

5 CONDUCTEURS À L'ÉQUILIBRE

5.1 Équilibre électrostatique d'un conducteur

- Dans un isolant, les charges restent à l'endroit où elles ont été apportées (ou enlevées).
- Dans un conducteur, les charges sont mobiles (ou libres) et sont donc susceptibles de se déplacer sous l'action d'un champ électrique même très faible.

Définition :

Un conducteur est à l'équilibre électrostatique lorsque aucune charge électrique ne se déplace à l'intérieur de celui-ci.

Conséquences :

- Les charges à l'intérieur d'un conducteur à l'équilibre (chargé ou non) sont soumises à un champ électrostatique nul.

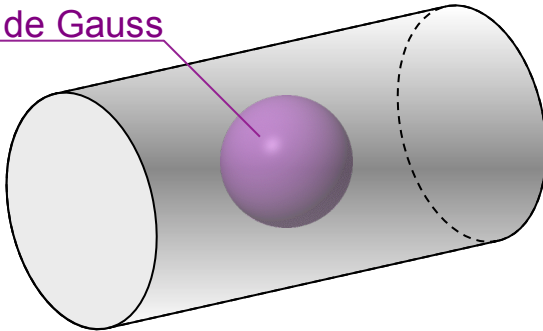
À l'intérieur d'un conducteur à l'équilibre : $\vec{E} = \vec{0}$

- Si le champ à l'intérieur du conducteur est nul, alors le conducteur à l'équilibre électrostatique est **équipotentiel**.

Distribution de charges dans un conducteur

Où sont les charges dans un conducteur à l'équilibre électrostatique chargé ?

surface de Gauss



$$\oiint_{\Sigma} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{S} = 0 = \iiint_V \frac{\rho}{\epsilon_0} d\tau$$

$$\Rightarrow \rho = 0$$

Dans un conducteur à l'équilibre, il n'y a pas de charge non compensée à l'intérieur

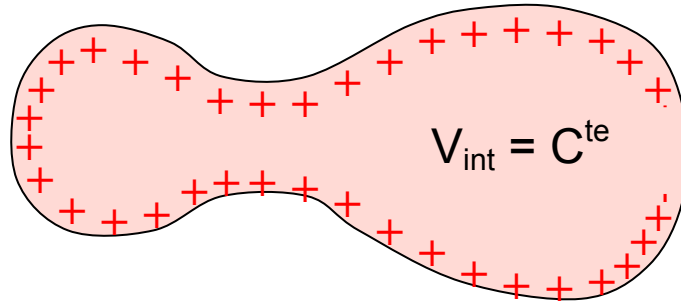
Toutes les charges non compensées sont localisées à la surface du conducteur

On peut essayer de trouver une raison physique qui pousse les charges non compensées à aller en surface. Une explication simple consiste à rappeler que les charges libres (de même signe) ont tendance à se repousser. Dans la mesure où elles sont mobiles, elles s'éloignent le plus possible les unes des autres jusqu'à la surface du conducteur (sans pouvoir aller au delà)

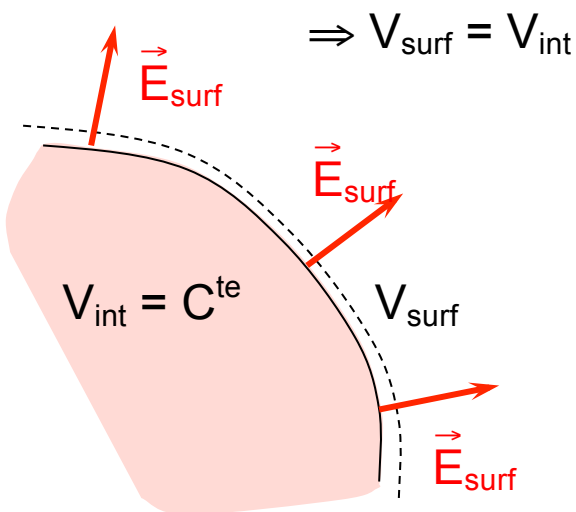
5.1.1 Lignes de champ

Dans un conducteur, même chargé, le champ électrique à l'intérieur \vec{E}_{int} est nul.

$$\Rightarrow V_{\text{int}} = C^{\text{te}}$$



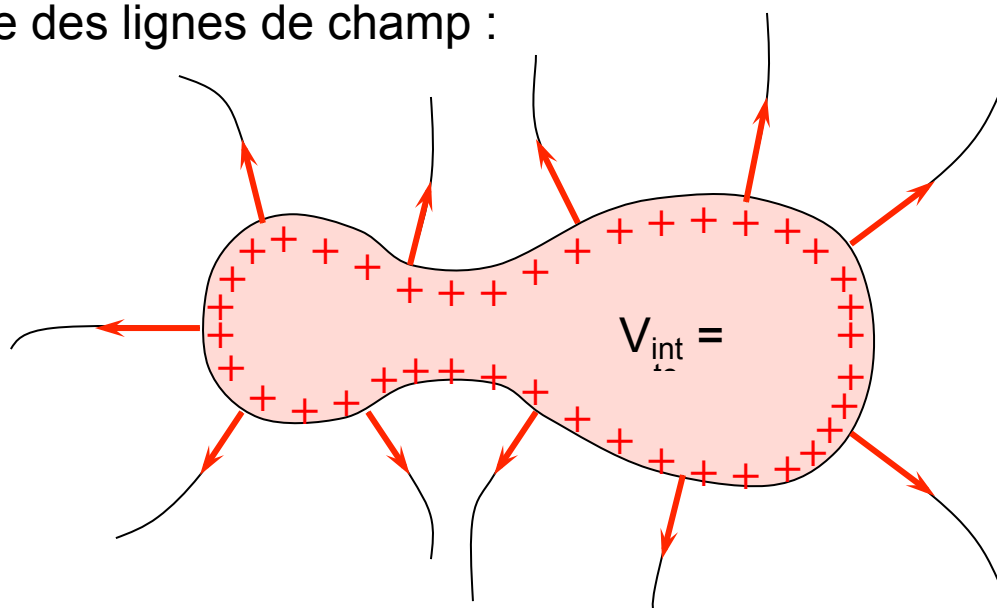
La surface est au même potentiel qu'à l'intérieur :



Au voisinage de la surface, les équipotentiels sont parallèles à la surface :

\vec{E}_{surf} est perpendiculaire à la surface

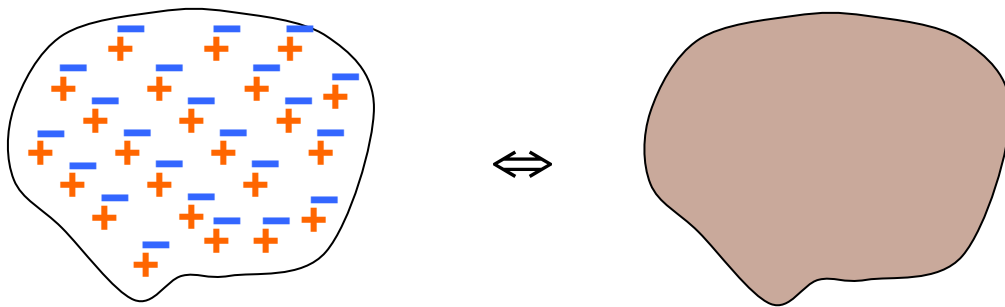
D'où l'allure des lignes de champ :



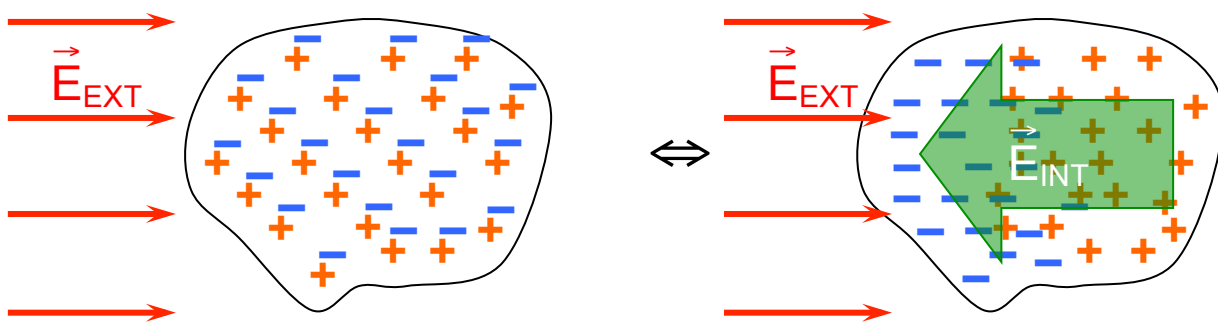
5.1.2 Effet d'un champ électrique sur un conducteur métallique

• Conducteur métallique en l'absence de champ

On peut assimiler (très) grossièrement un métal à un réseau tridimensionnel de charges (+) fixées baignant dans une "mer" d'électrons (-).



• Conducteur métallique en présence d'un champ



Sous l'influence du champ \vec{E}_{EXT} , les charges (-) mobiles se déplacent, on observe une polarisation de l'ensemble.

La charge totale du conducteur reste nulle.

