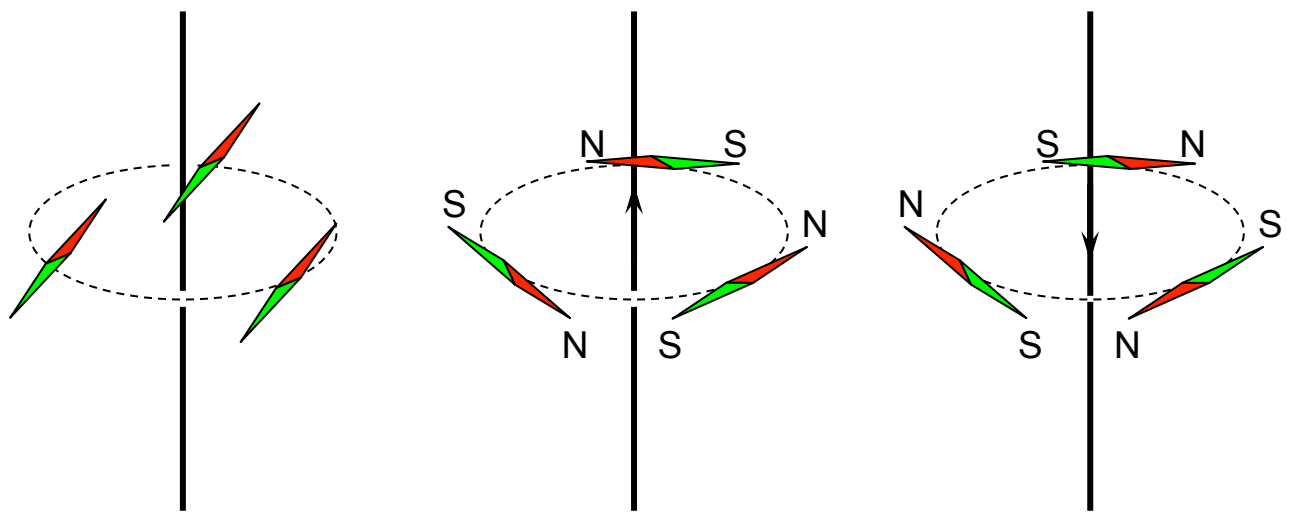


## 6 CHAMP D'INDUCTION MAGNÉTIQUE

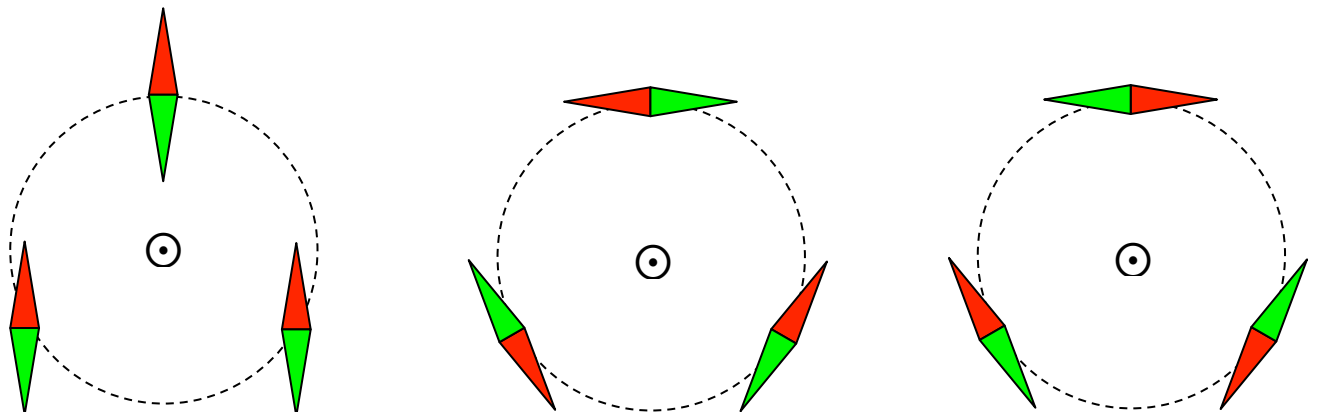
### 6.1 Un peu d'histoire

#### 6.1.1 Expérience d'Oersted (1819)

On considère un fil conducteur rectiligne entouré de trois boussoles. Celles-ci sont initialement alignées selon le champ magnétique terrestre.

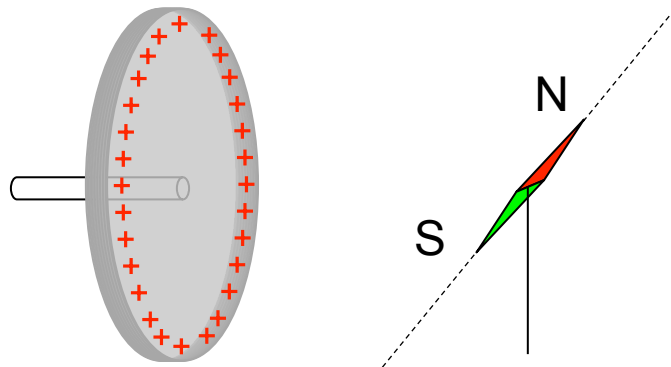


Quand le fil est parcouru par un courant, les boussoles se tournent et s'alignent selon un cercle entourant le fil. Si on inverse le sens du champ, le sens des boussoles s'inverse.

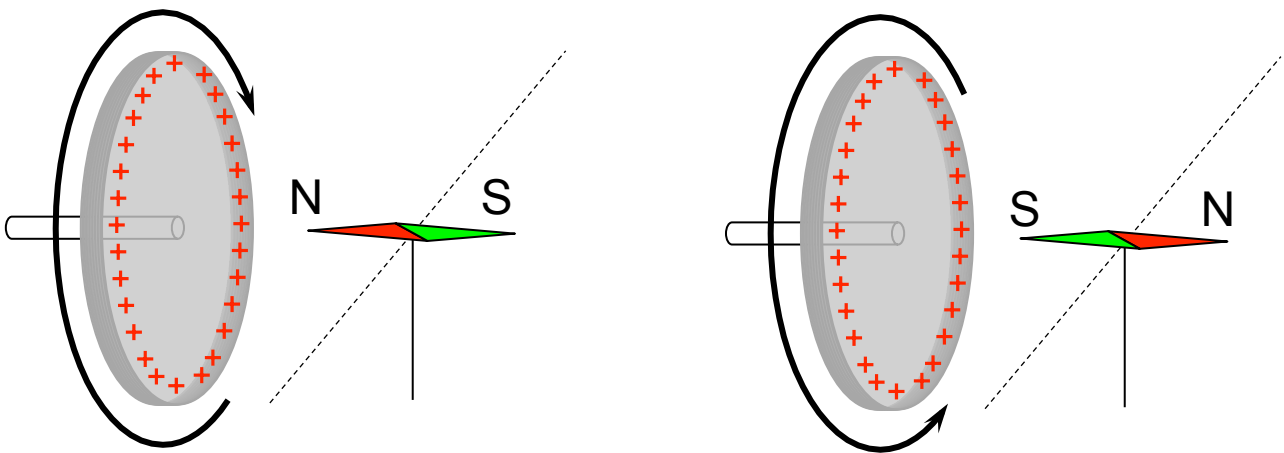


## 6.1.2 Expérience de Rowland (1876)

On considère une boussole placée devant un disque chargé en périphérie. En l'absence de rotation, la boussole est alignée selon les lignes du champ magnétique terrestre.



Si la roue chargée tourne, on observe une déviation de la boussole



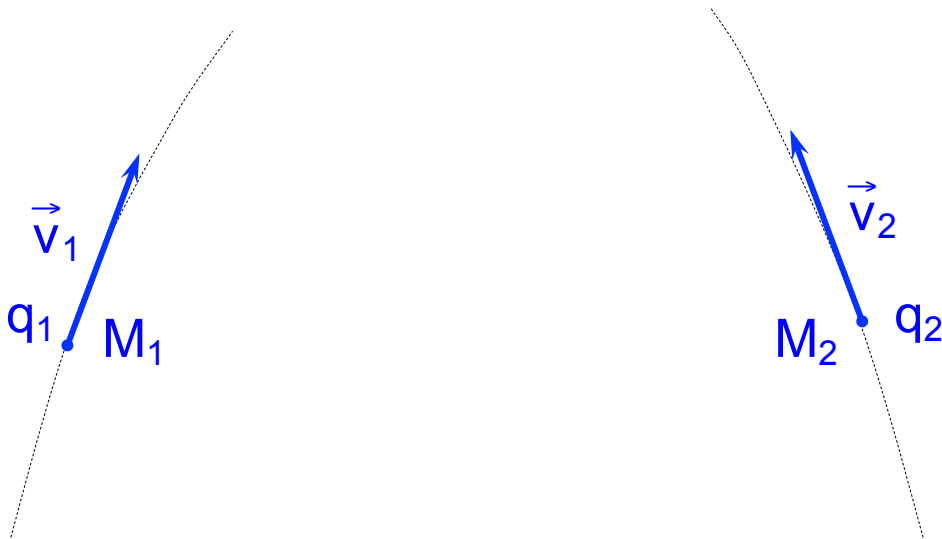
Des charges en mouvement modifient donc les propriétés de l'espace alentour. La boussole réagit à ces modifications, elle est soumise à des forces dont l'intensité diminue avec l'éloignement et dont le sens varie avec :

- le sens du mouvement des charges,
- le signe des charges

## 6.2 Champ d'induction magnétique

### 6.2.1 Force de Lorentz

Soient deux charges en mouvement :



La force exercée par  $q_1$  sur  $q_2$  est :

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = \frac{q_1 \cdot q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \left[ \vec{u}_{12} + \frac{\vec{v}_2}{c} \wedge \left( \frac{\vec{v}_1}{c} \wedge \vec{u}_{12} \right) \right]$$

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = \frac{q_1 \cdot q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_{12} + \frac{q_1 \cdot q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \left[ \frac{\vec{v}_2}{c} \wedge \left( \frac{\vec{v}_1}{c} \wedge \vec{u}_{12} \right) \right]$$

$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{q_2 \vec{E}_1}$$

avec  $\vec{u}_{12} = \frac{\vec{M}_1 M_2}{M_1 M_2}$

le terme  $\frac{q_1 \cdot q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \left[ \frac{\vec{v}_2}{c} \wedge \left( \frac{\vec{v}_1}{c} \wedge \vec{u}_{12} \right) \right]$  est la contribution du

