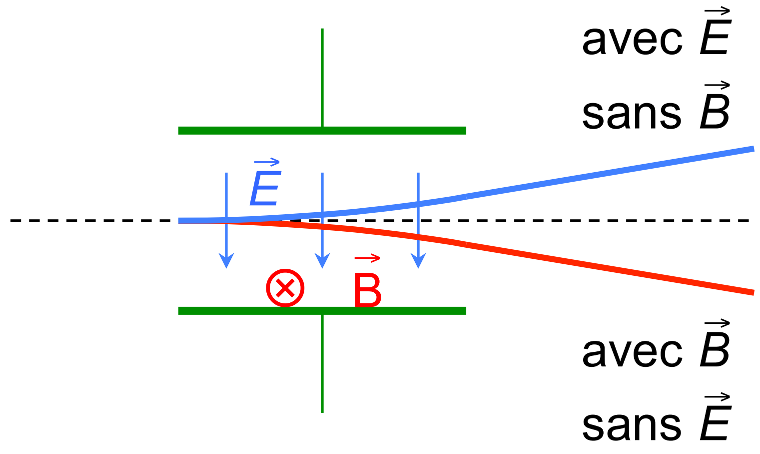
L'ampoule est équipée de plaques électrostatiques et est immergée dans un champ d'induction magnétique



Les e^- sont soumis à deux forces (on néglige la gravité) :

- la force électrostatique,
- la composante magnétique de la force de Lorentz,





On ajuste la tension entre les plaques électrostatiques de telle sorte que le faisceau d'électrons ne soit pas dévié.

$$\vec{F}_E + \vec{F}_M = \vec{0}$$

• On peut ainsi déterminer la vitesse des e^- :

$$v_{e-} = E / B$$

• Comme l'énergie cinétique des e^- est :

$$E_c = e \cdot V = \tfrac{1}{2}\, m_e\, v_e^2$$

On en déduit le rapport e/m_e :

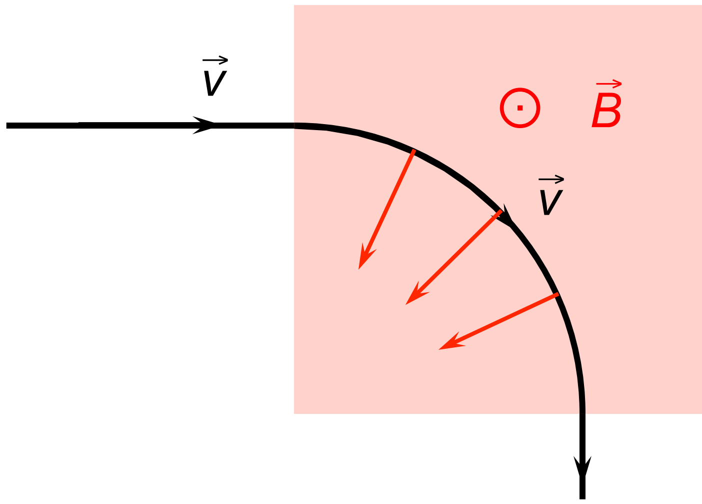
$$e/m_e = \frac{1}{2\,V}\left(\frac{E}{B}\right)^2$$

Connaissant e, on en déduit $m_e = 9.11\ 10^{-31}$ kg

7.3 Conservation de l'énergie mécanique

On considère une particule de charge positive se déplaçant dans une région de l'espace où règne un champ d'induction magnétique.

Soumise à la force magnétique $\vec{F}_M = q\ \vec{v} \wedge \vec{B}$, la particule a une trajectoire incurvée :



- La variation d'énergie cinétique est égale au travail de la force magnétique.
- Or, celle-ci est perpendiculaire à $\vec{v}$ ($\vec{F}_M = q\vec{v} \wedge \vec{B}$) donc son travail est nul.

  Démonstration :

  $$\frac{dE_C}{dt} = \frac{1}{2} m \frac{d}{dt}(\vec{v} \cdot \vec{v}) = m\ \vec{v}\ \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{v}\ m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{v}\ (q\vec{v} \wedge \vec{B}) = 0$$

- Sous l'influence d'un champ d'induction magnétique, la trajectoire de la particule est modifiée sans variation d'énergie cinétique.

Quelle est la trajectoire de la particule ?

• La particule se déplace dans un plan perpendiculaire à $\vec{B}$ avec une vitesse constante.

• La force magnétique exercée est à chaque instant normale à la vitesse $\vec{v}$.

$\Rightarrow$ la trajectoire de la particule est circulaire.