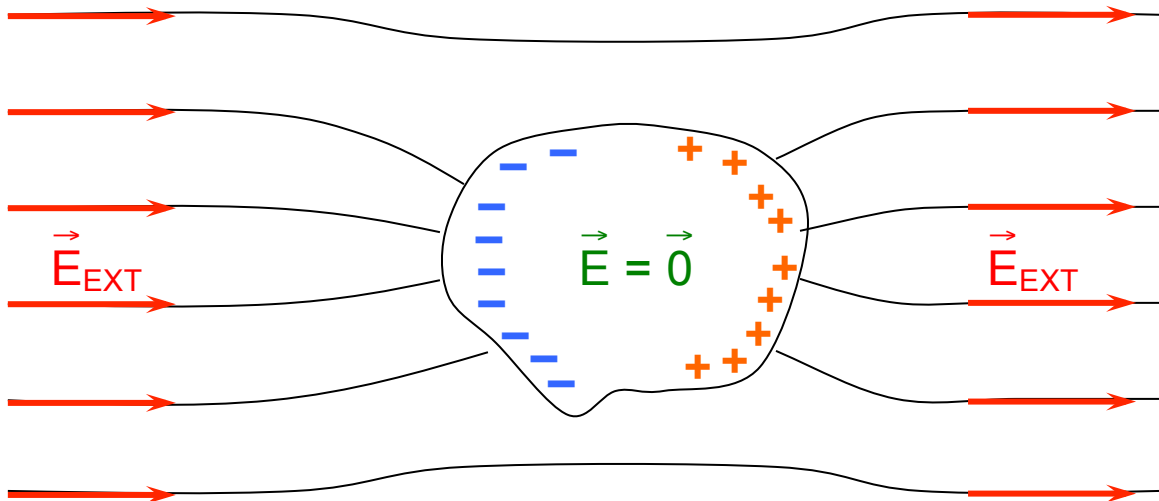
Dans le conducteur à l'équilibre, il apparaît un champ électrostatique induit par ce déplacement de charges :

→ le champ électrostatique interne \vec{E}_{INT} tel que :

$$\vec{E}_{\text{EXT}} + \vec{E}_{\text{INT}} = \vec{0}$$

Le champ est donc nul à l'intérieur du conducteur à l'équilibre.

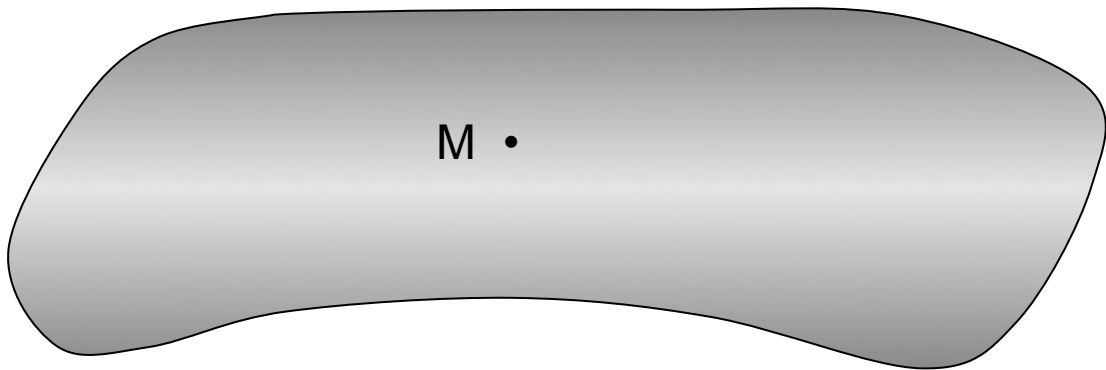
Macroscopiquement, on observe une densité de charges surfacique :



La présence d'un conducteur dans une région où règne un champ électrostatique induit une perturbation locale de ce champ.

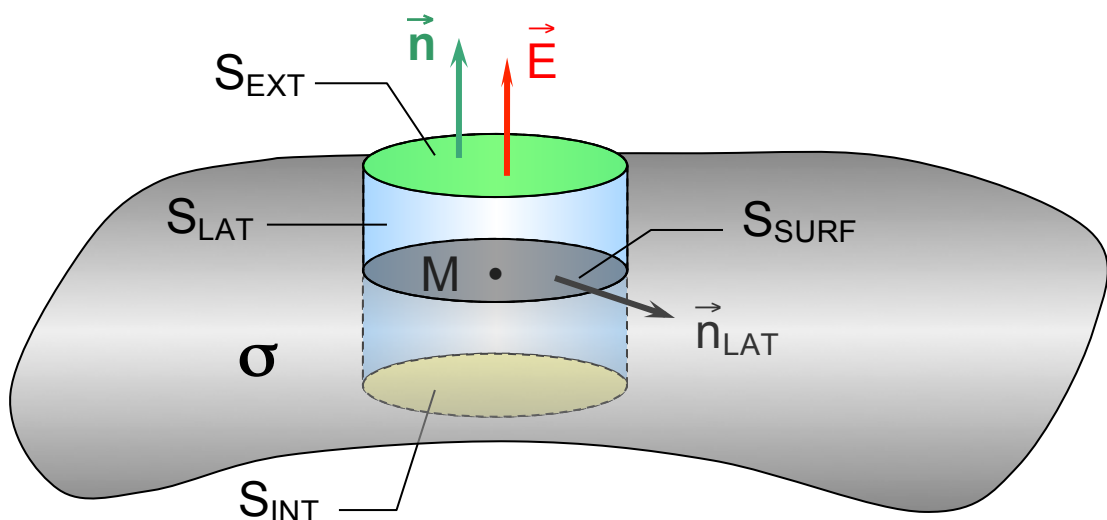
5.1.3 Champ électrostatique au voisinage de la surface

On considère un conducteur chargé et on s'intéresse au champ électrique régnant au voisinage immédiat de la surface de ce conducteur.



En M , la densité surfacique locale est σ .

Pour déterminer le champ électrique en M , on utilise le théorème de Gauss. On construit une surface de Gauss entourant le point M :



Le théorème de Gauss, appliqué à ce système, s'exprime :

$$\phi = \oiint_{\Sigma} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

$$\phi = \iint_{S_{\text{INT}}} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{S} + \iint_{S_{\text{LAT}}} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{S} + \iint_{S_{\text{EXT}}} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{S}$$

Que valent ces différents termes ?

- $\iint_{S_{\text{INT}}} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{S} = 0$ car \vec{E} est nul dans le conducteur
- $\iint_{S_{\text{LAT}}} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{S} = 0$ car $\vec{E} \perp \vec{n}_{\text{LAT}}$ au voisinage de la surface

De plus, on peut réduire cette surface autant que l'on veut.

Il reste donc :

$$\phi = \iint_{S_{\text{EXT}}} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{S} = \vec{E} \cdot \vec{n} \cdot S_{\text{EXT}} = E S_{\text{EXT}}$$

L'autre membre de l'égalité du théorème de Gauss se calcule aisément :

$$\phi = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} = \frac{\sigma S_{\text{SURF}}}{\epsilon_0}$$

avec $S_{\text{SURF}} = S_{\text{EXT}}$ d'où, finalement :

Le champ électrique à la surface d'un conducteur chargé s'exprime en fonction de la densité surfacique de charges :

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n} \quad \vec{n} : \text{vecteur unitaire } \perp \text{ à la surface et dirigé vers l'extérieur du conducteur}$$

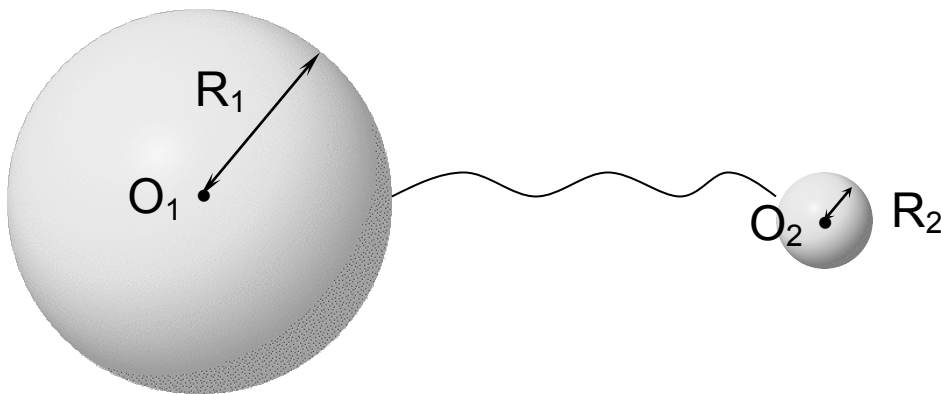
Remarques :

- La densité surfacique de charges n'est pas nécessairement uniforme à la surface du conducteur.
- Nous avons implicitement admis que les lois de l'électrostatique dans le vide sont valables dans les conducteurs.
- Il existe donc une discontinuité de la composante normale du champ électrique à la surface du conducteur :
on passe de $\vec{E} = \vec{0}$ dans le conducteur à $\vec{E} = \sigma/\epsilon_0 \vec{n}$ à la traversée de la surface du conducteur.
Ce résultat est évidemment à rapprocher de celui obtenu pour un plan infini chargé (cf. § 2.3.3)

5.1.4 Effet de pointe / pouvoir des pointes

Nous allons montrer qu'à proximité d'une pointe, le champ électrique est très intense.