**champ d'induction magnétique**, appelé abusivement champ magnétique.

On peut donc réécrire la force exercée par  $q_1$  sur  $q_2$  :

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = q_2 \left[ \vec{E}_1 + \vec{v}_2 \wedge \vec{B}_1 \right]$$

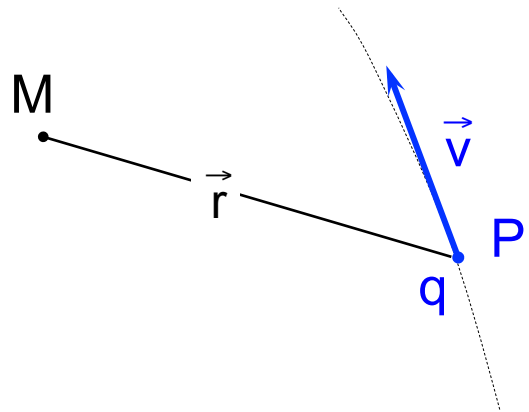
c'est la force de Lorentz

## 6.2.2 Champ d'induction magnétique

D'une manière générale, le champ d'induction magnétique créé en  $M$  par une particule  $q$  en mouvement est défini par :

$$\vec{B} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{q \vec{v} \wedge \vec{PM}}{PM^3}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q \vec{v} \wedge \vec{r}}{r^3}$$



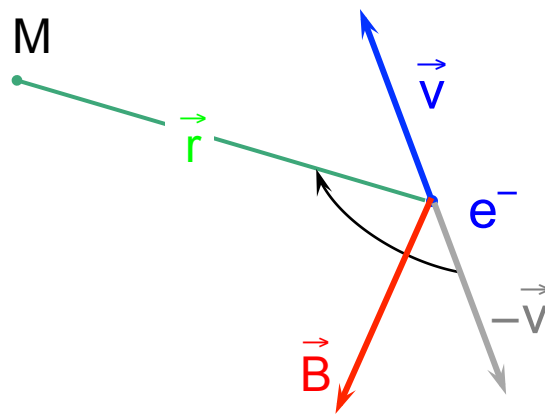
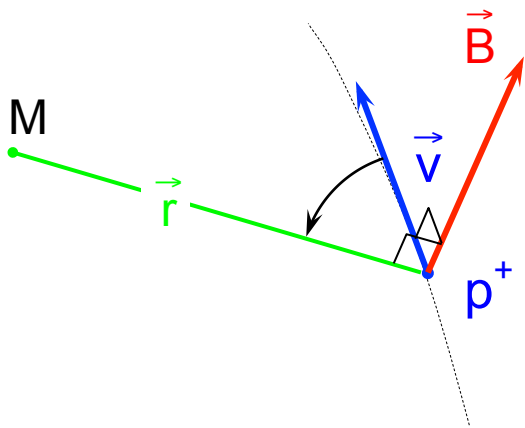
avec  $\mu_0 = \frac{1}{\epsilon_0 c^2}$  perméabilité magnétique du vide

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Hm}^{-1} \quad [\mu_0] = \text{M L I}^{-2} \text{ T}^{-2}$$

### Remarques :

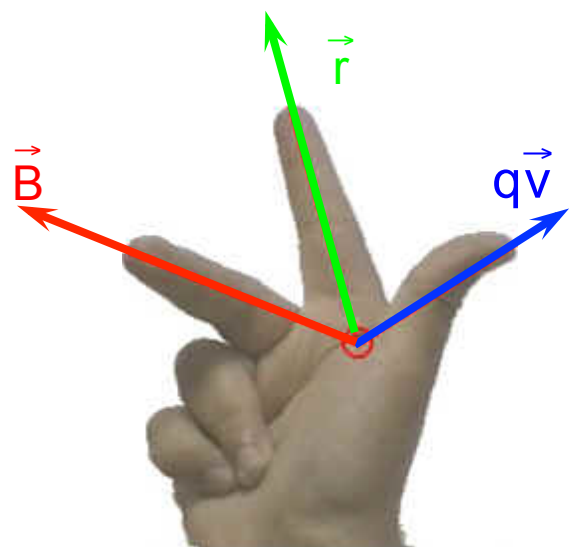
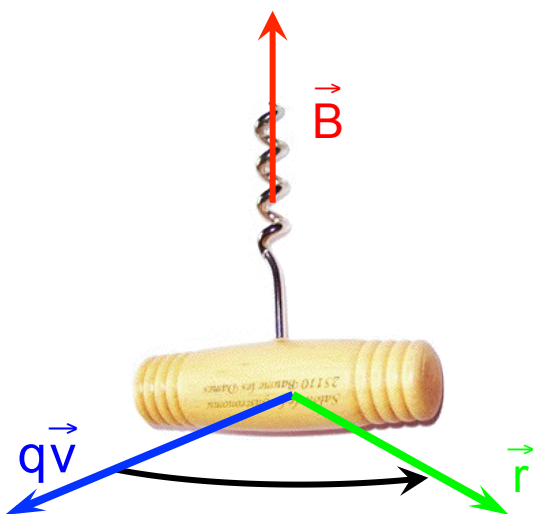
- L'expression de  $\vec{B}$  n'est valable que dans le cas où les particules se déplacent à des vitesses très inférieures à  $c$ .  
→ magnétostatique
- Cette expression dépend du choix du référentiel.
- $|\vec{B}|$  diminue en  $1/r^2$  comme  $|\vec{E}|$

- $\vec{B}$  est perpendiculaire à  $\vec{v}$  et  $\vec{r}$
- $\vec{B}$  est défini par un produit vectoriel de deux grandeurs polaires,  $\vec{B}$  est une grandeur axiale ou pseudo-vecteur.
- Le trièdre  $(q\vec{v}, \vec{r}, \vec{B})$  est direct



Règle du tire-bouchon

Règle des trois doigts



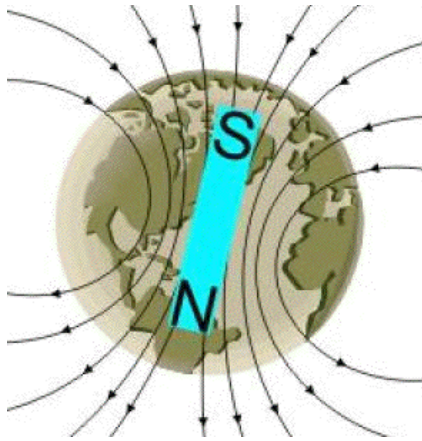
main droite !!!

## Unités :

- l'unité d'induction magnétique est le tesla (T)
- on utilise aussi le gauss (G)  
 $1 \text{ T} = 10^4 \text{ G}$

## Ordres de grandeur :

- champ magnétique terrestre :  $47 \mu\text{T}$  en France

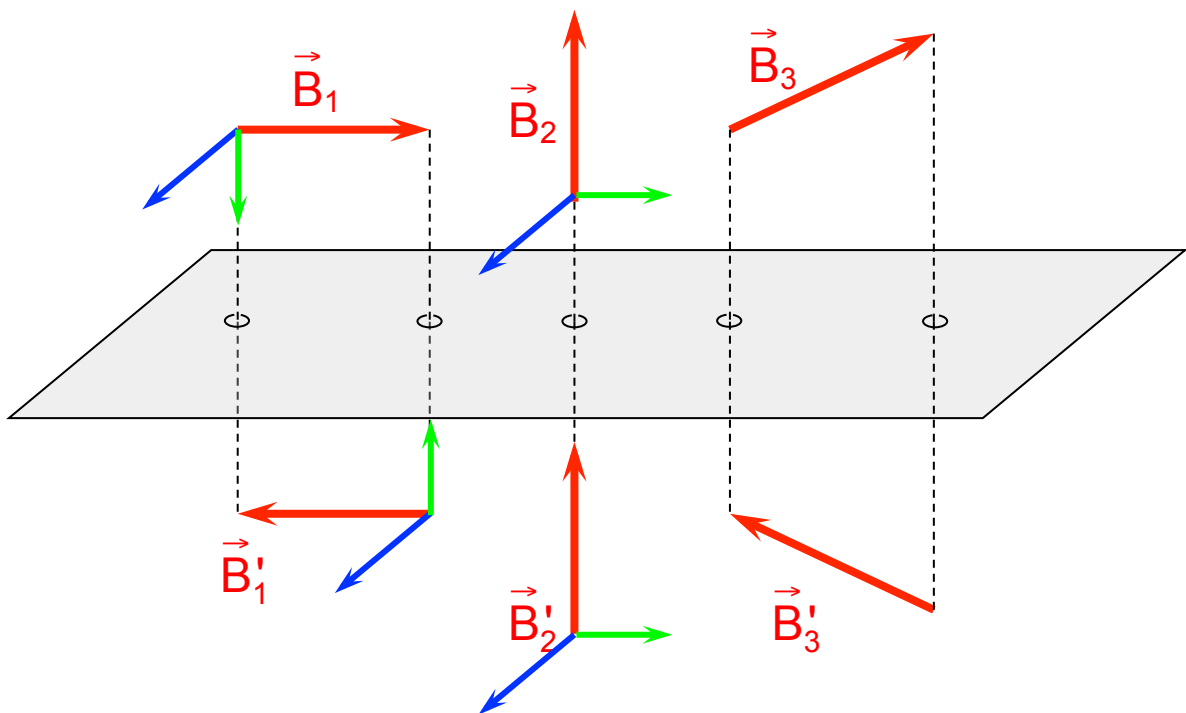


composante horizontale :  
 $\approx 20 \mu\text{T}$

- aimant courant :  $10 \text{ mT}$
- champ magnétique intense du LCMI (Grenoble)  
 $34 \text{ T}$  ( $24 \text{ MW}$ ,  $31\,000 \text{ A}$ )
- bobine supraconductrice :  $10 \text{ T}$
- étoile à neutrons  $10^8 \text{ T}$

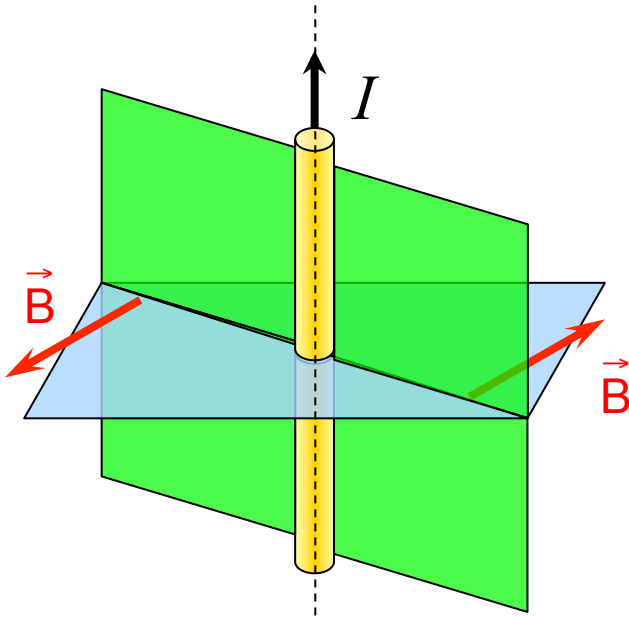
### 6.2.3 Transformation des vecteurs axiaux

- Un vecteur axial se transforme comme un vecteur polaire par des opérations de translation ou de rotation.
- Dans le cas d'une symétrie par rapport à un plan,  $\vec{B}$  se transforme en l'opposé du symétrique :



- Si la source du champ  $\vec{B}$  possède un plan de symétrie, alors le champ  $\vec{B}$  est perpendiculaire à ce plan.
- Si la source du champ  $\vec{B}$  possède un plan d'antisymétrie, alors le champ  $\vec{B}$  est contenu dans ce plan.