La force magnétique est égale à la force centripète :

$$q\ v\ B = \frac{m\ v^2}{R}$$

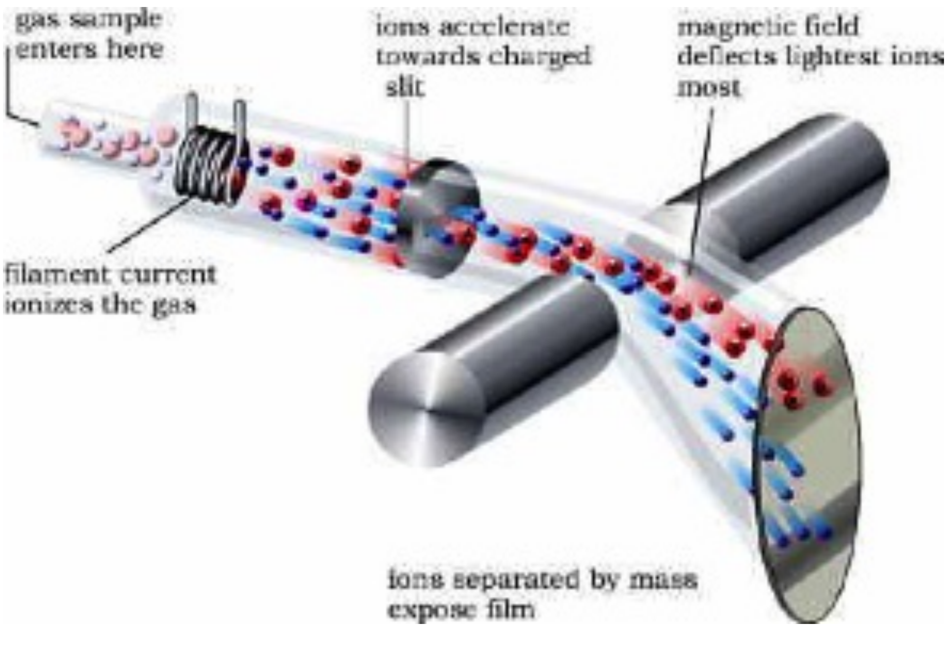
où R est le rayon de courbure de la trajectoire

d'où la valeur du rayon de courbure :

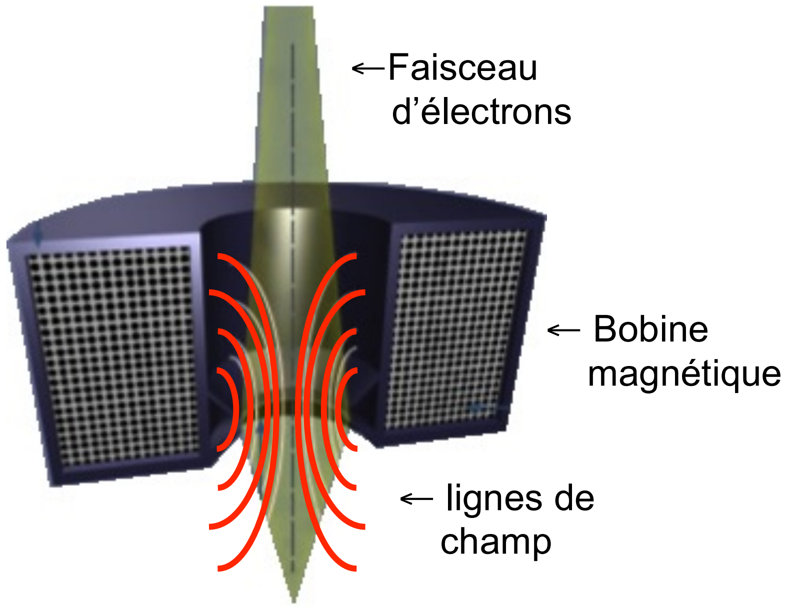
$$R = \frac{m\ v}{q\ B}$$

7.4 Applications

• Spectromètre de masse (*NanoSIMS du Museum*)



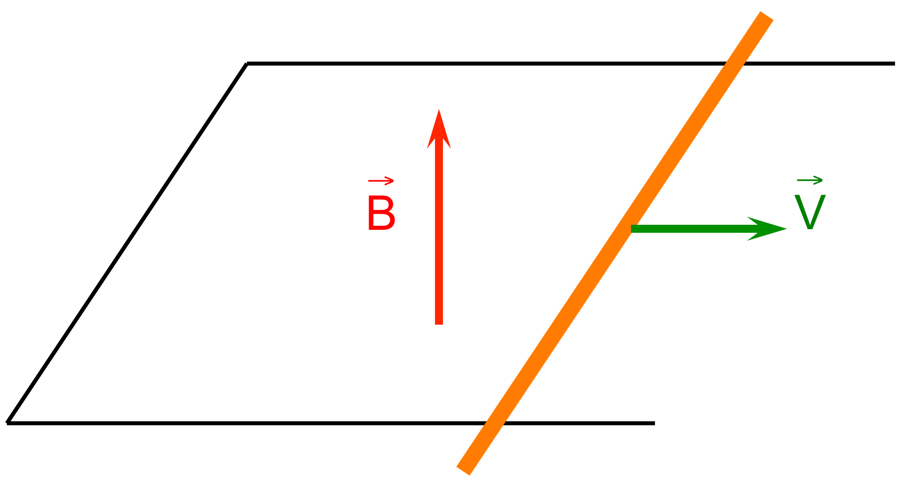
• Lentille électromagnétique des microscopes électroniques



7.5 Force de Laplace sur un élément de circuit électrique

7.5.1 Expérience

On considère un circuit conducteur en U sur lequel est posée une barre conductrice susceptible de se déplacer parallèlement à elle-même. L'ensemble est plongé dans un champ d'induction magnétique vertical :



On impose à la barre, initialement neutre, un mouvement de translation à la vitesse $\vec{V}$.