Considérons deux sphères conductrices de rayons respectifs R_1 et R_2 portées au même potentiel (reliées par un fil conducteur). Les deux sphères ont une densité de charge uniforme σ_1 et σ_2 .



$$V(O_1) = V_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_{S_1} \frac{\sigma_1 dS}{R_1}$$

$$V_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma_1 4\pi R_1^2}{R_1} = \frac{\sigma_1 R_1}{\epsilon_0}$$

$$V(O_2) = V_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_{S_2} \frac{\sigma_2 dS}{R_2}$$

$$V_2 = \frac{\sigma_2 R_2}{\epsilon_0}$$

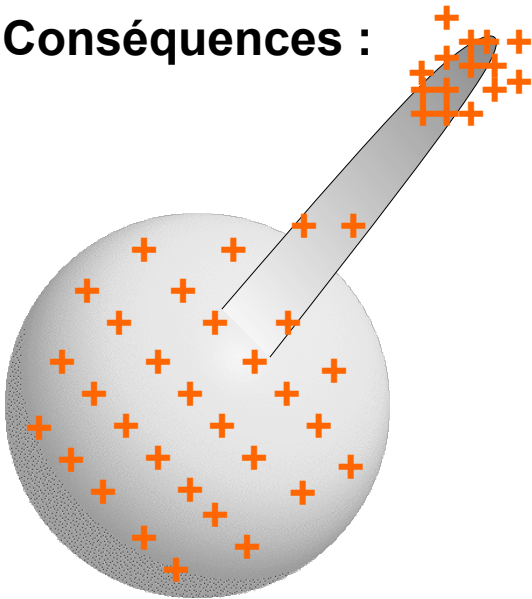
Puisque les potentiels sont égaux : $V_1 = V_2$

$$\Rightarrow \frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \frac{R_1}{R_2}$$

Si $R_1 \gg R_2$, alors $\sigma_2 \gg \sigma_1$

À potentiel égal, la densité de charges d'un conducteur chargé est plus importante sur la surface ayant une courbure forte (petit rayon) que sur la surface ayant une courbure faible (grand rayon)

Conséquences :



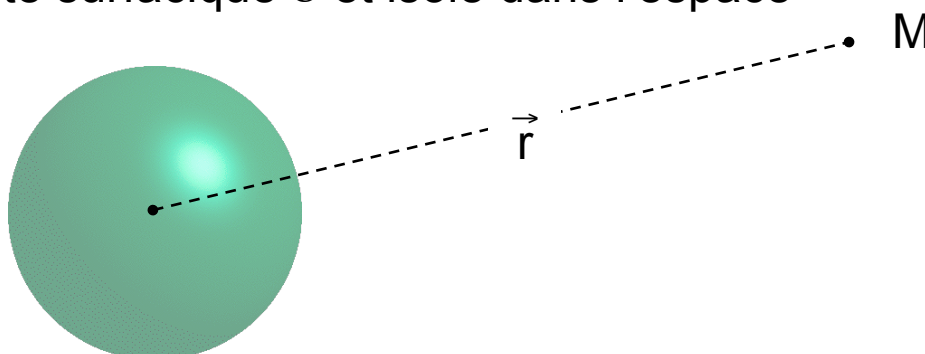
On observe une accumulation de charges sur l'extrémité de la pointe.

Applications :

- paratonnerre
- canon à effet de champ des microscopes électroniques

5.2 Capacité d'un conducteur isolé

Soit un conducteur à l'équilibre électrostatique chargé avec la densité surfacique σ et isolé dans l'espace



Le potentiel créé en M par la distribution de charge est :

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_S \frac{\sigma \, ds}{r}$$

La charge totale répartie sur la surface est :

$$Q = \iint_S \sigma \, ds$$

Le système considéré est caractérisé par σ , Q et V .

On modifie la densité surfacique σ en la multipliant par un coefficient k_1 :

$$\sigma' = k_1 \cdot \sigma$$

Dans ce cas, le potentiel en M et la charge présente sur le conducteur sont modifiés :

$$Q' = k_1 \cdot Q \quad \text{et} \quad V'(M) = k_1 \cdot V(M)$$

Le système est dans un nouvel état d'équilibre électrostatique parfaitement défini par σ' , Q' et V'

Du fait de la dépendance linéaire de Q et V vis-à-vis de la densité surfacique, il résulte que toute combinaison linéaire de σ et σ' donne lieu à un nouvel état d'équilibre :

$$\sigma'' = k_1 \cdot \sigma + k_2 \cdot \sigma' \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \bullet Q'' = k_1 \cdot Q + k_2 \cdot Q' \\ \bullet V'' = k_1 \cdot V + k_2 \cdot V' \end{cases}$$

C'est le principe de la **superposition des états d'équilibre**.

Quel que soit l'état d'équilibre, il existe un rapport constant entre Q et $V(M)$.

Ceci est vrai pour le potentiel à la surface du conducteur, c.a.d. le potentiel auquel est le conducteur.

Le coefficient de proportionnalité entre la charge totale et le potentiel du conducteur est appelé la **capacité** C :

$$Q = C \cdot V$$

- Dimensions, Unité de la capacité :

- $[C] = I^2 T^4 L^{-2} M^{-1}$

- unité : le farad (F)

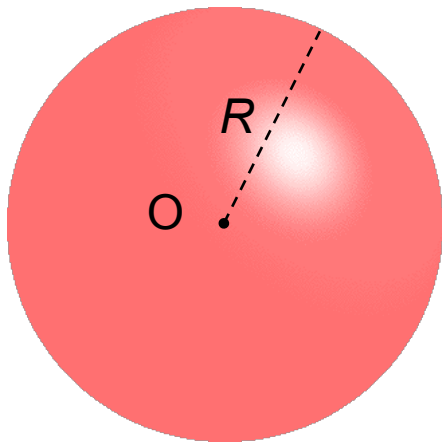
- Ordre de grandeur

- 1 F représente une gigantesque capacité

- On utilise généralement le pF, nF, μ F ou le mF

- La capacité est une grandeur positive, elle dépend du matériau (à travers sa permittivité diélectrique de celui-ci) et de la géométrie du conducteur.

Exemple : capacité d'une sphère chargée



$$V = V_{\text{surf}} = V_{\text{sphère}} = V(O) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_S \frac{\sigma \, ds}{R}$$

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R} \iint_S \sigma \, ds$$

D'autre part :

$$Q = \iint_S \sigma \, ds$$

d'où : $C = 4\pi\epsilon_0 R$

5.3 Énergie potentielle d'un conducteur chargé

L'énergie potentielle d'une distribution de charge à la surface d'un conducteur est (§ 1.8.3) :

$$E_p = \frac{1}{2} \iint_S \sigma(M) V(M) ds$$

Comme le conducteur est équipotentiel :

$$E_p = \frac{1}{2} V \iint_S \sigma(M) ds$$

$$E_p = \frac{1}{2} V \cdot Q$$

Avec $Q = C \cdot V$, il vient	$\left\{ \begin{array}{l} \bullet E_p = \frac{1}{2} Q \cdot V \\ \bullet E_p = \frac{1}{2} C \cdot V^2 \\ \bullet E_p = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \end{array} \right.$
---------------------------------	--

5.4 Ensemble de conducteurs à l'équilibre

5.4.1 Association de plusieurs conducteurs

On considère un ensemble de N conducteurs.

Le conducteur (i) est porté au potentiel V_i .

Chaque conducteur étant en équilibre électrostatique (bien qu'interagissant avec les autres conducteurs), le potentiel V_i est constant.

Dans ce cas, les N conducteurs forment un système en équilibre électrostatique.

5.4.2 Unicité des états d'équilibre

Si on connaît pour un ensemble de conducteurs à l'équilibre électrostatique :

- soit les potentiels de tous les conducteurs,
- soit les charges de tous les conducteurs,
- soit les potentiels de certains conducteurs et les charges des autres conducteurs.

alors l'état d'équilibre est parfaitement déterminé car il n'existe qu'un seul état d'équilibre qui satisfasse les caractéristiques $(Q_i ; V_i)$ des différents conducteurs

Démonstration

On considère deux conducteurs A et B à l'équilibre électrostatique.

- On connaît les potentiels des deux conducteurs :

Dans ce cas, grâce à l'équation de Laplace $\Delta V = -\rho/\epsilon_0$, le potentiel peut être connu en chaque point de l'espace (à l'exception des endroits où se situent les charges).

Cette équation de Laplace admet une solution unique avec les conditions aux limites fixées (les potentiels des conducteurs)

⇒ un seul état d'équilibre possible

- On connaît les charges des deux conducteurs :

On fait l'hypothèse que le conducteur A porte la charge Q_A et que le conducteur B porte la charge Q_B .

On suppose maintenant que deux états d'équilibre sont possibles (raisonnement par l'absurde) :

Equilibre 1 : les conducteurs A et B sont aux potentiels respectifs V_A^1 et V_B^1

Equilibre 2 : les conducteurs A et B sont aux potentiels respectifs V_A^2 et V_B^2

D'après le principe de superposition des états d'équilibre, il existe un troisième état d'équilibre, combinaison linéaire des deux précédents. On le choisit de telle sorte que :

$$\begin{cases} \bullet V_A^3 = V_A^1 - V_A^2 \\ \bullet V_B^3 = V_B^1 - V_B^2 \end{cases}$$

Cependant, d'après l'hypothèse de départ les charges de chaque conducteur sont fixées et valent respectivement Q_A et Q_B quel que soit l'état d'équilibre.

D'après la combinaison linéaire définissant l'état 3, la charge de chaque conducteur devrait être :

$$\begin{cases} \bullet Q_A^3 = Q_A^1 - Q_A^2 = Q_A - Q_A = 0 \\ \bullet Q_B^3 = Q_B^1 - Q_B^2 = Q_B - Q_B = 0 \end{cases}$$

Il y a donc contradiction avec l'hypothèse de départ !

⇒ un seul état d'équilibre possible !

• On connaît la charge de l'un et le potentiel de l'autre :

On fait l'hypothèse que le conducteur A est au potentiel V_A et que le conducteur B porte la charge Q_B .