## 6.2.4 Transformation des vecteurs axiaux



### Fil rectiligne

La distribution présente une symétrie cylindrique,  
 $\Rightarrow$  il convient d'utiliser les coordonnées cylindriques.

- La distribution de courant est invariante :
  - par rotation autour du fil  $\Rightarrow \vec{B}$  ne dépend pas de  $\varphi$
  - par translation parallèlement à  $\Rightarrow \vec{B}$  ne dépend pas de  $z$   
 $\Rightarrow \vec{B}$  ne dépend pas de  $z$ $\Rightarrow \vec{B}$  ne dépend que de  $\rho$   $\vec{B}(\rho, \varphi, z) = \vec{B}(\rho)$

D'autre part :

- (i) Tout plan perpendiculaire à l'axe est plan d'antisymétrie  
or  $\vec{B}$  est contenu dans ce plan
- (ii) Tout plan passant par l'axe est plan de symétrie  
or  $\vec{B}$  est perpendiculaire à ces plans  
 $\Rightarrow \vec{B} = B_\varphi \vec{e}_\varphi$

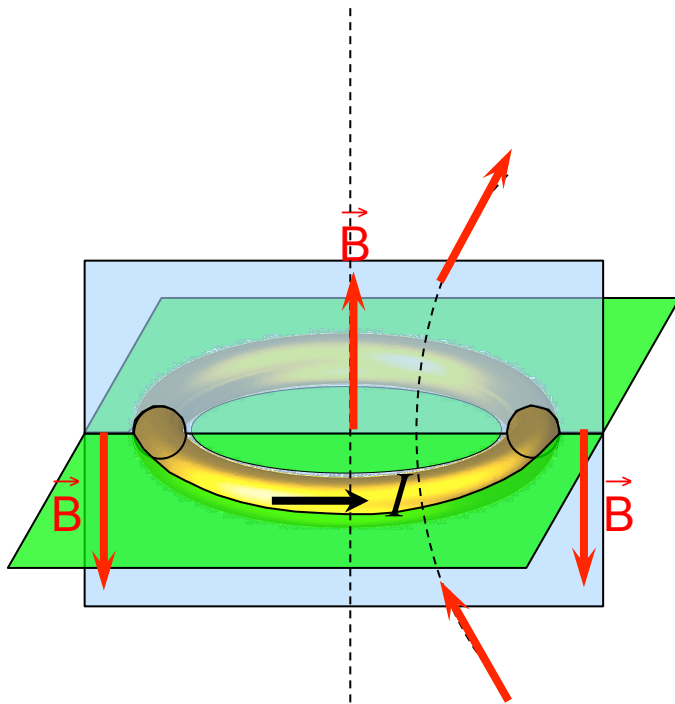
Il est à noter que la condition (ii) est plus informative que la condition (i)

Finalement, dans le cas du fil infini :

$$\vec{B}(\rho, \varphi, z) = B_\varphi(\rho) \vec{e}_\varphi$$

L'analyse des symétries ne donne que la direction des lignes de champ ; le sens est déterminé par la règle des 3 doigts.





## Spire circulaire

La distribution présente une symétrie cylindrique,  
 $\Rightarrow$  il convient à nouveau d'utiliser les coordonnées cylindriques.

- La distribution de courant est invariante par rotation autour du fil  
 $\Rightarrow \vec{B}$  ne dépend pas de  $\varphi$

$\Rightarrow \vec{B}$  dépend que de  $\rho$  et  $z$

$$\vec{B}(\rho, \varphi, z) = \vec{B}(\rho, z)$$

D'autre part :

(i) Tout plan contenant l'axe vertical passant par le centre de la spire est plan d'antisymétrie

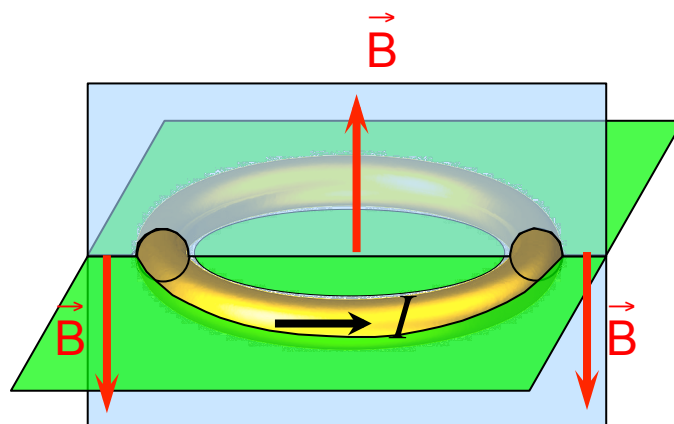
$\vec{B}$  est contenu dans ce plan

$$\Rightarrow \vec{B} = B_\rho(\rho, z) \vec{e}_\rho + B_z(\rho, z) \vec{e}_z$$

(ii) Le plan perpendiculaire à l'axe vertical passant par le centre de la spire est plan de symétrie

or  $\vec{B}$  est perpendiculaire à ce plan

$$\Rightarrow \text{en tout point de ce plan } \vec{B} = B \vec{e}_z$$



## 6.2.5 Principe de superposition

De même que pour le champ électrostatique, le principe de superposition s'applique au champ d'induction magnétique. Pour  $N$  particules situées (à l'instant  $t$ ) en  $P_i$  et se mouvant à la vitesse  $\vec{v}_i$ , le champ d'induction magnétique perçu en  $M$  est la somme des champs individuels créés par chaque particule :

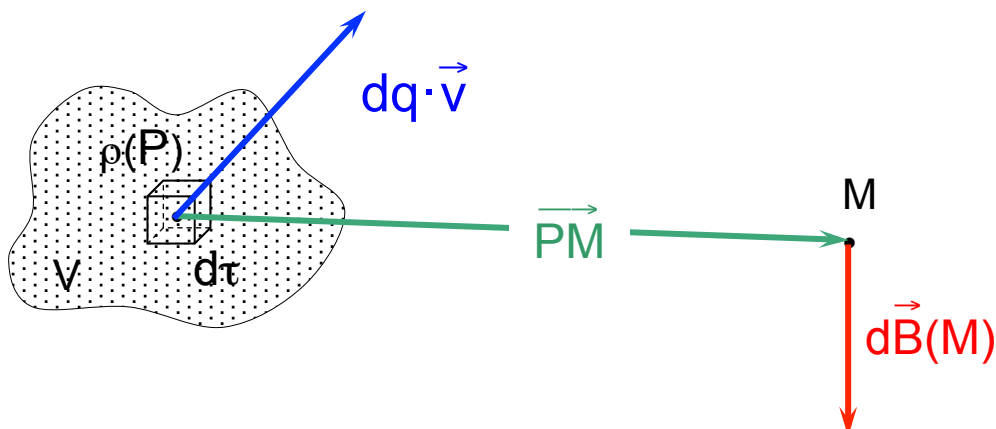
$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{i=1}^N \frac{q_i \vec{v}_i \wedge \overrightarrow{P_i M}}{P_i M^3}$$

## 6.2.6 Champ créé par une densité de charges en mouvement

En électrostatique, le principe de superposition permet de calculer le champ créé par une distribution de charges immobiles :

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \frac{\rho(P)}{PM^2} \frac{\overrightarrow{PM}}{PM} d\tau$$

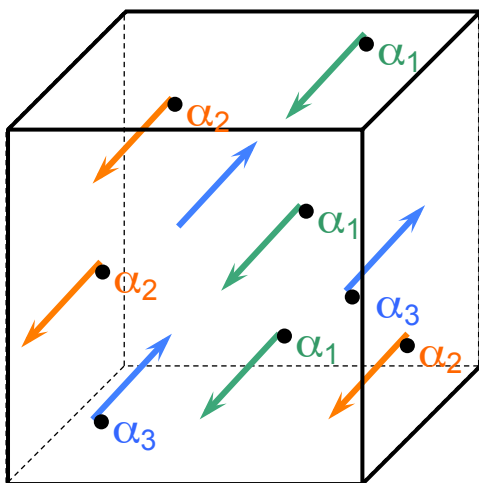
En magnétostatique, les charges bougent !