Que se passe-t-il ?

• Il apparaît un courant I dans le circuit,

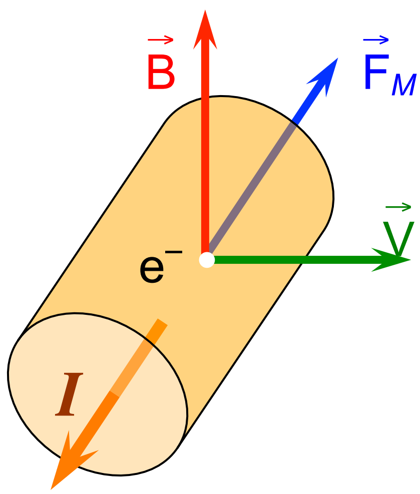
• Une force s'oppose au déplacement de la barre.

À quoi est dû le courant qui apparaît ?

La barre conductrice est constituée de charges fixes et de charges mobiles (e^-).

Ces dernières se déplaçant à la vitesse $\vec{V}$ dans le repère fixe R et sont donc soumises à la force magnétique :

$$\vec{F}_M = q\,\vec{V} \wedge \vec{B}$$



$\Rightarrow$ apparition d'un courant I

Remarque :

La force magnétique dépend du repère dans lequel on travaille. Dans un repère R' associé à la barre, les charges sont immobiles et pourtant elles sont soumises à une force ($\vec{F}_M$ déterminée dans le repère fixe R).

L'invariance de la force à laquelle sont soumis les e^- impose que dans R' cette force s'exprime :

$$\vec{F}' = q \cdot \vec{E}' = \vec{F}_M = = q\, \vec{V} \wedge \vec{B}$$

- Le champ $\vec{E}'$ vu dans R' est appelé le champ électromoteur et est égal à $\vec{V} \wedge \vec{B}$ (mesuré dans R).

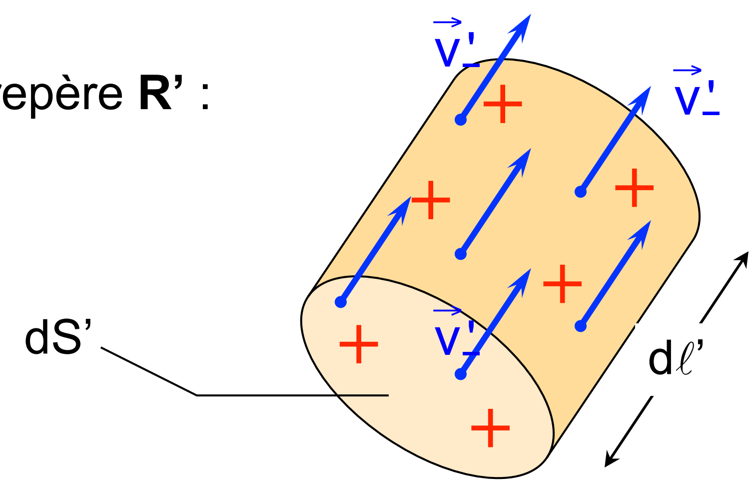
- Le changement de repère n'est pas trivial et fait intervenir les transformations de Lorentz de la **Relativité Restreinte**.

- Champs électrique et magnétique sont intimement liés, dépendent du choix du référentiel et l'explication complète du phénomène ne peut se faire que dans le cadre de la Relativité d'Einstein.

Quelle est l'origine de la force qui s'oppose au déplacement imposé de la barre ?

Examinons ce qui se passe à l'échelle microscopique dans un volume $d\tau'$ de la barre conductrice :

Dans le repère **R'** :



Il existe donc une densité de courant $\vec{j}\,'$ vue dans le repère *R'* telle que :

$$\vec{j}\,' = n'_+ \cdot q_+ \cdot \vec{v}'_+ + n'_- \cdot q_- \cdot \vec{v}'_- = n'_- \cdot q_- \cdot \vec{v}'_-$$

Dans les deux repères :

R'	*R*
n'_+	n_+
n'_-	n_-
$d\ell'$	$d\ell$
dS'	dS
$d\tau'$	$d\tau$
$\vec{v}'_+ = \vec{0}$	$\vec{V}$
$\vec{v}'_-$	$\vec{V} + \vec{v}'_-$

On a de plus invariance de la charge lors du changement de repère. La densité de courant vue depuis *R* est donc :

$$\vec{j} = n_+ \cdot q_+ \cdot \vec{V} + n_- \cdot q_- \cdot (\vec{V} + \vec{v}'_-) = n_- \cdot q_- \cdot \vec{v}'_-$$

Ce résultat est cohérent avec le fait que dans *R'*, les ions (+) sont immobiles ($v'_+ = 0$) alors que les e^- se déplacent la vitesse $\vec{v}'_-$ (*dans le cas où la conduction se fait par les e*$^-$).