On suppose maintenant que deux états d'équilibre sont possibles (raisonnement par l'absurde) :

Equilibre 1 : conducteur A : $V_A^1 = V_A$
 conducteur B : $Q_B^1 = Q_B$

Equilibre 2 : conducteur A : $V_A^2 = V_A$
 conducteur B : $Q_B^2 = Q_B$

Ces deux équilibres sont distincts, ils se différencient en effet par Q_A^1 et Q_A^2 et par V_B^1 et V_B^2 .

D'après le principe de superposition des états d'équilibre, il existe un troisième état d'équilibre, combinaison linéaire des deux précédents. On le choisit de telle sorte que :

$$\begin{cases} \bullet V_A^3 = V_A^1 - V_A^2 = V_A - V_A = 0 \\ \bullet Q_B^3 = Q_B^1 - Q_B^2 = Q_B - Q_B = 0 \end{cases}$$

Si $Q_B^3 = 0$ alors $V_B^3 = C^{te}$, il n'existe donc pas d'extremum du potentiel.

Le potentiel V_B^3 étant nul à l'infini, il est nul partout.

D'après la combinaison linéaire choisie :

$$V_B^3 = 0 \quad \Rightarrow \quad V_B^1 - V_B^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad V_B^1 = V_B^2$$

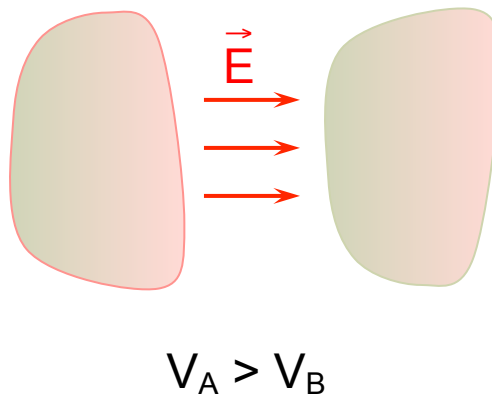
Nous avons ainsi montré qu'avec V_A et Q_B fixés, il n'existe qu'un seul état d'équilibre.

5.4.3 Théorème des éléments correspondants

Soient deux conducteurs A et B initialement éloignés l'un de l'autre (ne se perturbant pas), à l'équilibre électrostatique et portant des densités de charges surfaciques σ_A et σ_B .



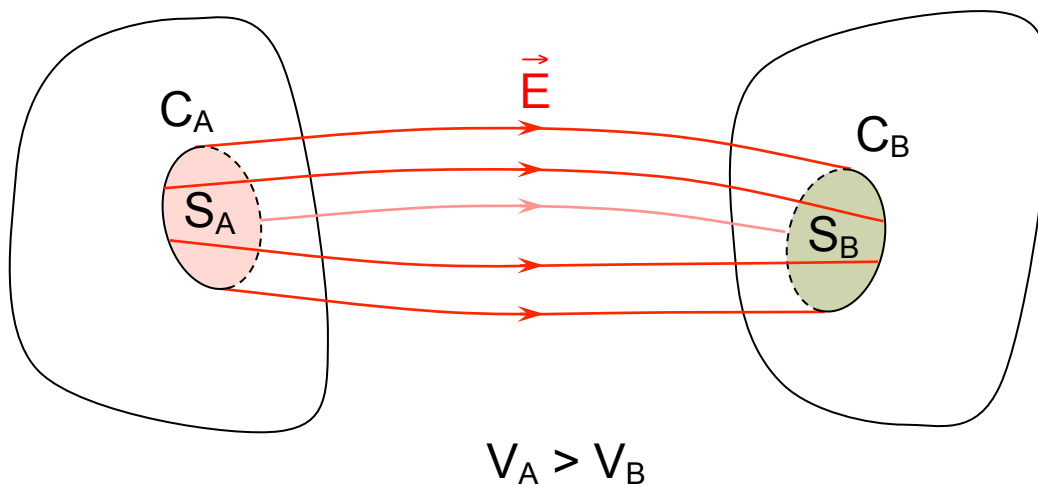
On rapproche les deux conducteurs. S'ils ne sont pas au même potentiel, un champ électrique apparaît entre les deux.



De plus, ce champ électrique modifie la répartition des charges à la surface des deux conducteurs.

Nous allons examiner en détail aux répartitions de charges entre les deux conducteurs.

On considère un contour C_A sur A. Celui-ci définit une surface S_A . C_A et S_A sont **sur la surface** du conducteur A.

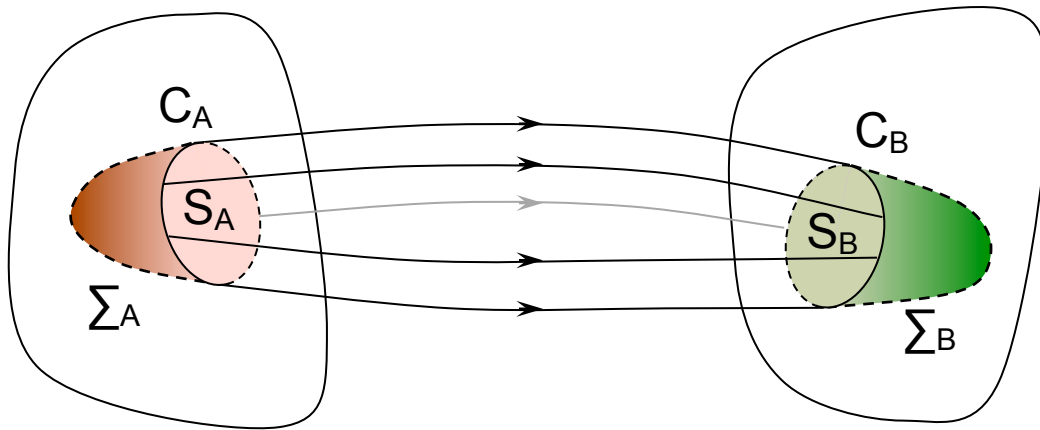


Les lignes de champ issues du contour C_A rejoignent le conducteur B et définissent alors un contour C_B sur le conducteur B. Le contour C_B définit la surface S_B . C_B et S_B sont **sur la surface** du conducteur B. Les lignes de champ reliant les contours C_A et C_B forment un **tube de flux**.

Par construction, le flux de \vec{E} à travers ce tube de flux est nul (les lignes de champ sont parallèles à \vec{E} en tout point)

Nous allons utiliser le théorème de Gauss sur la surface fermée Σ définie par :

- le tube de flux
- la surface Σ_A située à l'intérieur de A et s'appuyant sur le contour C_A ;
- la surface Σ_B située à l'intérieur de B et s'appuyant sur le contour C_B .



$$\phi = \oiint_{\Sigma} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

$$\phi = \iint_{\Sigma_A} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{S} + \iint_{\text{tube}} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{S} + \iint_{\Sigma_B} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{S}$$

Que valent ces différents termes ?

- $\iint_{\Sigma_A} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{S} = 0$ car \vec{E} est nul dans le conducteur A
- $\iint_{\Sigma_B} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{S} = 0$ car \vec{E} est nul dans le conducteur B
- $\iint_{\text{tube}} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{S} = 0$ par construction

D'autre part

$$\phi = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} = \frac{Q_A}{\epsilon_0} + \frac{Q_B}{\epsilon_0}$$

où Q_A et Q_B sont les charges portées respectivement par les éléments de surface S_A et S_B .

Il apparaît donc que :

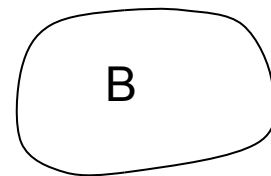
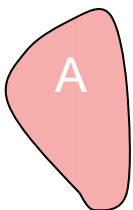
$$Q_A = - Q_B$$

Les charges électriques portées par deux éléments correspondants (reliés par des lignes de champ) sont opposées

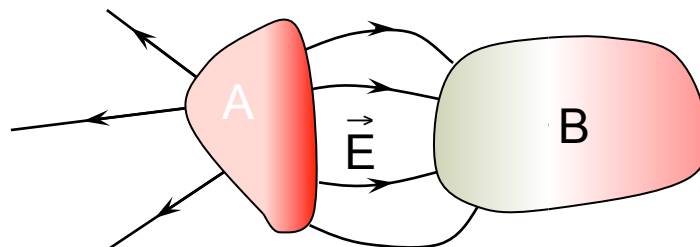
Nous commençons à entrevoir de manière plus quantitative les phénomènes d'influence électrostatique.

5.4.4 Influence partielle – Influence totale

On considère un conducteur A chargé s'approchant d'un conducteur B neutre.



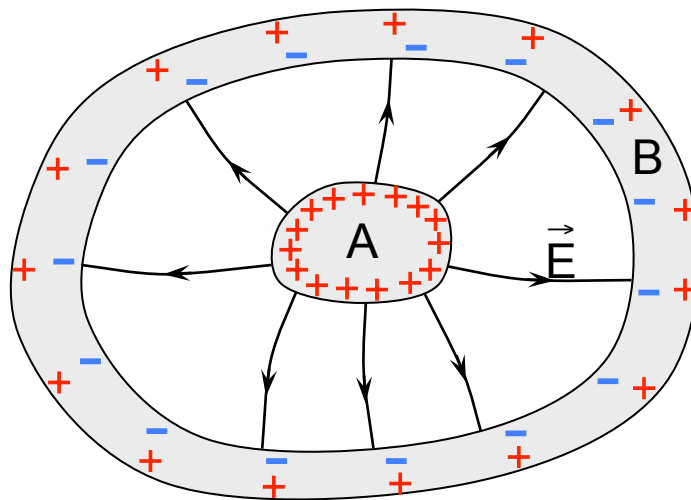
Sous l'influence de A, B se polarise et B augmente à son tour la densité de charge de A à proximité de B :



On parle alors d'une influence électrostatique réciproque.