Le champ infinitésimal  $d\vec{B}$  créé par la charge élémentaire  $dq$  contenue dans le volume  $d\tau$  et se déplaçant à la vitesse  $\vec{v}$  est :

$$d\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{dq \cdot \vec{v} \wedge \vec{PM}}{PM^3}$$

Dans le volume infinitésimal  $d\tau$ , différents types charges sont susceptibles de se déplacer :



$$dq \cdot \vec{v} = \sum_{\alpha} \rho_{\alpha} q_{\alpha} \vec{v}_{\alpha} d\tau$$

$\rho_{\alpha}$  : densité de particules de type  $\alpha$  (ayant une charge  $q_{\alpha}$ )

$\vec{v}_{\alpha}$  : vitesses des particules de type  $\alpha$

Le terme  $\sum_{\alpha} \rho_{\alpha} q_{\alpha} \vec{v}_{\alpha}$  est appelé **densité de courant** :

$$\vec{j} = \sum_{\alpha} \rho_{\alpha} q_{\alpha} \vec{v}_{\alpha}$$

et correspond à un flux de charges / unité de temps

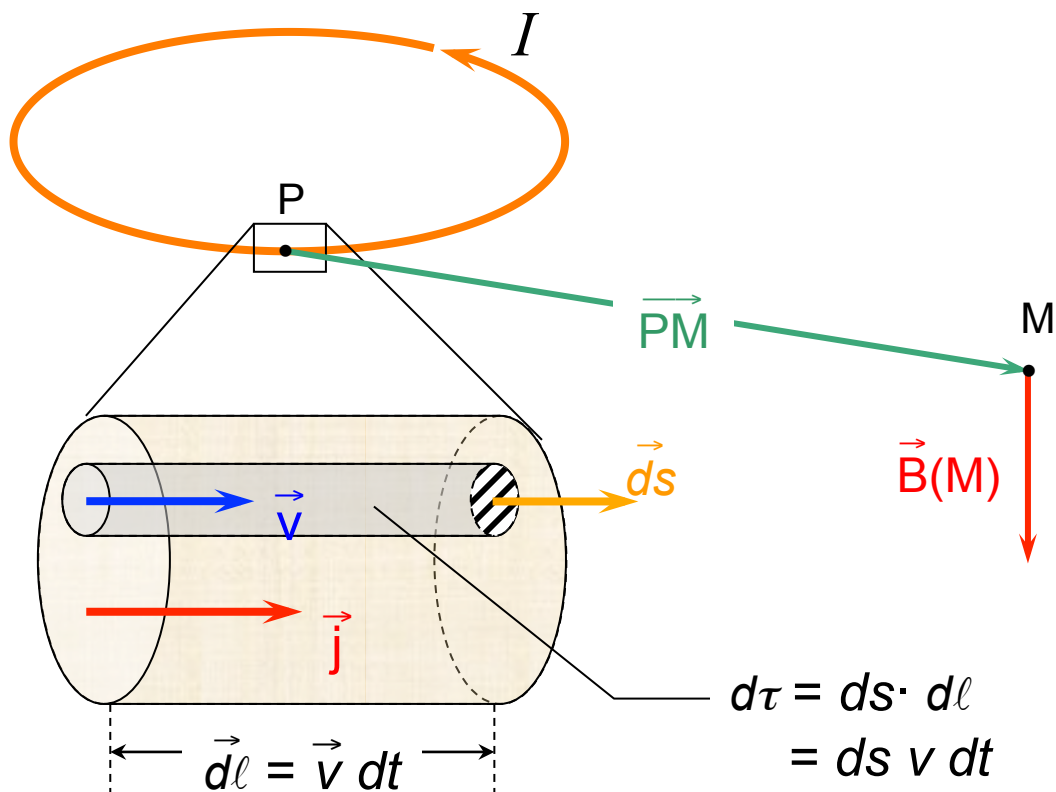
Dans ce cas, l'expression du champ d'induction magnétique créé par une distribution volumique quelconque de charges en mouvement est :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\vec{j}(P) \wedge \vec{PM}}{PM^3} d\tau$$

Cette expression est valable pour un conducteur avec des charges à l'intérieur

### 6.3 Loi de Biot et Savart

On considère un circuit fermé parcouru par un courant permanent d'intensité  $I$ . Examinons ce qui se passe à l'échelle microscopique dans une section mince du conducteur autour du point  $P$  :



Le point M est situé à une distance telle du point P de telle sorte que depuis M tous les vecteurs vitesse des charges en mouvement sont considérées comme colinéaires.

Dans ce cas :

$$\vec{j} \parallel \vec{d\ell} \quad \text{et} \quad \vec{j} \parallel \vec{ds}$$

L'expression du champ d'induction magnétique au point M est :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\vec{j}(P) \wedge \vec{PM}}{PM^3} d\tau$$

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\text{circuit}} d\ell \iint_S \frac{\vec{j}(P) \wedge \vec{PM}}{PM^3} ds$$

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\text{circuit}} \frac{\left[ \iint_S \vec{j}(P) ds \right] d\ell \wedge \vec{PM}}{PM^3}$$

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\text{circuit}} \frac{\left[ \iint_S j(P) ds \right] \vec{d\ell} \wedge \vec{PM}}{PM^3}$$

avec  $\iint_S j(P) ds = I$     courant traversant la section S

d'où finalement :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{\text{circuit}} \frac{d\vec{\ell} \wedge \vec{PM}}{PM^3}$$

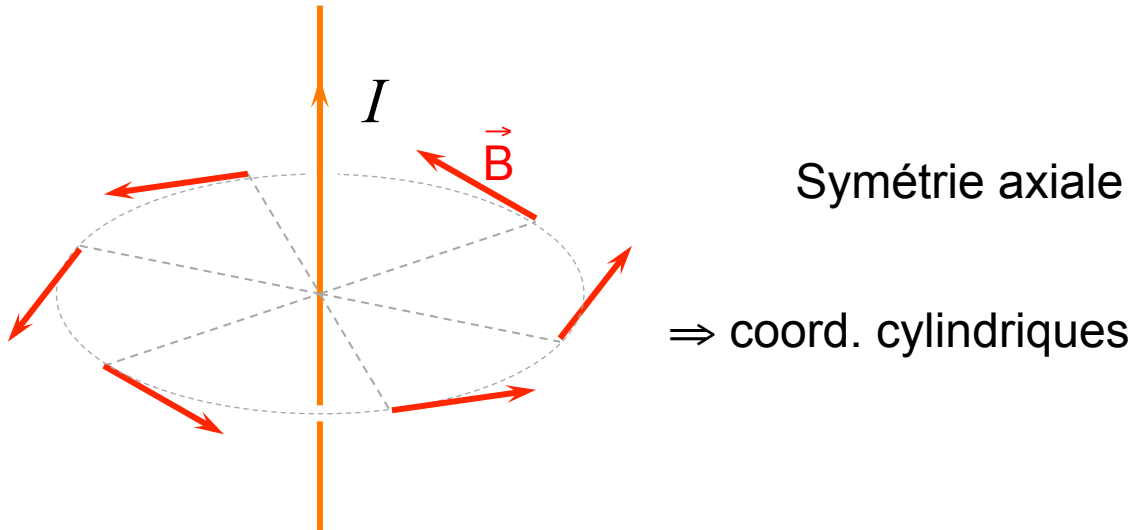
Formule de Biot et Savart

### Remarques :

- Cette formule a été établie expérimentalement en 1820. Le lien entre champ d'induction magnétique et charges en mouvement n'a été établi que bien plus tard ...
- La formule de Biot et Savart est un outil de calcul et ne doit être utilisée que pour calculer l'induction magnétique créée par des circuits fermés.
- Pour un fil conducteur considéré comme infiniment mince, le champ est nul en  $r = 0$ .

### 6.3.1 Induction magnétique créée par un fil rectiligne infini parcouru par un courant $I$

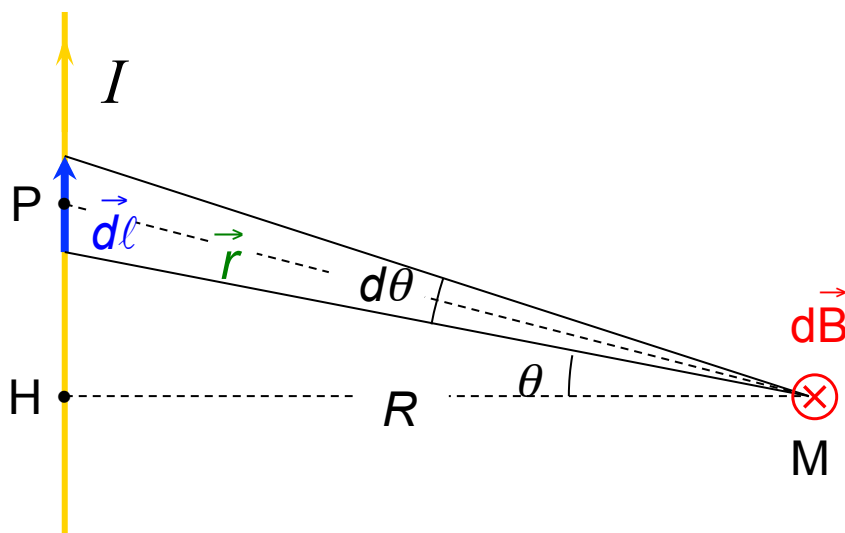
#### Analyse des symétries (cf. § 6.2.4)



- Invariance par rotation  $\Rightarrow \vec{B}$  ne dépend pas de  $\varphi$ .
- Invariance par translation  $\Rightarrow \vec{B}$  ne dépend pas de  $z$ .
- Les lignes de champ pour lesquelles  $|\vec{B}| = C^{\text{te}}$  sont circulaires  $\vec{B}(\vec{r}) = B(r) \vec{e}_\varphi$

#### Calcul de $\vec{B}$

On considère l'élément de circuit  $d\vec{l}$



Le champ créé par l'élément de longueur  $\vec{dl}$  est donné par la relation de Biot et Savart :

$$\vec{dB}(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\vec{dl} \wedge \vec{r}}{r^3}$$

$$dB = \left| \vec{dB} \right| = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl r \sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)}{r^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl r \cos\theta}{r^3}$$

On cherche à tout exprimer en fonction de  $\theta$  :

- $l = HP$

$$HP = HM \tan\theta$$

$$HP = R \tan\theta$$

$$dl = d(R \tan\theta) = R \frac{d\theta}{\cos^2\theta}$$

- $R = r \cos\theta$

d'où :

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi} R \frac{d\theta}{\cos^2\theta} \frac{\cos^2\theta}{R^2} \cos\theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \cos\theta d\theta$$

Les  $\vec{dl}$  sont tous dans le même sens (celui du courant), donc tous les  $\vec{dB}(M)$  correspondant aux différents  $\vec{dl}$  sont dans le même sens.