L'élément de volume $d\tau$ est donc soumis à une force magnétique infinitésimale $d^2\vec{F}$ exercée sur toutes les charges en mouvement contenues dans $d\tau$:

$$d^2\vec{F} = [n_+ \cdot q_+ \cdot \vec{V} + n_- \cdot q_- \cdot (\vec{V} + \vec{v}'_-)] \wedge \vec{B}\, d\tau$$

$$d^2\vec{F} = (n_- \cdot q_- \cdot \vec{v'_-}) \wedge \vec{B}\, d\tau \qquad \text{(on suppose que } n_+ = n_-\text{)}$$

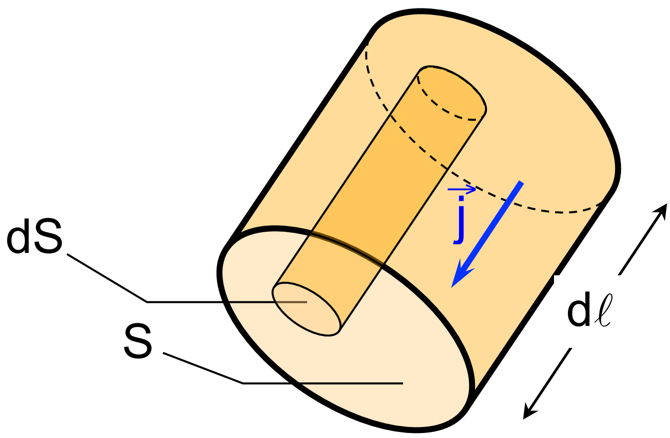
$$d^2\vec{F} = \vec{j} \wedge \vec{B}\, d\ell \cdot dS$$

$$d^2\vec{F} = j \cdot dS\, \vec{d\ell} \wedge \vec{B} \qquad \text{(cf. relation de Biot et Savart)}$$

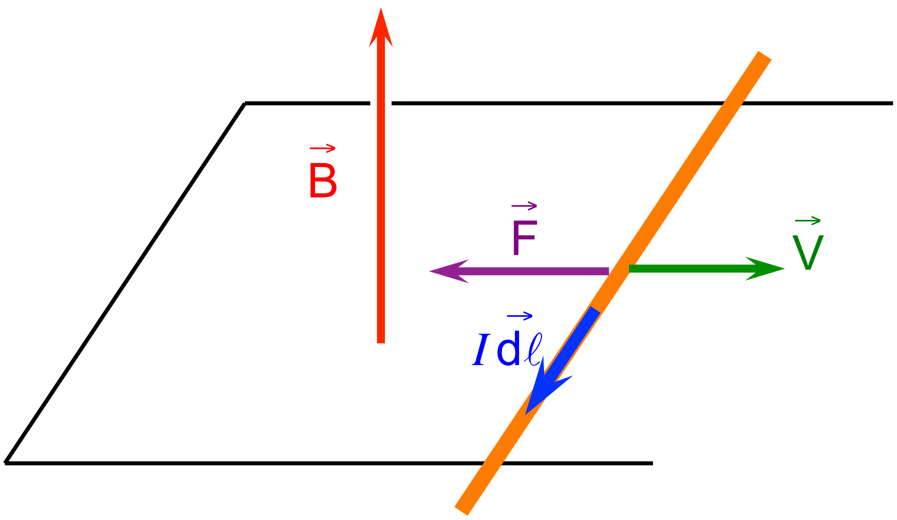
Une section du conducteur de longueur infinitésimal est donc soumise à la force :

$$\vec{dF} = \iint_S j \cdot dS\, \vec{d\ell} \wedge \vec{B}$$

$$\vec{dF} = I\, \vec{d\ell} \wedge \vec{B}$$



La barre mobile est donc soumise à une force $\vec{F}$ qui s'oppose au mouvement de la barre.



Nous avons donc expliqué les deux phénomènes observés :

- apparition d'un courant
- apparition d'une force qui s'oppose au déplacement imposé à la barre.

On peut généraliser le résultat à tout circuit conducteur fermé parcouru par un courant I. Celui-ci est soumis à une force appelée **force de Laplace** qui vaut :

$$\vec{F} = I \oint_{Circuit} \vec{d\ell} \wedge \vec{B}$$

Remarques :

- La relation doit être intégrée sur un circuit fermé.
- La force de Laplace est une force d'origine électromagnétique et constitue en quelque sorte une réaction du matériau conducteur à la force de Lorentz agissant sur tous ses constituants chargés (mobiles **et** immobiles).