De plus, dans ce cas, toutes les lignes de champ issues du conducteur A ne convergent pas vers B ; on parle alors d'une **influence partielle**.

Il est possible de créer des systèmes de conducteurs en **influence totale** en plaçant A dans B :



Dans ce cas, l'ensemble des lignes de champ issues de A arrive sur B. De plus :

$$Q_B^{\text{int}} = - Q_A$$

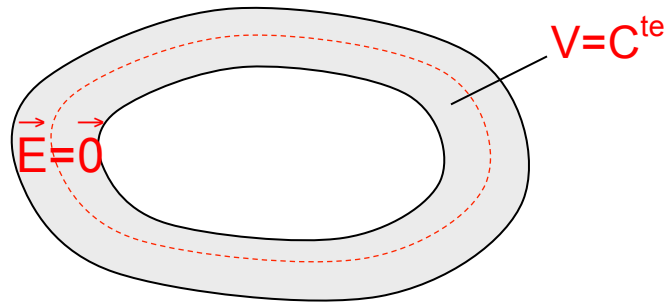
La charge totale sur le conducteur B est :

$$Q_B = Q_B^{\text{int}} + Q_B^{\text{ext}} = - Q_A + Q_B^{\text{ext}}$$

5.4.5 Cage de Faraday

- Cavité dans un conducteur

On considère un conducteur possédant une cavité vide (sans charge) :



Dans le conducteur à l'équilibre, le champ électrique est nul : $\vec{E}=0$. Le conducteur est équipotentiel : $V = C^{te} = V_{\text{surf}}$.

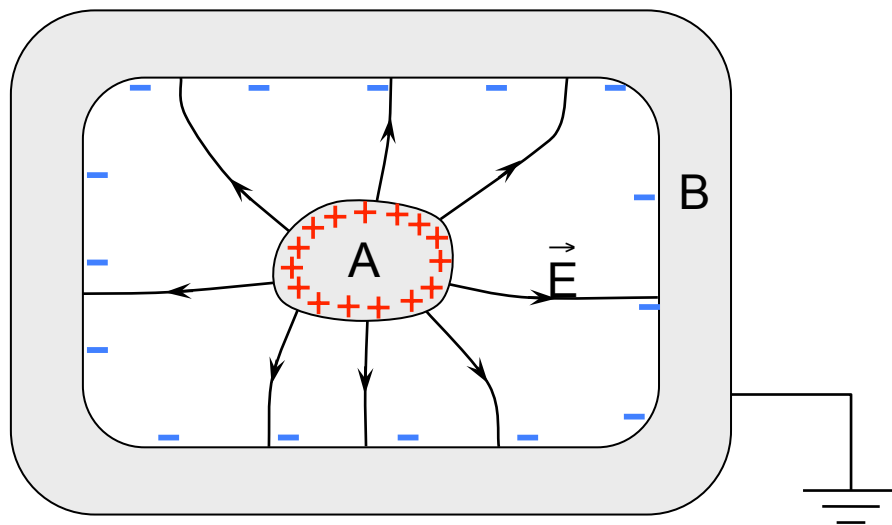
À l'intérieur de la cavité, au voisinage de la surface interne du conducteur, le potentiel est le même que dans le conducteur (continuité du potentiel).

Comme il n'y a pas de charges dans la cavité, il n'y a pas d'extremum du potentiel, le potentiel est donc constant.

- Cage de Faraday

On considère un conducteur creux B relié à la terre. Il est donc à un potentiel nul (par convention)

Plaçons un conducteur chargé A dans la cavité de B.

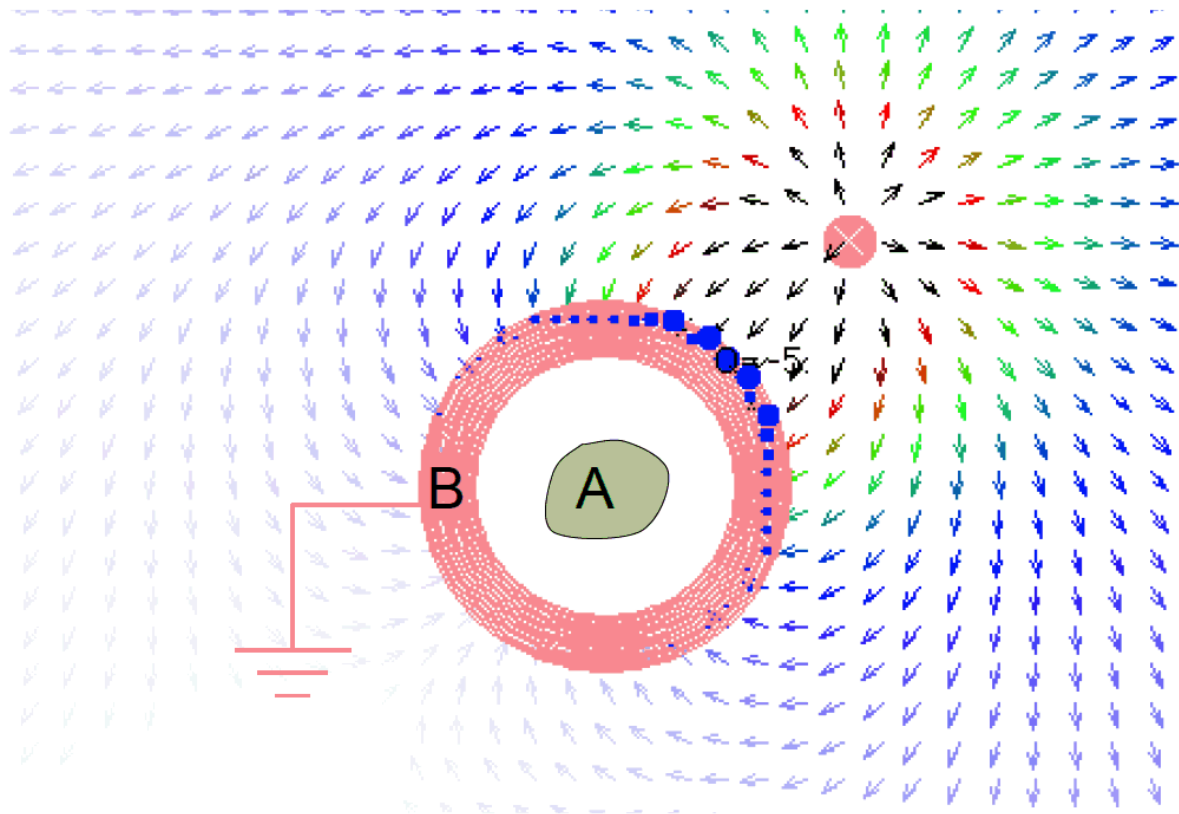


Comme le conducteur B est relié à la terre, la charge Q_B^{ext} est nulle ; l'éventuel excès de charges (+) est compensée par des charges provenant de la Terre.

Le champ régnant dans le conducteur est nul et par continuité, le champ régnant à l'extérieur du conducteur B est nul aussi.

→ l'espace extérieur est protégé de l'influence du conducteur A placé dans la cavité.

Inversement, examinons ce qui se passe pour un conducteur A placé dans une cavité B, celle-ci, reliée à la terre, étant sous influence d'un 3^{ème} conducteur ou d'une source quelconque de champ électrostatique :



Dans ce cas, le champ électrique à l'intérieur de la cavité est nul et le potentiel est constant.

Cette dernière proposition est vraie même si le conducteur B n'était pas relié à la terre ; si B est relié à la terre, alors $V_{\text{int}} = 0$.

Ce type de dispositif constitue une protection contre les champs électrostatiques.

- cage de Faraday
- blindage

5.4.6 Coefficients d'influence électrostatiques

Quand plusieurs conducteurs sont mis en présence les uns des autres, ils exercent une influence électrostatique réciproque.

Pour déterminer les conditions d'équilibre, il faut tenir compte des charges et potentiels individuels mais aussi des **influences mutuelles**.

Soit un ensemble de n conducteurs A_i , de charge électrique Q_i et au potentiel V_i en équilibre électrostatique.

On considère en particulier le conducteur A_1 et on applique le principe de superposition des états d'équilibre.

La densité surfacique de A_1 peut s'écrire sous la forme :

$$\sigma_1 = \sum_{j=1}^n \sigma_{1j}$$

où :

- σ_{11} est la densité surfacique qu'aurait A_1 porté à son potentiel A_1 en présence des autres conducteurs mais ceux-ci étant portés au potentiel nul (c.a.d. n'influençant pas directement la densité de charges portée par A_1)
- σ_{1j} est la densité surfacique qu'aurait A_1 en présence du conducteur A_j porté seul à son potentiel V_j ; les autres, y compris A_1 étant portés au potentiel nul.

En présence de tous les conducteurs chargés, la charge sur A_1 s'écrit :

$$Q_1 = \iint_{S_1} \sigma_1 dS = \sum_{j=1}^n \iint_{S_1} \sigma_{1j} dS$$

$$Q_1 = q_{11} + q_{12} + q_{13} + \dots + q_{1n}$$

q_{12} est donc la charge apparaissant sur A_1 quand seul le conducteur A_2 est au potentiel A_2 .