La norme du champ  $\vec{B}(M)$  est donnée par l'intégrale :

$$B = \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \cos\theta d\theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \left[ \sin\theta \right]_{-\pi/2}^{+\pi/2}$$



Le champ créé en un point M situé à la distance R d'un fil rectiligne infini parcouru par un courant I est :

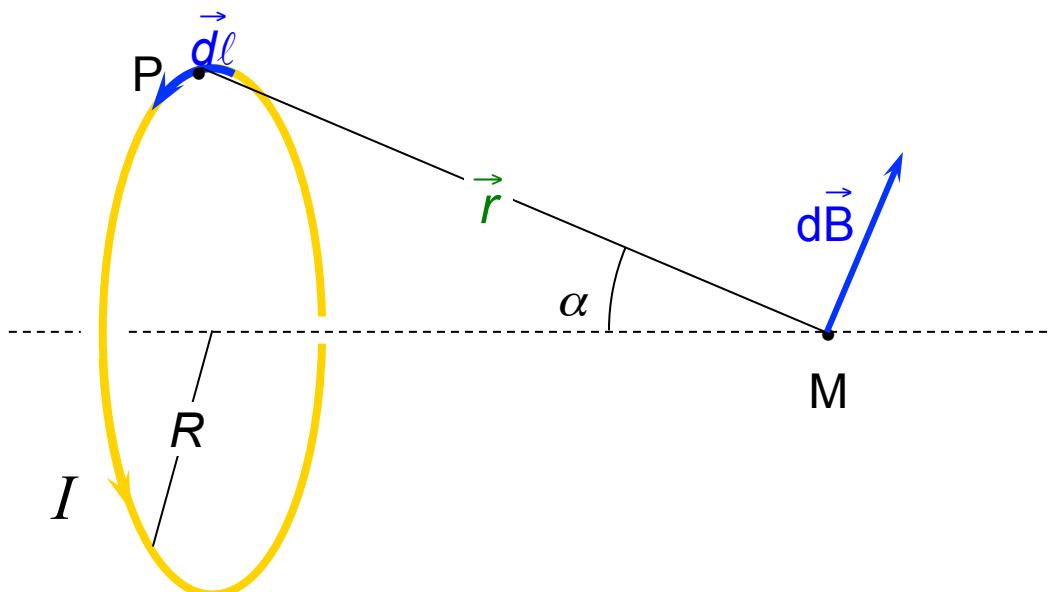
$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \vec{e}_\varphi$$

### 6.3.2 Induction magnétique créée par une spire parcourue par un courant en un point de son axe

On considère une spire circulaire de rayon  $R$  parcourue par un courant  $I$  et on cherche à calculer  $\vec{B}$  en un point quelconque de son axe.

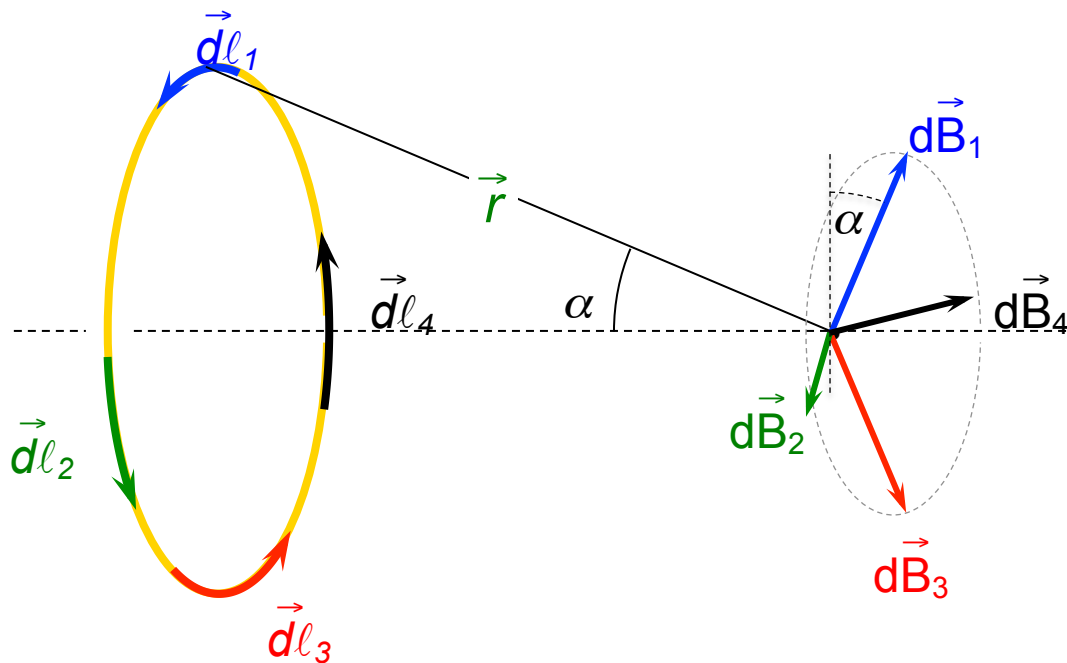
On s'intéresse au champ élémentaire  $d\vec{B}$  créé par l'élément de longueur  $d\vec{\ell}$ . Celui-ci est donné par la relation de Biot et Savart :

$$\vec{dB}(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{\ell} \wedge \vec{r}}{r^3}$$



L'analyse des symétries du problème (cf. § 6.2.4) nous a montré que sur l'axe,  $\vec{B}$  est parallèle à l'axe

On peut aussi retrouver ce résultat en additionnant les contributions  $d\vec{B}_i$  des différents  $d\vec{\ell}_i$  ;



Les différents  $d\vec{B}_i$  sont sur un cône d'ouverture  $(\pi/2 - \alpha)$ .

Par symétrie, les composantes perpendiculaires à l'axe (selon  $\vec{e}_\rho$ ) s'annulent alors que les composantes parallèles à l'axe (selon  $\vec{e}_z$ ) s'additionnent

$\Rightarrow \vec{B}$  est parallèle à l'axe de la spire.

En tout point de la spire :  $d\vec{\ell} \perp \vec{r}$

$$dB(M) = \frac{\mu_0 I d\ell}{4\pi r^2}$$

avec  $R = r \sin \alpha$  :

$$dB(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\ell}{R^2} \sin^2 \alpha$$

Les composantes parallèles à l'axe s'additionnent :

$$B(M) = \oint_{\text{spire}} \left( \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\ell}{R^2} \sin^2 \alpha \right) \sin \alpha$$

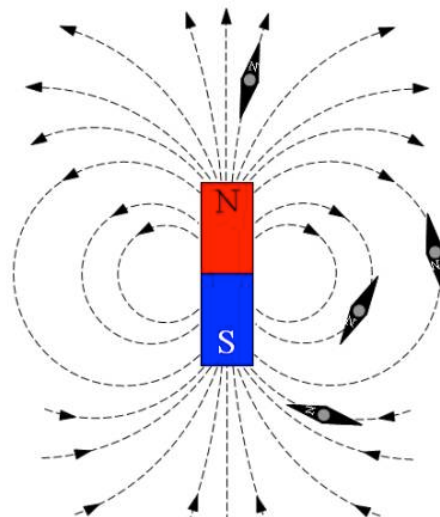
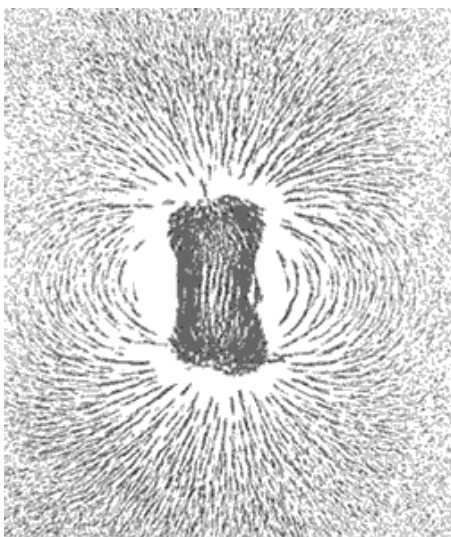
$$B(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi R^2} \sin^3 \alpha \oint_{\text{spire}} d\ell$$

Le champ créé en un point M de son axe par une spire de rayon  $R$  parcourue par un courant  $I$  et vue sous l'angle  $\alpha$  depuis M est :

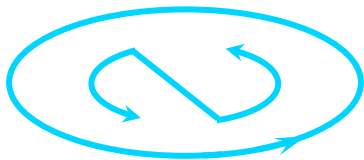
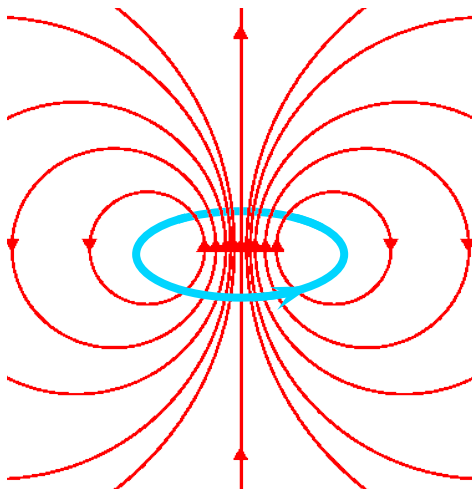
$$B(M) = \frac{\mu_0 I}{2 R} \sin^3 \alpha$$

### 6.3.3 Lignes de champ d'induction magnétique

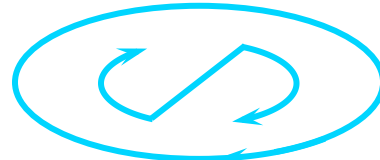
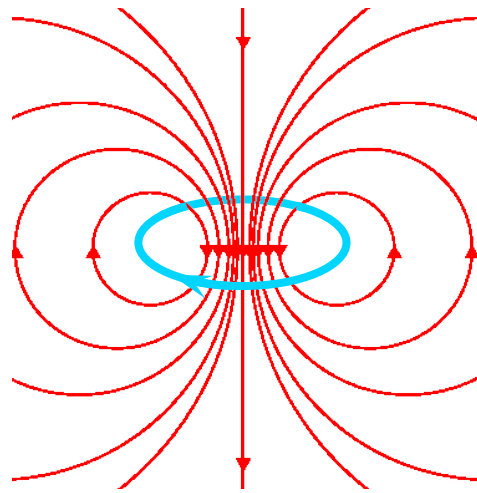
- Aimant