  Les charges mobiles sont soumises à la force :

  $$n_- \cdot q_- \cdot (\vec{V} + \vec{v'_-}) \wedge \vec{B}$$

  Les charges immobiles sont soumises à la force :

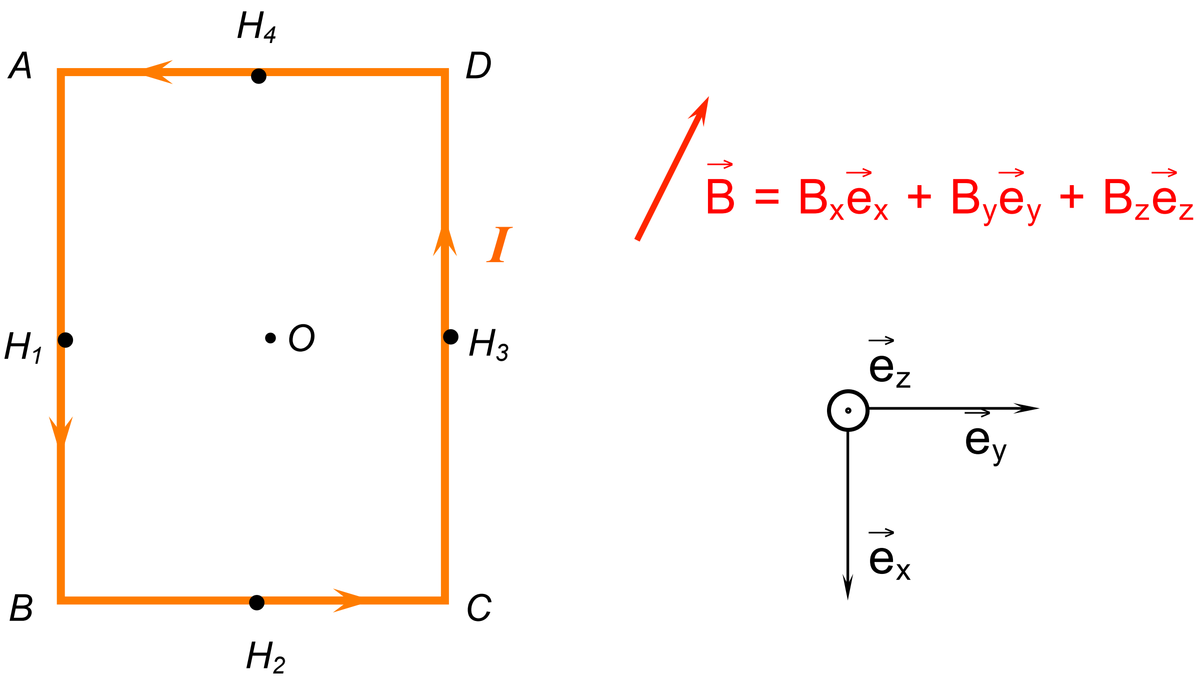
  $$n_+ \cdot q_+ \cdot \vec{V} \wedge \vec{B}$$

  C'est la différence entre les deux qui constitue la force de Laplace.
- La force qui apparaît s'oppose à la cause qui lui a donné naissance. Nous verrons plus tard que ce phénomène obéit à la **loi de Lenz**.

7.6 Couple exercé sur un circuit – Règle du flux maximum

7.6.1 Circuit rectangulaire

On considère un circuit conducteur rectangulaire (ABCD), de centre O, parcouru par un courant I. Le cadre horizontal est immergé dans un champ d'induction magnétique $\vec{B}$:



Les forces exercées sur le cadre sont :

- $\vec{F}_{AB} = I\,\vec{AB}\wedge\vec{B} = I\,a\,\vec{e}_x\wedge(B_x\vec{e}_x + B_y\vec{e}_y + B_z\vec{e}_z)$
  $= I\,a\,(B_y\vec{e}_z - B_z\vec{e}_y)$
- $\vec{F}_{BC} = I\,\vec{BC}\wedge\vec{B} = I\,b\,\vec{e}_y\wedge(B_x\vec{e}_x + B_y\vec{e}_y + B_z\vec{e}_z)$
  $= I\,b\,(-B_x\vec{e}_z + B_z\vec{e}_x)$
- $\vec{F}_{CD} = I\,\vec{CD}\wedge\vec{B} = -I\,\vec{AB}\wedge\vec{B} = -\vec{F}_{AB}$
  $= I\,a\,(-B_y\vec{e}_z + B_z\vec{e}_y)$
- $\vec{F}_{DA} = I\,\vec{DA}\wedge\vec{B} = -I\,\vec{BC}\wedge\vec{B} = -\vec{F}_{BC}$
  $= I\,b\,(B_x\vec{e}_z - B_z\vec{e}_x)$