On peut écrire :

$$q_{12} = C_{12} V_2$$

d'où :

$$Q_1 = C_{11} V_1 + C_{12} V_2 + C_{13} V_3 + \dots + C_{1n} V_n$$

D'une manière générale :

$$Q_i = C_{i1} V_1 + C_{i2} V_2 + C_{i3} V_3 + \dots + C_{in} V_n$$

Ou encore sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ \vdots \\ Q_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & \dots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & C_{33} & \dots & \dots \\ C_{n1} & \dots & \dots & \dots & C_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_n \end{pmatrix}$$

Les C_{ij} sont appelés coefficients d'influence.

Les C_{ij} sont appelés coefficients de capacité des conducteurs en présence des autres conducteurs $A_{j \neq i}$.

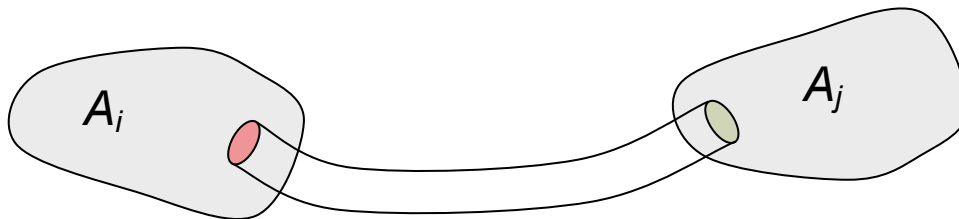
Il ne faut pas les confondre avec les capacités C_i .

Le coefficient $C_{ij} \rightarrow C_i$ quand les autres conducteurs sont éloignés à l'infini.

Caractéristiques des C_{ij}

- les coefficients C_{ij} sont négatifs

en vertu du théorème des éléments correspondants :



$$q_i = -q_j$$

- les coefficients C_{ii} sont positifs

- $C_{ii} > -\sum_{j \neq i}^n C_{ji}$

Démonstration :

Prenons l'exemple du conducteur A_1 entouré des $n-1$ autres conducteurs $A_{j \neq 1}$ portés au potentiel nul.

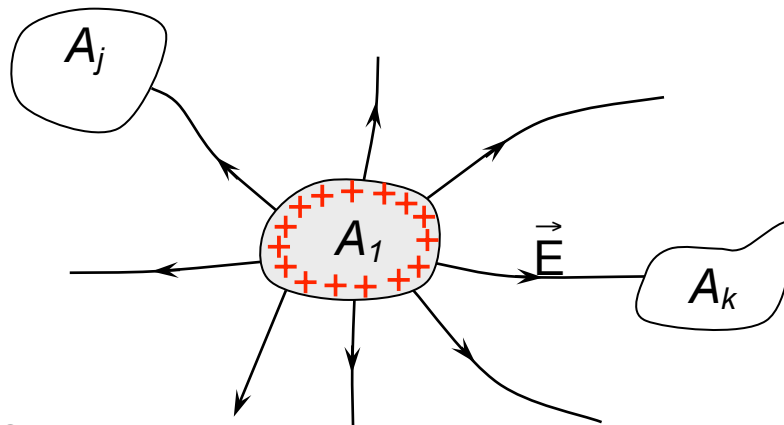
La charge présente sur le conducteur A_1 est :

$$Q_1 = C_{11} V_1$$

Les éléments correspondants à cette charge sur les $n-1$ autres conducteurs $A_{j \neq 1}$ sont : $q_{21} +$, $q_{31} +$, ... et q_{n1} .

(rappel : q_{j1} est la charge de A_j quand A_1 est à son potentiel A_1 et que les autres y compris A_j sont au potentiel nul).

Dans la mesure où tous les tubes de flux issus de A_1 n'arrivent pas nécessairement sur tous les conducteurs $A_{j \neq 1}$ (sauf cas particulier de l'influence totale) :



$$q_{11} = C_{11} V_1$$

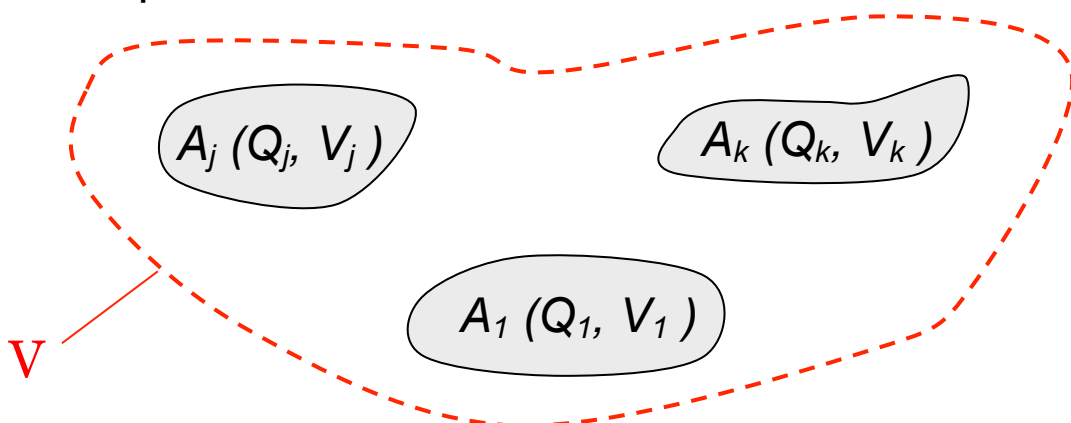
$$q_{11} > |q_{21}| + |q_{31}| + |q_{41}| + \dots + |q_{n1}|$$

$$q_{11} > \sum_{j \neq i}^n |C_{j1}| V_1$$

- $C_{ij} = C_{ji}$ sera démontré ultérieurement

5.4.7 Énergie d'un ensemble de conducteurs en équilibre

On considère un ensemble de conducteurs en équilibre électrostatique :



D'après la relation établie au § 1.8.3, l'énergie potentielle d'une telle distribution de charges est :

$$E_p = \frac{1}{2} \iiint_V \rho(M) V(M) d\tau$$

où V est le volume entourant tous les conducteurs

Sur chaque conducteur, les charges sont superficielles :

$$E_p = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \iint_{S_i} \sigma_i V_i dS$$

Sur chaque conducteur, le potentiel est constant :

$$E_p = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n V_i \underbrace{\iint_{S_i} \sigma_i dS}_{Q_i}$$

D'où finalement, l'énergie potentielle d'un ensemble de conducteurs chargés à l'équilibre est :

$$E_p = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n Q_i V_i$$

Démonstration de $C_{ij} = C_{ji}$

On considère deux conducteurs chargés en équilibre électrostatique $A_1 (Q_1, V_1)$ et $A_2 (Q_2, V_2)$.

L'énergie potentielle de cet ensemble de conducteurs est :

$$\begin{aligned} E_p &= \frac{1}{2} [Q_1 V_1 + Q_2 V_2] \\ &= \frac{1}{2} [(C_{11} V_1 + C_{12} V_2) V_1 + (C_{21} V_1 + C_{22} V_2) V_2] \\ &= \frac{1}{2} [C_{11} V_1^2 + (C_{12} + C_{21}) V_1 V_2 + C_{22} V_2^2] \end{aligned}$$

Pour parvenir à cet état d'équilibre, on peut procéder par deux étapes :

- Les deux conducteurs sont initialement à un potentiel nul.

1^{ère} étape :

on augmente le potentiel de A_1 en maintenant A_2 à un potentiel nul

L'augmentation de $V_1 \rightarrow V_1 + dV_1$ se traduit par la variation de charge dQ_1 :

$$dQ_1 = C_{11} dV_1$$

Dans ce cas, l'énergie potentielle varie de la quantité :

$$dE_{p1} = dQ_1 V_1$$

$$dE_{p1} = C_{11} dV_1 V_1$$

Quand le potentiel sur A_1 passe de $0 \rightarrow V_1$, l'énergie potentielle associée est :

$$E_{p1} = \int_0^{V_1} C_{11} V_1 dV_1 = \frac{1}{2} C_{11} V_1^2$$

2^{ème} étape :

Le potentiel de A_1 étant fixé, on augmente maintenant celui de A_2 .

L'augmentation de $V_2 \rightarrow V_2 + dV_2$ se traduit par des variations de charge sur A_1 et A_2 :

$$dQ = dQ_1 + dQ_2 = C_{12} dV_2 + C_{22} dV_2$$

Dans ce cas, l'énergie potentielle varie de la quantité :

$$dE_{p2} = dQ_1 V_1 + dQ_2 V_2$$

$$dE_{p2} = (C_{12} dV_2)V_1 + (C_{22} dV_2)V_2$$

Quand le potentiel sur A_2 passe de $0 \rightarrow V_2$, l'énergie potentielle associée est :

$$E_{p2} = \int_0^{V_2} (C_{12}V_1 + C_{22}V_2) dV_2$$

$$E_{p2} = C_{12}V_1V_2 + \frac{1}{2} C_{22}V_2^2$$

La variation totale d'énergie potentielle du système ($A_1 + A_2$) est donc :

$$E_p = E_{p1} + E_{p2} = \frac{1}{2} C_{11} V_1^2 + C_{12}V_1V_2 + \frac{1}{2} C_{22}V_2^2$$

Si on avait interverti l'ordre des opérations, on serait arrivé à

$$E_p = E_{p1} + E_{p2} = \frac{1}{2} C_{11} V_1^2 + C_{21}V_1V_2 + \frac{1}{2} C_{22}V_2^2$$