- **Spire**

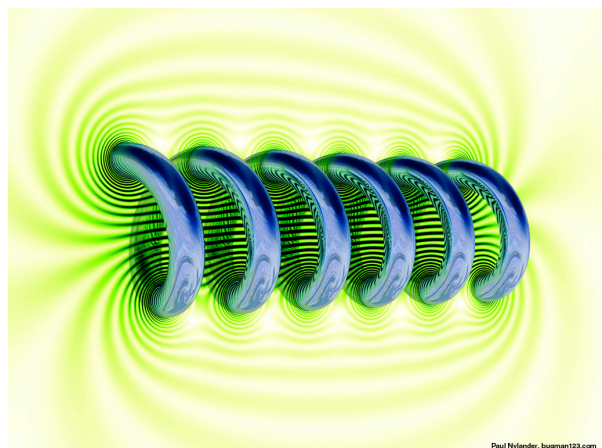
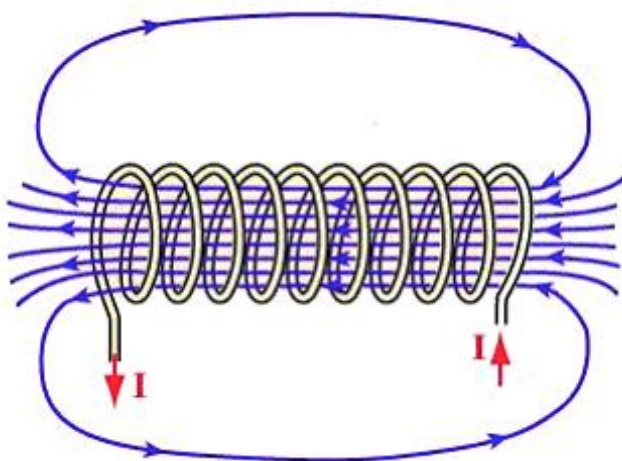


On "voit" le pôle Nord



On "voit" le pôle Sud

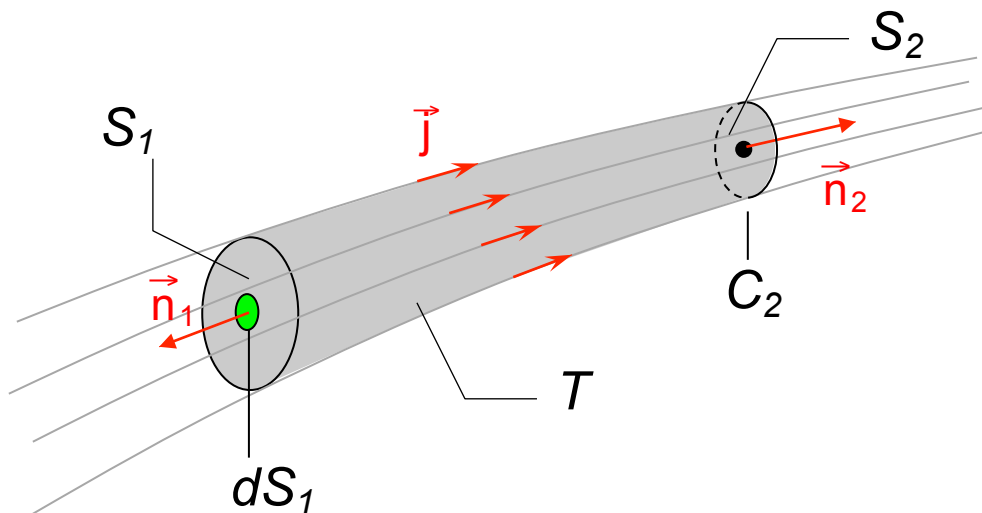
- **Solénoïde** (de nombreuses spires jointives)



## 6.4 Relations locales - Théorème d'Ampère

### 6.4.1 Conservation de la charge

On considère un volume formé par les lignes de courant (tangentes à  $\vec{j}$ ) passant par les surfaces  $S_1$  et  $S_2$  :



Le courant passant à travers la section  $S_1$  par unité de temps est :

$$I = - \iint_{S_1} \vec{j} \cdot d\vec{S}_1 \quad \text{le signe } - \text{ permet d'avoir } I > 0$$

Si on considère maintenant le volume  $V$  délimité par la surface fermée ( $S_1 + T + S_2$ ), le courant qui sort de ce volume est relié à la variation de charge contenue dans  $V$  :

$$\oiint_{S_1+T+S_2} \vec{j} \cdot d\vec{S} = - \frac{dq}{dt}$$

si l'intégrale est positive, alors la charge contenue dans  $V$  diminue avec le temps.

En vertu du théorème de la divergence (Green-Ostrogradski), le premier membre de cette équation peut s'écrire :

$$\oiint_{S_1+T+S_2} \vec{j} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \operatorname{div}(\vec{j}) \, d\tau$$

Par ailleurs, la charge contenue dans  $V$  est :

$$q = \iiint_V \rho \, d\tau$$

La variation de charge dans  $V$  peut donc d'écrire :

$$\frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt} \iiint_V \rho \, d\tau = \iiint_V \frac{d\rho}{dt} \, d\tau$$

D'où :

$$\iiint_V \left( \vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \frac{d\rho}{dt} \right) d\tau = 0$$

On arrive finalement à :

$$\operatorname{div}(\vec{j}) + \frac{d\rho}{dt} = 0 \quad \text{Équation de conservation de la charge}$$

## 6.4.2 Équation de Maxwell – Thomson

On reprend l'expression du champ créé par une charge en mouvement (§ 6.2.2):

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q \vec{v} \wedge \vec{e}_r}{r^2}$$

On calcule la divergence de  $\vec{B}$  :

$$\operatorname{div} \vec{B} = \frac{\mu_0 q}{4\pi} \operatorname{div} \left( \frac{\vec{v} \wedge \vec{e}_r}{r^2} \right)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = \frac{\mu_0 q}{4\pi} \left[ \frac{\vec{e}_r}{r^2} \cdot (\operatorname{rot} \vec{v}) - \vec{v} \cdot \left( \operatorname{rot} \left( \frac{\vec{e}_r}{r^2} \right) \right) \right]$$

or  $\vec{v}$  est un vecteur (et non pas un champ vectoriel), il ne dépend pas, *a priori*, des coordonnées du point  $M$  :

$$\Rightarrow \operatorname{rot} \vec{v} = \vec{0}$$

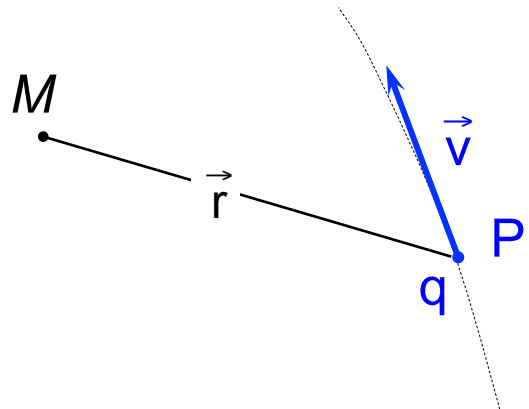
d'autre part :  $\operatorname{rot} \left( \frac{\vec{e}_r}{r^2} \right) = \vec{0}$

- on le vérifie aisément en coordonnées sphériques
- $\frac{\vec{e}_r}{r^2} = -\operatorname{grad} \left( \frac{1}{r} \right)$  or on sait que  $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) = \vec{0}$

donc finalement :

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad \text{Équation de Maxwell – Thomson}$$

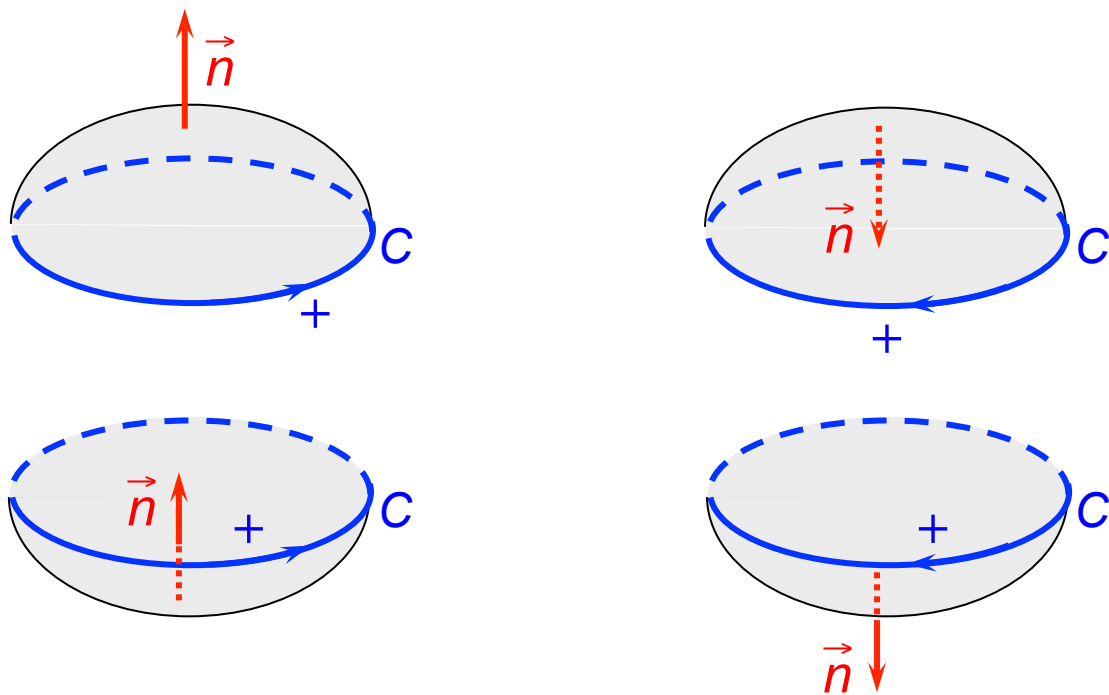
Cette équation constitue une des quatre équations de Maxwell.