Le moment du couple $\vec{T}$ par rapport au centre *O* du cadre est :

$$\vec{T} = \overrightarrow{OH_1}\wedge\vec{F}_{AB} + \overrightarrow{OH_2}\wedge\vec{F}_{BC} + \overrightarrow{OH_3}\wedge\vec{F}_{CD} + \overrightarrow{OH_4}\wedge\vec{F}_{DA}$$

$$\vec{T} = 2\cdot\overrightarrow{OH_1}\wedge\vec{F}_{AB} + 2\cdot\overrightarrow{OH_2}\wedge\vec{F}_{BC}$$

$$\vec{T} = 2\cdot(-\frac{b}{2}\,\vec{e}_y) \wedge I\,a\,(B_y\vec{e}_z - B_z\vec{e}_y)$$
$$+ 2\cdot(\frac{a}{2}\,\vec{e}_x)\wedge I\,b\,(-B_x\vec{e}_z + B_z\vec{e}_x)$$

$$\vec{T} = I\,ab\,(-B_y\vec{e}_x + B_x\vec{e}_y)$$

On définit le moment magnétique du circuit (ABCD) parcouru par le courant I :

$\vec{m} = I\,S\,\vec{n}$ avec : S = ab surface du rectangle
$\vec{n}$: normale au circuit

Dans le cas présent : $\vec{n} = \vec{e}_z$

Par identification, on constate que :

$$\vec{m}\wedge\vec{B} = I\,S\,\vec{e}_z\wedge(B_x\vec{e}_x + B_y\vec{e}_y + B_z\vec{e}_z) = I\,S\,(B_x\vec{e}_y - B_y\vec{e}_x)$$

Le moment du couple de forces exercées sur le cadre est égal au produit vectoriel :

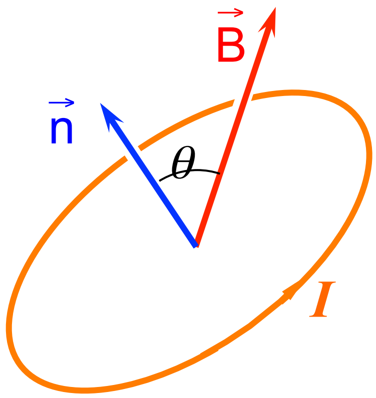
$$\vec{T} = \vec{m}\wedge\vec{B}$$

Conséquences : règle du flux maximum

- S'il peut tourner, le cadre va s'orienter spontanément de telle sorte que sa normale s'aligne avec le champ d'induction $\vec{B}$
- Le flux de $\vec{B}$ va augmenter jusqu'à atteindre sa valeur maximale
- Le travail des forces exercées est alors positif

7.6.2 Dipôle magnétique dans un champ uniforme

On considère une spire conductrice parcourue par un courant I, constituant un dipôle magnétique (cf. § 6.3.3) et immergée dans un champ d'induction $\vec{B}$ constant :



Le flux à travers la spire est :

$$\Phi = \vec{B} \cdot S\,\vec{n} = B \cdot S \cos\theta$$

Les différents mouvements possibles de la spire sont :

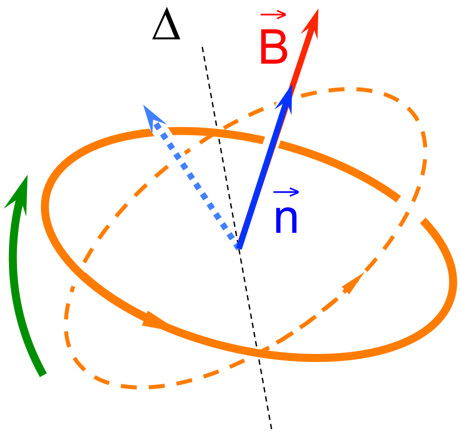
- translation : $\Delta\Phi = 0 \Rightarrow$ ne se fera pas spontanément
- rotation autour de $\vec{n}$: $\Delta\Phi = 0$

  $\Rightarrow$ ne se fera pas spontanément
- rotation autour de $\vec{B}$: $\Delta\Phi = 0$

  $\Rightarrow$ ne se fera pas spontanément

- rotation autour de l'axe $\Delta \perp (\vec{B}$ et $\vec{n})$ est susceptible de provoquer une variation de flux

  $\Rightarrow$ se fera spontanément sous l'action du couple de forces magnétiques



Calculons la variation de flux :

$$d\Phi = d(BS \cos\theta)$$

$$d\Phi = -BS \sin\theta \, d\theta$$

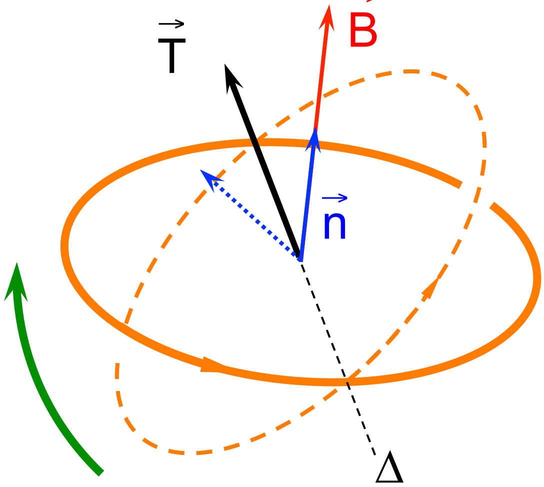
$$d\theta < 0 \Rightarrow d\surd > 0$$

Le moment magnétique de la spire est obtenu à partir d'une généralisation de la relation établie au paragraphe précédent :