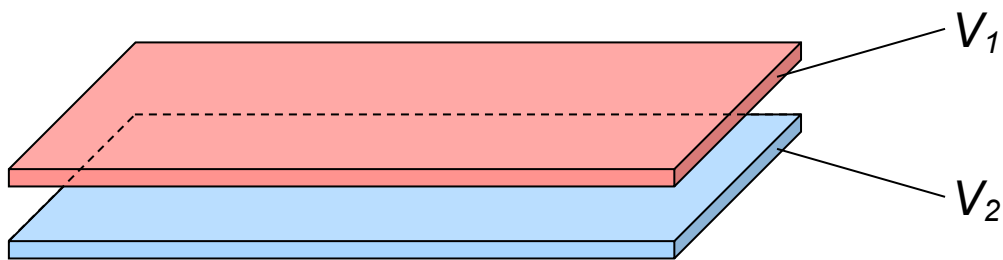
D'où : $C_{12} = C_{21}$

5.5 Condensateurs

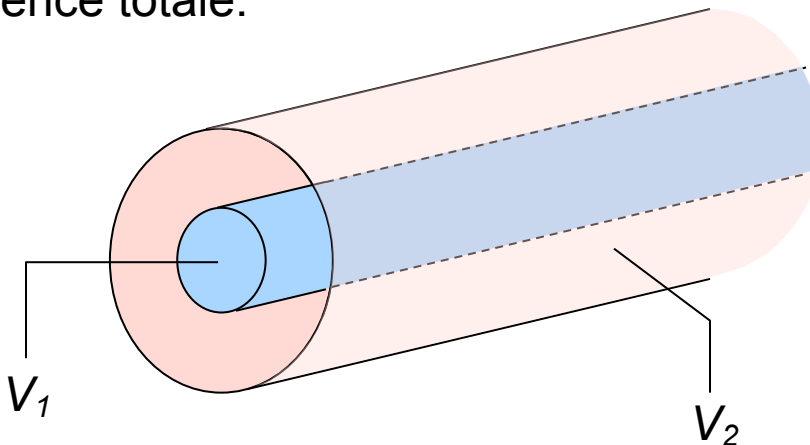
On appelle condensateur tout système de deux conducteurs en influence électrostatique.

On distingue généralement deux types de condensateurs :

- à armatures rapprochées :

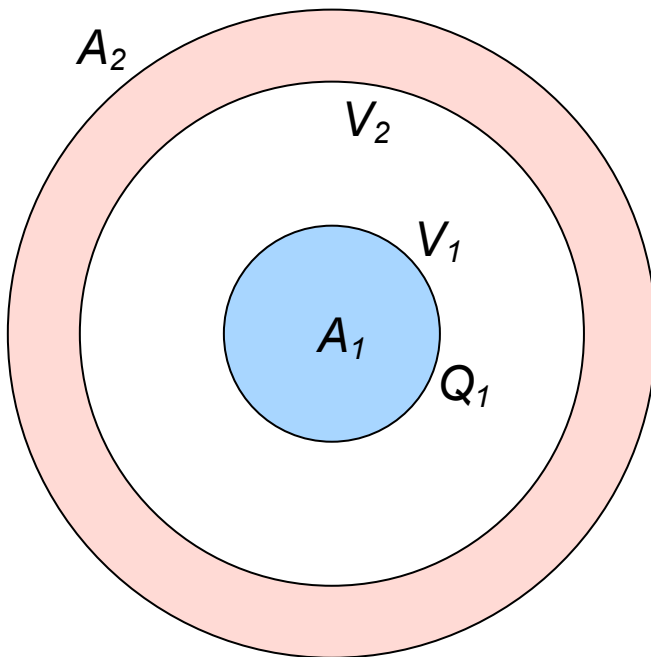


- à influence totale:



En général, les armatures sont séparées par un matériau isolant de constante diélectrique relative importante qui accroît la capacité du condensateur.

5.5.1 Cas du condensateur à influence totale



$$Q_1 = C_{11}V_1 + C_{12}V_2$$

$$Q_2 = C_{21}V_1 + C_{22}V_2$$

Dans la cas particulier du condensateur à influence totale :

$$Q_2 = Q_2^{\text{int}} + Q_2^{\text{ext}} = -Q_1 + Q_2^{\text{ext}}$$

Si l'armature A_2 est à la terre : $\begin{cases} \bullet Q_2^{\text{ext}} = 0 \\ \bullet V_2 = 0 \end{cases}$

Dans ce cas :

$$Q_1 = C_{11}V_1$$

$$Q_2 = -Q_1$$

Et donc :

$$C_{11} = -C_{21} = -C_{12}$$

Par convention, la capacité C d'un condensateur, sa charge Q et la différence de potentiel entre les armatures sont définies par :

$$\begin{cases} \bullet C = C_{11} (> 0) \\ \bullet U = V_1 - V_2 \\ \bullet Q = Q_1 \end{cases}$$

D'où la relation des condensateurs :

$$Q = C \cdot U$$

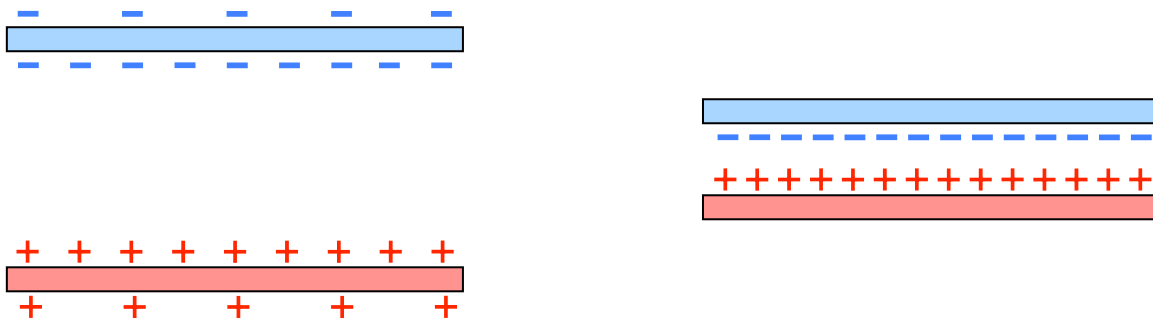
qui traduit un état d'équilibre tel que :

$$Q_1 = C_{11} (V_1 - V_2)$$

5.5.2 Cas du condensateur à armatures

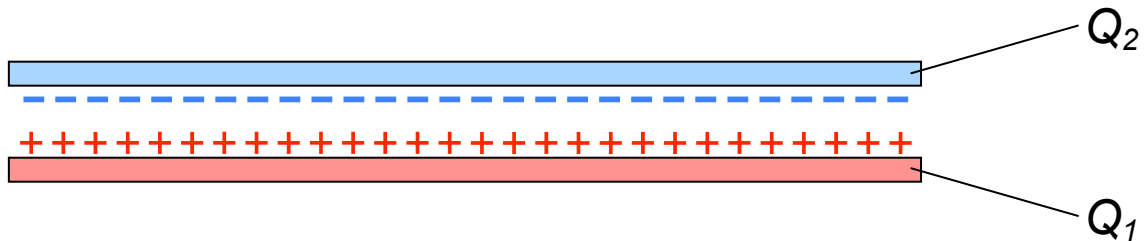
Un condensateur plan est constitué de deux armatures métalliques conductrices proches.

À la différence du condensateur à influence totale, les deux armatures sont susceptibles de porter des charges sur leurs deux faces.



Si la distance qui sépare les deux armatures diminue, l'influence électrostatique va "condenser" les charges sur les faces internes des armatures.

Si la distance séparant les deux armatures est très petite devant les dimensions des armatures, on peut assimiler ce type de condensateur à un condensateur à influence totale :



Dans ce cas : $Q_2 = - Q_1$

Remarque :

le terme "condensateur" exprime le fait qu'il y a accumulation de charges dans une petite région de l'espace.

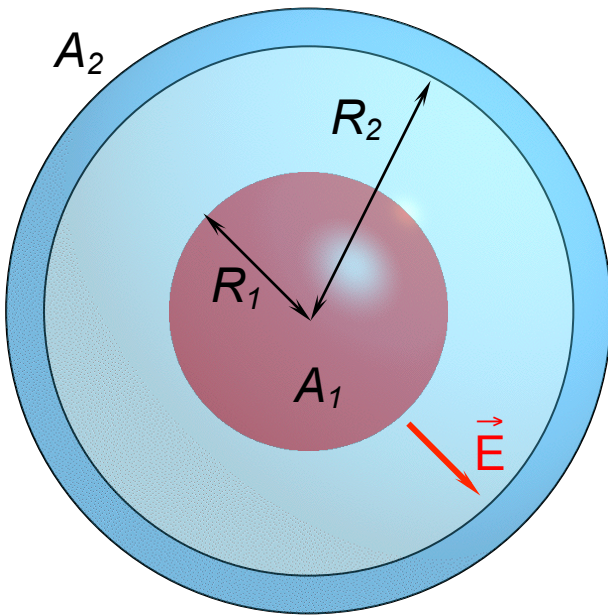
5.5.3 Capacité de quelques condensateurs simples

Pour calculer la capacité des condensateurs, nous allons utiliser la circulation du champ électrique :

$$U = \frac{Q}{C} = V_1 - V_2 = \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$$

Condensateur sphérique

Le condensateur sphérique est constitué de deux sphères conductrices concentriques de même centre et de rayons respectifs R_1 et R_2 .