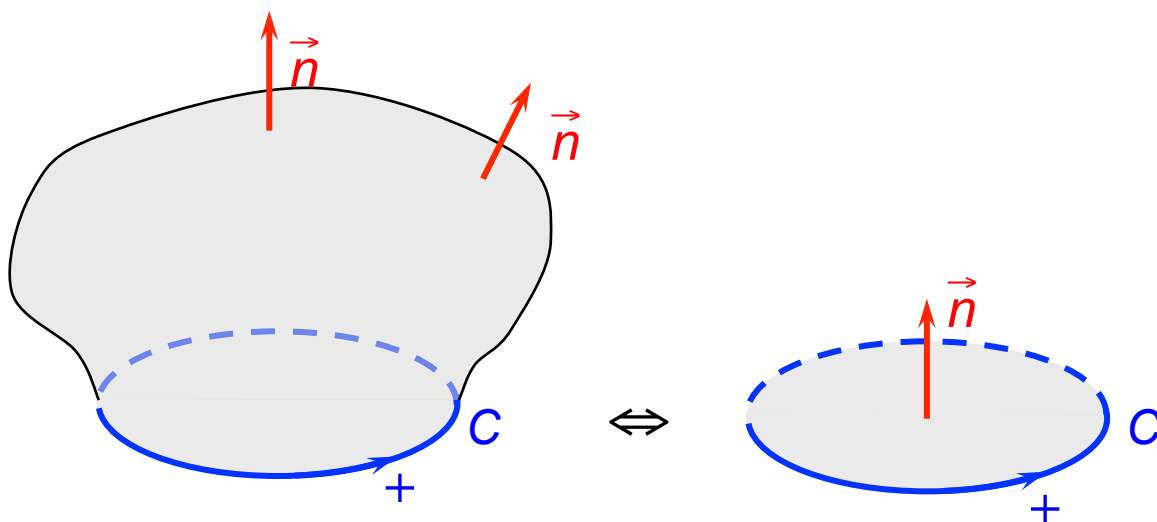
### 6.4.3 Flux de $\vec{B}$ à travers une surface fermée

#### 6.4.3.1 Contours et surfaces orientés

- Soit un contour fermé  $C$  sur lequel s'appuie une surface  $\Sigma$ .  
On oriente le contour  $C$  et la surface  $\Sigma$  :



La surface peut prendre n'importe quelle forme :

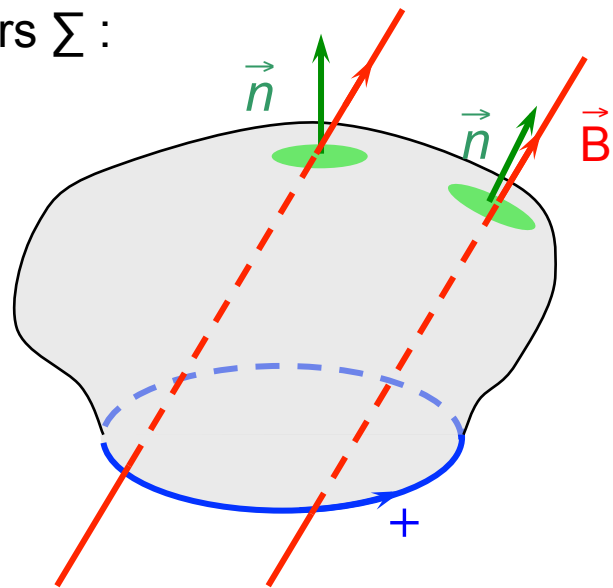




### 6.4.3.2 Flux de $\vec{B}$ à travers une surface fermée

On définit le flux de  $\vec{B}$  à travers  $\Sigma$  :

$$\phi = \iint_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \iint_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{S} \cdot \vec{n}$$

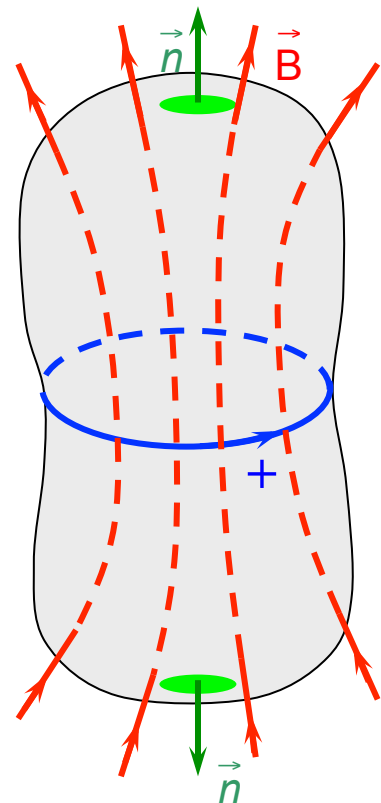


- si  $\vec{B}$  et  $\vec{n}$  sont dans le même sens :  $\phi > 0$
- si  $\vec{B}$  et  $\vec{n}$  sont opposés:  $\phi < 0$

Pour calculer le flux de  $\vec{B}$  à travers une surface fermée, on utilise le théorème de Green-Ostrogradski :

$$\oiint_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \iiint_{V} (\text{div } \vec{B}) d\tau$$

$$\oiint_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$



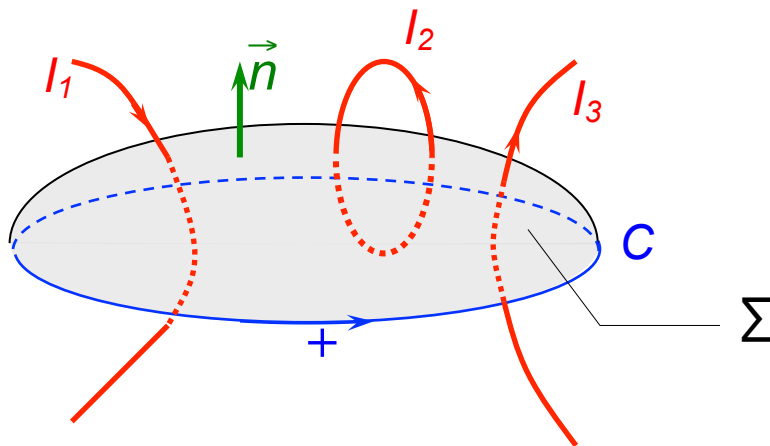
## Conséquences :

- Le flux de l'induction magnétique à travers toute surface fermée est donc nul !
- Il n'existe pas de monopôle magnétique : si on casse un aimant, on retrouve deux aimants.

⇒ Différence fondamentale avec l'électrostatique.

### 6.4.4 Théorème d'Ampère

Soit une courbe fermée, orientée  $C$  sur laquelle s'appuie une surface  $\Sigma$  et des courants permanents traversant  $\Sigma$  :



Le théorème d'Ampère stipule que la circulation du vecteur induction le long d'une courbe fermée  $C$  est égale au produit de la somme algébrique des courants traversant la surface  $\Sigma$  s'appuyant sur  $C$  multipliée par  $\mu_0$  :

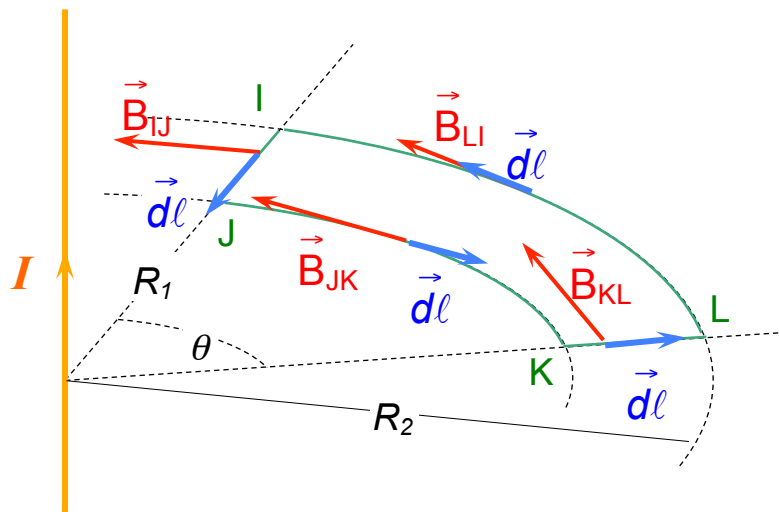
$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0(I_+ - I_-)$$

Dans le cas de la figure représentée plus haut :

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0(-I_1 + I_2 - I_2 + I_3) = \mu_0(-I_1 + I_3)$$

### Démonstration (simplifiée)

On considère le cas du champ d'induction créé par un fil rectiligne infini et une courbe fermée (IJKL) :



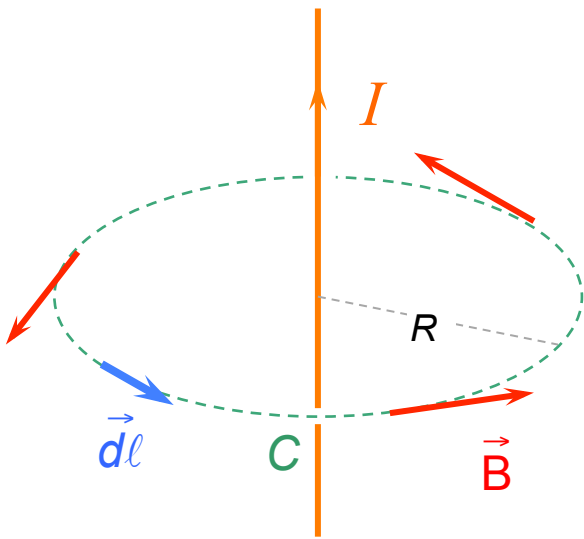
$$\begin{aligned} \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} &= \int_{IJ} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} + \int_{JK} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} + \int_{KL} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} + \int_{LI} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} \\ &= \underbrace{0}_{\text{car } \vec{B}_{IJ} \perp d\vec{\ell}} + \underbrace{0}_{\text{car } \vec{B}_{KL} \perp d\vec{\ell}} \end{aligned}$$

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi R_1} R_1 \theta + \frac{\mu_0 I}{2\pi R_2} R_2 \theta = 0$$

Nous avons donc montré que dans le cas où la surface définie par le contour n'est pas traversée par le courant :

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = 0$$

On considère maintenant le cas simple où le contour circulaire est traversé par le courant  $I$  :



$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} 2\pi R$$

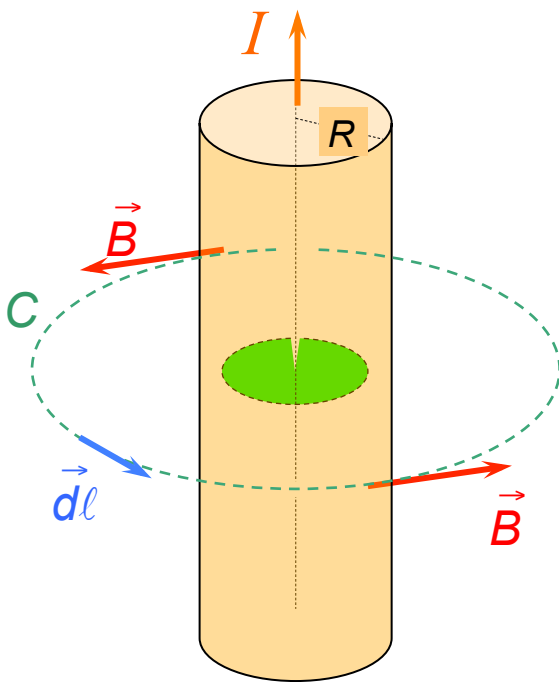
$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$$

Démonstration complète :



## 6.4.5 Application du théorème d'Ampère

### 6.4.5.1 Fil rectiligne



Sur le contour circulaire de rayon  $r < R$  :