$$\vec{m} = \iint_S I \, dS \, \vec{n}$$

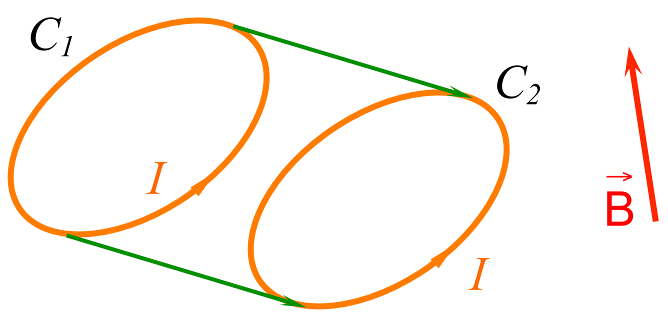
Le couple de forces magnétiques exercées sur la spire (le dipôle) est égale au produit vectoriel :

$$\vec{T} = \vec{m} \wedge \vec{B}$$

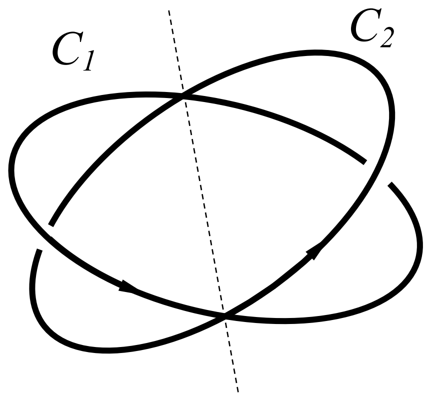


7.7 Travail des forces magnétiques lors du déplacement d'un circuit

Soit un circuit *C* parcouru par un courant I et plongé dans un champ d'induction magnétique $\vec{B}$ (uniforme ou non)
On désire calculer le travail des forces magnétiques lors du déplacement et/ou la rotation de C

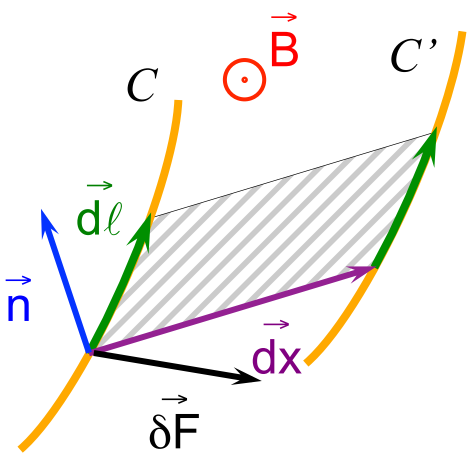


Déplacement



Rotation

On considère la translation d'un circuit $C \rightarrow C'$ dans une région de l'espace où règne une induction magnétique $\vec{B}$. Examinons ce qui se passe pour un élément de circuit de longueur $d\ell$:



Cet élément de longueur $\vec{d\ell}$ est soumis à la force de Laplace :

$$\vec{\delta F} = I\,\vec{d\ell} \wedge \vec{B}$$

Le circuit subit un déplacement $\vec{dx}$.

Le travail infinitésimal de la force est :

$$d^2W = \delta\vec{F}.\vec{dx}$$

$$d^2W = I(\vec{d\ell}\wedge\vec{B}).\vec{dx}$$

$$d^2W = I(\vec{dx}\wedge\vec{d\ell}).\vec{B}$$

avec $\vec{dx}\wedge\vec{d\ell} = dS\ \vec{n}$ où dS représente l'aire hachurée du parallélogramme formé par $\vec{dx}$ et $\vec{d\ell}$ ($\vec{dx}$, $\vec{d\ell}$, $\vec{n}$) : trièdre direct.

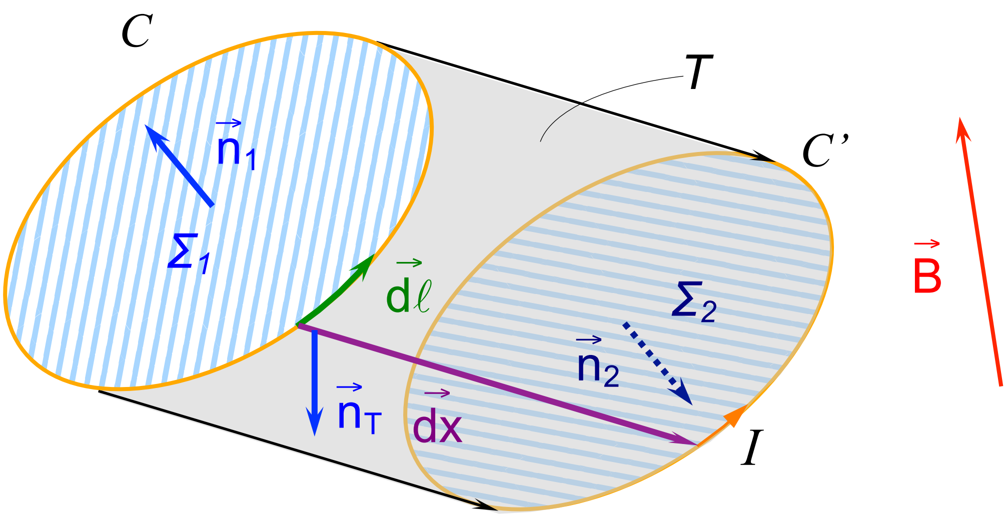
Dans ce cas, le travail infinitésimal de la force devient :