Les charges respectives des armatures A_1 et A_2 sont Q_1 et Q_2 :

$$Q_1 = -Q_2 = Q$$

D'après le théorème de Gauss appliqué sur une sphère de rayon r compris entre R_1 et R_2 :

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \vec{e}_r$$

Le calcul de U donne :

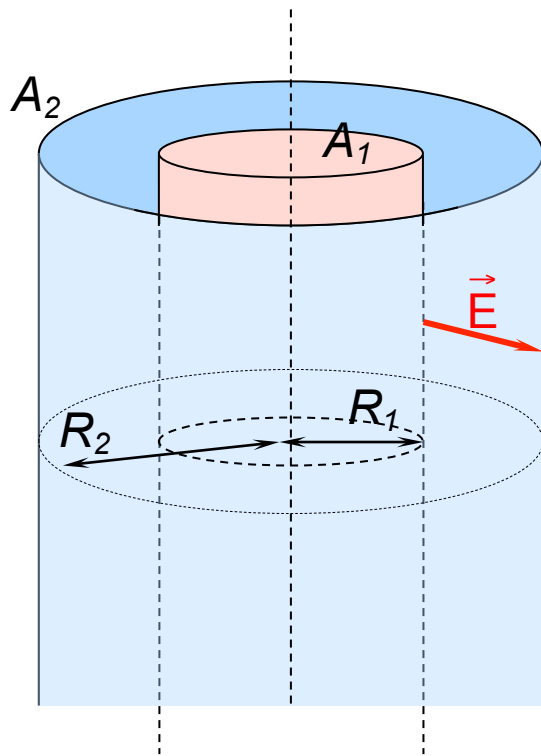
$$U = V_1 - V_2 = \int_{R_1}^{R_2} \vec{E} \cdot \vec{dr} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{1}{r} \right]_{R_1}^{R_2}$$

$$U = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left[\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right] = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2}$$

$$\text{D'où : } C = 4\pi\epsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}$$

Condensateur cylindrique

Le condensateur sphérique est constitué de deux cylindres conducteurs concentriques de même axe et de rayons respectifs R_1 et R_2 .



En coordonnées cylindriques :

$$\vec{E}(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \vec{e}_r$$

$$U = V_1 - V_2 = \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

$$U = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} dr$$

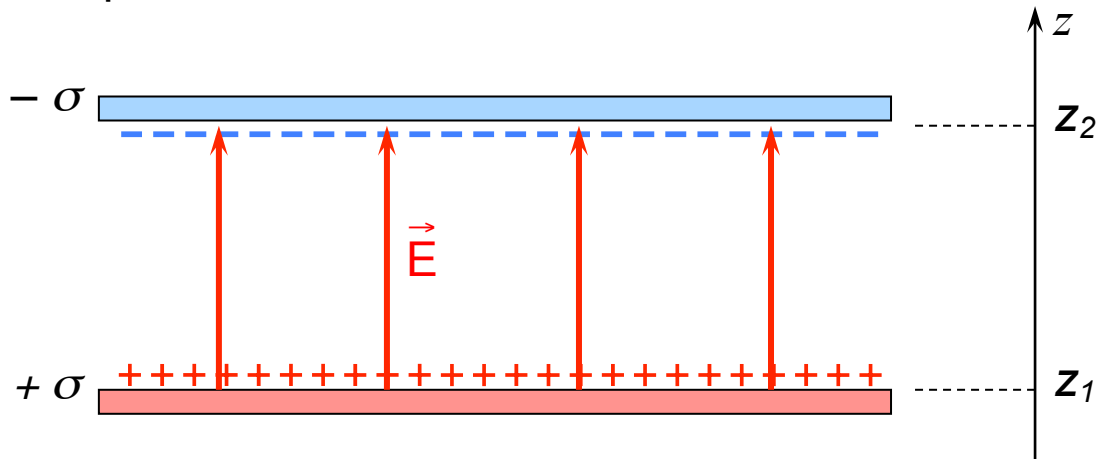
$$U = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

d'où la capacité / unité de longueur d'un tel condensateur :

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}$$

Condensateur plan

Le champ électrique régnant entre les deux armatures résulte de la superposition des champs électriques créés par chaque armature :



- Armature A_1 : $\vec{E}_1 = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{e}_z$
- Armature A_2 : $\vec{E}_2 = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{e}_z$

D'où :

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{e}_z$$

$$U = V_1 - V_2 = \int_1^2 \vec{E} \cdot dz \vec{e}_z = U = \int_{z_2}^{z_1} \frac{\sigma}{\epsilon_0} dz = \frac{\sigma}{\epsilon_0} (z_2 - z_1)$$

Si $(z_2 - z_1) = d$: distance entre les deux armatures, alors la capacité / unité de surface d'un tel condensateur est :

$$C = \frac{\epsilon_0}{d}$$

5.5.4 Énergie électrostatique emmagasinée dans un condensateur

Soit un condensateur constitué de deux armatures A et B. L'énergie électrostatique de ce système de 2 conducteurs est (cf. § 5.3 et 5.5.1) :

$$\begin{aligned}W_e &= \frac{1}{2} V_A \cdot Q_A + \frac{1}{2} V_B \cdot Q_B \\ &= \frac{1}{2} Q \cdot (V_A - V_B) = \frac{1}{2} Q \cdot U\end{aligned}$$

ou encore :

$$W_e = \frac{1}{2} Q \cdot U = \frac{1}{2} C \cdot U^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

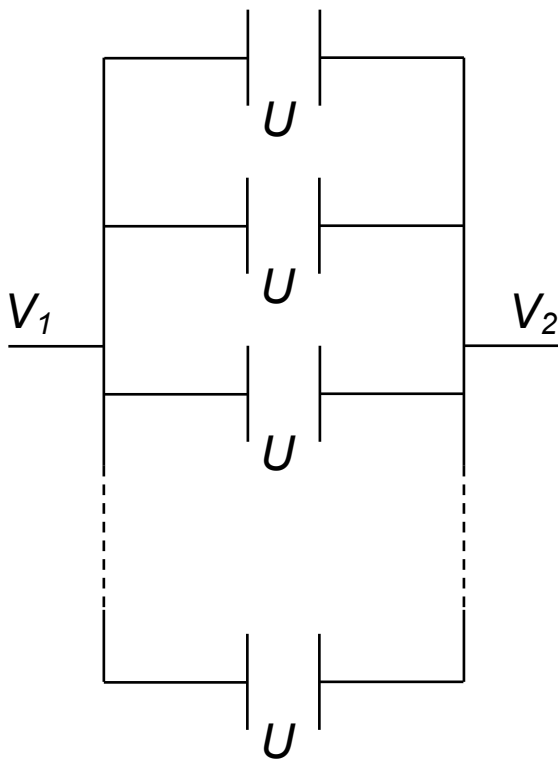
Pour un condensateur plan constitué de 2 armatures de surface S chargées et séparées par l'épaisseur e :

$$\begin{aligned}W_e &= \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} \frac{(\sigma S)^2}{\varepsilon_0 S/e} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \left(\frac{\sigma}{\varepsilon_0} \right)^2 S e \\ &= \frac{\varepsilon_0}{2} E^2 S e = \frac{\varepsilon_0}{2} \iiint_V E^2 d\tau\end{aligned}$$

L'énergie du condensateur est stockée dans le champ régnant entre les armatures du condensateur.

5.5.5 Association de condensateurs

Condensateur en parallèle



Toutes les armatures sont soumises à la même différence de potentiel donc à la même tension U .

Pour chaque condensateur :

$$Q_i = C_i \cdot U$$

La charge totale portée par l'ensemble est :

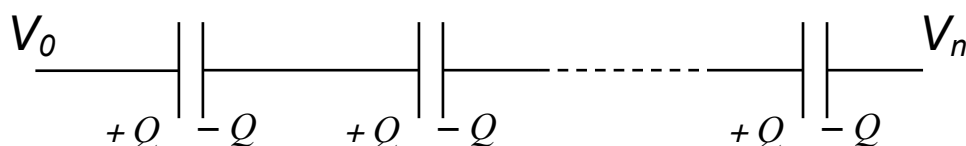
$$Q_{tot} = \sum_{i=1}^n Q_i = \sum_{i=1}^n C_i \cdot U$$

D'où la capacité équivalente à l'ensemble des n condensateurs en parallèle :

$$C_{\text{éq}} = \sum_{i=1}^n C_i$$

Condensateur en série

Soit n condensateurs de capacité C_i associé en série :

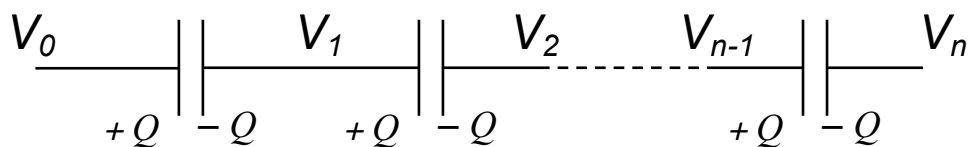


- On porte aux potentiels respectifs V_0 et V_n les deux extrémités de la chaîne de condensateurs.

- La charge $+Q$ apparaît sur la première armature et par influence, il apparaît les charges $\pm Q$ sur les armatures de chaque condensateur.

La tension aux bornes du système peut s'écrire :

$$V_0 - V_n = (V_0 - V_1) + (V_1 - V_2) + \dots + (V_{n-1} - V_n)$$



La charge des condensateurs est :

$$Q_1 = C_1 (V_0 - V_1) \quad \rightarrow \quad (V_0 - V_1) = \frac{Q_1}{C_1}$$

$$Q_i = C_i (V_{i-1} - V_i) \quad \rightarrow \quad (V_{i-1} - V_i) = \frac{Q_i}{C_i}$$

D'où :

$$V_0 - V_n = U = \frac{Q_1}{C_1} + \frac{Q_2}{C_2} + \dots + \frac{Q_n}{C_n}$$

Avec : $Q_i = Q$ $U = Q \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i}$

La capacité équivalente à l'ensemble des n condensateurs en parallèle est donnée par la relation :

$$\frac{1}{C_{\text{éq}}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i}$$