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

En supposant une densité de courant uniforme :

$$j = \frac{I}{\pi R^2}$$

D'où :

$$B(r) 2\pi r = \mu_0 \frac{I}{\pi R^2} \pi r^2$$

Finalement :

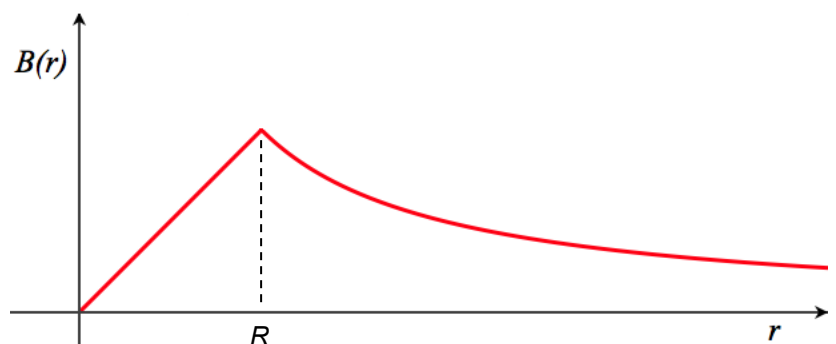
$$\vec{B}(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi R^2} r \vec{e}_\varphi$$

Pour  $r > R$  :

$$B(r) 2\pi r = \mu_0 I$$

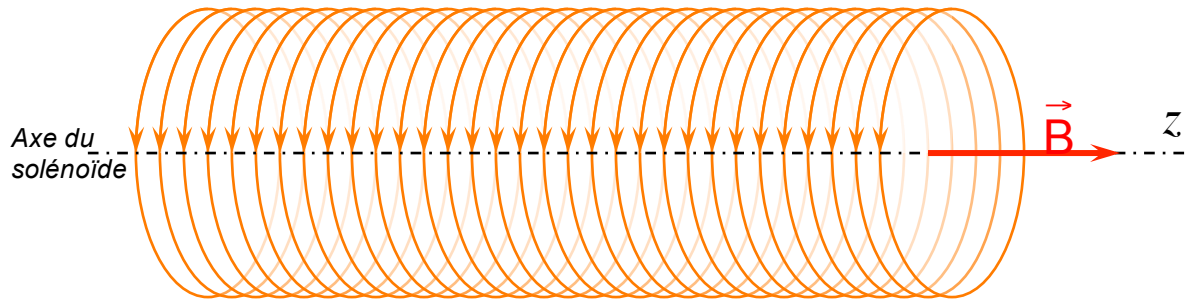
D'où le résultat déjà obtenu :

$$\vec{B}(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{e}_\varphi$$



### 6.4.5.2 Solénoïde

Soit un solénoïde rectiligne infini dont les spires sont traversées par un courant  $I$  :



Le solénoïde compte  $N$  spires par unité de longueur

*Analyse des symétries :*

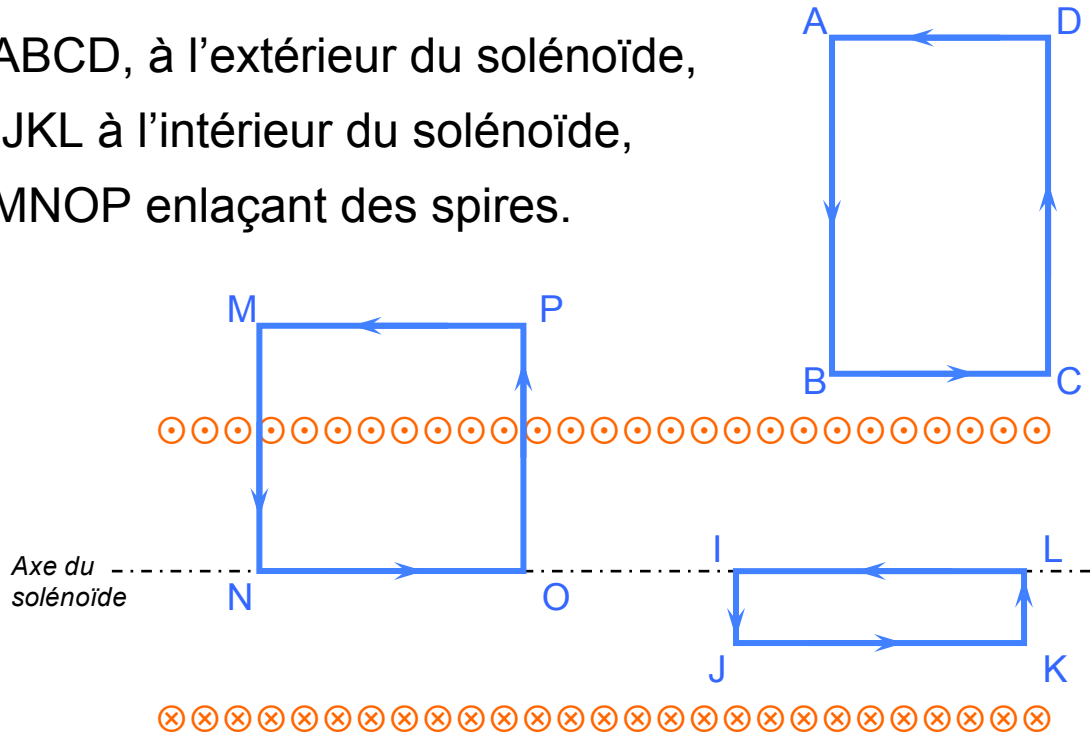
- tout plan passant par l'axe du solénoïde est plan d'antisymétrie,  $\Rightarrow \vec{B}$ , sur l'axe, est parallèle à l'axe,
- tout plan perpendiculaire au solénoïde est plan de symétrie,  $\Rightarrow \vec{B}$  est parallèle à l'axe,
- la distribution de courant est invariante par translation selon  $z$ ,  $\Rightarrow \vec{B}(r, \varphi, z)$  ne dépend pas de  $z$ ,
- la distribution de courant est invariante par rotation autour de l'axe,  $\Rightarrow \vec{B}(r, \varphi, z)$  ne dépend pas de  $\varphi$ ,
- le sens de  $\vec{B}$  est donné par la règle des trois doigts ou celle du tire bouchon.

$$\Rightarrow \text{a priori } \vec{B} = B(r) \vec{e}_z$$

Nous allons utiliser le théorème d'Ampère pour calculer le champ en tout point de l'espace.

On considère les trois contours :

- ABCD, à l'extérieur du solénoïde,
- IJKL à l'intérieur du solénoïde,
- MNOP enlaçant des spires.



**Sur le parcours ABCD :**

$$\oint_{ABCD} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = 0 \text{ (pas de courant traversant)}$$

d'autre part :

$$\begin{aligned} \oint_{ABCD} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} &= \int_{AB} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} + \int_{BC} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} + \int_{CD} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} + \int_{DA} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} \\ &= \underbrace{0 \text{ car } \vec{B} \perp d\vec{\ell}}_{\int_{BC}} + \underbrace{0 \text{ car } \vec{B} \perp d\vec{\ell}}_{\int_{DA}} \end{aligned}$$

d'où :

$$\int_{BC} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} + \int_{DA} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = 0 \quad \Rightarrow \quad \int_{JK} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = - \int_{LJ} \vec{B} \cdot d\vec{\ell}$$

Les sens de parcours étant opposés, on en déduit que  $\vec{B}$  est le même sur ces deux segments,  $\vec{B}$  est donc constant à l'extérieur du solénoïde. De plus si le contour est tel que le segment DA est à l'infini, où le champ  $\vec{B}$  est nul, alors  $\vec{B}$  est nul aussi le long du segment BC,

$\Rightarrow \vec{B}$  est nul à l'extérieur du solénoïde.

**Sur le parcours IJKL :**

$$\oint_{IJKL} \vec{B} \cdot \vec{d\ell} = 0 \quad (\text{pas de courant traversant})$$

d'autre part :

$$\begin{aligned} \oint_{IJKL} \vec{B} \cdot \vec{d\ell} &= \int_{IJ} \vec{B} \cdot \vec{d\ell} + \int_{JK} \vec{B} \cdot \vec{d\ell} + \int_{KL} \vec{B} \cdot \vec{d\ell} + \int_{LJ} \vec{B} \cdot \vec{d\ell} \\ &= \underbrace{0}_{\text{car } \vec{B} \perp \vec{d\ell}} + \underbrace{0}_{\text{car } \vec{B} \perp \vec{d\ell}} \end{aligned}$$

donc : 
$$\int_{JK} \vec{B} \cdot \vec{d\ell} = - \int_{LJ} \vec{B} \cdot \vec{d\ell}$$

Les sens de parcours étant opposés, on en déduit que  $\vec{B}$  est le même sur ces deux segments,

$\Rightarrow \vec{B}$  est constant à l'intérieur du solénoïde.



**Sur le parcours MNOP :**

$$\oint_{MNOP} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 N I L \quad (MP = L)$$

d'autre part :

$$\begin{aligned} \oint_{MNOP} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} &= \int_{MN} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} + \int_{NO} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} + \int_{OP} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} + \int_{PM} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} \\ &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{= 0} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{= 0} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{= 0} \\ &\quad \vec{B} \perp d\vec{\ell} \quad \vec{B} \perp d\vec{\ell} \quad \vec{B}_{\text{ext}} = \vec{0} \end{aligned}$$

donc : 
$$\oint_{MNOP} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \int_{NO} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = B \cdot L$$

Finalement, nous avons montré que le champ à l'intérieur d'un solénoïde rectiligne infini parcouru par un courant  $I$  est constant et vaut :

$$B = \mu_0 N I \quad N : \text{nombre de spires/unité de longueur}$$

### 6.4.6 Expression locale du théorème d'Ampère

Le théorème d'Ampère peut s'exprimer sous une forme locale en faisant intervenir le théorème de Stokes :

$$\oint_C \vec{X} \cdot d\vec{\ell} = \iint_S (\overrightarrow{\text{rot}} \vec{X}) \cdot d\vec{S}$$

où  $S$  est une surface s'appuyant sur le contour fermé  $C$ .

Dans notre cas,

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \iint_S (\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B}) \cdot d\vec{S} = \mu_0 I$$

avec 
$$I = \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

d'où : 
$$\iint_S (\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} - \mu_0 \vec{j}) \cdot d\vec{S} = 0$$

d'où l'expression locale du théorème d'Ampère :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

Cette équation est une forme simplifiée de l'équation de Maxwell – Ampère générale :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 (\vec{j} + \vec{j}_D)$$

où  $\vec{j}_D = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$  est le courant de déplacement