$$d^2W = I\,dS\ \vec{n}.\vec{B}$$

ou encore :

$$d^2W = I\,d\Phi_{Coupé}$$ où $d\Phi_{Coupé}$ est le flux coupé par $\vec{d\ell}$ le long du trajet $\vec{dx}$.

Calculons maintenant le travail des forces magnétiques lors du déplacement de tout le circuit.



Le travail des forces magnétiques est égal à :

$$W = I\,\Phi_{\text{Coupé}}$$

où $\Phi_{\text{Coupé}}$ représente le flux coupé lors du déplacement du circuit ≡ flux de $\vec{B}$ à travers la surface latérale T (grisé)

Pour déterminer $\Phi_{\text{Coupé}}$, nous calculons le flux de $\vec{B}$ à travers la surface fermée formée par la réunion de Σ_1, T et Σ_2 :

$$\Phi_{\text{Tot}} = \Phi_1 + \Phi_T + \Phi_2 = \Phi_1 + \Phi_{\text{Coupé}} + \Phi_2 = 0$$

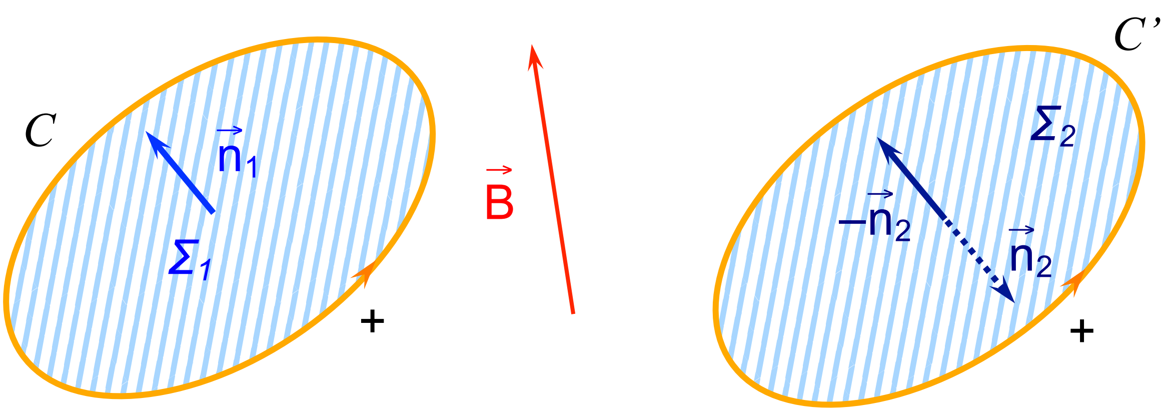
car le flux de $\vec{B}$ à travers toute surface fermée est nul.

Donc :

$$\Phi_{\text{Coupé}} = -\,(\Phi_1 + \Phi_2) = -\,\Phi_1 - \Phi_2 \qquad \text{avec } \surd_1 > 0$$

$$\surd_2 < 0$$

Dans le calcul précédent, la normale est sortante pour les trois surfaces Σ_1, T et Σ_2. Or, si on considère les surfaces Σ_1 et Σ_2 isolément, on constate que pour Σ_2, la normale $\vec{n}_2$ ne correspond pas au sens conventionnel lié au sens de parcours de C’ (+) choisi.



Il convient cependant d'adopter les mêmes conventions de calcul de flux pour les deux surfaces puisqu'on s'intéresse au travail des forces magnétiques exercées sur un courant lors d'une transformation $C \rightarrow C'$.
Par exemple, dans le cas présent, il apparaît que les deux flux sont positifs si on respecte la convention liée au sens de parcours du courant.

En conséquence :

$$\Phi_2\,(-\vec{n}_2) = -\,\Phi_2\,(\vec{n}_2)$$

D'où finalement, l'expression du travail des forces magnétiques lors d'une transformation $C \rightarrow C'$:

Le travail des forces électromagnétiques lors d'une transformation d'un circuit parcouru par un courant I constant est égal au produit de l'intensité du courant par la variation de flux à travers ce circuit.

$$W = I\,(\Phi_{C'} - \Phi_C) \qquad \text{Théorème de Maxwell}$$

Remarques :

- Le travail des forces électromagnétiques ne dépend pas du chemin suivi, seuls comptent les états initial et final.

- Lors d'une simple translation d'un circuit dans un champ d'induction magnétique uniforme, W = 0